EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

# Alberti
# Beckers
# Kuipers

februari
2004/nr.5
jaargang 79

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren


Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394



Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Rinus Roelofs, Hengelo
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 42,50
Studentleden: € 22,50
Gepensioneerden: € 27,50
Leden van de VVWL: € 27,50
Lidmaatschap zonder Euclides: € 27,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 47,50
Instituten en scholen: € 127,50
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Willem Maas
Molenveld 104, 2490 Balen, België
e-mail: w.maas@nvvw.nl
tel. vanuit Nederland: 003214814527
fax: 003214813753

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

5

februari 2004 JAARGANG 79

# INHOUD


213
Van de redactietafel
[Marja Bos]

214
Perspectiefregels volgens Leon Battista Alberti
[Hans de Rijk]

218
Nederland aardappelland
[Heleen Verhage]

222
Wiskunde en onderwijs, een wankel evenwicht
[Ed de Moor]

227
Prijsuitreiking Wiskunde Olympiade 2003
[Bram van Asch]

228
Pensioen voor Wim Kuipers / interview
[Gert de Kleuver]

230
Wiskunde door het jaar heen
[Rob van Oord]

235
Het kanon en de afgeleide
[Kees Alkemade]

236
Klassikaal
[Dick Klingens]

237
Verschenen

238
Re:cursief – Kaartspelletje
[Rob Bosch]

240
40 jaar geleden
[Martinus van Hoorn]

242
Gesprekken met Sjaak (3)
[Jan van den Brink]

244
90 minuten actief?
[Bert Swinkels]

245
De veranderende rol van de leraar
[Leo Prick]

249
Van de bestuurstafel
[Wim Kuipers]

250
Recreatie
[Frits Göbel]

252
Servicepagina


Aan dit nummer werkte verder mee:
Sam de Zoete.

# Van de redactietafel

[ Marja Bos ]

## Voorplaat

*'Klein Figure 8'* is de naam die Rinus Roelofs meegaf aan zijn ontwerp voor de omslag van dit nummer van Euclides. Deze torusvorm is een variant op de bekende 'fles van Klein', een zelfdoorsnijdend oppervlak met de bijzondere topologische eigenschap dat de binnenkant samenvalt met de buitenkant. Het ontwerp van Roelofs heeft een doorsnede in de vorm van een acht. Doordat de acht een halve slag maakt, komt het bovenste rondje van de acht uit op het onderste rondje. Hierdoor ontstaat een eenzijdig oppervlak, net als bij de oorspronkelijke fles van Klein.

## Tweede fase; februari-akkoord

Voor al diegenen onder u die *niet* rechtstreeks betrokken zijn bij het wiskunde-onderwijs in de Tweede fase, worden de stukjes op deze pagina waarschijnlijk wel een beetje vervelend... In bijna elk nummer begon ik er immers weer over: de nieuwste ontwikkelingen rond de ministeriële aanpassingsplannen voor de Tweede fase. Maar ja, steeds was er wel weer iets anders te melden.

- Zo was er bijvoorbeeld in de nota 'Ruimte laten en keuzes bieden' (januari 2003) sprake van twee nieuwe vwo-NT-keuzevakken: voortgezette wiskunde en voortgezette natuurwetenschappen. In de juli-voorstellen verdween voortgezette wiskunde van het toneel, in de decembervoorstellen werd 'voortgezette wis- en natuurwetenschappen' opgevoerd als mogelijk profielkeuzevak voor zowel NG (Natuur en Gezondheid) als NT (Natuur en Techniek), en op 4 februari jl. werd uiteindelijk met de vaste kamercommissie overeengekomen, dat er een geïntegreerd modulair bètavak ontwikkeld wordt dat misschien op termijn als vierde profielvak voor NT zou kunnen fungeren. (Dat biedt overigens wellicht nog enig perspectief.)
- Daarnaast wisselde de positie van *natuurkunde*: in de voorstellen van januari 2003 was dit vak plotseling uit het profiel NG verdwenen, in juli keerde het er weer in terug, maar in de voorstellen van 4 december en aansluitend het akkoord van 4 februari werd natuurkunde toch weer uit het profiel NG weggehaald. (Vwo-gediplomeerden mogen dus straks bijvoorbeeld aan een geneeskundestudie beginnen met hun natuurkundekennis op derdeklasniveau, want elke opleiding moet toegankelijk zijn vanuit tenminste één van de profielen zonder dat er aanvullende vak-eisen gesteld worden.)
- Onveranderd bleef echter de ingrijpende reductie van wiskunde in de havo/vwo-N-profielen en de enigszins raadselachtige uitbreiding ervan in het vwo-CM-profiel. Die uitbreiding van het huidige wiskunde A1 voor vwo wekte vooral *verbazing*, de reductie van wiskunde in de N-profielen is nog steeds volstrekt *onbegrijpelijk*.

Een inhoudelijke discussie bleek uitgesloten. De voorstellen vloeiden bijvoorbeeld helemaal niet logisch voort uit de eigen uitgangspunten van het ministerie, en de beslissingen zullen leiden tot tal van principiële en praktische problemen, maar minister Van der Hoeven weigert in te gaan op inhoudelijke argumenten. Zij interpreteert elke kanttekening of vraag vanuit de bèta-hoek als lobby-werk, en aldus plaatst ze leerlingen, docenten, leerplanontwikkelaars en vervolg-opleidingen in een onmogelijke positie.
Haar opvatting over wiskundeonderwijs is kennelijk: *hoe minder hoe beter – behalve voor de CM-leerling.*

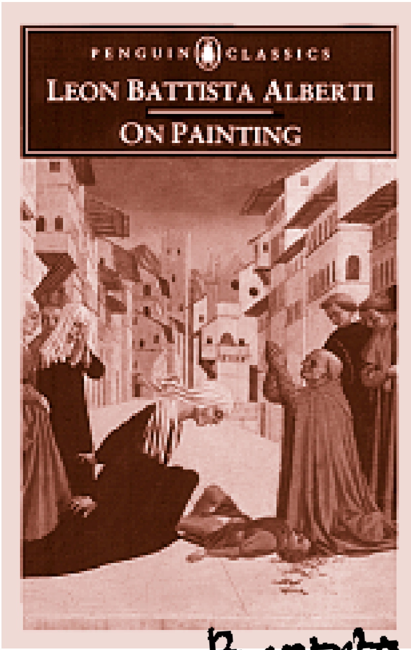
## Profielcommissies

Op 4 februari jl. is ook besloten tot instelling van twee profielcommissies, één voor de maatschappij- en één voor de natuurprofielen. Die commissies moeten de minister nog dit kalenderjaar adviseren over inhoud en samenhang van de profiel-vakken en over de doorstroming naar het hoger onderwijs.
Voor uitgebreidere informatie rond het 'februari-akkoord' verwijs ik u naar www.tweedefase-loket.nl.

# PERSPECTIEFREGELS VOLGENS LEON BATTISTA ALBERTI

**Perspectiefconstructies lijken vaak geheimzinnig en moeilijk. Met een paar eenvoudige regeltjes, opgesteld in 1435, konden en kunnen schilders echter uitstekend uit de voeten.**

[ Hans de Rijk ]




### Aanleiding

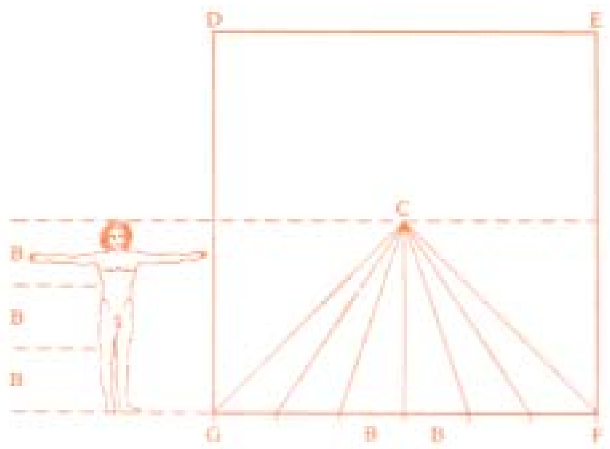
Dit stuk is ontstaan uit de onvrede die ik heb over de steeds weer opduikende verhalen van het gebruik van de camera obscura door schilders vanaf de 17e eeuw. Niet alleen omdat dit onrecht doet aan hun talent als schilder, maar vooral omdat het zo'n onzin is. Met behulp van de summiere beschrijving van Leon Battista Alberti (1404-1472) over perspectief kon elke schilder uit de voeten. Voor een collega die dat niet wilde geloven schreef ik dit artikeltje, eerst met de volledige letterlijke tekst van Alberti, maar die bleek toch niet zo toegankelijk. Ik heb Alberti's tekst daarom sterk ingekort en wat overzichtelijker gemaakt.

### Uitvinder van de perspectief

De eerste verhandeling over perspectief, *De Pictura*, werd in 1435 in het Latijn geschreven door Leon Battista Alberti. Die verhandeling vormt een klein deel van zijn manuscript over het schilderen. Een jaar later had hij het manuscript in het Italiaans herschreven. Was hij ook de uitvinder van de perspectief? Dat valt moeilijk te zeggen, omdat er duidelijk enige fasen aan te wijzen zijn in de manier om de ruimte uit te beelden, die wij tegenwoordig samenvatten onder de naam *perspectivische afbeelding*.
In de meeste boeken over kunsthistorie wordt de uitvinding van de perspectief toegeschreven aan Alberti's tijdgenoot Brunelleschi, eveneens afkomstig uit Florence. Mijns inziens is dit echter een misinterpretatie van een aantal schriftelijke bronnen.

### Homo universalis

Alberti werd in 1404 in Genua geboren, de plaats waarnaar zijn Florentijnse ouders gevlucht waren. Pas in 1428 kon de familie terugkeren naar Florence. Alberti kreeg een uitstekende opleiding aan verschillende universiteiten en groeide uit tot een 'homo universalis'. Hij was niet geniaal zoals Leonardo da Vinci (1452-1519), die van een volgende generatie was, maar wel veelzijdiger. Hij schreef letterlijk over van alles en nog wat. Er zijn circa 25 geschriften van hem bekend over de meest uiteenlopende onderwerpen.




**Perspectiefconstructie, eerste stap: evenwijdige lijnen getrokken naar het centrale punt.**
***DEFG*****: begrenzing van de afbeelding, oftewel het venster.**
***B*****: verdeling in *braccio's* op de schaal van de afbeelding, te weten een derde van de lengte van de mens.**
**De verdeelpunten op *FG* worden verbonden met het centrale punt *C*.**

**FIGUUR 1**

Helaas zijn geen schilderijen van hem bewaard gebleven, maar wel zijn werk als architect, waarvan enkele grote kerken in onder meer Rimini, Florence en Mantua getuigen.

## Tekstbewerking

Alberti's verhandeling over perspectief, *De Pictura* uit 1435 en de Italiaanse bewerking *Della Pittura* uit 1436, hebben grote invloed gehad op zijn tijdgenoten, en nog lang daarna. In onderstaande tekst heb ik daaruit alleen díe fragmenten gekozen waarin Alberti beschrijft hoe men een correcte perspectivische constructie maakt. Om de leesbaarheid te vergroten en daarmee Alberti's  aanpak toegankelijker te maken heb ik de tekst hier en daar ingekort en enigszins aangepast. Deze bewerking heb ik gebaseerd op de Engelse vertaling van Cecil Grayson[1].
Omdat Alberti in zijn verhandeling geen figuren gebruikt, zijn de figuren op deze pagina's over-genomen uit veel latere gedrukte exemplaren. Ze geven een ietwat vertekend beeld van wat Alberti bedoelde. Zo is het vertepunt altijd in het midden van de horizon getekend, terwijl Alberti de keuze van dit vertepunt geheel vrij laat.

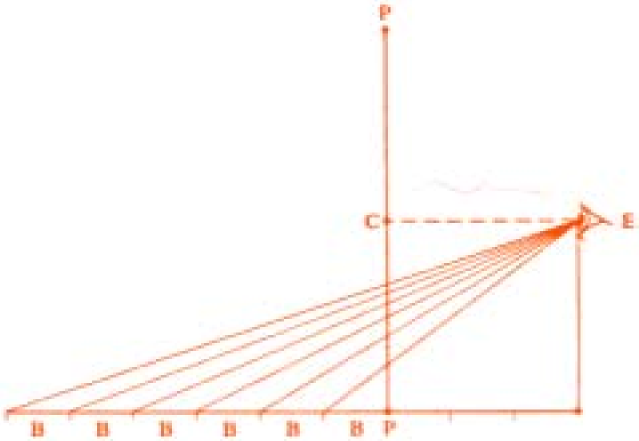
## Vier fragmenten uit Alberti's perspectiefleer

### *Fragment I*

Ik zal u vertellen wat ik doe als schilder.
Eerst teken ik op het vlak waarop ik ga schilderen een rechthoek van de gewenste grootte. Die beschouw ik als een open raam waardoor het tafereel dat geschilderd moet worden te zien is, en ik bepaal hoe groot ik de mensfiguur op het schilderij wil afbeelden (zie figuur 1). Ik verdeel de lengte van deze man in drie delen, elk overeenkomend met de maat die men een 'braccio' noemt[2]. Deze maat pas ik net zo vaak af op de grondlijn van mijn rechthoek tot het niet meer gaat. De grondlijn komt overeen met de dichtst-bijzijnde evenwijdige lijn op het plaveisel.
Daarna kies ik een willekeurig punt in de rechthoek; dit is het centrale punt. De aangewezen plaats voor dit punt ligt niet hoger dan de lengte van de man die op het schilderij afgebeeld moet worden, want op deze manier zullen zowel de toeschouwers als de objecten op het schilderij op hetzelfde vlak lijken te staan (zie figuur 1).
Vanuit het centrale punt trek ik lijnen naar elk punt van de verdeling op de grondlijn. Deze lijnen tonen mij hoe de opeenvolgende dwarslijnen visueel *(van lengte; toevoeging HdR)* veranderen tot op een bijna oneindige afstand.

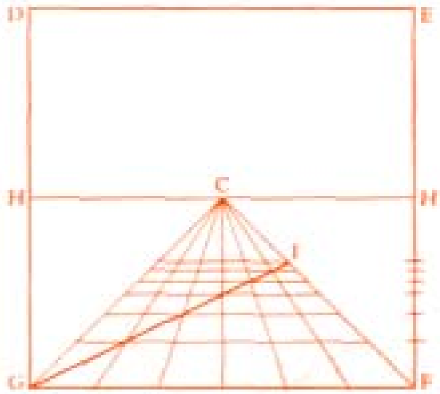
### *Fragment II*

Wat betreft de grootte van de opeenvolgende stukken van de dwarslijnen gebruik ik de volgende methode. Op een tekenblad teken ik een *(horizontale; HdR)* rechte lijn en verdeel die op dezelfde manier als de grondlijn van de rechthoek (zie figuur 2). Daarna zet ik een punt boven het eind van deze lijn op dezelfde




**Perspectiefconstructie, tweede stap: bepaling van de horizontale verdeling op de doorsnede.**
***B*: verdeling in braccio's op het plaveisel.**
***PP*: doorsnede oftewel schildervlak.**
***C*: het centrale punt.**
***E*: het oog op drie braccia afstand van de doorsnede. De kijkafstand *EC* is gelijk aan de halve breedte van het schilderij en de zichthoek is 90° (dat is de kortste redelijke afstand vóór sterke vervormingen optreden).**

**FIGUUR 2**




**Perspectiefconstructie, derde stap: voltooiing van het in vierkanten opgedeelde plaveisel.**
***DEFG* is het schilderij, *C* het centrale punt, *HH* de horizon. De intervallen op de doorsnede in figuur 2 zijn afgezet op *HF* en de opeenvolgende horizontale lijnen van het plaveisel zijn getrokken op de corresponderende hoogten. *GI* is een diagonaal door de vierkanten, getrokken ter controle van de nauwkeurigheid van de constructie.**

**FIGUUR 3**

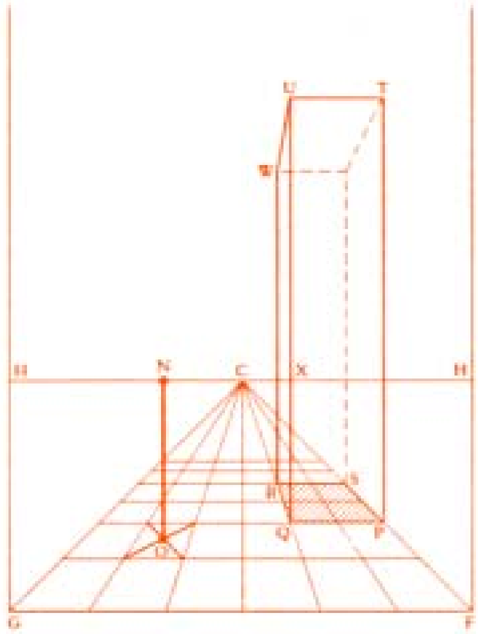
hoogte als het centrale punt op de rechthoek. Vanuit dit punt trek ik lijnen naar de verdeelpunten op de grondlijn.
Dan bepaal ik de door mij gewenste afstand tussen het oog van de toeschouwer en het schilderij door een loodlijn op de gewenste plaats te tekenen. De snijpunten van deze loodlijn met de andere lijnen geven de afstanden *(op het schilderij; HdR)* van de evenwijdige lijnen die op het plaveisel even ver van elkaar liggen. Op deze manier heb ik alle evenwijdige lijnen van het plaveisel getekend (zie figuur 3).
Een controle of ze correct getekend zijn voeren we uit door een diagonaal door de vierkanten te trekken. Als deze alle hoekpunten snijdt is dat bewijs geleverd.
Als ik dit alles zorgvuldig gedaan heb, teken ik een dwarslijn door het centrale punt die de twee opstaande zijden snijdt *(de horizon; HdR)*. Deze lijn is voor mij een grens waarboven niets uitsteekt dat niet hoger ligt dan het oog van de beschouwer.

## *Fragment III*

Loodrecht op het plaveisel, dat aldus is opgedeeld door evenwijdige lijnen, moeten muren en andere, vergelijkbare, vlakken geconstrueerd worden. Ik zal in het kort uitleggen hoe ik dit doe.
Ik begin onderaan en teken de lengte en de breedte van de muren op het plaveisel. De waarneming leert, dat nooit meer dan twee aangrenzende vlakken van een rechthoekig lichaam tegelijk gezien kunnen worden. Dus als ik de fundering van de muren teken, zorg ik er altijd voor, alleen de zichtbare kanten aan te geven.
Voorts begin ik altijd met de dichtstbijzijnde vlakken en ik bepaal de gewenste lengte en breedte op de evenwijdige lijnen van het plaveisel, want ik kan zoveel evenwijdige lijnen trekken als ik maar wil. Zo vind ik *(bijvoorbeeld; HdR)* het midden van de evenwijdige lijnen via het snijpunt van de twee diagonalen, aangezien het snijpunt van de twee diagonalen het midden van een vierhoek vastlegt (zie figuur 4).
Zo kan ik gemakkelijk uit de schaalverdeling van de evenwijdige lijnen de lengte en breedte tekenen van de muren die uit de grond oprijzen.
Daarna kan ik zonder veel moeite de hoogte van de vlakken bepalen, want een grootte behoudt zijn proportie over de gehele hoogte *(de hoogtematen zijn namelijk gelijk aan de maten op het plaveisel ter plaatse; HdR)*, dus als men de hoogte van de bovenkant vier maal de hoogte van een mens *(ter plaatse; HdR)* op de afbeelding wil maken... *(moet men de afstand van het plaveisel tot de horizon drie maal verlengen; HdR)*.
Zo kunnen we nauwkeurig alle *(verticale)* rechthoekige vlakken tekenen.

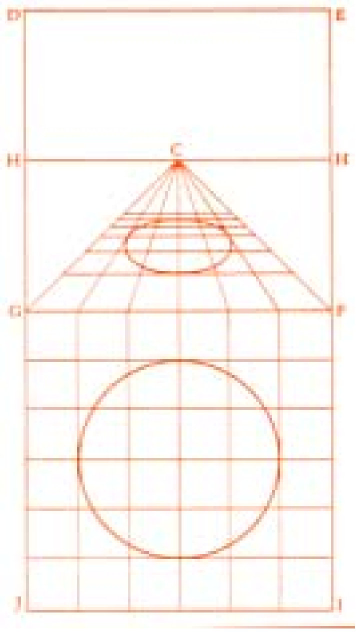
## *Fragment IV*

Rest ons nog uit te leggen hoe men cirkelvormige oppervlakken in perspectief kan tekenen. Dit doen we met behulp van rechtlijnige vlakken.



**Voorbeelden van de constructie op schaal, van vormen op het plaveisel.**
***O*** **ligt op een afstand op 1,5 braccia op de afbeelding, bepaald door de diagonalen van een vierkant op de tweede rij.** ***ON*** **= 3 braccia.**
*PQRS*: **vlak van een object op een grondvlak van twee (*bij twee; HdR*) vierkante braccia.**
***QX*** **= 3 braccia,** ***QU*** **= 9 braccia.**
***TUW***: **de top van de zichtbare vlakken van het object.**

**FIGUUR 4**



**Constructie van een cirkel in perspectief.**
**In het vierkant** ***GFIJ*** **wordt een cirkel getekend en de snijpunten van de cirkel met het rooster worden gemerkt. Het vierkante oppervlak wordt in perspectief getekend; snijpunten die equivalent zijn met die op het oorspronkelijke vierkant worden gemerkt op het perspectivische rooster en met elkaar verbonden om een cirkel te vormen.**

**FIGUUR 5**

Ik teken een vierkant op een tekenbord en verdeel de zijden in dezelfde delen als de basislijn van de rechthoek. Dan vul ik het vlak met kleine vierkanten. Daarin teken ik een cirkel van de door mij gewenste grootte, zodanig dat de cirkel en de evenwijdige lijnen elkaar snijden (zie figuur 5).
Ik bepaal alle snijpunten nauwkeurig en markeer deze posities op de evenwijdige lijnen op het plaveisel. Maar omdat het een immens werk zou zijn *(alle punten van de cirkel zo te bewerken; HdR)* gebruik ik maar acht of een ander geschikt aantal evenwijdige lijnen. Dan gebruik ik mijn gevoel om de omtrek van de cirkel *(in perspectief; HdR)* in overeenstemming te brengen met deze snijpunten.
We hebben hiermee uitgelegd hoe de grotere *(verticale)* rechthoekige vlakken en de cirkelvormige getekend moeten worden met behulp van evenwijdige lijnen.

## Bruikbaarheid

Alberti's verhandeling is correct, duidelijk en zonder franje. Voor de praktijk van het perspectivisch tekenen was ze vele eeuwen (ook nu nog) zeer bruikbaar.
Het lijkt mij interessant om leerlingen van de laagste klassen deze regels uit te leggen en daarna een opdracht te geven om bijvoorbeeld een kamerinterieur met een tafel of gewoon maar wat blokken van verschillende hoogte op de vloer te tekenen, en ze daarna aan te moedigen zelf met de regels te spelen.

*Noten*

*[1] Leon Battista Alberti: 'On Painting', translated by Cecil Grayson with an introduction and notes by Martin Kemp. Penguin Classics 1991.*
*De figuren 1 t/m 5 zijn eveneens afkomstig uit deze publicatie.*
*[2] 'Braccio' betekent letterlijk 'arm'; vergelijk ons woord 'el'.*

*Over de auteur*

*Hans de Rijk (e-mailadres: bruno_ernst@introweb.nl) was leraar wis- en natuurkunde, oprichter van Pythagoras, het jongerentijdschrift voor wiskunde, en als medeoprichter nog steeds actief betrokken bij Ars et Mathesis. Hij publiceerde over diverse onderwerpen. Vooral bekend zijn De Rijks vele publicaties over Escher, onder zijn pseudoniem Bruno Ernst.*
*Perspectief is één van zijn vele andere interesses; hij houdt zich daarmee al zo'n 20 jaar bezig. Hij heeft inmiddels een grote verzameling perspectiefboeken uit de loop der eeuwen opgebouwd, en heeft teksten klaar die kunnen dienen als basis voor een boek over perspectief.*

# NEDERLAND AARDAPPELLAND

## Wiskunde Scholen Prijs 2003, aflevering 4.
## Praktische opdracht aardappels meten voor klas 2.

[ Heleen Verhage ]

De Wiskunde Scholen Prijs is ontstaan uit het WisKids project. Doel van WisKids is het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongens en meisjes van tien jaar en ouder. Tevens wil WisKids het imago van de wiskunde verbeteren. Het project WisKids is formeel beëindigd, maar onderdelen daaruit, waaronder de Wiskunde Scholen Prijs, blijven bestaan.
Voor meer informatie zie *www.fi.uu.nl/wiskids*

### Inleiding

Vlak voor de zomervakantie reis ik af naar de locatie Oscar Romero van de SG Tabor in Hoorn. Deze school heeft in de categorie bavo van de Wiskunde Scholen Prijs 2003 een gedeelde prijs[1] gewonnen met de inzending 'Nederland = Aardappelland'. De prijsuitreiking zal plaatsvinden tijdens een sectievergadering van de voltallige wiskundesectie, die uit twaalf personen bestaat.
Voorafgaand aan de prijsuitreiking heb ik een uitvoerig gesprek met Adri Knop en Anja Moeijes, de drijvende krachten achter het project. Zij vertellen enthousiast over het aardappelproject en de ontstaansgeschiedenis daarvan.

### Praktische opdracht voor klas 2

Kort gezegd is 'Nederland=Aardappelland' een praktische opdracht voor de tweede klas. Het doel van de opdracht is om afmetingen, vorm, volume en gewicht van aardappelen te onderzoeken en in het bijzonder om na te gaan of er een verband is tussen het volume en het gewicht van een aardappel.
Deze praktische opdracht wordt inmiddels al zo'n jaar of vier in alle tweede klassen gedaan, zowel op vmbo als op havo/vwo. Oorspronkelijk was het idee van aardappels meten afkomstig uit de bundel bavo-toetsen die in het schooljaar 1999-2000 door het CITO naar alle scholen voor voortgezet onderwijs is gestuurd. Deze bundel bevat toetsen voor alle bavo-vakken waaronder wiskunde. Dat jaar bestond de wiskundetoets uit een theoretische en een praktische toets. Het leek de wiskundesectie van het Oscar Romero leuk om eens niet de theoretische toets maar de praktische toets (= aardappelopdracht) af te nemen.
In eerste instantie mislukte de opdracht in de klas, maar Adri en Anja zagen er toch wel wat in en gaven niet meteen op. Probleem was onder andere dat de leerlingen met de hand veertig puntjes in een puntenwolk moesten zetten. Dat was zeer tijdrovend en bovendien was de correctie een ramp. VU-Stat bracht uitkomst. Het mes snijdt aan twee kanten: naast tijdwinst bij het plotten van de data is er meteen een zinvolle invulling gegeven aan het werken met VU-Stat. Want zomaar wat gegeven data analyseren, zonder aanleiding of onderzoeksvraag, dat is niet bijster interessant en wordt in de praktijk gauw overgeslagen op school.
(Terzijde: de puntenwolk is geen onderdeel van de verplichte stof voor basisvorming. Eigenlijk is dit jammer, want de puntenwolk is juist een heel krachtig hulpmiddel uit de beschrijvende statistiek en vraagt nauwelijks voorkennis.)

### Indeling van de lessen

Aldus ontstond er een praktische opdracht die in totaal drie lessen beslaat:
- les 1: leren werken met VU-Stat
- les 2: practicum meten en wegen van aardappels
- les 3: verwerking van gegevens met VU-Stat.

Om tijd te maken voor deze opdracht worden delen van het statistiekhoofdstuk uit het boek en de schriftelijke toets geschrapt.

Les 1 bestaat uit een computerpracticum uit het boek met VU-Stat, waarvoor dus een computerlokaal geregeld moet worden. De antwoorden worden door de leerlingen ingevuld op een stencil dat als handelingsdeel gepresenteerd wordt. Op die manier maken de leerlingen, naast de praktische opdracht, ook al in klas 2 kennis met het begrip handelingsdeel.

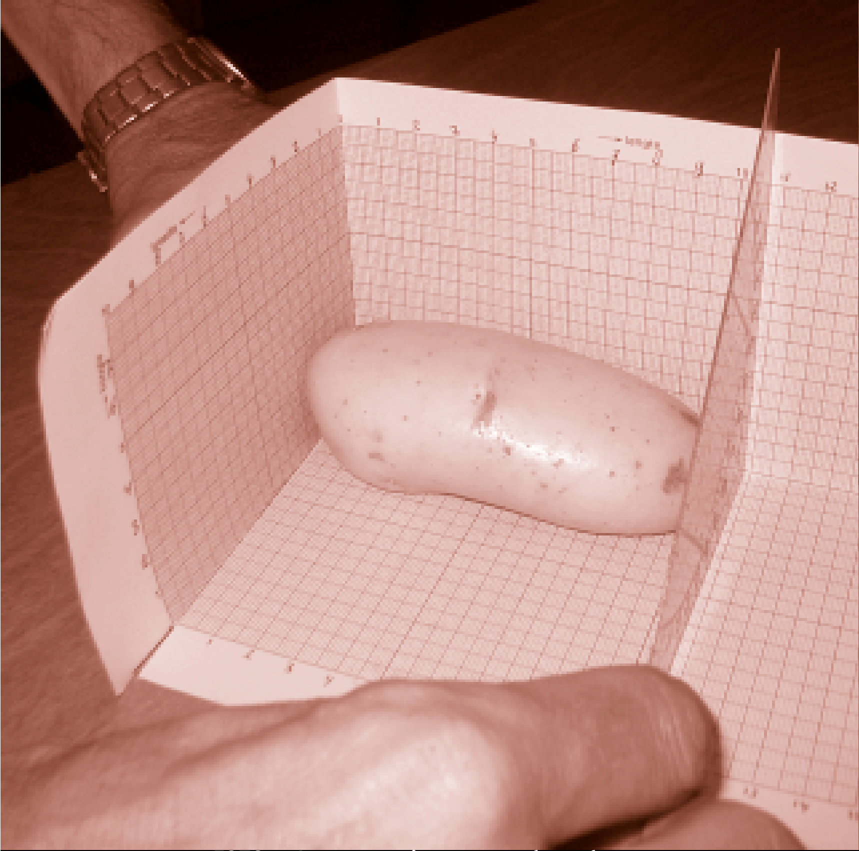


**FOTO 1 Lengtemeting van aardappel met drievlakshoek en geodriehoek**

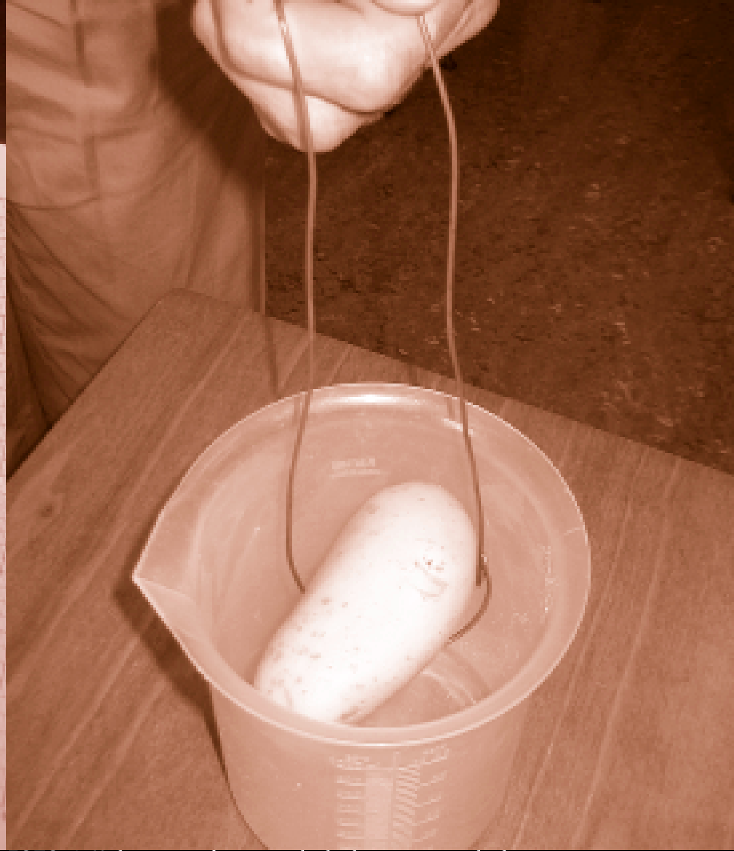


**FOTO 2 Volumemeting met behulp van maatbeker en ophaler**

Les 2 is organisatorisch het meest bewerkelijk, mede omdat er nogal wat materialen voor nodig zijn, waaronder diverse meetinstrumenten. Hoe meet je bijvoorbeeld handig de lengte van een aardappel? Het antwoord blijkt uit foto 1: met een drievlakshoek en een geodriehoek.
En hoe meet je het volume van een aardappel? Juist, onderdompelen in water. Maar dan wel zo, dat daarbij geen water rondspettert (zie foto 2). In de loop van het gesprek blijkt dat Adri behalve docent wiskunde ook techniekdocent is. Die combinatie komt hier goed van pas.
De gewichtsbepaling tenslotte is relatief simpel: dat gaat gewoon op een keukenweegschaal (zie foto 3). Toch hadden Adri en Anja ook daar weer oog voor detail: ze prefereren een klassieke weegschaal met afleesstreepjes boven een digitale, omdat er daardoor ook aandacht is voor de nauwkeurigheid van aflezen. Bij een digitale weegschaal gaat dat aspect verloren. Op foto 3 is tevens te zien dat er een punaise in de aardappel geprikt is. Ook hier hoort een verhaal bij: de leerlingen prikken gekleurde spelden of punaises in de aardappels, om de verschillende exemplaren goed uit elkaar te kunnen houden. Al dit soort praktische details zijn in de loop der jaren bedacht en uitgekristalliseerd.
De leerlingen noteren hun meetgegevens op diverse werkbladen die bij het meetpracticum horen.

In les 3 vindt de dataverwerking met VU-Stat plaats. Om praktische redenen werken de leerlingen met een bestand dat grotendeels gegeven is en dat ze moeten aanvullen met de data van vier aardappels. De leerlingen onderzoeken onder andere het verband tussen gewicht en volume. Hiervoor maken ze kennis met het idee van een puntenwolk. VU-Stat tekent daar een rechte lijn doorheen. Het is aan de leerlingen om te controleren of de formule die VU-Stat daarvoor geeft (van het type $y = a + bx$) redelijk klopt, en vanaf welk volume zo ongeveer. Zo maken de leerlingen impliciet kennis met het principe van de regressie-rekening, zonder dat dit woord genoemd wordt overigens.

## Zompig?

Al met al zijn Adri en Anja heel tevreden over hoe de praktische opdracht nu in elkaar zit. Ze verwachten niet er nog veel aan te moeten sleutelen: zoals die er nu ligt, loopt het gewoon.
In totaal zijn er vijf collega's die een tweede klas hebben en dus de aardappelopdracht uitvoeren. Natuurlijk wordt er wel eens gesputterd: 'geen tijd voor', 'teveel gedoe'. Maar als zo'n opdracht eenmaal goed uitgekristalliseerd is, valt de hoeveelheid werk in feite ook wel weer mee. Wel is het zo dat de aardappelen tijdens de duur van het project steeds zompiger worden en dat er uiteraard elk jaar nieuwe aardappels gekocht moeten worden. Wat dat betreft zouden ze de leerlingen beter met iets anders kunnen laten werken…
De inspanningen van Adri en Anja worden zeker beloond, want het bereik van de aardappelopdracht is inmiddels groter dan de eigen school. De opdracht is ook terecht gekomen in de cursus *Praktische Opdrachten in het VMBO* van het APS en wordt daar als voorbeeld gebruikt van een Good Practice.

## De prijsuitreiking

Na dit uitvoerige gesprek met Adri en Anja woon ik een deel van de sectievergadering bij. Die gaat over de

FOTO 3 Aardappel met rode punaise op weegschaal

FOTO 4 De wiskundesectie van Oscar Romero met de benodigdheden van het aardappelproject

bekende zaken: afspraken maken voor het nieuwe cursusjaar. Hoogtepunt van de vergadering is het moment dat er een fotograaf van het Noordhollands Dagblad langs komt, ter gelegenheid van de prijsuitreiking. Razendsnel maken Adri en Anja een leuke opstelling van alle benodigdheden van het aardappelproject, compleet met een zak nieuwe aardappelen. De hele sectie poseert voor de fotograaf, die de regie volledig heeft overgenomen van de sectievoorzitter.
Dit is een mooi moment om de sectie kort toe te spreken en de prijs uit te reiken, temeer daar er ook iemand van de schoolleiding is gearriveerd. Laat de schoolleiding ook maar weten dat de wiskundesectie leuke dingen doet!

Bij de prijsuitreiking hoort ook het voorlezen van het juryoordeel over dit project. Het luidt als volgt:
*Dit project is een leuk voorbeeld van wiskunde in een laboratorium-setting.*
*Het is zeker een aanvulling van het wiskundeonderwijs om via een andere context te komen tot het leren verwerken van statistische gegevens en kan delen van het reguliere programma vervangen. De praktische opdracht is voor alle leerlingen uitvoerbaar en is een verrijking van een duidelijk aanwijsbaar stuk leerstof.*
*Het project is heel nauwgezet en volledig uitgewerkt, waardoor het gemakkelijk overdraagbaar is naar andere scholen. In plaats van aardappels kan er uiteraard ook iets anders gemeten worden dat goed past bij de regio van de school.*
*Als minpunt noemt de jury dat de mogelijkheid tot vakkenintegratie niet is benut. Het is jammer dat niet naar aansluiting is gezocht bij practicumwerk dat reeds bij andere vakken wordt uitgevoerd. Een ander punt van kritiek is dat er vooral veel doewerk is, en minder denkwerk. Tenslotte vraagt de jury zich af hoe de beoordeling van het leerlingenwerk is verlopen. Het gaat hier immers om een toetsvervangende opdracht.*

Gevraagd om een reactie op het juryrapport, zegt Adri: ‘De kritiek van de jury op het ontbreken van vakkenintegratie deel ik niet. De gebruikte onderdompelingmethode, het rekenen met de formule dichtheid = massa : volume en het aflezen van meetinstrumenten (schaalverdeling, parallax) zijn vaardigheden uit de natuurkunde en biologie. Er is dus wel degelijk gekeken naar aansluiting bij het practicum-werk van andere vakken.
Dat de jury van mening is dat het meer doewerk dan denkwerk is, ben ik met ze eens. Ik vind dat in het licht van het totale wiskundeprogramma in klas 2 geen enkel bezwaar. Zeker binnen het vmbo worden leerlingen aangesproken op andere vaardigheden dan waarop normaal een beroep gedaan wordt.
En voor wat betreft de toetsing: in de kantlijn op de diverse werkbladen staat een puntenverdeling aangegeven, hierbij wordt zowel de meetopdracht (les 2) als de verwerkingsopdracht (les 3) beoordeeld met een cijfer. De handelingsopdracht (les 1) wordt beoordeeld met een voldoende of goed. Voor de collega’s is een correctiemodel voor alle drie de onderdelen beschikbaar.’

## Nieuwe projecten

Voor Adri en Anja is het aardappelproject eigenlijk klaar; er valt wat hun betreft niets meer aan te verbeteren. Zij zijn bezig aan diverse nieuwe projecten, ook voor andere leerjaren. Zo staan er een Escher-project, iets over veters knopen, iets over het vergelijken van prijzen (gekoppeld aan het thema klassenfeest) op stapel. Het streven is in elke klas

**FOTO 5 De prijsuitreiking op Oscar Romero**

tenminste drie opdrachten per jaar te doen, in elke rapportperiode één. Ze stoppen hier duidelijk heel wat extra tijd in. Adri heeft als voordeel dat hij tevens schooldecaan is, waardoor hij zijn tijd flexibel kan indelen. Anja werkt 'maar' drie dagen en stopt veel vrije tijd in het maken en bewerken van de opdrachten. Vooral in de winter, als het toch geen mooi weer is, vindt ze dat leuk om te doen.

## Vernieuwing Basisvorming

Dit artikel is vooral een dicht-bij-huis verhaal geworden: het gaat over een voorbeeld van goed onderwijs op een concrete school. Dat is ook precies waar de Wiskunde Scholen Prijs zich op richt.
Toch valt er altijd wel een relatie te leggen met de actuele ontwikkelingen. Voorjaar 2004 zal het werk van de Taakgroep Vernieuwing Basisvorming in de belangstelling staan, omdat deze groep vóór de zomer met haar eindrapport zal komen.
Mijn inschatting is dat de Taakgroep heel blij mag zijn met scholen als deze. Ze laten zien dat docenten heel goed in staat zijn om het onderwijs naar hun eigen hand te zetten. En dat is precies wat de Taakgroep wil met de door haar voorgestelde reductie van het aantal kerndoelen (zie *www.vernieuwingbasisvorming.nl*) en met het denken in *scenario's* in plaats van het keurslijf van 50 minuten onderwijs.
De ideeën zijn aansprekend, maar het grote probleem zal ontstaan bij de *implementatie* van deze plannen. Een serieuze implementatie zal heel veel tijd van docenten vragen. Niet iedereen werkt immers maar drie dagen betaald en ontwerpt daarnaast in de winter wiskundeonderwijs...

*Met dank aan de docenten Adri Knop en Anja Moeijes.*

## Informatie

Wie meer over dit project wil weten kan contact opnemen met Adri Knop (*a.knop@tabor.nl*) of Anja Moeijes (*anja.moeijes@freeler.nl*).
Het lesmateriaal van de opdracht is te vinden op *www.aps.nl/wiskunde/lesvoorbeelden.htm*; kies daar 'good practices'.
Over dit project is ook een workshop gegeven op de Nationale Wiskunde Dagen, NWD10, op 6 en 7 februari 2004.
Meer informatie over de Wiskunde Scholen Prijs is te vinden op *www.wiskundescholenprijs.nl*.
De sluitingsdatum voor deelname aan de Wiskunde Scholen Prijs 2004 was 15 februari 2004.

*Noot*

*[1] SG Tabor deelt de eerste prijs in de categorie basisvorming met het Pleincollege Eckart te Eindhoven. Beide scholen ontvangen € 500. De inzending van het Pleincollege Eckart is besproken in Euclides jrg. 79 nr. 3, december 2003.*

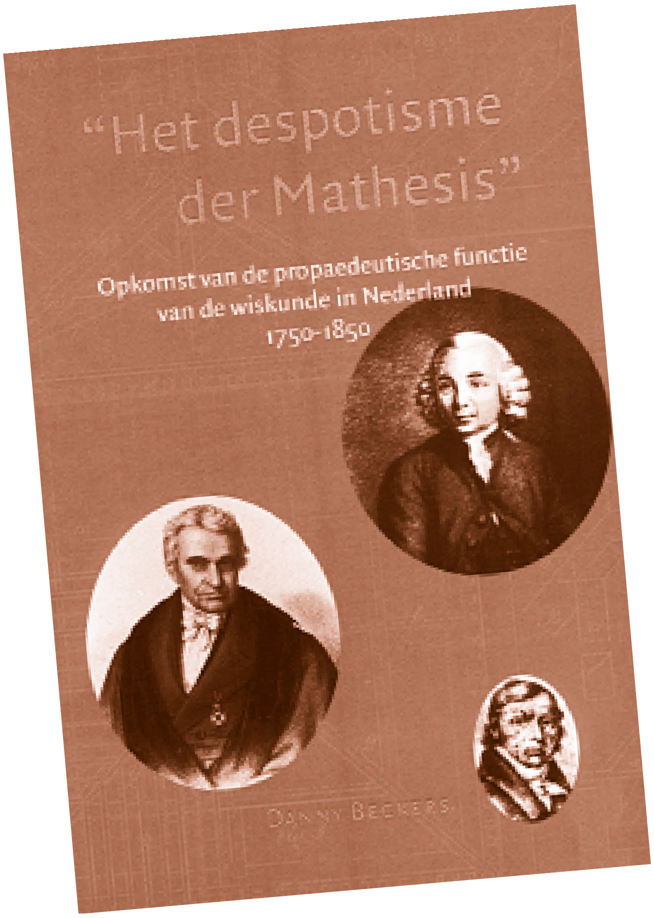
*Over de auteur*

*Heleen Verhage (e-mailadres: h.verhage@fi.uu.nl) is werkzaam bij het Freudenthal Instituut (Universiteit Utrecht). Zij was projectmanager van het WisKids-project en organisator van de Wiskunde Scholen Prijs. Vanaf 1 januari 2004 is zij Manager Beheer van het Freudenthal Instituut.*

# WISKUNDE EN ONDERWIJS, EEN WANKEL EVENWICHT

**Een bespreking van 'Het despotisme der Mathesis', het proefschrift van Danny Beckers.**

[ Ed de Moor ]



## Inleiding

Op 3 juli 2003 promoveerde Danny Beckers aan de Katholieke Universiteit Nijmegen op het proefschrift *Het despotisme der Mathesis*. Een wat cryptische, maar ook nieuwsgierig makende titel. Uit de ondertitel ‘*Opkomst van de propaedeutische functie van de wiskunde in Nederland, 1750-1850*’ wordt al wat duidelijker waarover deze studie handelt. Met dit boek is opnieuw een bijdrage aan de geschiedschrijving van de Nederlandse wiskunde en haar onderwijs geleverd en wel over een periode waarover tot nu toe weinig onderzoek was gedaan.
Er is echter meer dat dit boek zo interessant maakt. De rode draad van het verhaal is namelijk de vraag waarom wiskunde een vak van onderwijs dient te zijn. Nu behandelt de auteur dit probleem uiteraard voor de genoemde periode, maar de problematiek lijkt wel een constante in de tijd. De vraag ‘Waarom wiskunde en wat voor wiskunde?’ zien we de laatste 250 jaar telkens weer opduiken, zowel in het lager als in het hoger onderwijs.
Voor het historische relaas heeft Beckers zich niet beperkt tot één niveau of tak van onderwijs. Vrijwel alle soorten scholen en opleidingen die iets met wiskunde van doen hadden, heeft hij in het onderzoek betrokken. Deze brede aanpak brengt met zich mee dat naast de ontwikkeling van de wiskunde in Nederland, ook het onderwijs en de maatschappelijk-culturele ontwikkelingen aan de orde gesteld worden. Dit spreekt uit de titels van de vier hoofdstukken: ‘Wiskunde in Nederland’, ‘Wiskunde-onderwijs’, ‘Wiskunde en Cultuur’ en ‘Wiskunde en Samenleving’, waarop ik nu kort in zal gaan.

**FIGUUR 1**

*Tabel 2 Wiskunde en onderwijs naar sociale klasse, 1826-1863*

| Sociale klasse | Onderwijs typen | Schooltypen | Inhoud wiskunde onderwijs | Overheids controle |
|---|---|---|---|---|
| Elite | primair onderwijs | privé aan huis | onbekend | – |
| | secundair onderwijs | Latijnse scholen | cijferkunst, beginselen van algebra en meetkunde | lokaal financieel, centraal curriculair |
| | hoger onderwijs | universiteit | meetkunde en een beetje algebra voor iedereen. Meer indien gewenst | centraal: alleen financieel en in benoemingen |
| Burgerij | primair onderwijs | Fransche & Duytsche scholen soort 1 | rekenen, vormleer, soms een beetje meetkunde | – |
| | secundair onderwijs | Fransche & Duytsche scholen soort 2 | cijferkunst, soms een beetje algebra en meetkundig rekenen, al dan niet aangevuld met meetkunde | – |
| | ‘middelbaar’ beroeps-onderwijs | ‘kostscholen’ gespecialiseerd in onderwijs in zeevaartkunde koopmansrekenen, of landmeten | pakket afhankelijk van onderwijzer en doel | – |
| | | “Industrie-kollegie” (1826-1836) | beschrijvende meetkunde | initiatief |
| | ‘hoger’ beroeps onderwijs | Militaire Akademie | beginselen van algebra, (proj.&beschr.) meetkunde, beginselen van de analyse, mechanica | centraal, volledig |
| | | Akademie Delft (sinds 1843) | algebra, (proj.&beschr.) meetkunde, analyse mechanica | centraal, ‘financieel’ |
| Lagere klasse | primair onderwijs | lagere school | rekenen, soms vormleer | centraal |
| | beroeps-onderwijs | weesscholen, charitatieve instellingen | rekenen | – |

## Wiskunde in Nederland

Voor de periode 1750-1800 worden door Beckers twee soorten wiskunde onderscheiden: *burgerlijke wiskunde* en *academische wiskunde*. De ‘burgerlijke’ categorie werd bepaald door de praktische beroepen van landmeters, zeevaarders en boekhouders. De aard van het ‘burgerlijke’ vak werd gekenmerkt door regeltjes en algoritmiek, zoals bekend uit het beroemde rekenboek van Willem Bartjens uit de zeventiende eeuw. De ‘academische wiskunde’ van de universiteiten werd onderscheiden naar ‘Mathesis Applicata’ en ‘Mathesis Pura’ (toegepaste en zuivere wiskunde). De zuivere wiskunde stond als vanouds in het teken van het logisch-deductieve denken, zoals Euclides had ingezet met zijn *Elementen*.
Na 1800 groeiden de burgerlijke en academische wiskunde steeds meer naar elkaar toe, hetgeen vooral tot uiting kwam in het ontstaan van wiskundige genootschappen, waarvan het nog immer actieve Wiskundig Genootschap - thans zelfs Koninklijk - het meest bekend is. De bekendste hoogleraren uit die periode waren Jan Hendrik van Swinden, Jacob de Gelder en Rehuel Lobatto.
In de negentiende eeuw, maar ook al daarvoor, vond er internationaal een explosie binnen de wetenschappelijke wiskunde plaats in West-Europa, met name in Duitsland en Frankrijk. Internationaal stelde Nederland in die tijd nauwelijks iets voor. Toch doet Beckers moeite onze nationale trots hoog te houden door te verwijzen naar een enkel artikel van Jacob de Gelder over negatieve getallen en van Lobatto over integraalrekening. Maar hij ziet ook zelf wel in dat de bijdragen vanuit Nederland marginaal waren, wat hij toeschrijft aan het feit dat onze hooggeleerde wiskundigen zich hoofdzakelijk met kennisoverdracht bezighielden. Wel hebben zij zich ingespannen om wiskunde een vaste plaats te geven, zowel in het onderwijs als in de maatschappij. Wat het laatste betreft heeft Van Swinden, zowel nationaal als internationaal, een belangrijke rol gespeeld bij de invoering van het metrieke stelsel.

## Wiskunde-onderwijs 1750-1850

In het hoofdstuk over het wiskundeonderwijs geeft Beckers een overzicht van de soorten scholen en opleidingen uit die periode. Globaal valt dit tijdsbestek uiteen in de periode van vóór 1800 en die daarna. Ons land kreeg in 1801 als eerste land ter wereld een onderwijswet (inclusief inspectie en examens), hetgeen de basis heeft gelegd voor dat waar we nu (nog?) zo trots op zijn: Nederland als kennisland. Er staan twee informatieve tabellen over die twee perioden in het boek. De tweede over de periode van na 1826 geeft een globaal overzicht van wat voor wiskunde er aangeboden werd en voor wie die bestemd was (zie figuur 1).

Gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw begon men de wiskunde, ook voor de toegepaste vakken, steeds meer te waarderen als een vak dat naast een praktische waarde ook een algemeen ‘vormende waarde’ zou hebben. Vandaar dat wiskunde vanaf 1815 op de Latijnse scholen en als propaedeuse op de Universiteiten op het programma kwam. Zelfs op de lagere school bestond het vak *vormleer*, dat een soort denkoefeningen omvatte als aftreksel van de euclidische meetkunde. Dat de tabel bij het jaartal 1826 begint heeft te maken met een wetswijziging, die de wiskunde toen verplicht stelde voor de Latijnse scholen. Het is opmerkelijk, wanneer men de geschiedenis van hervormingen in het wiskunde-onderwijs bestudeert, hoe deze veranderingen vaak gestuurd werden door één enkele persoon. In het geval van de wetswijziging van 1826 speelde D.J. van Ewijck, toen de hoogste man voor onderwijs op het Ministerie van Binnenlandse Zaken, hierin een sleutel-rol.

De Latijnse scholen en Universiteiten waren met die verplichting niet erg ingenomen. Juist de oude talen stonden volgens de docenten aldaar garant voor het vormende aspect. Hierdoor leerde men - zo was de stellige overtuiging van de classici - analyseren, denken, redeneren en vooral oreren. In 1842 gaat een anoniem auteur in *De Gids* nog tekeer tegen de opvattingen van de voorstanders van wiskunde als een propaedeutisch vak, wanneer hij het over ‘het despotisme van de Mathesis’ heeft. Ook Smid (1997) heeft in zijn dissertatie *Een onbekookte nieuwigheid* aandacht aan deze kwestie besteed. Nu, in het boek van Beckers, zien we opnieuw hoe moeilijk het was om erkenning voor de wiskunde als kerndiscipline te bevechten. Toch kreeg het vak langzamerhand een zekere status, al was dit een traag en moeizaam verlopend proces. Waar een zekere weerstand tegen de wiskunde op de Latijnse scholen bleef bestaan, verwierf het vak zich in 1863 een hechte plaats in het leerplan van de toen net opgerichte HBS. Dit historische proces valt buiten de door Beckers onderzochte periode, maar zou zeker nog eens onderwerp van nadere studie kunnen zijn.

## Wiskunde en cultuur

Toen de overheid aan het begin van de negentiende eeuw zich direct met het onderwijs ging bemoeien, kwamen de opvattingen daarover natuurlijk niet zo maar uit de lucht vallen. Het Verlichtingsdenken, dat vanaf het eind van de achttiende eeuw de culturele ontwikkelingen in de Westerse wereld ging beheersen, had ook in Nederland postgevat. Het kind werd vanaf toen als een mens beschouwd en diende opgevoed en onderwezen te worden op grond van de Rede, maar ook van het Christelijke geloof. De overheid maakte dan ook graag gebruik van de ideeën die al in de achttiende eeuw door de Maatschappij tot Nut van ‘t Algemeen gelanceerd waren. Verbetering van het algemene beschavingspeil door middel van het onderwijs, het smeden van een hechte Nederlandse Staat en het opstoten van Nederland in de internationale economische en wetenschappelijke gemeenschap waren de drijfveren. Het eerste werd vooral aangegrepen door degenen die het lager onderwijs wilden verbeteren, het laatste kwam natuurlijk ook de Nederlandse wiskundige wereld goed uit.

Beckers beschrijft hoe verschillende algemeen culturele, wetenschappelijke, onderwijskundige en specifieke vaktijdschriften en tijdschriften voor kinderen getracht hebben hieraan een bijdrage te leveren (zie figuur 2). Alleen al de immense lijst van titels van dergelijke periodieken achterin het proefschrift maakt duidelijk wat voor inspanningen er op het culturele vlak in die tijd zijn verricht.

Ook het functioneren en de rol van de verschillende (geleerde) genootschappen en instituten worden besproken. Door de keuze van deze bronnen blijft het begrip cultuur een beperkt begrip, hetgeen Beckers ook zo verantwoord heeft. De betekenis en effecten van al deze activiteiten bleven voornamelijk beperkt tot de elite en/of gegoede burgerij, maar zo was de maatschappij toen nog gestructureerd. En is het vandaag de dag ook nog niet vaak zo?

## Wiskunde en samenleving

Wanneer wetenschap of een schoolvak in verband gebracht wordt met de samenleving, dan betekent dat vrijwel altijd dat het praktische nut van bedoelde discipline in beschouwing genomen wordt. Ook vandaag de dag spreekt men in Nederland in verband met het onderwijs hoofdzakelijk over *kenniseconomie* en zelden over *kenniscultuur*. Beckers stelt in zijn historisch onderzoek wel beide aspecten aan de orde. Hij gaat namelijk zowel op het praktische nut van een propaedeuse in de wiskunde in als op het vormende belang daarvan, althans zoals de voorstanders dat toen naar voren brachten. Het eerste aspect wordt in het betreffende hoofdstuk aan de hand van een aantal toepassingsgebieden besproken, terwijl het tweede meer impliciet aandacht krijgt in de beschrijving van het beoogde algemene beschavingsproces.

De toepasbaarheid van de wiskunde voor de praktijk van de samenleving wordt in dit boek in drie gebieden opgedeeld: statistiek, techniek en nijverheid en de invoering van het metrieke stelsel.

In verband met de opkomst van de statistiek en de verzekeringswiskunde verwijst Beckers naar het werk van Ida Stamhuis (1989). Ook economie (staathuishoudkunde) maakte meer dan voorheen gebruik van kwantitatieve middelen. Hoewel wiskundigen, zoals Lobatto, hierbij een duit in het zakje deden (of eruit kregen via adviseursbaantjes) kan niet gezegd worden dat de wiskunde als nieuw belangrijk vak de ontwikkelingen van deze disciplines bepalend beïnvloed heeft.

Ook in de handel was wiskunde - behalve goed boekhouden - ternauwernood van belang. Wel bleken sommige technische opleidingen zich in hun boeken een wat wetenschappelijker aanzien te willen verschaffen. Als voorbeeld daarvan noemt Beckers het boek *De Volmaakte Timmerman* uit 1820, waarin ook

**FIGUUR 2 Titelblad van het eerste deel van het Magazijn voor de Rekenkunst. Dit was een van de vroeg negentiende-eeuwse tijdschriften die kennis van rekenkunde propageerden.**


MAGAZIJN

VOOR DE

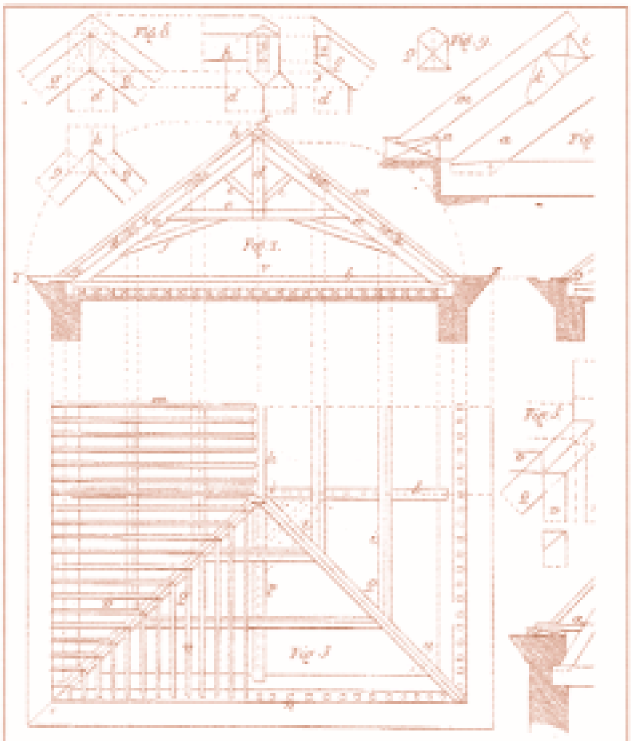
REKENKUNST,

EEN TIJDSCHRIFT, HOOFDZAKELIJK TEN DOEL HEBBENDE DE BEVORDERING DER GEWONE OF LAGERE REKENKUNST.

EERSTE DEEL.

Iᵉ. STUKJE.

TE BREDA, BIJ
F. B. HOLLINGÉRUS PIJPERS.
1828.



**FIGUUR 3 Detail van een plaat uit De Volmaakte Timmerman. Beschrijvende meetkunde in de opleidingspraktijk van negentiende-eeuwse ambachtslieden.**

enige meetkunde werd gepresenteerd (zie figuur 3).
Het boek uit de serie van G.J. Verdam (1828), ‘*Gronden der toegepaste werktuigkunst* voor aanstaande ingenieurs, ‘trachtte de leerling tot weldenkende lieden op te voeden en presenteerde daartoe een inleiding tot de algebra, meetkunde en infinitesimaalrekening bestaande uit definities en relevante stellingen met bewijzen’ (Beckers, p. 140). Het sterkst kwam de wiskunde aan bod in de ingenieursopleiding in Delft. Ook daar werd het argument van de vormende waarde van de zuivere wiskunde naar voren gebracht, zij het dat men bij de spoorwegen en waterbouw toch vooral mensen nodig had die op praktische wijze konden omgaan met formules en rekenwijzen.
Tot slot beschrijft Beckers ook nog de bijdragen van de wiskundigen aan de invoering van het metrieke stelsel, dat ook in dienst stond van de eenwording van de Nederlandse staat. (Eerder in 2002 verscheen hierover al een interessante dissertatie van J.M.A. Maenen.) Ten behoeve van deze innovatie werd vooral het lager onderwijs ingeschakeld.

## Vormende waarde

Onder de vormende waarde van een vak wordt verstaan dat studie van dat vak het ‘leren denken’ bevordert. En wanneer men zuiver kan denken - zo wordt vaak beweerd - zal dit ook zijn effect hebben op andere disciplines, ook wel *transfer of training* genoemd. Omdat in het wiskundeonderwijs gebruik gemaakt wordt van de klassieke logica wordt wiskunde telkens weer als algemeen vormend vak opgevoerd. Dit argument werd ook in de negentiende eeuw - men sprak toen van ‘opscherping van het verstand’ - aangevoerd als het om legitimering van de wiskunde als vak van onderwijs ging.
In die tijd werd aan de vormende waarde tevens een ruimere betekenis toegekend, namelijk die van de vorming van het karakter van de persoon: door wiskunde te leren zou men tot een beter mens en een eerzaam burger opgroeien. In deze meer algemene zin moet dé propaedeutische functie van de wiskunde, zoals die in de ondertitel van Beckers’ dissertatie staat, begrepen worden. Dus niet alleen als een voorbereiding op de wiskunde zelf, maar ook als een meer algemene ‘vóóropvoeding’ op het leven.
In zijn studie spreekt Beckers in verband met het begrip propaedeutische wiskunde ook wel van dé ‘nieuwe’ of ‘zuivere’ wiskunde. Nu vond in die tijd inderdaad een zekere rigorisering van de wetenschappelijke wiskunde plaats. Er diende streng geredeneerd te worden en er mocht geen gebruik gemaakt worden van empirisch verkregen resultaten. Dat is wat wiskundigen als De Gelder en Lobatto voor ogen stond als ruggegraat van elk soort onderwijs dat op de wiskunde gericht was of daarvan gebruik maakte.
Thans weten we dat de wiskunde in die tijd nog helemaal niet zo zuiver geordend was. De niet-euclidische meetkunden moesten nog ontdekt worden. Het zou nog bijna honderd jaar duren voor Hilberts *Grundlagen* zouden verschijnen, om maar niet te

spreken van de rigorisering die de Bourbaki-groep in de twintigste eeuw inzette.
Ook deze historische studie maakt duidelijk dat bepaalde discussies telkens weer herhaald worden. Het was in de jaren zestig van de vorige eeuw dat het structuurkarakter van de wiskunde als motivering werd gebruikt bij de toenmalige New Math-beweging. Op dit moment hoort men her en der bezwaren tegen de 'realistische' aanpak en wordt wel gepleit voor een meer formele methode. Ook nu wordt het argument van de vormende waarde weer in stelling gebracht.
Aan deze kwestie van de vormende waarde zijn door de jaren heen tal van artikelen, studies en onderzoeken gewijd. Men denke bijvoorbeeld aan de discussie tussen Freudenthal en Tatiana Ehrenfest uit 1951. Voor een overzicht hiervan ben ik zo vrij te verwijzen naar een hoofdstuk uit een werk van eigen hand uit 1999 (*Van vormleer naar realistische meetkunde*). Daar laat ik zien dat nog nooit is aangetoond dat de wiskunde inderdaad die vormende waarde bezit.
Gold tijdens de eerste helft van de negentiende eeuw vooral de vormende waarde als motivering voor de wiskunde, in de tweede helft van die eeuw werd het praktische nut vaker vooropgesteld. Telkens zijn dit de twee belangrijkste argumenten om wiskunde als vak van onderwijs te rechtvaardigen, waarbij het wel lijkt alsof deze argumenten elkaar om de vijftig jaar afwisselen.

## Tot slot

Beckers heeft een gigantische hoeveelheid materiaal verzameld over de door hem onderzochte periode. Hij maakt niet eens melding van de door hem uitgevoerde inventarisatie van school- en studieboeken, waarvan ik hoop dat hij deze nog eens toegankelijk zal maken voor onderzoekers en andere geïnteresseerden op dit gebied.
Zoals eerder gezegd is het onderwerp breed aangepakt. De beschrijvingswijze is echter tamelijk compact, terwijl - paradoxaal genoeg - de auteur ook menigmaal in allerhand op zichzelf interessante details geraakt. Af en toe beslaat een pagina meer noten dan de voortgaande tekst van het feitelijke betoog.
Als belangrijkste resultaat van zijn onderzoek ziet Beckers het feit dat de wiskunde in Nederland uiteindelijk in 1826 tot een verplicht vak werd verheven en wel in een nieuwe, meer wetenschappelijke vorm. Tevens wijst hij op het relatieve karakter van deze omslag. Ten eerste bleek de uitwerking op de toegepaste vakken tamelijk gering. Verder is het de vraag of het zogenaamd beschavende karakter van de wiskunde wel op de gewone man afstraalde. Men dient te bedenken dat Nederland in die tijd een natie was die achterop geraakt was in handel, industrie en wetenschap. De deelname aan het lager onderwijs lag zo rond de vijftig procent, waar men al blij kon zijn dat de kinderen een beetje leerden lezen en schrijven. En ten slotte bleef een zekere weerzin tegen wiskunde, vooral op de Latijnse scholen, voortwoekeren.
Met het ontstaan van het Koninkrijk der Nederlanden in 1815 leek een tijd aangebroken waarin met vereende krachten aan de opbouw van een nieuwe staat gewerkt zou gaan worden; een periode, die enigszins vergelijkbaar is met de periode van na 1945. Dat de wiskunde daarin haar partij mee wilde blazen spreekt vanzelf. De effecten van deze inspanningen waren vooralsnog gering. Wel kan deze periode gezien worden als een opmaat tot een grootser gebeuren: de oprichting van de Hogere Burgerschool in 1863. Vanaf toen kregen wiskunde en natuurwetenschappen werkelijk een hechte plaats in het onderwijs. De opbrengsten daarvan werden een halve eeuw later zichtbaar toen Nederlandse geleerden de eerste Nobelprijzen in de natuurkunde konden ophalen.
Als één ding duidelijk wordt uit deze historische studie, dan is het wel in welk een wankel evenwicht de wiskunde en het onderwijs zich toen bevonden. In de jaren twintig van de vorige eeuw pleitte de befaamde wiskundige Van Dantzig er zelfs voor om het vak voor sommige leerlingen maar te schrappen. Ook thans staat deze kwestie weer in het middelpunt van de belangstelling. Dag in dag uit lezen we in de kranten over de beknottingen in lesuren voor dit vak. En wat voor capriolen moeten er niet vertoond worden om studenten voor de bètavakken binnen te halen?
Systematische analyse van de historie van deze verschijnselen kan ons heel wat leren, maar helaas staan dit soort onderzoeken in een minder aanzien dan die welke een actuele waarde hebben. Maar juist in verband daarmee is het van het grootste belang om eens een diepgaand cultuur-historisch onderzoek naar de ontwikkelingen in het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs van de laatste halve eeuw uit te voeren. Wellicht dat men dan bij nieuwe hervormingen niet telkens opnieuw het wiel tracht uit te vinden. Bovendien wordt op die manier langzaamaan een totale geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs in kaart gebracht. Ik weet dat dat een van Beckers dromen is. Met zijn proefschrift heeft hij daarvoor in ieder geval de basis gelegd.

*D.J. Beckers (2003). Het despotisme der Mathesis. Opkomst van de propaedeutische functie van de wiskunde in Nederland, 1750-1850.*
*Uitgeverij Verloren, Hilversum. ISBN 90-6550-762-0, € 22,00.*

*Over de recensent*

*Ed W.A. de Moor (1933) werkte als wiskundeleraar, leerplan-ontwikkelaar, opleider en onderzoeker en is thans op een 'nul-aanstelling' aan het Freudenthal Instituut verbonden. Vanaf 1990 houdt hij zich ook bezig met historisch-didactisch onderzoek van het reken- en wiskundeonderwijs. Zijn e-mailadres is e.demoor@fi.uu.nl.*

# PRIJSUITREIKING WISKUNDE OLYMPIADE 2003

[ Bram van Asch ]

Op vrijdag 14 november jl. vond op de Technische Universiteit Eindhoven de prijsuitreiking plaats van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2003. De bijeenkomst werd geleid door de secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, Fred Bosman. De prijzen werden uitgereikt door Jan van de Craats.

De tien prijswinnaars waren:
1 Maarten Derickx (Stedelijk Dalton College, Zutphen)
2 Alexander Tichler (Rijnlands Lyceum, Oegstgeest)
3 Berry Lijklema (Stedelijk Gymnasium, Nijmegen)
4 Victor Pessers (St. Odulphuslyceum, Tilburg)
5 Ton Hellings (Gymnasium Bernrode, Heeswijk)
6 Matthijs Melissen (Stedelijk Gymnasium, Breda)
7 Mark van der Werf (Bonaventura College, Leiden)
8 Sjoerd Boersma (RSG Pantarijn, Wageningen)
9 Johan Konter (Stedelijk Gymnasium, Breda)
10 Koen Reijnders (Stedelijk Gymnasium, Nijmegen)
Hierboven een foto van deze groep.

Aan elk van de prijswinnaars werd gevraagd wat hun plannen voor de toekomst waren. Vier gaven aan wiskunde te willen gaan studeren, de overige zes wilden in elk geval wel iets exacts gaan doen, maar wisten nog niet precies wat.
Na de prijsuitreiking gaf Jan Donkers een beschrijving van de voorbereiding voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Aan deze voorbereiding wordt deelgenomen door bovenstaande groep, aangevuld met enkele leerlingen die net niet bij de eerste tien kwamen. Een team bestaande uit zes personen dat uiteindelijk aan deze internationale olympiade zal deelnemen (dit keer in Griekenland), zal worden geformeerd uit die leerlingen die bij deze voorbereiding het beste presteren. En het was onmiddellijk duidelijk dat dit hard werken betekent: na de receptie vertrok de groep meteen naar een jeugdherberg voor een eerste trainingsweekend.

Nadere informatie over de Wiskunde Olympiade op *http://olympiads.win.tue.nl/nwo/*

*Over de auteur*

*Bram van Asch (e-mailadres: a.g.v.asch@tue.nl) is redacteur van Euclides.*

# PENSIOEN VOOR WIM KUIPERS

## Een interview

[ Gert de Kleuver ]

### Aanleiding

Wim Kuipers: secretaris van de NVvW, voormalig schoolleider, schooldecaan, wiskundedocent – maar vooral: een bescheiden man met een warm hart voor de zwakke leerling.
Deze persoon nam op 23 juni 2003 afscheid als wiskundedocent aan het Greijdanus College te Zwolle. Wim beëindigde op dat moment zijn actieve loopbaan als docent op 65-jarige leeftijd. Dat is tegenwoordig bijna uniek te noemen: veel collegae kiezen ervoor om op jongere leeftijd met FPU te gaan, of zijn om andere redenen eerder gestopt. Wim heeft zich jarenlang ten dienste gesteld van het Nederlandse wiskunde-onderwijs. Het leek de redactie daarom een goed idee, deze man te interviewen.
Op een regenachtige woensdagochtend heb ik een ontmoeting met de hoofdpersoon van dit interview. Het gesprek verloopt heel vlot: als Wim aan het woord is, blijkt hij moeilijk te stoppen.

### Loopbaan; eerste jaren

Wim Kuipers behaalde in 1959 zijn hoofdakte en moest vervolgens zijn dienstplicht vervullen. In januari 1961 werd hij door het hoofd van de mulo te Haren (Gr) bij Defensie weggehaald; aldus startte hij zijn school-loopbaan.
In de beginjaren gaf Wim zo ongeveer alle vakken die er bestonden. Wiskunde vond hij 'het mooiste vak' om te geven en dus ging hij een LO-akte wiskunde halen. Hij verkreeg dit diploma na vier jaar studeren. Een lange tijd, maar met al die verschillende vakken die voorbereid moesten worden, bleef er vaak weinig tijd voor studie over.
In 1963 was de nood erg hoog bij de Gereformeerde Vrijgemaakte Mulo (het tegenwoordige Greijdanus College) te Zwolle, en Wim vertrok naar Zwolle. Hij werd de eerste lesdag door zijn vader naar school gebracht. Zo ging dat nog in die tijd...
In die periode heeft hij nog allerlei applicatiecursussen gevolgd en probeerde hij MO-A Wiskunde te halen, maar na drie jaar studie hield hij het voor gezien. Wim kon namelijk moeilijk 'nee' zeggen en nam ook binnen het kerkverband waartoe hij behoort allerlei taken op zich. Dit ging niet samen met de studie, en daarom stopte hij daarmee.

### Projecten

Op zeker moment wilde Wim weer iets anders, en zo werd hij in 1979 directeur van een mavo te Assen. Hij gaf toentertijd ook veel les. Dat had nog steeds zijn liefde.
In die tijd, eind jaren zeventig, raakte hij betrokken bij het landelijke 'Mavo-project'. In dit project ging het onder meer om andere werkvormen, grotere eigen verantwoordelijkheid van de leerling ten aanzien van het eigen leren, en meer aandacht voor de individuele kwaliteiten van de leerling. Er werden allerlei wiskundepakketjes ontworpen, die onder andere door Wim uitgeprobeerd en vervolgens elke zes weken tijdens bijeenkomsten te Leeuwarden geëvalueerd

werden. De didactiek die toen gehanteerd werd, zou nu 'activerende didactiek' genoemd kunnen worden.
Tot zijn spijt heeft Wim geen enkel boekje van dat Mavo-project meer in zijn bezit. Misschien kan iemand hem nog aan een exemplaar helpen?!
Na tien jaar was het opnieuw tijd voor wat anders, tijd voor een nieuwe uitdaging. En zo gebeurde het dat Wim terugkeerde naar het Greijdanus College. Daar begon de sectie wiskunde net met het pilotproject van W12–16. Er werden in dat kader heel veel pakketten op het Greijdanus uitgeprobeerd.
Na een jaar mocht Wim samen met Wouter Boer, één van zijn wiskundecollega's, een week naar Mexico om cursussen te geven over de Nederlandse ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Een en ander werd gesponsord door Akzo uit Arnhem. De directeur van het Greijdanus College vond de week Mexico zo'n goede zaak, dat hij persoonlijk naar Arnhem reed om de tickets voor Wim en Wouter op te halen.
Wim raakte daarna betrokken bij de ontwikkeling van de nieuwe mavo-examens; hij heeft ongeveer zes jaar in de constructiegroep van het CITO gewerkt.
Vervolgens kwam het APS voor hem in beeld. Het APS begeleidde namelijk de implementatie van deze nieuwe examens. Wim ging cursussen in het land geven met onder andere Wim Schaafsma, eveneens wiskunde-docent op het Greijdanus. Dat dit niet altijd even goed verliep bleek wel uit het feit dat een van de Wimmen tijdens een algebrabijeenkomst met een meetkundeles startte... Gelukkig kon de andere Wim de helpende hand bieden en werd het snel een algebramiddag.

## Vmbo

Wim heeft zeker de laatste tijd gekozen voor de vmbo-leerling. Dat deed hij omdat het een goed gevoel geeft als een kind dat moeite met wiskunde heeft, toch een voldoende kan behalen. Er is vakmanschap voor nodig om juist de leerling met beperkte gaven op het gebied van wiskunde naar een examen te brengen, en dan te ervaren dat het lukt als die leerling een 6 in plaats van een 5 haalt. Zo is Wim de laatste tijd ook betrokken bij een onderzoek van Kees Hoogland naar gecijferdheid bij leerlingen uit de basisberoepsgerichte leerweg. Die leerlingen beseffen vaak niet dat zij met cijfers bezig zijn. Een voorbeeld. Als Wim 's ochtends aan een leerling vroeg of deze al gerekend had, was het antwoord natuurlijk 'nee'. Hoewel? De leerling moet wèl de wekker kunnen aflezen. Wat voor een soort wekker? Een digitale of een 'ouderwetse'? Hoe lang heb je nog in bed gelegen? Hoe ver is het naar school fietsen? Hoe lang fiets je naar school? Dit soort vragen geeft een leerling het gevoel dat hij met cijfers en getallen bezig is.
Een ander aspect waarover Wim zich enorm kan opwinden, is het 'theezakjes'-model: het havo- of vwo-boek wordt in uitgeklede vorm aan de vmbo-leerling aangeboden - terwijl deze leerlingen volgens Wim een geheel eigen programma nodig hebben. In die vmbo-leerboeken horen opgaven te staan die aansluiten bij de leefwereld van deze leerlingen. Daar kunnen ze wat mee. Tijdens de afscheidsbijeenkomst op het Greijdanus werd een video getoond waarop de genodigden konden zien hoe Wim met vmbo-leerlingen uit de basisberoepsgerichte leerweg werkte, met materiaal uit het dagelijkse leven. Zo was te zien hoe leerlingen de hoogte schatten van verschillende voorwerpen zoals lantaarnpalen, maar ook werd er met kassabonnen gewerkt.
Wim hoopt vurig dat er in de toekomst methoden komen die beter aansluiten bij de leefwereld van deze kinderen. Verder vindt hij voor deze leerlingen een centraal examen zoals dat nu bestaat een slechte zaak. De docenten op de scholen werken immers vier jaar met deze leerlingen, en zijn daarom heel goed in staat een prima eindtoets te produceren, een afsluitende toets zodat de leerlingen de school kunnen verlaten mét een diploma. Het komt nu voor dat kinderen zonder diploma de school verlaten en zó op niveau 1 kunnen instappen op een ROC. Dan hebben zij na al die jaren geen enkel diploma ter afsluiting ontvangen.

## Toekomstplannen

Wim hoopt zich nog enige tijd te kunnen inzetten voor de Vereniging, waarvoor hij binnen het bestuur al weer diverse jaren als secretaris fungeert. Er is nog het nodige werk te doen! Zo zal zijn eerste taak zijn het archief van de NVvW - inclusief alle jaargangen van Euclides - zodanig in te pakken dat alles onder-gebracht kan worden bij het Noord-Hollands Archief.
Ter afsluiting vroeg ik hem naar een slechte eigenschap. Zijn antwoord: hij heeft problemen met de beperkte besteedbare tijd. Regelmatig heeft hij het gevoel dat er iets niet helemaal correct is afgemaakt, terwijl de volgende klus alweer op hem wacht. Hij vindt (te)veel dingen interessant. Hij vindt zichzelf meer een man van de grote lijnen dan van de details, en heeft daarom ook vaak geen zin meer om juist die details uit te voeren.
Na de nodige versnaperingen vervolgt Wim zijn reis naar Utrecht voor een bestuursvergadering van de Vereniging.

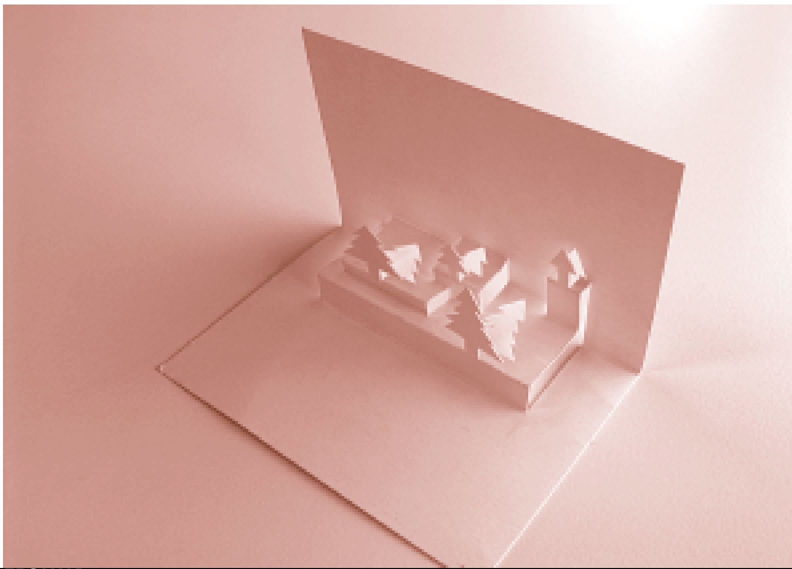
*Over de interviewer*

*Gert de Kleuver (e-mailadres: g.de.kleuver@wanadoo.nl) is redactievoorzitter van Euclides.*

# WISKUNDE DOOR HET JAAR HEEN

## Spannende wiskunde-momenten inbouwen tijdens je lessen; dat motiveert!

[ Rob van Oord ]



FIGUUR 1

### Bedoeling

In dit artikel wil ik de lezer meenemen naar een aantal van mijn jaarlijks terugkerende wiskundeactiviteiten. Sommige zijn seizoensgebonden, zoals het Zwarte Pieten Examen, andere leerstofgebonden, zoals de geboorte van het getal *e*.
Ik wil de lezer enthousiast maken om ook in haar/zijn lessen gedenkwaardige wiskundemomenten in te bouwen. De leerlingen zijn na het beleven van dergelijke momenten vaak weer extra gemotiveerd om de 'gewone' lesstof te lijf te gaan. Juist de krenten in de pap maken de lessen wiskunde voor de leerlingen tot een feest. Wanneer je regelmatig iets anders doet dan ze verwachten, dan blijft het spannend wat er de volgende les misschien weer kan gebeuren. Ik zeg altijd: *'Makkelijker kunnen we het niet maken, wel leuker.'*
Ik wil niet proberen, u de ideeën die ik hier aandraag, te laten nadoen. Ik zou het op prijs stellen dat u zich probeert in te leven in de manier waarop leerlingen de genoemde activiteiten zullen ervaren, dat u zich kritisch afvraagt of iets dergelijks ook voor uw lessen interessant kan zijn. Maar mijn bedoeling is vooral u een duwtje te geven om af en toe eens wat uit te proberen.
Ik ben er van overtuigd dat ieder van u een aantal terugkerende stokpaardjes heeft bij de uitleg van bepaalde stukken lesstof. Ik zal in dit artikel dan ook een aantal activiteiten beschrijven die ik met mijn leerlingen doe, zonder de pretentie te hebben dat ik de enige ben die dit doet.
Veel van mijn activiteiten zijn in de loop van de jaren een soort traditie geworden. Soms weten de leerlingen van de verhalen van anderen wat er staat te gebeuren, en vragen ze ernaar.

### Seizoensgebonden wiskunde-activiteiten

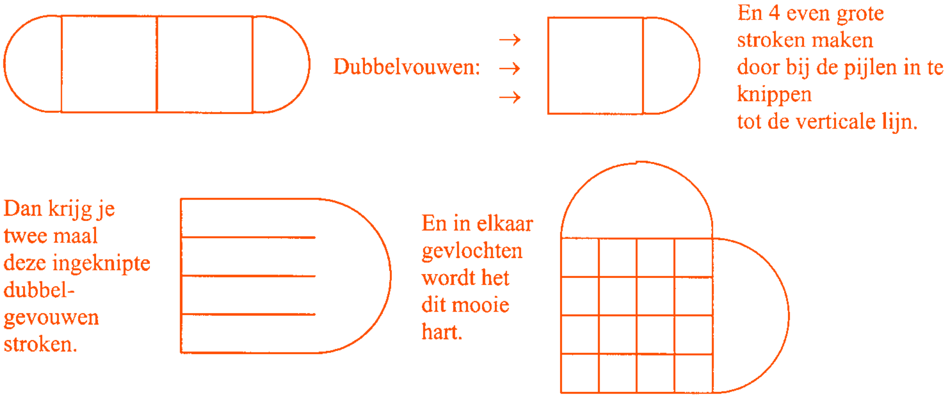
#### *Zwarte Pieten Examen*

De decembermaand is altijd vol spannende gebeurtenissen. Zo zult u mij op 5 december kunnen aantreffen uitgedost met een zwarte krullenpruik, een felgekleurde muts met grote veer, een glimmende cape en twee grote zwarte handschoenen.
Meestal moet ik 'even het lokaal uit' en dan bons ik hard op de deur. Ik kom dan binnen met een map en een grote envelop en natuurlijk een grote zak met pepernoten. Vaak heb ik van tevoren de tafeltjes al in de toetsopstelling gezet en wat lege proefwerkblaadjes uitgedeeld. Op de envelop zijn duidelijk zichtbaar de woorden MADRID en ROBERTO DI ORDO te zien. Ik lees dan de op rijm geschreven brief voor, die in de envelop zit. Sinterklaas heeft dringend hooggeschoolde Pieten nodig. Of ik ook dit jaar weer mee wil doen aan de selectie uit mijn leerlingen door het afnemen van het *Zwarte Pieten Examen*. De 4-havo-groep krijgt het hele lesuur. Bij de 4-vwo-klassen begin ik met het laten maken van een 12- tot 18-regelig rijmpje over

een wiskundig voorwerp. Aan het eind van de les lees ik het winnende gedicht voor en de winnaar krijgt een taaipop of een kleine chocoladeletter. Nadat ik de spelregels heb uitgelegd, dat met elk goed opgeschreven antwoord 5 pepernoten te verdienen zijn en er geen antwoorden door de klas geroepen mogen worden, gaan ze aan de slag. Meestal kan bij een aanvankelijk fout gegeven antwoord bij een tweede poging alsnog een deel van de 5 pepernoten verdiend worden.
Terwijl ze zo bezig zijn met de eerste vragen, zet ik in een oogwenk achtereenvolgens mijn pruik, muts en veer op. Daarna volgen cape en handschoenen, en soms nog wat zwarte vegen of grote oorbellen. Als ik dan rondloop en overal al vast een paar aanmoedigingspepernoten uitdeel, zit de stemming er goed in. Ze werken als paarden om zoveel mogelijk goede antwoorden te vinden.
Sommige leerlingen oogsten per vraag, anderen wachten tot het eind van de les en incasseren dan de bulk verdiende pepernoten in één keer. In elk geval verlaten ze allen met rode koontjes en een brede lach het lokaal. Ik ben trots op hen.
Welke sommen zitten er in? Een vlekkensom over de prijs van zakken pepernoten en taaipoppen, een vraag over het pakken van handschoenen in het donker, een vraag over de route waarlangs Sint en zijn gevolg moeten gaan zonder twee keer door een zelfde straat te komen. Een som over het aantal treden en de lengte van de ladder naar het dak. Een vraag naar het patroon op een zijkant van een kubusvormige surprise. Het cadeau heeft verschillende patronen waarvan er telkens maar drie zichtbaar zijn. Een vraag over de prijs van een chocoladeletter en een suikerhart, te berekenen uit twee rekeningen met verschillende aantallen van beide lekkernijen. Kortom, wat ingeklede berekeningen, telproblemen en Pythagoras toepassen. U kunt het zelf verzinnen.

**Valentijnsharten**

- Zorg voor twee verschillende kleuren stroken van 5 bij 15 cm (verhouding 1 : 3).
- Vouw ze beide dubbel en knip aan de kant waar de vouw niet zit, een halve cirkel.
- Knip dwars op de vouw in beide dubbelgevouwen stroken een zelfde aantal, even brede, stroken 5 cm in.
- Nu moeten de opengeknipte strookjes om en om in elkaar gevlochten worden.




*Ruimtelijke kerstkaarten*

Omdat origami een hobby van me is, en in het bijzonder *origami-architectuur*, las ik af en toe een (deel van een) les in waarin we gaan vouwen. Bij De Slegte heb ik ooit 15 origamiboeken gekocht met vouwmodellen voor beginners, geschikt voor de onderbouw. In mijn kast liggen altijd pakken met gekleurde vouwblaadjes. Met de vijfde klas wordt mijn laatste les voor de kerstvakantie altijd besteed aan het maken van kerstkaarten. Ik neem dan mijn doos met zelfgemaakte modellen mee (zie figuur 1), en een aantal boeken met foto's van nog veel mooiere. Er zijn drie soorten, de modellen die resp. 90°, 180° of 360° moeten worden opengevouwen. Omdat bij de 180°- of 360°-modellen veel gesneden maar ook alles met touwtjes

aan elkaar geplakt moet worden, beperk ik me in deze les tot de techniek van de 90°-vouwkaarten. Het gaat dan bijvoorbeeld om het verschil tussen de dalvouw en de bergvouw, waarvoor aan verschillende kanten geritst moet worden. We maken op ruitjespapier een oefening om de techniek van origami-architectuur te begrijpen. De ontwerpen die ik gebruik, zijn speciaal gemaakt voor het formaat van correspondentiekaarten. Na het prikken met de passerpunt op de kruispunten van alle vouwlijnen, het opensnijden van de snijlijnen en het ritsen van de vouwlijnen, komt er met enig voorzichtig duw- en trekwerk een prachtige kaart met vier kerstboompjes tevoorschijn. Soms is er al een boompje gesneuveld bij het snijwerk en staat alleen nog een stompje op de kaart.
Voor de liefhebbers heb ik andere voorbeeldkaarten gemaakt. Die kunnen ze dan in de vakantie proberen te maken (zie figuur 2a).

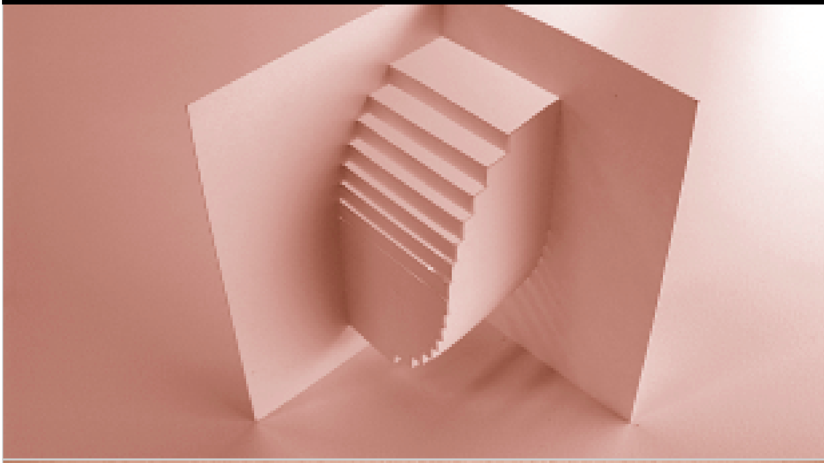
### *Valentijnsdag*

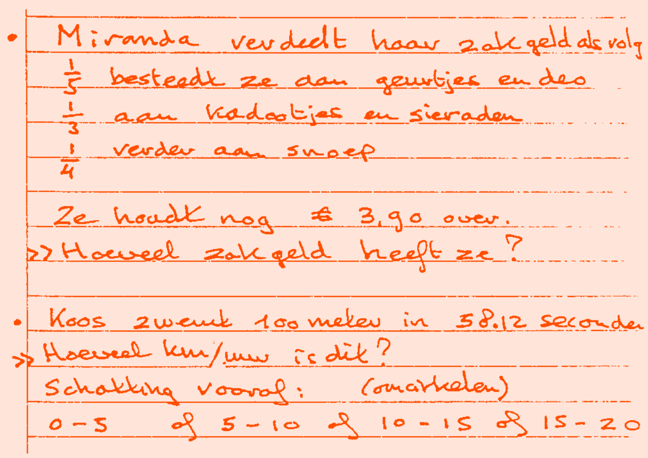
Toen ooit mijn dochter thuis kwam van de basisschool met een gevlochten hart, heb ik deze techniek meteen ingezet om op valentijnsdag met zijn allen *valentijnsharten* te gaan vlechten (zie kader op pag. 230). Voor leerlingen die vergeten zijn om gekleurde vouwblaadjes mee te nemen, liefst rood en wit, heb ik altijd wel een paar blaadjes in de kast. Omdat ik bij wiskunde A rond die tijd altijd met matrices bezig was, verzond ik geheime *valentijnsberichten* ('ik hou van je', e.d.) waarvan ik ofwel de decodeermatrix ofwel de codeermatrix prijs gaf, al naar gelang de stand van zaken in de les. Dan moesten de leerlingen eventueel eerst de decodeermatrix berekenen. Of ik liet hen zelf geheime briefjes maken via een bepaalde codeermatrix, verzamelde die vervolgens en deelde ze daarna random weer uit in de klas. Moesten ze zien te achterhalen van wie het berichtje was.

### *Paaseieren vouwen*

Zo zal ik rond Pasen in menige klas bezig zijn met het vouwen van paaseieren (zie figuur 2b), in het Chinese vouwboek bekend als '*papieren bal*'. Na het vouwen mogen ze worden gekleurd en hang ik ze met paperclips op aan een touw. In de onderbouw kun je ook een paashaas laten vouwen.
In de clustergroepen B2 van 5- en 6-vwo maak ik meteen gebruik van de situatie om *ellipsen* te gaan vouwen. Ik deel A4-bladen uit waarop een grote cirkel staat (straal 10 cm). Eerst knippen we de cirkel uit, we zoeken naar het middelpunt ('hoe moet dat ook al weer?') en zetten ergens op zo'n 3 cm van de cirkelrand een stip. Vervolgens vouwen we telkens de cirkelrand om naar die stip. Zo verschijnen er op het blaadje allemaal lijntjes, maar er blijft een ovaal stuk (paasei) over zonder vouwlijntjes. Al naar gelang het niveau (5v of 6v) ga ik dan verder in op de verkregen figuur. De lijntjes zijn allemaal raaklijnen aan een ellips. Kun je dat bewijzen? Enzovoorts.
Tenslotte knipt wie dat wil het gaaf gebleven deel uit (het ei), en kleurt het met mooie bandversieringen en dergelijke.

FIGUUR 2a en b






FIGUUR 3, 4

## Leerstofgebonden wiskunde-activiteiten

Ik vind het didactisch beter om - waar mogelijk - de leerstof te ondersteunen met experimenten die de leerlingen zelf moeten uitvoeren.

### *Parabool vouwen*

Al eerder had ik het over het vouwen van een ellips. Bij dezelfde lesstof (6-vwo B2) horen ook parabolen. Ik vind dat elke vwo-B-leerling in zijn schoolloopbaan ook een keer een parabool heeft moeten vouwen en heeft moeten beleven dat de parabool bij een tweedegraads functie hoort. Ik deel ruitjesbladen uit, laat het onderste randje tot een ruitjeslijn afknippen, laat ongeveer in het midden 4 cm boven de rand een stip zetten, dan de onderrand van het blaadje telkens naar de stip vouwen. Zo krijg je de omhullende van een parabool. Maar doordat je met ruitjes werkt kun je ook de formule gaan zoeken. Ik kies de $x$-as midden tussen de onderrand van het papier en de stip (het brandpunt), en de $y$-as verticaal door de stip. Dan maak ik met de klas een tabel van de (in eerste instantie gemeten) hoogte van de parabool tegen verschillende gehele waarden van $x$ en daarbij de kwadraten van de $x$-waarden.

Altijd succes. Je kunt ook de raaklijneigenschap van de parabool mooi laten zien met de op deze manier gevouwen parabool.

### *Dobbelstenen gooien*

Een ander voorbeeld van experimenteren is het gooien van dobbelstenen. Bij een dobbelsteen is de kans op een zes wel 1 op 6, maar bijna nooit is bij 60 keer gooien er 10 keer een zes gegooid. Wanneer in de vierde klas de kansrekening aan bod komt, dan is het leuk om de zweetkansen daadwerkelijk met de klas uit te voeren. In mijn lokaal staat een doos met pakweg 100 dobbelstenen. Ik kan op elk moment de hele klas aan het dobbelen zetten. In tweetallen laat ik ze elk 20 keer met 4 dobbelstenen gooien en tellen hoe vaak er *minstens één zes* bij zit, een bekend historisch probleem. Vaak kom je met de hele klas samen (tabel op het bord) tot ongeveer 50/50. Als je daarna het resultaat theoretisch gaat verklaren, dan leeft het probleem inmiddels veel meer bij de leerlingen. Ook leuk om dan nog iets te simuleren op de grafische rekenmachine, bijvoorbeeld hoe vaak wordt 7 gegooid met twee dobbelstenen (op de TI-83 met randInt(1,6,2)), en met de klas op het bord te turven. Daarna weer de theorie.

### *Minilotto*

Bij de uitleg van trekken zonder terugleggen maak ik gebruik van de lottotrommel die in mijn kast staat. Ik speel dan minilotto met de klas (zie figuur 3): drie balletjes trekken uit een trommel met 10 genummerde balletjes. Iedere leerling (die dat wil) zet bijvoorbeeld 10 eurocent in. Ze mogen dan op een briefje 10 rijtjes met drie getallen van 1 t/m 10 invullen. Er mogen geen cijfers worden doorgekrast. Omdat het een trekking zonder terugleggen is, moeten ze op het idee komen dat ze geen drie getallen opschrijven waar dezelfde bij zitten. Ook doet de volgorde er niet toe. (Voor sommigen is dit niet direct duidelijk.) Dan wijs ik een paar assistenten aan die een deuntje moeten zingen, terwijl ik de trommel rond laat draaien om te mixen, en een assistent(e) die ‘stop’ moet zeggen. Op dat moment laat ik de trommel een balletje trekken. Ik laat de leerlingen in al hun rijtjes dit getal dan omcirkelen. Daarna volgen de volgende twee trekkingen. Ook dan laat ik de getrokken getallen omcirkelen. Later zal ik deze omcirkelingen gebruiken om de zweetkans te vergelijken met de theorie. Onder degenen met het winnende drietal getallen wordt de pot verdeeld. De kans op succes is 1 op 120, dus meestal zijn er bij een groep met 20 leerlingen wel een of meer die de pot winnen. Dan komt de theorie. Hoe groot is de kans op drie goed? En op twee, één of nul goed? Door de spannende trekking blijft dit stukje kansrekening hopelijk goed in hun geheugen, en snappen ze beter hoe je dergelijke lotingen moet simuleren.

### *Wedstrijdjes*

Ter afwisseling van het gewone lespatroon waarin de leerlingen een groot deel van de les sommen uit het boek zitten te maken doe ik regelmatig wedstrijdjes (zie figuur 4). Vooral een geschikte uitdagende activiteit als je een blokuur 4-havo wiskunde-A hebt. Ik laat de leerlingen in groepjes van liefst vier leerlingen bij elkaar zitten, leg een white-board in het midden, deel blaadjes met enkele korte vragen uit en geef elke leerling een stift. Het groepje dat aan het eind van de les de meeste vragen goed beantwoord heeft, wordt getrakteerd. Ze mogen zelf een strategie bepalen hoe ze het aanpakken, maar het moet wel zo zijn dat elk lid van het groepje de antwoorden op de vragen kan vertellen. Ze moeten elkaar dus helpen en overtuigen van de juiste oplossing. Ik gebruik wedstrijdjes als inleiding bij nieuwe onderwerpen en als afsluiting van een stuk behandelde wiskundige vaardigheden. Rekenproblemen en telproblemen, maar ook vaardigheidsoefeningen met differentiëren en integreren, zijn geliefde onderwerpen voor dergelijke wedstrijdjes.

### *Bakje vouwen*

Formules, functies, vergelijkingen oplossen, waar heb je dat voor nodig? Gelukkig komt in klas 4 een moment waarop je deze vragen aan de orde kunt stellen, laten zien dat je met de wiskunde een probleem kunt oplossen.

Zeker met de grafische rekenmachine bij de hand kun je snel ter zake komen.

Op een moment komt de opgave waarin uit een rechthoekig blaadje vier (vierkante) hoekjes moeten worden geknipt. Dit wordt de bouwplaat van een doosje zonder deksel. Dan moet de inhoud worden berekend. Gevraagd: de afmetingen van het bakje met de grootste inhoud.

Dit is een prachtig moment. Ik deel alle leerlingen een (gekleurd) A4-tje uit en laat ze een bakje vouwen, zonder deksel. Wie het bakje heeft met de grootste inhoud, krijgt een beloning. Intuïtie en geluk spelen

hierbij een rol. Ik heb ook wel een hele klas bakjes laten vouwen met voor iedere leerling een andere hoogte van de opstaande rand. Je krijgt dan een heel nest bakjes. Dan zie je meteen dat de lage randjes weinig inhoud geven, maar de hoge randen ook. Er wordt ook duidelijk tot hoever je nog een echt bakje kunt krijgen.
Spelenderwijs zijn ze met toepassingen van wiskunde bezig. Het model wordt losgeweekt.
Daarna gaan we proberen met formules en tabellen op de grafische rekenmachine het bakje met de grootste inhoud te berekenen. Uiteraard kunnen ze nog niet differentiëren, maar daarmee kun je dit probleem of een vergelijkbaar probleem in de vijfde klas nog eens opnieuw aanpakken. De inhoud is $x \cdot (L-2x)(B-2x)$. Haakjes uitwerken en differentiëren, gebruik van de *abc*-formule, uiteindelijk komt het beste antwoord.
In 5v neem ik de cellofaanverpakking van koffie. Op zich al interessant hoe die gevouwen en geplakt is. Je kunt ook andere eisen stellen aan de bakjes, bijvoorbeeld dat ze een vierkante bodem moeten hebben of dat de inhoud 1 liter moet zijn. Laat ze eerst maar eens vouwen en knippen en plakken.

### *Geboorte van het getal e*

Het is altijd een spannend moment in de lesstof (5-vwo B) als het getal e wordt 'geboren'. In de lessen voorafgaand aan deze gebeurtenis (die ook aldus in de werkwijzer staat), voer ik de spanning een beetje op, als zou het een heuse bevalling betreffen.
De grafiek van de 'vader' van e, $f(x)=2^x$, wordt getekend. Iedereen doet mee in zijn schrift. Dan wordt de hellingfunctie van $f$ afgeleid via metingen met behulp van de geodriehoek (van de hellingen in punten op de grafiek bij $x=3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2$) en via berekeningen op de GR (met $\dfrac{2^{3{,}001}-2^3}{0{,}001}$, enzovoort).
Op bord verschijnt een grote tabel die samen wordt ingevuld. Iedere rij leerlingen zorgt voor een van de hellinggetallen, eerst door meten (gemiddelde nemen), dan met de grafische rekenmachine (kijken of ze de benaderingsmethode nog kennen). In de laatste rij op bord laat ik 'helling gedeeld door functiewaarde' berekenen. Hier komt steeds 0,693 uit. Zo blijkt de hellingfunctie van $2^x$ ongeveer 0,693 maal de functie zelf te zijn, dus de helling is overal ongeveer 70% van de functiewaarde. Daarna wordt hetzelfde nog eens gedaan met $g(x)=3^x$, de 'moeder' van e. Van deze functie is de helling 10% groter dan de functie zelf. En dan is e het getal waarbij de hellingfunctie precies gelijk is aan de functie zelf. Nu wordt de geboorte gevierd met beschuit met muisjes, in een e op een groot blad neergelegd, en een foto van de hele klas eromheen.

## Slotwoorden, een hart onder de riem

Regelmatig komen we in Euclides en de Nieuwe Wiskrant artikelen tegen waarin LIO-stagiaires, super-enthousiaste (jonge) docenten of promovendi beschrijven welk experiment ze hebben uitgevoerd in een bepaalde klas of leerlaag. Niets dan lof voor al deze experimenten. Maar de gewone leraar heeft niet vanzelf de energie en de tijd om dergelijke uitgebreide sessies op te zetten en te evalueren. Ook is er niet direct de ondersteuning van een universiteit of het Freudenthal Instituut voorhanden. Toch denk ik dat je altijd wel iets kunt proberen. Al is het maar om zelf uit de sleur te blijven. Een beetje durf en een beetje fantasie kunnen al snel tot leuke resultaten leiden - vooral als je met kleine directe beloningen werkt. Niet elke les, maar ineens is er weer een dropje te verdienen. Op zijn tijd een fles wijn of een appelflap bij de koffie, bijvoorbeeld van de schoolleiding, vinden wij zelf toch ook een opsteker?
We hebben niet meer te maken met leerlingen die 'vanzelf' wiskunde nog leuk vinden, behalve misschien in de brugklas. We moeten mee in de stroom van de Veronica- (of is het nu BNN-)maatschappij: sneller, spannender, wilder. Er zijn veel meer 'leuke' vakken die op de lessentabel staan. Het aantal uren wiskunde loopt ook steeds verder terug, zeker als de plannen van de minister doorgaan.
Zorg voor een uitgebreid scala aan materialen in je lokaal waaruit je zo kunt pakken. Speel in op de actualiteit, het nieuws; maak er een feest van.

In dit artikel heb ik geprobeerd iets van mijn enthousiasme over te brengen waarmee ik als wiskundedocent nog steeds aan het werk ben. Aanvaard nieuwe uitdagingen. Probeer eens wat uit.

*Noot van de redactie*

*In een workshop met de titel 'Makkelijker kunnen we het niet maken, wel leuker' heeft Rob van Oord het bovenstaande eveneens aan de orde gesteld op de Nationale Wiskunde Dagen, NWD10, op 6 en 7 februari 2004.*

*Over de auteur*

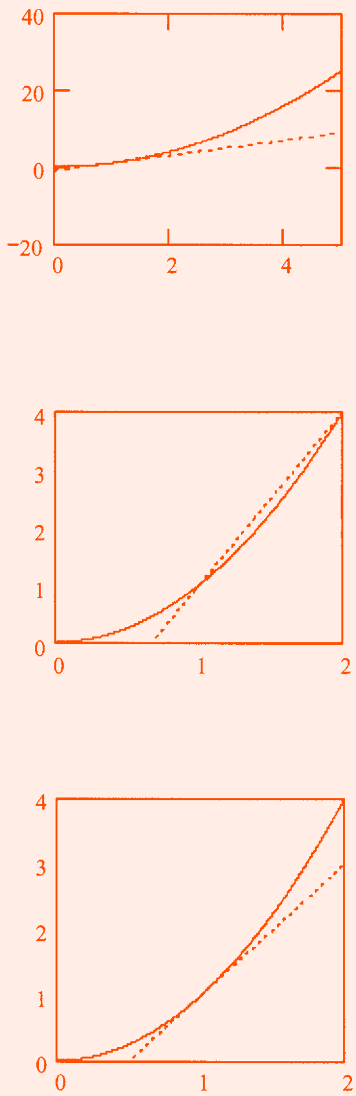
*Rob van Oord (e-mailadres: r.van.oord@coenecoopcollege.nl) is sinds 1974 docent wiskunde op het Coenecoopcollege te Waddinxveen, de laatste jaren vooral werkzaam in de bovenbouw (4 havo-A en 4,5,6 vwo-B). Hij is sectievoorzitter van de sectie die nu 17 leden telt, fervent bezoeker van de studiedagen van de Vereniging, en - als het kan - aanwezig op de Nationale Wiskundedagen. Rob is tevens lid van de werkgroep havo/vwo van de NVvW.*

# HET KANON EN DE AFGELEIDE

[ Kees Alkemade ]

Dit jaar heb ik 5-havo voor een deel van hun wiskunde-B12 lessen. Het is eind augustus en we hebben de eerste les, herhaling van het begrip afgeleide. De leerlingen en ik kennen elkaar niet.
Ik vertel dat geleerden vroeger voor allerlei zaken ingehuurd werden, bijvoorbeeld als astroloog of om oorlog te helpen voeren of om bij de verdediging van een stad te helpen.
Zo leg ik de volgende vraag voor.
*Neem de functie $y = x^2$ en bouw een verticale mal met de vorm van de grafiek van deze functie als onderkant. Langs die onderkant loopt een rail waarlangs je de loop van een kanon schuift.*
Zie figuur 1.

**FIGUUR 1, 2, 3**




*Ga uit van het theoretische geval dat er geen zwaartekracht is.*
*Zet op 100 meter afstand van de y-as een muur neer.*
*Op welke hoogte slaat de kogel uit de kanonsloop in op de muur?*
Vervolgens vertel ik dat dit probleem heel lang alleen opgelost kon worden via ingewikkelde berekeningen, waarbij er voor iedere plek van het kanon opnieuw behoorlijk wat rekentijd nodig was. En ook dat er pas in de zeventiende eeuw een heel snelle methode bedacht is, en wel onafhankelijk van elkaar door Newton en Leibniz.

Hierna bekijken we eerst een paar eenvoudige gevallen, waarbij de onderkant van de mal achtereenvolgens de vorm heeft van de lijn $y = 2$ en van de lijn $y = 2x + 1$. Hierbij introduceer ik het woord richtgetal, hier dus resp. 0 en 2.
Vervolgens vereenvoudig ik de vraagstelling bij de functie $y = x^2$ door het kanon niet *rakend* aan de mal op te hangen maar door het op twee punten van de rand van de mal vast te prikken, bijvoorbeeld in de punten $A(1, 1)$ en $B(2, 4)$ - zie figuur 2.
In dit geval heeft het kanon richtgetal 3.
Vervolgens laat ik ze het richtgetal uitrekenen voor $A(1, 1)$ en $B(1{,}001; 1{,}002001)$. Deze situatie noem ik *bijna-rakend in A* (zie figuur 3).
De leerlingen berekenen dat het richtgetal gelijk is aan

$$\frac{1{,}002001 - 1}{1{,}001 - 1} = 2{,}001.$$

Daarna laat ik ze het richtgetal uitrekenen voor de bijna-raak-situatie in het punt (2, 4).
Via een lijstje wordt het vermoeden aannemelijk dat er voor het richtgetal een functie bestaat, en wel $r(x) = 2x$.
De afgeleide functie is een ‘feit’.

De bel gaat. Wat een leuke les, meneer. Eindelijk snap ik waar je wiskunde voor kunt gebruiken.

*Noot*

*Voor belangstellenden stelt de auteur een uitgebreidere beschrijving van dit lesidee beschikbaar: stuur daarvoor een e-mail naar alkemade-steekelenburg@planet.nl.*

*Over de auteur*

*Kees Alkemade is sinds 1973 wiskundeleraar aan het Meridiaan College te Amersfoort, afdeling het Nieuwe Eemland.*

# KLASSIKAAL

## Een kennismaking met volledige inductie

[ Dick Klingens ]

### Opdracht (waarbij we een TI-83 gebruiken)

(Zie figuur 1 en figuur 2.)

a Zet je (grafische) rekenmachine op graden.
b Plaats de getallen $10^3$, $10^4$, ..., $10^{11}$ in Lijst 1.
c En zet dan in Lijst 2 de sinus van die hoeken.
d Wat valt je op? Formuleer een vermoeden.
e Kun je het vermoeden illustreren met $\sin(10^{12})° = -0{,}98...$?
f Bewijs je vermoeden.

### En dan ...

Tot en met opdracht d zal het de lezer – en de leerlingen voor wie de opdrachten vanzelfsprekend bedoeld zijn – wel lukken.
Maar hoe zit het met e en f?
Hoe bewijs je dat (onder weglating van het graadteken) de uitspraak

$$P_1 = [\forall n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N} : \sin 10^n = -0{,}984807753]$$

waar is?
Een dergelijke notatie behoort nu niet direct tot de leerstof van het voortgezet onderwijs, maar het kan (mag) aan de lezer worden overgelaten dit in 'leerlingentaal' om te zetten.

Nadat de leerlingen even bezig geweest zijn (met opdracht f – want opdracht e ging niet...), komt het klassengesprek wellicht op gang, mede ook door zelf wat vragen te stellen.
- Waar komt die –0,98... eigenlijk vandaan?
- (Zie figuur 3) Kunnen we niet iets met die –80 (graden)?
- Is de uitspraak (en de lezer vertale weer)

$$P_2 = [\forall n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}, \exists c : 10^n = -80 + c \cdot 360]$$

gelijkwaardig met uitspraak $P_1$?
Zouden de leerlingen het bewijs van $P_2$ zonder hulp kunnen leveren?
Als ze het doen, zal het 'bewijs' vermoedelijk uitdraaien op:

$$\begin{aligned} 1000 &= -80 + 3 \cdot 360 \\ 10.000 &= -80 + 28 \cdot 360 \\ 100.000 &= -80 + 278 \cdot 360 \end{aligned}$$

waarna ze wellicht zeggen dat 'het klopt'.
Natuurlijk zijn ze ook nog wel bereid op te merken, dat $1.000.000 = -80 + 2778 \cdot 360$, maar dan hebben we (ze) het wel gehad.
Tussenvraag 1: Wat is het verband tussen de factoren waarmee 360 telkens vermenigvuldigd wordt?
Tussenvraag 2 (en even iets heel anders!): (zie figuur 4) Is de uitspraak $P_3 = [\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 41$ is een priemgetal] waar?

Is dit eigenlijk niet een mooi startpunt om iets te zeggen over *volledige inductie*?

### Het bewijs van de 'waarheid' van $P_2$

Stap 1. We veronderstellen dat er een $k$ is waarvoor $P_2$ waar is.
Er is dus, op basis van de inductieveronderstelling, een natuurlijk getal $c$ met $10^k = -80 + c \cdot 360$.
Dan is
$10^{k+1} = 10 \cdot 10^k = 10 \cdot (-80 + c \cdot 360) = -800 + 10 \cdot c \cdot 360$
Nu is $-800 = -80 - 2 \cdot 360$, zodat
$10^{k+1} = -80 - 2 \cdot 360 + 10 \cdot c \cdot 360 = -80 + (10c - 2) \cdot 360$
En als $c$ een natuurlijk getal is, dan is $10c - 2$ dat natuurlijk ook.
Stap 2. Voor $n = 3$ hebben we $1000 = -80 + 3 \cdot 360$; we zagen dat al eerder.
Stap 3. Uitspraak $P_2$ is waar.
En daardoor is dat ook het geval met uitspraak $P_1$.

Maar hoe zit het eigenlijk met de gelijkwaardigheid van de uitspraken $P_1$ en $P_2$?

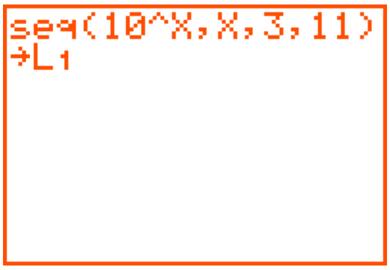
*Literatuur*

*David Wells: Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen. Bert Bakker, Amsterdam (1991).*

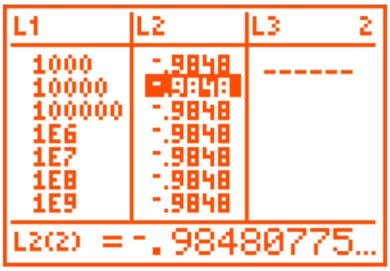
*Over de auteur*

*Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.demon.nl) is wiskundedocent aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van Euclides.*

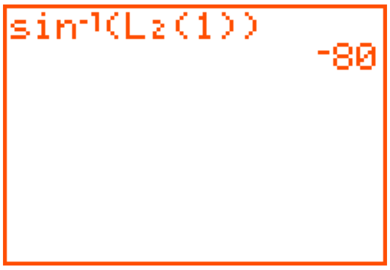
FIGUUR 1



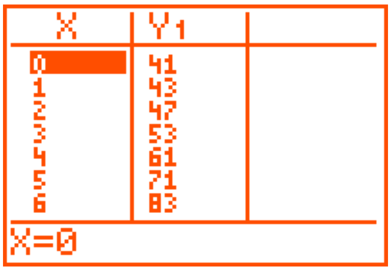

FIGUUR 2




FIGUUR 3




FIGUUR 4




# Verschenen / Speeltuin van de wiskunde. Opties, kansspelen, Escher, pi, Fermat en meer

**Redactie: Bart de Smit en Jaap Top**
**Uitgever: Van Veen Magazines/Natuur en Techniek, Diemen (2003)**
**ISBN 90 76988 20 X**

Uit het voorwoord: ‘Met deze bundel willen we voor een breed Nederlandstalig publiek de schoonheid en de opwinding van het beoefenen van wiskunde zichtbaar maken. Daarvoor grijpen we naar recente doorbraken, zoals het bewijs van Andrew Wiles van de laatste stelling van Fermat, naar opmerkelijke toepassingen op kansspelen, financiële markten en CD-spelers, en de opmerkelijke geschiedenis van het getal $\pi$ in de 16de eeuw in Nederland. (...) De meeste hoofdstukken vragen wiskunde op VWO-niveau van de lezer, soms vergezeld van enig doorzettingsvermogen. De nadruk ligt steeds op wiskundig begrip, inzicht en intuïtie, en niet op formule-vaardigheid.’

# Kaartspelletje

[ Rob Bosch ]

De dertien klaverkaarten uit een kaartspel schudden we goed waarna we deze stapel klaverkaarten omgekeerd op tafel leggen. Ik pak de bovenste kaart van de stapel en bekijk de kaart. Vervolgens pak ik weer de bovenste kaart van de stapel. Als deze kaart hoger is dan de eerste, mag ik hem houden en mag ik weer een kaart pakken. Als de kaart lager is dan de eerste, dan is het spel afgelopen. Het spel gaat net zolang door totdat ik een kaart van de stapel pak die lager is dan de vorige kaart. In het gunstigste geval kan ik dus 13 kaarten pakken. Daar staat echter tegenover dat ik mogelijk al na één kaart moet stoppen. Hoeveel kaarten zal ik gemiddeld uit de stapel van 13 kaarten kunnen pakken?

Voor een stapel met 2, 3 of 4 kaarten kunnen we het antwoord vinden door alle mogelijke verdelingen van de stapel uit te schrijven.
In het geval van twee kaarten gaan we gemakkelijk na dat we gemiddeld 1,5 kaart uit de stapel trekken.
Voor een stapel van drie kaarten met $k_3 > k_2 > k_1$ vinden we:

| volgorde van de stapel | aantal getrokken kaarten |
|---|---|
| $k_1k_2k_3$ | 3 |
| $k_1k_3k_2$ | 2 |
| $k_2k_1k_3$ | 1 |
| $k_2k_3k_1$ | 2 |
| $k_3k_2k_1$ | 1 |
| $k_3k_1k_2$ | 1 |
| Totaal | 10 |

Het totaal aantal getrokken kaarten is hier gelijk aan 10. Het gemiddeld aantal getrokken kaarten is dus

$$\frac{10}{3!} = \frac{5}{3}$$

Voor een stapel van vier kaarten, met $k_4 > k_3 > k_2 > k_1$, kunnen we op dezelfde wijze te werk gaan. We schrijven weer alle volgordes van de stapel op. Eerst alle volgordes waarbij de hoogste kaart $k_4$ onder op de stapel ligt.

| volgorde van de stapel | aantal getrokken kaarten |
|---|---|
| $k_1k_2k_3k_4$ | 3 + 1 |
| $k_1k_3k_2k_4$ | 2 |
| $k_2k_1k_3k_4$ | 1 |
| $k_2k_3k_1k_4$ | 2 |
| $k_3k_2k_1k_4$ | 1 |
| $k_3k_1k_2k_4$ | 1 |
| Totaal | 10 + 1 |

Aangezien hier de onderste kaart alleen zal worden getrokken als de stapel naar grootte is gerangschikt, is het aantal getrokken kaarten 1 groter dan bij de trekkingen uit drie kaarten.
Vervolgens bekijken we alle volgordes waarbij de hoogste kaart $k_4$ niet onderop ligt. Bijvoorbeeld de stapeltjes met de kaart $k_2$ onderop.

| volgorde van de stapel | aantal getrokken kaarten |
|---|---|
| $k_1k_3k_4k_2$ | 3 |
| $k_1k_4k_3k_2$ | 2 |
| $k_3k_1k_4k_2$ | 1 |
| $k_3k_4k_1k_2$ | 2 |
| $k_4k_1k_3k_2$ | 1 |
| $k_4k_3k_1k_2$ | 1 |
| Totaal | 10 |

De onderste kaart $k_2$ zal nu niet kunnen worden getrokken, want de hogere kaart $k_4$ komt altijd eerder. Het totaal aantal getrokken kaarten is hier dus gelijk aan 10, het totaal aantal getrokken kaarten bij een stapel van drie kaarten. Dit geldt ook als de kaart $k_1$ of $k_3$ onderop ligt. Het totaal aantal getrokken kaarten bij de stapeltjes waarbij de hoogste niet onderop ligt, is dus gelijk aan $3 \cdot 10$.
Het totaal aantal getrokken kaarten bij een stapel van 4 kaarten is dus gelijk aan $10 + 1 + 3 \cdot 10 = 4 \cdot 10 + 1 = 41$. Hieruit volgt dat het gemiddeld aantal getrokken kaarten gelijk is aan

$$\frac{41}{4!} = \frac{41}{24}$$

Voor de overgang van vier naar vijf kaarten kunnen we op dezelfde wijze te werk gaan.
In het algemeen geldt

$$T(n+1) = (n+1) \cdot T(n) + 1 \tag{1}$$

waarbij $T(n)$ het totaal aantal getrokken kaarten is bij een stapeltje van $n$ kaarten, gerekend over alle mogelijke volgordes van de stapel. Delen we in (1) links en rechts door $(n+1)!$ dan volgt

$$\frac{T(n+1)}{(n+1)!} = \frac{T(n)}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \tag{2}$$

Voor het gemiddeld aantal kaarten $K(n)$ geldt dus

$$K(n+1) = K(n) + \frac{1}{(n+1)!} \tag{3}$$

Uitgaande van $K(1) = 1$ vinden we zo $K(2) = 1 + \frac{1}{2!}$,

$K(3) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$, etc.

Het gemiddeld aantal kaarten bij een stapel van $n$ kaarten is gelijk aan

$$K(n) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Uit

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

volgt dat

$$\lim_{n \to \infty} K(n) = e - 1 \tag{4}$$

Het antwoord op de in de inleiding gestelde vraag is dat bij 13 kaarten het gemiddeld aantal getrokken kaarten ongeveer $e - 1$ is. Het maakt dus nauwelijks uit of we een stapel van 13 kaarten of van 100 kaarten nemen.

*Over de auteur*

*Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.*

## T. EHRENFEST-AFANASSJEWA

geb. 19 nov. 1876 — overl. 14 apr. 1964

In november 1961 werd een extranummer uitgegeven van het Mededelingenblad van de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. ter gelegenheid van de 85e verjaardag van Mevr. Ehrenfest. Als antwoord daarop schreef ze een artikel, dat ze aan de redactie toezond met het volgende briefje:

Hier is mijn dankzegging voor de nauwelijks verdiende viering van mijn verjaardag. Zoals ik ben, kon ik ook bij deze gelegenheid mijn tong niet stil houden en begaf me op een — enigszins — polemisch gebied. Ik vrees, dat dit stuk geen zwanezang zal blijken. Ik heb op mijn hart nu het probleem van de universitaire opleiding van de toekomstige leraren. Maar zeg het, als u genoeg van mij hebt!!!!

Tegelijk wil ik u een persoonlijk gerichte dank voor uw vriendelijkheid uitspreken. U bent immers van het bestuur van onze groep en ik vertrouw, dat die viering niet zonder uw toedoen gebeurde. Hoeveel andere leden van onze werkgroep daarmee sympatizeren, is al een vraag voor me . . .

Met hartelijke groeten

Uwe T. Ehrenfest-Afanassjewa

Twee karaktertrekken worden door dit briefje duidelijk gedemonstreerd: haar grote bescheidenheid en de onvermoeibare wil om over de didactiek van de wiskunde te blijven meedenken en meespreken.

Die didactiek van de wiskunde was dan in het bijzonder de didactiek van de meetkunde. Ze beschouwde de meetkunde daarbij eigenlijk als een onderdeel van de natuurkunde, zoals kan blijken uit haar geschrift: „Kan het wiskundeonderwijs bijdragen tot de vorming van het denkvermogen?" (Men vindt dit, met een aantal andere artikelen van haar hand, o.a. in de in 1960 by Thieme verschenen bundel „*Didactische Opstellen Wiskunde*". Ze werden verzameld en ingeleid door Br. Ernst). We lezen hierin onder meer:

Als men dan ook vraagt: waarom vindt men alleen in de wiskunde een zodanige duidelijkheid, dan moet het antwoord luiden: omdat elk gebied, dat die mate van duidelijkheid bereikt, daardoor al tot de klasse der „wiskundige" vakken bevorderd wordt. Daarom en daarom alleen wordt de meetkunde haast van haar ontstaan tot de wiskundige vakken gerekend, hoewel ze een zeker aspect van de natuur beschouwt en dus mede tot de onderdelen der natuurkunde behoort. Daarom mag men ook de rationele mechanica en de Maxwellse electrodynamica tot de wiskundige vakken rekenen.

In een noot voegde ze daaraan toe:

De onderzoekingen over niet-euclidische meetkunden en over ruimten van hogere dimensies zijn een bovenbouw op het oorspronkelijk systeem; analoge onderzoekingen zijn in principe ook voor elk ander deel van de natuurkunde en ook voor elk ander gebied van studie mogelijk. Trouwens Lobatschewsky heeft (en Gauss ook, naar men vermoedt) zijn geometrisch systeem als een beschrijving der natuur beschouwd, die wellicht exacter is dan die van Euclides.

Het is geen wonder, dat Mevr. Ehrenfest de meetkunde als deel van de natuurkunde zag, want haar denken was, tijdens haar studietijd en later, gevormd zowel door de grote wiskundigen als Klein, Hilbert en Minkowsky, als door de natuurkundigen Lorentz en Einstein. Haar belangstelling ging dan ook sterk uit naar sommige gebieden van de natuurkunde, zoals de thermo-dynamica.

Door de benoeming van haar man Paul Ehrenfest tot hoogleraar te Leiden kwam Mevr. Ehrenfest naar Nederland, waar ze al spoedig contact opnam met de Nederlandse wiskunde-leraren, o.a. Dijksterhuis en Reindersma. In 1915 verscheen in het Weekblad voor Voorbereidend en Hooger Onderwijs een vertaling van een harer Russische artikelen, nl. ,,De rol der axioma's en bewijzen in de meetkunde". Zoowel in Rusland als hier was dit artikel een revolutionair geluid in de wereld van wiskundeleraren en ouders.

In 1936 werd de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. opgericht en de vierde vergadering daarvan was al bij Mevr. Ehrenfest thuis. Hier bleek op welke wijze Mevr. Ehrenfest haar invloed op de didactiek van de wiskunde in Nederland zou uitoefenen: Het waren de vele en vele gesprekken en discussies met wiskunde-docenten, die op indirecte wijze haar baanbrekende gedachten deden doorwerken.

,,Altijd", zo schrijft Mevr. Proost-Thoden van Velzen in het bovengenoemde extra-nummer van het Mededelingenblad, ,,waren uw opmerkingen verrassend en waardevol. In mei 1938 besloten wij u meer de ruimte te geven. Een uitgebreid weekeinde van vrijdagavond tot en met dinsdag werd eind juli georganiseerd. U had de leiding, hield de inleidingen en leidde de discussies. Ik houd een onsterfelijke herinnering aan die dagen . . ."

In deze eerste vergaderingen van de Wiskunde-Werkgroep ontvouwde Mevr. Ehrenfest haar ideaal voor een meetkundeboek: een heel dun boekje met alleen de noodzakelijke stellingen, geen aparte vraagstukken, alleen zulke, die een directe bijdrage betekenen tot de theorie. (De ,,stamboom" van stellingen, die zij voor deze besprekingen opstelde, als een middel om de gedachten te bepalen, werd door sommigen verkeerd begrepen en tot doel verheven en als basis van een meetkundeleergang gebruikt.)

Toen de Wiskunde-Werkgroep zich bezig hield met het opstellen van een voorstel voor een nieuw wiskundeprogramma voor het V.H.M.O. heeft Mevr. Ehrenfest druk meegestudeerd. Ook zo was haar indirecte invloed op het tenslotte tot stand gekomen nieuwe leerplan groot.

Tot haar dood toe is het huis Witterozenstraat 57 in Leiden een plek geweest, waarheen zich wis- en natuurkundeleraren begaven om nieuwe didactische inzichten te toetsen. Men keerde van zo'n gesprek nooit onverrichterzake naar huis terug. In het laatste nummer van het Mededelingenblad heeft Prof. Freudenthal zijn discussiepartner (men zie bijv. de brochure over het onderwerp: ,,Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?") herdacht in een artikel met het opschrift: ,,De discussie is gesloten". Dat klinkt nogal definitief. Men zou er aan moeten toevoegen: ,,Maar de gesprekken zullen worden voortgezet".

Dr. P. M. van Hiele
G. Krooshof

*In memoriam voor mevrouw T. Ehrenfest-Afanassjewa in Euclides, jaargang 39 (1963-1964).*

*N.B. Meer over haar en over de Wiskunde Werkgroep van de WVO in de vorm van een beknopte biografie, resp. in het hoofdstuk van Ed de Moor in Honderd jaar wiskundeonderwijs (2000).*

*De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).*

# GESPREKKEN MET SJAAK

## De auteur, onderzoeker aan het Freudenthal Instituut, voert regelmatig gesprekken met schoonmaker Sjaak over wiskundige onderwerpen. Aflevering 3.

[ Jan van den Brink ]

### Sjaak en apparaten

Sjaak is een man van 43 met alleen *BLO*; speciaal basisonderwijs of lom-onderwijs zouden we nu zeggen. Hij werkt op mijn instituut als schoonmaker, vandaar dat we af en toe een praatje kunnen maken over de andere activiteiten die hij erop na houdt, bijvoorbeeld met apparaten. Hij heeft altijd een mobieltje op zak, thuis heeft hij een 'bakkie' (27MC-zender), computer, drumstel en tv. Mijn GPS, waarop je je positie op aarde kunt aflezen, noemt hij 'een lekker dingetje'. Het is duidelijk: apparaten hebben zijn warme belangstelling. Maar wat betekent dit nu voor ons (speciaal) onderwijs?

### Vossenjacht

Meestal weet ik het gesprek wel een beetje naar mijn hand te zetten, hoewel ik de laatste tijd het gevoel heb dat Sjaak het roer meer en meer overneemt en de apparaten in opmars zijn. Terwijl hij veegt en aflapt, kijkt hij met een scheve blik naar mijn bureau en informeert beleefd naar wat *ík* uitvoer: '...of ik iets voor leerlingen maak?' Voor het vmbo probeer ik inderdaad een GPS-project te ontwerpen.
'Kijk je wel eens naar *Planet-race* op tv?', vraagt hij en vreest meteen mijn antwoord te weten. 'Op Veronica, dat heet nu Yorin', probeert hij nog. Maar nee, dat is niet mijn favoriete tv-kanaal, moet ik bekennen.
'Maar dáár hebben ze nou allemaal een GPS! Weten ze precies waar ze zitten. Daar kan je leren, dat je niet zònder kan. Geen dag!'
Ik dacht zelf aan een oud spelletje, aan *Vossenjacht*. Dat spel zou ik met een GPS kunnen moderniseren: posities van de vos ermee laten vastleggen.
Sjaak: 'Ik heb eens een vossenjacht gespeeld met een *bakkie*. 't Kan ook met een *walkietalkie*. Iemand verstopt zich en zendt een signaal uit. Dan zie je aan je eigen walkietalkie-meter hoe ver je van hem af zit. Hoe verder weg, hoe zwakker het signaal.'
'Zijn er dan ook plekken waar het signaal gelijk blijft?' Mijn vraag is een soort natuurlijke reflex van de wiskundeleraar. Sjaak vindt het maar een flauwe grap: 'Ja, als je in een rondje blijft lopen om de vos heen. Maar wie doet dat nou?' En hij vervolgt de gesprekslijn: 'Zoiets wil je ook met de GPS?'
Ik overweeg dat de vos zijn coördinaten *per mobieltje* kan doorgeven aan de jagers.
'Laat ze *sms-en*', raadt Sjaak aan, 'dat kost ze minder beltegoed en de tekst blijft staan.' Ook voor andere kosten heeft Sjaak oplossingen: 'Hoeveel GPS-en heb je nodig?' 'Eén voor elke drie leerlingen. Vind je dat duur?' 'Het hangt van de school af', denkt Sjaak, 'wat die ervoor over heeft.' Voor arme scholen heeft hij echter een goedkope aanbieding: 'Je kan een speurtocht met coördinaten uitzetten langs gebouwen, als *vossen*, in de buurt. Die moeten ze vinden.' En enthousiast stelt hij voor de GPS-posities op te nemen van alle gebouwen in de wijk en ook maar meteen *'het midden van Utrecht'*. Geen makkelijk probleem, overigens, want wat *is* eigenlijk 'het midden van Utrecht'?
Even proberen we samen dit spel uit, *in gedachten*. 'Stel, een vos zit op een plek met de coördinaat Noord 52° 30'. Hoe kun je die dan vinden?'
Ik denk zelf de vos te vangen door al zoekend de coördinaten op mijn GPS voortdurend te *vergelijken* met die van de vos. Maar Sjaak heeft een betere oplossing: 'Je kan de plek van de vos toch gewoon *invoeren*. Dan wijst de GPS je er vanzelf heen.'
Typisch Sjaak: handig met apparaten. Hij ziet pijlsnel hun mogelijkheden, herkent direct hoe de GPS in de échte wereld gebruikt wordt, speelt en combineert soepel met al die wetenschap. Meesterlijk! Maar, dat moet gezegd zijn, hij oefent ook veel. Het is zijn lust en zijn leven.

### Een GPS-tochtje

Over *het project* raakt hij steeds meer opgewonden. Alles staat hem helder voor de geest, en het kan ook

niet lang uitblijven of we gaan op een goede dag de deur uit. We maken een tochtje door de buurt. Sjaak voorop, met de GPS; ik er achteraan.
Hij vraagt onderweg van alles over het ding. Leest *N* op het display. Ik: '*N* is de richting Noord waarin we lopen.' 'O, een kompas zit er ook al op!' De GPS is niet in zijn geheel direct te begrijpen, maar het lukt Sjaak al aardig om hem te hanteren. Het is als met wiskundige kennis: na een tijdje van oppervlakkig gebruik, kom je tot een dieper inzicht.
Sjaak krijgt steeds meer achting voor de GPS, tuurt al wandelend vertederd naar het scherm. Dat kan levensgevaarlijk zijn. 'De leerlingen moeten ook op het verkeer letten', mopper ik. Hij stopt nu bij elke hoek van de straat, leest dan 'de stand' (de GPS-positie) hardop voor, ik noteer en daarna steken we pas over.


## Op de kaart

Heelhuids keren we terug van onze GPS-tocht en kijken we op een *kaart* van Utrecht. Hoe zijn we gelopen?
'We zitten vlakbij Station Overvecht.' Sjaak zoekt langs grote structuren (langs wegen en spoorlijnen op de kaart) naar die plek. Maar hij kiest het Centraal Station. Helaas, verkeerd. Maar omdat de kaart daar niet met onze omgeving overeenstemt, zoekt en ontdekt hij een eindje verderop langs de spoorlijn het tweede en juiste station Overvecht. De vergissing is verholpen en we tekenen onze rondrit in op de kaart.
Op de GPS is ook een kaart te vinden, de *moving map*. We leggen ze naast elkaar; zie figuur.
'Klopt!' Sjaak is verrast. De moving map geeft een zelfde beeld van onze wandeling.

## Sjaaks wiskundig denken

Het *wiskundig denken* van Sjaak interesseert me sterk en hij vindt al die aandacht erg voornaam. 'Nou, vooruit dan maar', besloot hij ooit eens ruimhartig, 'ik ben je *proefkonijn*' en inderdaad, hij openbaarde me zo het een en ander. Hij bezit bijvoorbeeld een zucht naar kennis over *'echte' dingen*, zoals de aarde, de zon, instrumenten en apparaten. Die kennis, vergaard uit praktische situaties, heeft onverwachts grote diepgang. Niet in abstracte zin, maar in het vermogen om intelligent en adequaat *die kennis in te passen in nieuwe omstandigheden en systemen*. Sjaak vindt het bovendien heel gewoon om zichzelf *vragen* te stellen en om, als een tweede natuur, overigens met wisselend succes, voortdurend onderwerpen met elkaar te *verbinden*. Hij tracht daarmee overeenkomsten te zien tussen allerlei verschillende situaties, om zo vanuit kleine verschijnselen naar grote principes te komen. Het zijn generaliserende uitbreidingen in de breedte. Als je echt wilt laten abstraheren op school, is dat een aangewezen weg.

## Voor een ander

Bij het GPS-project komt echter nog iets anders aan het licht. 'De apparaten moeten klaar liggen op school', vindt Sjaak. 'Niet om ze te stelen, maar om ze te onderzoeken. Dat zou mooi zijn.'
Eigenlijk gaat het hem niet om de uitbreiding van zijn *eigen* kennis en inzichten, maar om die van de vmbo-leerling van nu. Als ex-blo-er voelt hij zich nauw verwant met hen; hij wil ze helpen, wil iets voor hen betekenen. Het gaat hem duidelijk om *een groter belang* dan alleen het zijne. Daardoor is zijn bemoeienis met het project zo hartverwarmend en intens. Alsof hij zelf weer in de klas zit.

Wordt vervolgd!

*Over de auteur*

*Dr. Jan van den Brink (e-mailadres: janvdb@fi.uu.nl) was onderwijzer, studeerde wiskunde, en is werkzaam als ontwerper/onderzoeker van reken- en wiskundeonderwijs aan 4- tot 18-jarigen aan het Freudenthal Instituut. Zijn belangstelling gaat vooral uit naar wiskunde die ontdekt of uitgevonden wordt door lerenden, en naar het ontwerpen en onderzoeken van daarbij passend onderwijs.*

# 90 MINUTEN ACTIEF?

## Naar aanleiding van ervaringen met lessen van 90 minuten

[ Bert Zwinkels ]

### Ervaring 1: Feyenoord–PSV

De 25 hoofdrolspelers komen binnen.
Iedereen is op tijd.
Iedereen weet zijn plek.
Iedereen weet wat hij moet doen.
De spullen zijn in orde.
Van de kant komen soms wat aanwijzingen.
Er gebeuren genoeg dingen om 90 minuten lang geboeid te zijn.
Natuurlijk presteert niet iedereen even goed.
Natuurlijk zijn er soms gele kaarten nodig.
Natuurlijk, de spullen liggen keurig netjes klaar voor aanvang.

### Ervaring 2: Verburch D3–Monster D5

De 25 hoofdrolspelers komen binnen.
Enkelen weten niet op welk veld ze moeten zijn.
Eén is nog even naar de wc.
De scheidsrechter is wat later.
Eén heeft gymschoenen aan en na 5 minuten moet een ander zijn veters opnieuw strikken.
Na 20 minuten staat het 6–0.
Het is zeer eenzijdig.
Na 45 minuten is het verlangen naar de kantine heel sterk.
Natuurlijk doen de jongens hun best.
Natuurlijk kan iedereen wel eens wat vergeten.

### Ervaring 3: Wiskundeles 1B

De 25 hoofdrolspelers komen binnen.
Ze weten hun plaats.
Ze weten precies wat ze moeten doen. Het programma staat op het bord.
Van de kant komen wat aanwijzingen.
Maar de kinderen doen niet hun best.
De kinderen luisteren slecht.
Sommigen hebben geen rekenmachine, anderen geen boek.
De kinderen vinden het niet boeiend genoeg.
Na 45 minuten is het verlangen naar de bel heel sterk.

### Ervaring 4: Natuurkundeles 1B

De 25 hoofdrolspelers komen binnen.
Ze weten hun plaats.
Ze weten precies wat ze moeten doen.
De spullen liggen klaar.
Van de kant komen soms wat aanwijzingen.
Het is afwisselend genoeg om 90 minuten lang enthousiast bezig te zijn.
Natuurlijk presteert niet iedereen even goed.
Natuurlijk is er wel eens een waarschuwing nodig.

Trek zelf je conclusie.

### Nawoord

Op onze locatie hebben we de basisberoepsgerichte en de kaderberoepsgerichte leerweg. De leerlingen van tegenwoordig, en zeker die binnen het vmbo, moeten meer zelf bezig zijn en niet te veel en te lang hoeven te luisteren. Binnen ons team hebben we afgesproken te proberen meer praktisch, projectgericht te gaan werken met onze leerlingen. Om dit te kunnen realiseren hebben we afgesproken dat alle vakken dit jaar gaan werken met lessen van 90 minuten.
Na een paar maanden werd aan mij gevraagd of ik mijn ervaringen wilde opschrijven in de 'Bea-info', de personeelsinfo van onze vestiging. Ik heb toen bovenstaande tekst geschreven, bedoeld als een vrolijke poging mijn ervaringen weer te geven.
Tot mijn grote verbazing kreeg ik veel reacties op dit stukje. Leuk, goed, raakt de kern, wat moet ik ermee, wat is nu de conclusie, enzovoorts.
We zijn nu weer een paar maanden verder in het schooljaar en mijn ervaringen zijn nog steeds hetzelfde. Bij het vak natuurkunde/scheikunde is het mij heel goed gelukt om de 90 minuten op een goede manier te vullen. Veel afwisseling. Veel doe-opdrachtjes. De leerlingen zijn zeer gemotiveerd. (Ik wil er wel bij vermelden, dat ik deze lessen zelf maak en dat dat erg veel tijd kost.)
Bij wiskunde lukt mij dat veel minder goed. Ik probeer de leerlingen zoveel mogelijk zelf allerlei opdrachten te laten maken. Ik laat ze zelf nakijken. Ik probeer de werkvormen af te wisselen. Maar de concentratie, de spanningsboog, die is na 30 minuten op. Als het nu aan mij gevraagd zou worden, dan wil ik bij natuurkunde/scheikunde nooit meer terug naar 45 minuten, maar bij wiskunde juist wél heel graag.

Ik ben benieuwd of er reacties uit 'het veld' komen waar ik mijn voordeel mee kan doen.

*Over de auteur*

*Bert Zwinkels (e-mailadres: zwinkelsbert@hotmail.com) is docent wis- en natuurkunde aan het Terra College, locatie Beatrijs, te Den Haag.*

# De veranderende rol van de leraar

Lezing 15 november 2003, NVvW-studiedag

[ Leo Prick ]

Toen ik in 1965, na mijn studie Nederlands, leraar werd op een lyceum ging aanvankelijk al mijn aandacht uit naar mijn vak en mijn lessen. Daar had ik mijn handen aan vol. Maar ik raakte al snel gefascineerd door het onderwijs zelf. Ik wilde het in al zijn facetten leren kennen. Ik studeerde daarnaast psychologie, werkte bij het Cito, als vakdidacticus en onderwijskundige bij een hogeschool en een universiteit, promoveerde op een onderzoek naar de in de loop der jaren veranderende opvattingen van leraren over hun vak en de leerlingen, en eindigde als directeur van Intervu, een onderzoek- en adviesbureau op het gebied van het onderwijs. Een leven lang in het onderwijs dus.

Ik woon nu half om half in Nederland en Frankrijk. Ik vind het interessant om te schrijven over Frankrijk, de verschillen in cultuur met die van Nederland, maar daarbij gaat mijn aandacht toch altijd speciaal uit naar die eeuwige liefde: het onderwijs.

Vaak wordt mij gevraagd: is dat niet saai, altijd maar weer dat onderwijs? Een opmerking die overigens geen Fransman ooit zal maken. Want die opmerking zegt veel over ons, Nederlanders. In Nederland is onderwijs en cultuur vooral een politieke en financiële kwestie. Maar ministers van Onderwijs in Frankrijk zijn altijd autoriteiten op hun terrein, hebben daar een aantal boeken over geschreven. In Nederland benoemen we op onderwijs economen als Pais en Ritzen. U denkt misschien: Van Kemenade, dat was toch een echte onderwijsman? Nee, dat was een socioloog en politiek dier die door middel van het onderwijs de maatschappij wilde veranderen. Net als na hem Wallage. Want, in het allerbeste geval, is het onderwijs middel, nooit doel. Dit ligt anders, zult u wellicht denken, met mensen als Netelenbos en Van der Hoeven. Maar hun kijk op onderwijs is een heel beperkte. Uitgesloten dat zij er ooit een boek over hadden kunnen schrijven. Zo wordt het beleid van de huidige minister ten aanzien van het vak wiskunde in hoge mate ingegeven door haar eigen ervaring daarmee. Dat is duidelijk.
Ik wil het gaan hebben niet over wiskunde, want daar heb ik net zo weinig verstand van als minister Van der Hoeven, maar over uw rol in het onderwijs. Hoe die is veranderd en verder zal veranderen. En wat voor eisen dat stelt aan de invulling die moet worden gegeven aan het leraarsberoep. En dan ga ik het niet hebben over een andere manier van lesgeven, niet over hoe u uw werk als leraar moet uitoefenen, maar over de wijze waarop u zich als leraar moet opstellen. Moet opstellen. Dat klinkt erg directief en, hoe zeer ook in strijd met moderne pedagogische opvattingen, zo is het ook bedoeld.
Moet opstellen om te zorgen voor een werkklimaat waarin recht wordt gedaan aan uw deskundigheid. Want dat is toch ongetwijfeld wat u wilt. Waarover u – terecht – vaak klaagt dat het daaraan ontbreekt.

Tijdens een gesprek met Van Kemenade over een onderzoek naar het functioneren van de Nieuwe Lerarenopleidingen, de nlo's, zei de minister dat dit niet ter discussie mocht worden gesteld, want een leraar was in de eerste plaats leraar, ook in de tweede plaats leraar en pas in de derde plaats leraar in een bepaald vak. Deze opvatting heeft zijn stempel gedrukt op de ontwikkeling van het onderwijs de afgelopen decennia. Opleiding in twee vakken, 3de graads werd zomaar 2de graads, 2de graads gebied werd steeds verder uitgebreid, 1ste graads werd financieel ondergewaardeerd. Overigens betekent dit niet dat ik meen dat een leraar zich niet ook vakinhoudelijk verder kan ontwikkelen. Waar het om gaat is dat de vakdeskundigheid van de leraar in het beleid stelselmatig is gebagatelliseerd. Terwijl iedereen weet hoe bepalend de passie van een leraar voor zijn vak kan zijn voor de leerlingen. Iedereen kan daar uit zijn eigen schoolherinnering voorbeelden van geven. Het belang van het vak heb je mij dan ook nooit horen relativeren. Maar daarnaast vind ik wel dat leraren ook belangstelling moeten hebben voor onderwijs in algemene zin. De huidige ontwikkelingen in het onderwijs maken dat meer dan ooit gewenst. Noodzakelijk zelfs.

Over die ontwikkelingen. Kern daarin: de autonomie van de scholen. Niet iedere verandering betekent vooruitgang. Geldt dat nu ook voor de autonomievergroting van de scholen. Daar wordt vaak tegenaan geschopt. Gepleit wordt voor een terugkeer naar de vroegere wijze van financiering. Laat ik als voorbeeld nemen de brugklasdiscussie van enige tijd geleden. De brede brugklas, zo werd geconstateerd, verdwijnt. De reacties van schoolleiders: bij ons helemaal niet (Friese platteland), de brugklas is niet meer van deze tijd (dit geluid kwam uit de grote steden in de Randstad). De onderwijssituatie is, afhankelijk van de plek waar de school staat, klaarblijkelijk heel verschillend. Oorzaak: diversificatie van de maatschappij. En nu kom ik bij een van de wezenskenmerken van ons onderwijs: mensen mogen een school vrij kiezen. De consequentie daarvan is: scholen zijn daardoor steeds meer van elkaar gaan verschillen. Als je in een buurt meer cafés of in een stad meer hockeyclubs hebt zie je precies hetzelfde. Dat is een onontkoombare ontwikkeling in een land waar ouders mogen kiezen. En, let wel, dat is heel uniek.

In Parijs had ik onlangs een monteur op bezoek van de Franse PTT. Die vertelde me het volgende. Hij heeft twee zoontjes en woont in het 17de arrondissement. Die wil hij op een goede school, maar omdat de buurt waar hij woont grotendeels wordt bevolkt door laag opgeleiden is het niveau van het onderwijs er laag. Hij moet dus of verhuizen naar een duurdere buurt of zijn kinderen naar een privé-school sturen. Beide opties zijn te duur. Dus maken zijn kinderen straks een kansarme start. De situatie in Amerika en Engeland is min of meer dezelfde. In Nederland daarentegen biedt het onderwijs iedereen de mogelijkheid tot opwaartse mobiliteit. Het principe van vrije schoolkeuze moeten we dan ook koesteren.

Conclusie: dat scholen steeds meer gaan verschillen is onontkoombaar. Dus kun je ze niet centraal aansturen zoals we dat vroeger deden. Dat aansturen is dus de taak van besturen. Een tweede aandachtspunt: de vakbonden. Dat zijn binnen ons onderwijsbestel heel curieuze clubs. Ze zijn er om de rechtspositie van leraren, met name die van hun leden, te handhaven. Maar daarnaast werpen zij zich ook op als hoeders van het onderwijs en bemoeien zich met het onderwijsbeleid. En dat doen ze lang niet altijd op de manier waarop hun leden dat willen. (Wat dat betreft is hun rol vergelijkbaar met die van de ANWB. Daar ben ik lid van vanwege de wegenwacht. Maar in mijn naam protesteren ze ook tegen het kwartje van Kok of tegen rekeningrijden.) Bovendien: wat goed is voor het onderwijs en wat goed is voor de leden, die twee bijten elkaar geregeld. Hét voorbeeld is natuurlijk het HOS-akkoord geweest. Goed voor de leden, desastreus voor het onderwijs. Ander voorbeeld: ADV. Leuk voor de

**‘de vakbonden zijn heel curieuze clubs’**

leden, slecht voor met name het basisonderwijs. Onderwijs in allochtone talen werd gehandhaafd niet om onderwijskundige wenselijkheid maar om de betreffende leraren hun werk te laten behouden. Laatste voorbeeld: de minister benoemt een commissie ‘voor een samenhangend stelsel van onderwijsberoepen’. De minister benoemt de leden à titre personnel. Walter Dresscher, de voorzitter van de AOb, noemt het passeren van de bonden daarbij absoluut onacceptabel, ondemocratisch en niet transparant, terwijl ik dan denk: eindelijk neemt de overheid nou eens de verantwoordelijkheid voor zijn eigen werk.
Uw voorzitter toonde zich vanochtend verheugd omdat ‘het AOb-standpunt een heel eind in onze richting is opgeschoven’, maar die bond behoort helemaal geen mening te hebben over meer of minder wiskundeonderwijs. Die mening is ook geen

cent waard want wat voor het ene vak erbij komt, gaat er elders af. En wat denkt u dat die bond doet als zij moet kiezen? Dan heeft zij uiteraard geen mening, want dat andere vak, dat zijn ook leden.

Waarom zoveel aandacht voor de rol van de bonden? Omdat hun positie niet in overeenstemming is met hun taak. Toch is het zo dat als een minister tot overeenstemming komt met de bonden, die minister kan doen of laten wat hij of zij wil, of beter, wat die twee willen.
Dit betekent dat in het onderwijsbeleid vooral gekeken wordt naar financiële en politiek-ideologische zaken. Dat laatste heeft ons dus opgezadeld met een politiek correct maar voor het basisonderwijs desastreus vrouwenvoorrangsbeleid bij de benoeming van directeuren, een eindeloze middenschooldiscussie uitmondend in de rampzalige basisvorming, het de nek omdraaien van de mavo, om maar enkele voorbeelden te noemen.
Wij kennen in Nederland niet een instantie die opkomt voor goed onderwijs, onderwijs dus zoals de klanten, in casu de ouders, dat willen. Hoe zit dat elders? Kent men elders wel een instantie die een vuist kan maken en alleen maar het belang van goed onderwijs beoogt?
In België, de Verenigde Staten en Frankrijk zie je dat ouders goed zijn georganiseerd. Chirac laat zich graag uitnodigen om te komen spreken voor zo'n club waar er in Frankrijk ettelijke van zijn met miljoenen leden. Die clubs protesteren bijvoorbeeld tegen de stijging van de prijs van schoolboeken als die stijging hoger ligt dan de kosten van levensonderhoud. Of omdat er wordt bezuinigd op onderwijsassistenten of omdat de regering de leeftijd waarop kinderen naar school mogen wil verhogen van 2 naar 3 jaar.
In Nederland hebben we geen ouderclub. Alleen vakbonden en politici die nauw met elkaar zijn verbonden. Onderwijs is daardoor een financieel en arbeidsrechtelijk onderwerp. Dit heeft gevolgen. In Frankrijk zijn de uitgaven per VO-leerling per jaar 8120 euro. In Nederland 5600.
Schoolbesturen bezitten steeds meer autonomie. Die besturen zijn zich gaan organiseren in grotere gehelen. Dat is het belang van die bestuurders. Lang niet altijd dat van de scholen. Er gaat ook steeds meer geld van de scholen naar die bestuursorganen. Ze betalen zichzelf ook steeds hogere salarissen. Uit het geld dat ze krijgen van de Rijksoverheid wordt een deel gereserveerd.
Die autonomie heeft daardoor duidelijk uitgesproken nadelige effecten voor de scholen en dus voor het onderwijs.
Ik vind dat leraren zich voor een paar dingen moeten sterk maken.
1. Dat, net als in het verleden, 70% van de personele gelden die naar de besturen gaan, wordt besteed aan de uitvoering van het onderwijs. Van die 30% wordt betaald: bestuur en beheer, management, reserveringen, etc.
2. Dat de salarissen van bestuur en management in de pas lopen met die van de leraren.
3. Dat uw vakbond zijn activiteiten beperkt tot die taken waartoe u lid bent van een bond: onderhandelen over rechtspositionele regelingen en niet allerlei onderwijspolitieke activiteiten ontplooit.

Leraren zijn als besten in staat beleidsvoornemens op het gebied van het onderwijs – niet alle beleidsvoornemens, maar die welke de dagelijks praktijk betreffen – op hun merites te beoordelen. Wat uw vak betreft doet u dat uitstekend. Ik denk dat er zelden zo'n energieke en eensluidende serie van lobby-activiteiten is geweest. Ik kan me er geen enkele voor de geest halen. Maar als het gaat om meer algemene zaken, blijven leraren onzichtbaar.
Als een minister van Justitie iets van plan is wat advocaten liever niet willen, zitten er meteen in allerlei praatprogramma's goedgebekte advocaten die ons wijsmaken dat de rechtsstaat Nederland in acuut gevaar is.
Als een minister van Onderwijs iets van plan is wat leraren niet zien zitten, hoor je niks, of zit er een vertegenwoordiger van de bonden of een politicus, of bestuurder, of schoolleider, en allemaal hebben ze een abstract, algemeen verhaal. En daar overtuig je niemand mee.
Maar de leraar van vlees en bloed, die zich oprecht boos maakt zonder te vervallen in de particuliere situatie van zijn school, die heb ik nog nooit gezien.
Indertijd promoveerde ik op een proefschrift getiteld 'Het Beroep van Leraar'. Een vriend van me, tandarts, zei: als dat over mijn beroep zou verschijnen, zou iedere tandarts dat kopen. En omdat er meer leraren zijn dan tandartsen, dacht hij dus dat ik rijk zou worden. Maar voor leraren geldt: hun beroep en hun werk betreft primair hun vak. Leraren hebben in het algemeen niet de behoefte hun werk te plaatsen in een breder perspectief dan dat van hun vak of van hun school. Dat vind ik heel verklaarbaar, daar is ook niets mis mee, maar dat moet wel veranderen, en ik zal u vertellen waarom.

In het verleden kon je als leraar klagen over de ontwikkelingen in het onderwijs, en de schoolleiding klaagde eensgezind mee. Logisch: de organisatie van de school, van het onderwijs, de werksituatie van de leraar èn van de schoolleider, dit alles werd tot in detail door Zoetermeer bepaald.
De positie van de leraar had, in vergelijking met die van andere hoog

opgeleiden, een heel uitzonderlijk karakter. Zijn werksituatie werd tot in detail door de overheid bepaald. Zijn vrijheid van werken was groot, maar wanneer en waar, dat was voor het hele jaar vastgelegd. Weliswaar door de directie, maar conform de directieven van het Ministerie van OCenW en die gaven geen enkele speelruimte. Dat gold het aantal lesuren per klas, de duur ervan, aantal lesuren per vak, etc. Maar inmiddels is die situatie ingrijpend veranderd. Scholen, schoolleiders, bestuurders, bepalen grotendeels zelf de regels. Voorbeeld: 40 of 45 minuten roosters. Dat is door de scholen bedacht. Die zagen daarin een maatregel voor efficiency, bezuinigingen dus, die de Rijksoverheid nooit had durven nemen. Dan had iedereen geroepen: sigaar uit eigen doos. Maar nu hebben schoolbesturen dat ingevoerd, het aantal lesuren voor leraren zelfs verhoogd en zijn naar de pers gelopen om die te vertellen dat de leraarstaak is verlicht.
Als gevolg van de veranderde verantwoordelijkheden van directie en bestuur is de positie van leraren een andere geworden. De leraar die klaagt, vindt niet langer de schoolleiding aan zijn zijde, want de klachten betreffen op zijn minst ten dele keuzes die de schoolleiding heeft gemaakt. Klagen heeft daardoor een andere lading gekregen, die van niet-coöperatief, querulant.
Leraren noch schoolleiders hebben deze ontwikkeling goed doordacht. Dat blijkt bijvoorbeeld uit het feit dat schoolleiders de leraren zien als de belangrijkste belemmering om te realiseren wat hen voor ogen staat. Leraren van hun kant hebben meestal weinig goede woorden over voor hun schoolleiding of hun -bestuur. De scheiding tussen schoolleiding en bestuur is niet altijd duidelijk. Sommige besturen zijn namelijk zo groot dat ze een soort van Klein Zoetermeer zijn gaan vormen, waar leraren en directie zich eensgezind tegen verzetten, maar in de meeste gevallen bepalen directie en bestuur samen, in overleg, het beleid.

Er is dus in veel gevallen sprake van polarisatie tussen leraren en directie/bestuur. Dat was vroeger niet zo en dat is dus een gevolg van de veranderde verantwoordelijkheden van directie/bestuur.
Daarmee ben ik gekomen bij waar het mij vandaag om gaat. En dat is dat de rol van de leraren niet is mee veranderd. En dat is logisch, want in die ontwikkelingen werden ze ook nooit betrokken.

De gepolariseerde verhouding, hoe verklaarbaar ook uit het recente verleden, is op zich verwonderlijk. Want schoolleiding en leraren hebben op details dan wel hier en daar verschillende belangen, grosso modo streven zij hetzelfde na. Namelijk een school die naar tevredenheid van personeel, leerlingen en ouders functioneert. Gespannen verhoudingen tussen directie en leraren, en ook tussen leraren onderling, hebben hun weerslag op die school, op het functioneren dus van die school naar tevredenheid van directie, leraren en leerlingen.

Wat moet er nu veranderen, en hoe kan dat?
Autonomie houdt in dat de organisatie zelf oplossingen zoekt voor de problemen waarvoor zij zich geplaatst ziet. In het onderwijs is dit steeds opgevat als: de directie/bestuur zoekt oplossingen.
Maar, in een moderne arbeidsorganisatie met hoog opgeleide medewerkers moeten de oplossingen komen uit de organisatie zelf, van de werkvloer, en zo lang dat niet zo is worden de beslissingen niet gedragen door de medewerkers die deze moeten uitvoeren en ontstaan er wrijvingen. En dat is wat nu in het VO, HBO en MBO op veel plaatsen gebeurt.
Een goed voorbeeld is het lerarentekort. Stel: u als sectie wiskunde slaagt er niet in een goede leraar te vinden als opvolger van een collega die met pensioen gaat. Beste sectie wiskunde, hoe denken jullie dat probleem op te lossen. Uitgaande van het gegeven dat een leraar $x$ euro per jaar kost. Wat voor alternatieve oplossingen weten jullie te bedenken? Kom alsjeblieft met voorstellen.
Ander voorbeeld: Beste leraren, we hebben de laatste tijd veel lesuitval door zwangerschap, burn-out en het niet kunnen vinden van vervanging. Dat geeft veel onrust en leerachterstanden. Het spaart ook veel geld uit. Nu zijn de lusten voor het bestuur (uitgespaarde salariskosten) en de lasten voor de leraren (veel onrust, leerachterstanden). Hoe lossen we dit op?

Concluderend.
De autonomie is onomkeerbaar.
Het is in het belang van de scholen dat besturen niet te klein, maar ook niet al te groot worden.
De autonomie moet er zijn voor de scholen.
Een min of meer autonome school kan alleen maar goed functioneren als de gang van zaken wordt gedragen door de leraren.
Daarbij gaat het niet om formele zeggenschap, maar om het gezamenlijk vinden van oplossingen voor alle problemen met betrekking tot onderwijs en lesgeven waar de school zich voor geplaatst ziet.
Ik wens u daarbij succes.

*Over de auteur*

*Dr. Leo Prick studeerde Nederlands en psychologie, en is tegenwoordig publicist en onderwijsadviseur. Bekend in brede onderwijskring is zijn wekelijkse onderwijscolumn in NRC Handelsblad.*

# Van de bestuurstafel

[ Wim Kuipers ]

## Vmbo

Het bestuur heeft een brief gestuurd aan het ministerie met betrekking tot de keuze die gemaakt moet worden uit de domeinen. Zoals u weet is, afwisselend uit het examenprogramma voor vmbo, òf meetkunde òf informatieverwerking/statistiek aan de beurt.
De *werkgroep vmbo* adviseerde het bestuur om het ministerie te vragen deze regeling op te heffen.
Het examen oogt saai doordat er weinig afwisseling is voor de leerling.
Het ontbreken van statistiek is voor een groot aantal leerlingen in het nadeel. Voor veel leerlingen is de meetkunde niet altijd even gemakkelijk, zeker als het meetkunde in de ruimte betreft. Statistiek ligt voor velen toch wat gemakkelijker.
Geen meetkunde maar wel statistiek geeft een enigszins zwaar accent op rekenen. De veelkleurigheid is er af.
We vragen ons in elk geval af, of de vmbo-leerling wel gebaat is bij deze afwisseling. Daarnaast bereiken ons berichten dat als gevolg van deze wisseling van domeinen binnen de scholen soms al te vroeg een domein wordt afgesloten.
De samenhang met andere vakken komt daardoor wellicht onder druk te staan.
Kortom: uitsluiting van een domein in het centraal schriftelijk examen lijkt ons niet langer verantwoord.

Leeswijzer voor de tabellen:

B = basisberoepsgerichte leerweg
K = kaderberoepsgerichte leerweg
T = gemengde en theoretische leerweg

In de tabellen is telkens aangegeven:
- welke exameneenheden tot het examenprogramma behoren
- voor iedere exameneenheid: binnen welke leerweg(en) deze geldt
- over welke exameneenheden het c.s.e. gaat in elk der leerwegen, in de periode 2004-2007


Regeling aanwijzing exameneenheden centrale examens algemene vakken vmbo 2006 en 2007

**Wiskunde**

| EE | Naam | B | K | T | Centraal examen in 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| WI/K/1 | Oriëntatie op leren en werken | x | x | x | | | | |
| WI/K/2 | Basisvaardigheden | x | x | x | | | | |
| WI/K/3 | Leervaardigheden in het vak wiskunde | x | x | x | B,K,T | B,K,T | B,K,T | B,K,T |
| WI/K/4 | Algebraïsche verbanden | x | x | x | B,K,T | B,K,T | B,K,T | B,K,T |
| WI/K/5 | Rekenen, meten en schatten | x | x | x | B,K,T | B,K,T | B,K,T | B,K,T |
| WI/K/6 | Meetkunde | x | x | x | | B,K,T | | B,K,T |
| WI/K/7 | Informatieverwerking, statistiek | x | x | x | B,K,T | | B,K,T | |

*Uit: CEVO-mededeling 19 augustus 2003 (CEVO-03-449), Gele Katern 2003, nr. 19*

# Puzzel 795 - Leefruimte voor de pentomino's

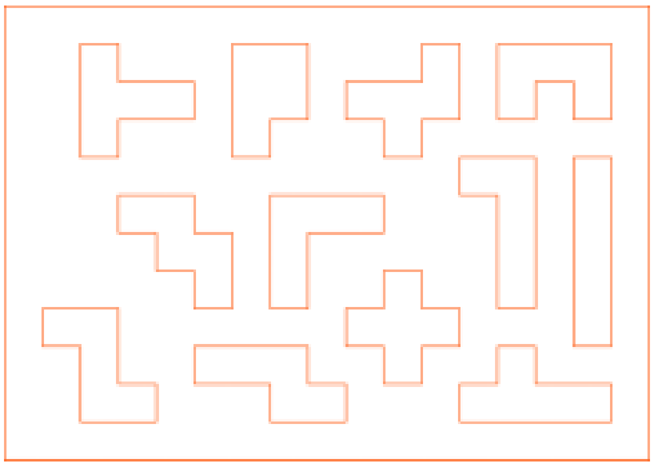
Het is weer eens tijd voor een pentomino-opgave. In figuur 1 zijn de twaalf pentomino's op een (onzichtbaar) vierkant eenheidsrooster geplaatst met de randen van de pentomino's langs roosterlijnen. De pentomino's raken elkaar niet, zelfs niet met een hoekpunt, en ze komen evenmin tegen de rand. De oppervlakte van de pentomino's is bedoeld als 5. De oppervlakte van de rechthoek is dus 204 ($12 \times 17$).
Het is misschien al op het eerste gezicht duidelijk dat de rechthoek, met behoud van bovenstaande eigenschappen, wel iets kleiner kan.

## Opgave

Probeer de kleinst mogelijke rechthoek te vinden.

Ooit merkte een inzender op, dat opgaven die met een computer kunnen worden opgelost, liever moeten worden vermeden. Ik heb in eerste instantie geprobeerd daaraan gehoor te geven, want sommige opgaven worden inderdaad erg eenvoudig als je er een programma voor schrijft. Aan de andere kant: wie besluit om een opgave door de computer te laten oplossen, mist het genoegen van het zelf puzzelen. Bovendien moet je er dan nog steeds zelf iets voor doen, namelijk een programma schrijven. Dat is niet per se een triviale opgave, zeker niet als je naar enige elegantie streeft.

FIGUUR 1



Conclusie: ook als een computer van nut kan zijn bij het oplossen van een opgave, dan nog kan ieder er op zijn eigen wijze genoegen aan beleven.
Bovenstaande opgave is hier mijns inziens een goed voorbeeld van.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 17 maart 2004.

Veel plezier!

## Oplossing 'Hanoi-variaties'

Er kwamen 11 oplossingen binnen waarvan 9 helemaal goed, te weten van L. de Rooij, P. Stuut, D. Buijs, W. Doyer, A. Verheul, J. Meerhof, L. van den Raadt, J.H. Draaijer, en H. Neggers. Eén oplosser beperkte zich tot opgave 1. In het algemeen werden de opgaven als eenvoudig ervaren. Dick Buijs stuurde de oplossing per kerende post; Lieke de Rooij, die hoopte in de kerstvakantie leuk te gaan puzzelen, loste de opgaven op bij het drinken van een (grote?, hete?) kop koffie.

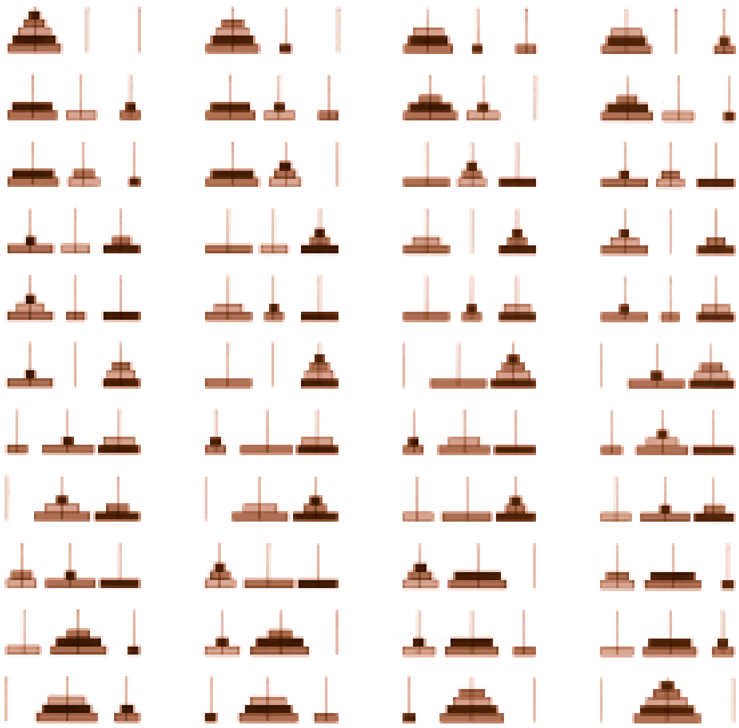
De bedoeling was een opgave te stellen waar ook eventuele jongere gezinsleden in de vakantie mee aan de slag konden. Ik weet niet of dat ook gebeurd is. Een setje van vijf gekleurde schijven was dan wel nodig geweest.

De eerste opgave heeft een oplossing in 43 zetten en dat aantal is niet te verbeteren. Twee inzenders hebben vergeefs geprobeerd de opgave op te lossen voor een willekeurig aantal schijven. Dick Buijs bepaalde het minimale aantal zetten voor enkele grotere schijven-aantallen en vond, tot mijn verrassing, dat er bijvoorbeeld bij 8 schijven meer dan één optimale oplossing is!

De oplossing van Ton Kool muntte uit door een zeer fraaie tekening in kleur (zie figuur 2).

De tweede opgave kan in 27 zetten en ook dat is minimaal. Een oplossing is:
1B 2C 3D 2D 1D 4B 5C 4C 6B 7E 6E 8B 9F 10G 9G 8G 6F 7G 6G 4E 5G 4G 1E 2F 3G 2G 1G.
Hier is een generalisatie goed te doen, alhoewel één inzender toch de mist in ging.

FIGUUR 2



## De ladder

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit.

W. Doyer 180,
T. Afman 160,
D. Buijs 139,
L. de Rooij 100,
A. Verheul 99,
T. Kool 96,
P. Stuut 81.

De ladderprijs is dus gewonnen door Wobien Doyer.
De prijs voor de beste inzending van de kerstpuzzel heb ik na rijp beraad toegekend aan A. Verheul. Ik heb hierbij vooral op de wiskundige inhoud gelet.
Beide oplossers van harte gefeliciteerd!

*Kalender*

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
*redactie-euclides@nvvw.nl*

| nr | verschijnt | deadline |
|---|---|---|
| 6 | 15 april 2004 | 2 maart 2004 |
| 7 | 26 mei 2004 | 30 maart 2004 |
| 8 | 24 juni 2004 | 11 mei 2004 |

woensdag 17 maart
2e Conferentie ICT in de vakken
Organisatie APS

vrijdag 19 maart
Kangoeroe 2004
Organisatie KUN

19 en 20 maart
Finale Wiskunde A-lympiade 2004
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 23 maart
Bernoulli-lezing en lerarenmiddag
Rijksuniversiteit Groningen

25 en 26 maart
Nationale Rekendagen 2004
Organisatie Freudenthal Instituut

16 en 17 april
Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres
Organisatie KWG en BWG

donderdag 22 april
4e Conferentie ICT in het onderwijs
Zie pagina 125 in Euclides 79-3.

vrijdag 14 mei
Leve de wiskunde! Open dag voor docenten
Organisatie Korteweg de Vries Instituut

zaterdag 15 mei
10e HKRWO-Symposium
Organisatie Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs
Zie pagina 201 in Euclides 79-4.

9 juni t/m 11 juni
Onderwijs Research Dagen 2004
Organisatie Universiteit Utrecht

Voor nascholing zie ook
*www.nvvw.nl/nascholing.html*

Voor overige internet-adressen zie
*www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
*www.wiskundeonderwijs.nl*

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
*www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

# De vierde conferentie ict in de wiskundeles

## *'Hands on – Brains on!'*

**Donderdag 22 april 2004 in Putten**

***Stopt het denken als je wiskundige problemen via de computer oplost? Of kan ict het wiskundig denken juist bevorderen? Wordt in de praktijk wiskunde verdrongen door ict of blijft wiskunde bij allerlei toepassingen een belangrijke rol spelen?***

APS-wiskunde en het Freudenthal Instituut organiseren voor de vierder keer een conferentie over het gebruik van ict in het wiskundeonderwijs. Op donderdag 22 april in kasteel Vanenburg te Putten.

Na de openingslezing door Jelke Bethlehem (CBS) zijn er werkgroepen waarin de ict-vaardigheid van deelnemers vergroot wordt en werkgroepen waarin de onderwijspraktijk centraal staat. In alle werkgroepen kunnen deelnemers zelf aan de slag met de computer.

Net als vorig jaar vindt er ook dit jaar een 'Webstrite' plaats, waarin scholen strijden om de mooiste wiskunde-website.

De kosten zijn € 295,- incl. lunch en materiaal.

Meer informatie over de werkgroepen en een inschrijfformulier kunt u vinden op de conferentiesite **www.fi.uu.nl/ict/2004**