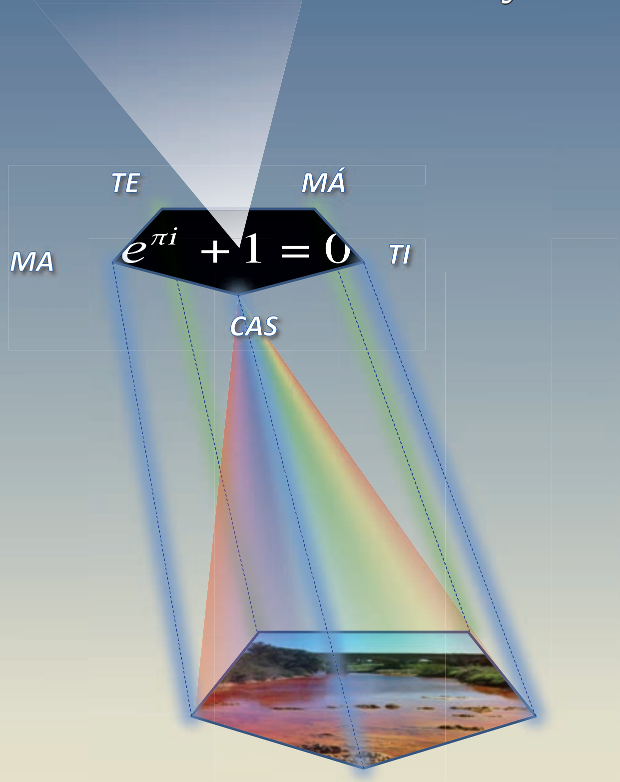
COLECCIÓN DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

PRISMA

Un paseo entre las matemáticas y la realidad



Rafael Villa Caro
Antonio Aranda Plata
Inmaculada Gayte Delgado
Juan M. Muñoz Pichardo
Juan Núñez Valdés
Antonio Pérez Jiménez
Ramón Piedra Sánchez
(coordinadores)

UNIVERSIDAD DE SEVILLA • VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

PRISMA
Un paseo entre las matemáticas y la realidad

PRISMA

Un paseo entre las matemáticas y la realidad

RAFAEL VILLA CARO
ANTONIO ARANDA PLATA
INMACULADA GAYTE DELGADO
JUAN M. MUÑOZ PICHARDO
JUAN NÚÑEZ VALDÉS
ANTONIO PÉREZ JIMÉNEZ
RAMÓN PIEDRA SÁNCHEZ
(coordinadores)

SECRETARIADO DE PUBLICACIONES
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN
Sevilla 2010

Colección: Divulgación Científica
Núm.: 15

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o trasmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito del Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Las siguientes figuras aparecen por cortesía de:

Fotografía del Universo (página 17): NASA/JPL-Caltech.
http://www.jpl.nasa.gov/imagepolicy/

Figuras 24 (página 34), 28 (foto Francisco Martín, página 37) y 29 (página 37): Servicio de Publicaciones de la FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas).

Figura 1 (página 222) y 2 (página 223): Instituto de Cartografía de Andalucía.

Para las siguientes imágenes se ha solicitado permiso a:

Figura 30 (página 38): Fundación Le Corbusier.
Figura 31 (página 38): Fundación Gala - Salvador Dalí.
Figura 6 (página 253): University of Washington.

El resto de imágenes son originales de los autores, o de dominio público. Éstas últimas han sido obtenidas de:

School of Mathematics and Statistics. U. St. Andrews, Scotland.
http://www-maths.mcs.st-andrews.ac.uk/
Wikimedia Commons. http://commons.wikimedia.org/
Web Gallery of Art. http://www.wga.hu/

© SECRETARIADO DE PUBLICACIONES
DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA 2010
Porvenir, 27 - 41013 Sevilla.
Tlfs.: 954 487 447; 954 487 451; Fax: 954 487 443
Correo electrónico: secpub2@us.es
Web: http://www.publius.us.es
© de los textos sus autores 2010
Impreso en España-Printed in Spain
I.S.B.N.: 978-84-472-1220-0
Depósito Legal: SE-1.954-2010
Maquetación e impresión:
Pinelo Talleres Gráficos, S.L. Camas-Sevilla

ÍNDICE

PRÓLOGO

Divulgar las Matemáticas es un objetivo que muchos nos hemos planteado en múltiples ocasiones y en la gran mayoría de ellas resulta difícil de alcanzar, al menos, con el grado de completitud deseado.

Divulgar las Matemáticas es una tarea que muchos hemos iniciado en múltiples ocasiones y en la gran mayoría de ellas nos hemos sentido reconfortados ante la acogida recibida por parte de sus receptores.

Tal vez, el convencimiento de la certeza de ambas afirmaciones nos conduce a algunos matemáticos a continuar esta acción, generalmente con más ahínco que éxito. En esta línea, a principios de 2004 surge en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, a través de un grupo de profesores de la misma, la necesidad de hacer realidad dicho objetivo, es decir, divulgar matemáticas para mostrarlas más atractivas e interesantes a los alumnos de Secundaria y Bachillerato. En un intento de acabar con los estereotipos creados, se inician así múltiples actividades divulgativas, organizadas y financiadas por la propia Facultad, dirigidas fundamentalmente a colegios e institutos, enmarcadas en lo que se denomina Plan de Divulgación de la Facultad de Matemáticas.

Así, se creó el Grupo de Divulgación, del que forman parte un buen número de profesores de la Facultad, que se está dedicando a divulgar las matemáticas tanto dentro como fuera del ámbito de nuestra Facultad, ofreciéndose a todos los centros de Educación Secundaria y Bachillerato de las provincias de Sevilla, Huelva y Córdoba la posibilidad de concertar una visita a nuestra Facultad, guiada por profesores del grupo, en la que, aparte de conocer de primera mano nuestras instalaciones y medios materiales y humanos, se les imparte una pequeña charla divulgativa en la que se deja patente algún aspecto de las Matemáticas de utilidad en la vida real. De este modo se muestra la parte más real y cotidiana de las Matemáticas, destruyendo en gran medida la idea de ciencia abstracta y lejana que tienen para el gran público. También se realizan, por parte de los divulgadores, visitas a centros escolares para impartir una charla divulgativa.

De ese modo, poco a poco se ha ido plasmando la idea de que la divulgación de las Matemáticas, en particular, y de la Ciencia, en general, es un compromiso obligado con la sociedad. Este proceso de apertura culmina con la puesta en marcha del Proyecto QUIFIMAT, en el que durante dos semanas, y en coordinación con las Facultades de Física y Química, se organizan unas series de visitas a las tres facultades, siguiendo en la medida de lo posible las ideas y formato que dio origen a esta actividad. Este proyecto, financiado por la FECYT dependiente del Ministerio de Ciencia e Innovación, se viene realizando todos los años desde 2006, por lo que promete perdurar en el tiempo.

En este punto, y dada la cantidad de charlas divulgativas que se han preparado y siguen preparándose, se ha considerado la oportunidad de plasmarlas en un libro, para que llegasen no sólo a los alumnos de los centros de Educación Secundaria y Bachillerato, sino a un público más amplio que pudiera estar interesado en conocer algunos aspectos de las Matemáticas que pueden motivar un mejor conocimiento de esta ciencia, de su relevancia histórica, de su importancia en la gran mayoría de los medios y recursos de los que hoy dispone el hombre y de su influencia en el diseño de la sociedad futura.

Todos los capítulos han sido cuidadosamente escritos para que puedan ser seguidos y entendidos por un lector casi sin conocimientos previos de Matemáticas. En algunos casos, en los que los autores han sentido la necesidad de explicar con mayor profundidad algunos de los aspectos que se plantean, se han añadido apéndices o notas separadas claramente del texto por entornos visualmente diferentes, de modo que facilitan una primera lectura en la que dichas notas no son necesarias para la comprensión global del capítulo.

Está por tanto en el ánimo de los profesores que participamos en este proyecto el llegar con claridad y sencillez al mayor número de lectores posible, y conseguir de ese modo que las Matemáticas pasen a ser tan admiradas y disfrutadas por los lectores como lo son por nosotros.

Tan sólo nos queda desearle que usted lo pase bien. Disfrute del paseo.

1 MATEMÁTICAS: UNA CIENCIA VIVA

¿Qué queda por descubrir en matemáticas? Esta es la típica pregunta que nos hemos hecho de estudiantes y que probablemente, se la hagan muchos alumnos. La visión que puede tener un joven o adolescente de las matemáticas es de que están perfectamente organizadas, estructuradas en una secuencia de conocimientos y ya no queda nada más por inventar. Por otro lado, a este nivel, puede pasar inadvertido el hecho de que esta ciencia se está aplicando en nuestro entorno. Más bien, al contrario, el alumno puede estar tentado a pensar que son unos conceptos y una terminología puramente abstractos y que nada tienen que ver con la realidad. Quisiéramos convencer al lector con estas páginas de todo lo contrario. Introducimos el tema con el discurso que dio Hilbert en el 2º Congreso Internacional de Matemáticos (ICM), celebrado en París en 1900. Hacemos referencia a lo que Hilbert definió como una ciencia viva para, desde Fermat hasta Wiles, mostrar que las matemáticas han ofrecido y ofrecen problemas en abundancia, y de ahí que sea, según Hilbert, una ciencia viva. En el teorema de Fermat, cuya resolución llevó más de 350 años, han contribuido grandes matemáticos. Este popular resultado es el hilo conductor para narrar en este capítulo hechos significativos de célebres personajes, Pierre de Fermat, Euler, Sophie Germain, Andrew Wiles, entre otros. Volvemos a Hilbert y su concepción de lo que son problemas importantes en matemáticas para hablar de los siete problemas del milenio y contar algunas anécdotas, como la de Perelman.

El contenido de este trabajo ha sido extraído fundamentalmente de un artículo de Leo Corry, que aparece en la revista ”La Gaceta”, de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), Vol. 9.2 (2006), de la página de internet http://www.divulgamat.net , página de divulgación de la RSME y de los libros “Matemáticas en el mundo moderno“, de la colección Selecciones de Scientific American y “Una historia de las matemáticas, retos y conquistas a través de sus personajes“, Miguel A. Pérez, Ed. Vision Net. Ellos me han incentivado en la búsqueda por descubrir y aprender nuevas cosas en matemáticas.

FIGURA 1: David Hilbert

En el 2º ICM, celebrado en París en 1900, fue invitado a dar una conferencia uno de los últimos universalistas en matemáticas, David Hilbert (1862-1943). La expectación era grande, se esperaba que hablara de algún problema importante en el que estuviera trabajando y explicara sus últimos avances.

Sin embargo, David Hilbert lo que hizo fue presentar 23 problemas que a su juicio deberían ocupar los esfuerzos de los matemáticos en el nuevo siglo que iba a comenzar.

Decía en su discurso (citando a otro matemático de tiempos pasados) que una teoría matemática no debe ser considerada completa hasta que sea tan clara de entender que pueda ser explicada al primer hombre que pase por la calle.

Esta claridad que aquí se le exige a una teoría matemática, continuaba Hilbert, *yo la exigiría, aún con más razón, a un problema matemático perfecto; porque lo que es claro y fácil de comprender nos atrae, lo complicado nos repele...*

Destaco de su discurso la frase que da título a este capítulo:

Una rama de la ciencia seguirá viva mientras siga ofreciendo problemas en abundancia.

Quisiera justificar que las matemáticas son una ciencia viva mostrando diversos problemas. Empezaré por quizás el problema más popular de todos, el último teorema de Fermat o también conocido como el gran teorema de Fermat.

GRAN TEOREMA DE FERMAT

Es imposible que un cubo se pueda expresar como suma de dos cubos o que una potencia cuarta se escriba como una suma de potencias cuartas o, en general, que un número que sea una potencia de grado mayor que 2 se pueda descomponer como suma de dos potencias del mismo grado. He encontrado una demostración verdaderamente maravillosa de este resultado, pero este margen es demasiado estrecho para contenerla.


FIGURA 2: Fermat

Esto escribía Pierre de Fermat (1601-1665) en el margen de un ejemplar de *Aritmética*, de Diofanto. Fermat fue un hombre de leyes que se dedicó a estudiar matemáticas por afición.

Al no tener una prueba del teorema se habla entonces de conjetura (la conjetura de Fermat). En términos matemáticos, la conjetura dice que no existen enteros positivos x, y, z tales que

$$x^n + y^n = z^n, \text{ para } n > 2.$$

Harán falta más de 350 años para resolverla. Esto unido a las trágicas vidas de algunos matemáticos que han dedicado muchos esfuerzos a probarla, además de la existencia de un premio (a partir de 1905) para el que lo consiguiera, han sido ingredientes importantes para tanta popularidad.

Leonhard Euler desistió, Sophie Germain resolvió casos particulares, Yutaka Taniyama conectó dos teorías diferentes que dieron la pista para la resolución final, y por último, Andrew Wiles, en 1994, dio con la demostración que cierra la conjetura.


FIGURA 3: Sophie Germain

Sophie Germain (1776-1831), autodidacta en las matemáticas, tuvo que hacer frente a la oposición de una sociedad y de su propia familia que no comprendían que una mujer pudiera dedicarse a la ciencia. Aprendió latín sin ayuda, leyendo a Newton y a Euler.

Estas son sus palabras cuando se refiere a su interés por las matemáticas:

> *Me impresionó la descripción del final de Arquímedes a manos de un guerrero romano, por estar absorto en su trabajo. Me entusiasmó que sus elucubraciones le alejaran tanto de la realidad como para desatender la petición de un soldado que empuñaba un arma.*

Sophie Germain mantuvo oculta su identidad de mujer en su correspondencia con el gran matemático Gauss. Ella firmaba sus cartas con el seudónimo de Mr. Leblanc. No tuvo en vida título alguno y tuvo que trabajar en solitario porque una jerarquía científica masculina la excluía.

También se dedicó a otras cuestiones, más aplicadas. Es conocida por sus trabajos en vibraciones. Seis años de esfuerzos le costó culminar su

"Estudio de las vibraciones de superficies elásticas", por el que se le otorgó el premio de la Academia de Ciencias de París, premio al que había optado por tres veces. Todo el mundo esperaba con espectación ver a la mujer matemática recibir el premio, pero Sophie no asistió. Aunque muchos años antes se había considerado una novata entre gigantes, en ese momento no sentía ninguna admiración por muchos de sus colegas. El presidente de la Academia, Poisson, le había manifestado su desprecio por el hecho de ser mujer e incluso se habría apropiado de alguno de sus resultados.

FIGURA 4: Paul Wolfskehl

Otro personaje que ha contribuido a la popularidad de la conjetura de Fermat ha sido el industrial alemán Paul Wolfskehl (1856-1906).

Se graduó en medicina, pero siendo aún muy joven le diagnosticaron esclerosis múltiple. Viendo que esta enfermedad le imposibilitaría ejercer la medicina, se dedicó a las matemáticas, y en concreto, a intentar probar el teorema de Fermat. A instancias de su madre, se casó con el fin de tener a alguien que cuidara de él. Pero el matrimonio fue un fracaso y Wolfskehl fue muy desgraciado los últimos años de su vida. Quizás por esto decidió legar la mayor parte de su fortuna a lo único que le había dado placer en esta vida, las matemáticas, y estableció un premio para aquel que demostrara el teorema de Fermat.

Yutaka Taniyama (1927-1958) se dedicó también a probar el teorema, y de hecho dio la pista para la resolución definitiva. Cuando estaba en pleno éxito profesional y personal (a punto de casarse) se suicidó, lo que contribuyó a aumentar la leyenda sobre el teorema.

Finalmente, Andrew Wiles (1953-), obsesionado desde niño con el teorema y después de décadas de trabajo en solitario, concluyó en 1994 la demostración.

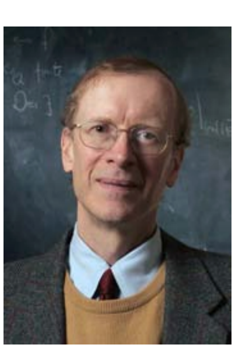


FIGURA 5: Andrew Wiles

Cuando creía tener el resultado lo presentó a la comunidad científica y ésta descubrió un error. Tal error fue subsanado con dos años más de trabajo. No pudo conseguir la medalla Fields (equivalente al premio Nobel en matemáticas) porque Wiles tenía en aquel momento 42 años y estas medallas se conceden a los menores de 40.

Alfred Nobel dejó expresamente prohibida la creación para las matemáticas del galardón que lleva su nombre. Parece ser que la razón estuvo en la relación que mantuvo el matemático sueco Mittag-Leffer con su novia. Éste era el matemático más brillante en aquel momento y con toda probabilidad habría ganado el premio de haberse creado.

En el ámbito de las matemáticas el galardón de mayor prestigio es la medalla Fields, patrocinada por John Charles Fields quien en 1932 donó en su testamento una fortuna para que se dieran dos medallas en los congresos mundiales de matemáticas celebrados cada cuatro años.

A pesar de todo esto, siempre ha sido mayor la curiosidad despertada por el teorema que la cantidad de trabajo serio que se le haya dedicado. Salvo excepciones, el teorema no ha sido objeto de estudio de la mayoría de los matemáticos. Hay que decir que no tiene aplicación en sí mismo a ningún problema real. Sin embargo, Fermat también dejó otro teorema sin demostrar, el "Pequeño teorema de Fermat", que dice:

EL PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT

Si p es un número primo que no divide a x, entonces p divide a $x^{p-1} - 1$.

Este teorema es muy importante en criptografía y en todo lo que tenga que ver con transmisiones seguras en internet (véase el capítulo dedicado a ello).

Leonhard Euler (1707-1783), el matemático más prolífico de todos los tiempos, dio hasta tres demostraciones distintas de este teorema.

FIGURA 6: Leonhard Euler

En vida escribió más de 500 trabajos, que junto con su obra póstuma suman 886 trabajos (a 800 hojas por año), y todo esto teniendo en cuenta que estuvo ciego los últimos 17 años de su vida. A pesar de su ceguera, debido a su extraordinaria memoria (se dice de él que sabía no sólo los cien primeros números primos sino también sus cuadrados y cubos), a su regreso a San Petersburgo con 59 años de edad, después de pasar 25 años en Berlín, produjo casi la mitad de toda su obra. Por supuesto, alcanzó este notable nivel de conocimiento con la ayuda de sus hijos, tuvo trece aunque sólo cinco superaron la infancia. Euler recuerda en sus notas autobiográficas estar siempre trabajando con un niño en los brazos.

De él son las notaciones tan familiares como $f(x)$, e, π, i. Tiene trabajos en todos los campos. Con 19 años realizó un estudio relacionado con la rotación del Sol, lo hizo sólo en tres días y le valió el premio de la Academia de Ciencias de París (consiguió doce veces este premio), aunque le costó la visión de un ojo. Al año siguiente hizo un estudio sobre la distribución óptima de los mástiles y las velas de un barco, aunque no había visto un barco de vela en su vida. Demostró la irracionalidad de e (que no puede ser solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros), calculó hasta 23 cifras decimales de este número, también calculó cifras decimales de π.

Uno de los problemas que resolvió da inicio a la teoría de grafos, utilizada por ejemplo para el diseño de circuitos. Se trata del problema de los Puentes de Königsberg (veáse el capítulo correspondiente).

Cerca de la ciudad de Königsberg nació Hilbert, que no se dedicó al último teorema de Fermat ni lo incluyó en su lista de los 23 problemas importantes.

Pero, ¿qué es un problema importante?

Puede ser aquél que intenta dar respuesta a una pregunta real, es decir, que viene motivado desde un problema de la realidad, de origen físico, biológico, químico, social, de la ingeniería... Por ejemplo, determinar la curva que debe seguir una partícula situada en A para llegar hasta un punto más bajo B en el mínimo tiempo posible. Se conoce como problema de la braquistócrona y fue resuelto por Johann Bernoulli en el siglo XVII (véase el capítulo sobre curvas).

FIGURA 7: Grigori Perelman

Pero también es un problema importante aquél que, tal vez desde la abstracción, es capaz de clarificar y posiblemente solucionar una gran cantidad de problemas adicionales. Desde este punto de vista, la conjetura de Riemann fue incluida por Hilbert en 1900 como un problema importante y hoy en día es uno de los 7 problemas del milenio. Hay 7 problemas que se consideran 7 retos para el siglo XXI y que están premiados con 1.000.000 de dólares. De entre estos 7, mencionaré tres:

Una esfera es una superficie cerrada en sí misma sin agujeros. La conjetura de Poincaré es: ¿Ocurre lo mismo en un espacio de dimensión 4 con una esfera tridimensional? A Grigori Perelman (1966-), en el último ICM, en 2006, celebrado en Madrid, se le concedió la medalla Fields por su contribución a la resolución de la conjetura. No fue a recoger el premio, de hecho lo rechazó. Estas fueron sus palabras a un periodista:

> *Desde el principio le dije que lo rechazaba. Es completamente irrelevante para mí. Cualquiera puede entender que si la prueba es correcta no se necesita ningún otro reconocimiento.*

Otro problema del milenio es la conjetura de Riemann. La función

$$z(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ...,$$

¿tiene todos sus ceros no triviales en la recta $Re(s) = \frac{1}{2}$ (parte real de s igual a 1/2)?

Y otro problema es relativo a las ecuaciones de Navier-Stokes, ecuaciones de finales del siglo XIX que gobiernan el comportamiento de los fluidos.

En plena Alemania nazi y después de que grandes matemáticos de origen judío se viesen obligados a huir, Hilbert se quedó casi sin colaboradores en su universidad. Cuando murió sólo acudieron 12 personas a su entierro y en su epitafio aparece una de sus últimas frases:

"Debemos saber, sabremos..."

Miremos ahora el Universo.

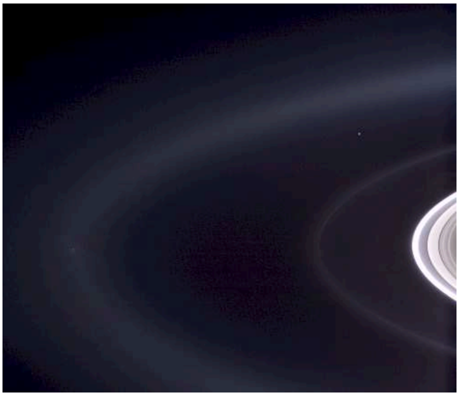


FIGURA 8: Anillos de Saturno

Esta foto fue tomada en 2004 por Cassini-Juygens, una nave espacial automática, llegando a los anillos de Saturno. Uno de estos puntitos es nuestro planeta. Son quinientos cuarenta millones de kilómetros cuadrados de superficie, seis mil cuatrillones de toneladas de roca, más de mil trillones de toneladas de agua...

Quiero terminar recordando las palabras de Galileo:

"Las matemáticas son el lenguaje con el que Dios ha escrito el Universo."

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. A. Pérez: *Una historia de las matemáticas; retos y conquistas a través de sus personajes.* Editorial Vision Net, 2006.

[2] Autor: *Matemáticas en el mundo moderno*. Selecciones del Scientific American. Editorial, año.

[3] Leo Corry: *Revista La Gaceta Vol. 9.2*. Real Sociedad Matemática Española, 2006.

INMACULADA GAYTE DELGADO
Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

2 EL NÚMERO DE ORO

El ideal de la belleza y de la armonía ha sido una constante que ha motivado a pintores, arquitectos, músicos, poetas o escultores de todos los tiempos. En este capítulo vamos a analizar esta búsqueda haciendo un recorrido por la Historia, desde los clásicos hasta nuestros días, siguiendo el camino de una proporción en las formas, *la proporción áurea*, que, en algún momento, llegó a llamarse *la divina proporción*. Esta pequeña muestra nos enseña algo que los matemáticos siempre hemos considerado indiscutible: la Matemática forma parte del patrimonio cultural de la Humanidad, ha estado ligada a sus grandes creaciones y constituye uno de los hilos conductores de la historia de las ideas y del pensamiento humano. El conocimiento de sus contenidos y de sus métodos constituye un capítulo importante de la formación cultural y académica de una sociedad moderna.

1 LAS MISMAS DIMENSIONES PARA MUCHAS COSAS

El carnet de identidad, las tarjetas de crédito, el bonobús,... tienen todos el mismo tamaño. Las fachadas de algunos edificios emblemáticos, clásicos y modernos, innumerables pinturas del Renacimiento y también lienzos del siglo XX siguen en sus formas pautas parecidas a las de las tarjetas. En la Naturaleza nos encontramos muchas estructuras relacionadas con las formas anteriores.

¿Por qué tienen este tamaño y no otro el DNI, las tarjetas, los calendarios, el bonobús, ... ? Si, por ejemplo, medimos el largo y el ancho de nuestro DNI, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} l = 8,6\ cm \\ a = 5,4\ cm \end{array}\right\}$$

FIGURA 1: Todas tienen el mismo tamaño

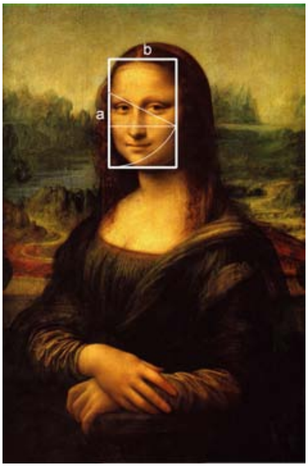


FIGURA 2: La cara de Monna Lisa

Y si dividimos el largo por el ancho, resulta:

$$\frac{l}{a} = \frac{8,6}{5,4} \simeq 1,6.$$

En el famoso cuadro de Leonardo da Vinci *La Gioconda* la cara de Monna Lisa está encuadrada en un rectángulo cuyas dimensiones también guardan aproximadamente la relación $\frac{a}{b} \simeq 1,6$.

Como veremos a lo largo de este capítulo, esta relación aparece en muchas ocasiones, no sólo en Matemáticas, sino en otras disciplinas tales como la Arquitectura, la Pintura o la propia Naturaleza.

2 EN BUSCA DE UN RECTÁNGULO GUAPO

¿Son estos rectángulos, por la proporción de sus dimensiones, más *bonitos*, más *estéticos* que otros? Vamos a ver diferentes maneras de construir un rectángulo, imponiendo ciertas condiciones a sus dimensiones.

En primer lugar, veamos algunas consideraciones sobre formas y dimensiones de los objetos. Entendemos que dos objetos tienen la *misma forma* cuando vemos uno como una ampliación del otro (véanse las fotografías de la figura 3).

Si observamos los dos triángulos de la figura 3, vemos algo parecido a lo de las fotografías: los dos triángulos tienen la misma forma, pero distinto tamaño.

FIGURA 3: Objetos con la misma forma

DEFINICIÓN DE SEMEJANZA

Las parejas de objetos que hemos visto tienen dos características muy sencillas:

1. Cada ángulo que hay en uno de ellos tiene su correspondiente igual en el otro.

2. Todas las longitudes de ambos objetos son proporcionales.

- La primera es fácil de ver. Por ejemplo, los ángulos de los ojos, los labios o el pelo del niño en la figura 3 son los mismos en ambas fotografías. En la figura 3 los ángulos del primer triángulo son iguales a los del segundo.

- La segunda quiere decir que si dos segmentos del primer objeto guardan una cierta relación entre sus longitudes, por ejemplo, el lado a es triple del b en los triángulos de la figura 3, los segmentos correspondientes del segundo objeto guardan la misma relación, el lado a' es triple del b' y así con cualquier par de segmentos. Esto se expresa escribiendo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Cuando se dan las dos condiciones anteriores decimos que los dos objetos son **semejantes***.*

Volviendo a nuestros rectángulos, podemos ver que se pueden dibujar de muy diversas formas. La figura 4 muestra algunos rectángulos más o menos *alargados*. Una forma bien conocida es el cuadrado, con igual ancho que largo.

Vamos a ver con detalle algunas de estas formas rectangulares.

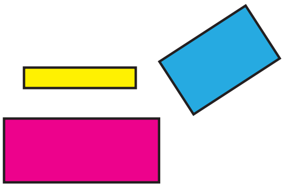


FIGURA 4: Hay rectángulos de formas diferentes

UNA POSIBILIDAD INTERESANTE: LA NORMA DIN

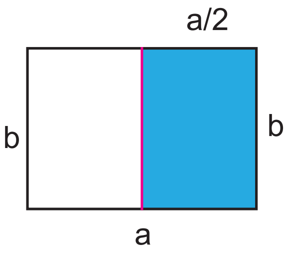


FIGURA 5: El tamaño DIN A

Vamos a tratar de conseguir un rectángulo que al cortarlo por la mitad de su lado mayor, resulten dos rectángulos *semejantes* al primero (figura 5). Los ángulos de los rectángulos son todos rectos y, por lo tanto, iguales. Entonces, la condición que tienen que cumplir dos rectángulos para que sean *semejantes* es que sus lados sean **proporcionales**.

Para que el rectángulo grande y su mitad sean *semejantes* debe ocurrir:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}}\ ;\ \frac{a}{b} = \frac{2b}{a}\ ;\ a^2 = 2b^2\ ;\ a = b\sqrt{2} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \sqrt{2}}$$

Ésta es la proporción que tienen las hojas de papel que usamos normalmente y que se conocen como DIN A4. Las hojas DIN comienzan con la DIN A0 que es una hoja con 1 m^2 de área, en la proporción anteriormente dicha. Por tanto, para obtener las dimensiones de una hoja DIN A0 habrá que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(proporción entre los lados)} & \frac{a}{b} & = & \sqrt{2} \\ \text{(área igual a 1)} & a \cdot b & = & 1 \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es: $a = \sqrt[4]{2}$ y $b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, que en notación decimal es: $a = 1,1892$ m y $b = 0,8409$ m. La hoja DIN A1 es la mitad de la A0, por tanto el lado mayor mide $84,09$ cm y el lado menor la mitad de a, esto es, $59,46$ cm. Siguiendo así, podemos obtener una tabla con las dimensiones de distintas hojas DIN:

A0	118,92 cm	84,09 cm
A1	84,09 cm	59,46 cm
A2	59,46 cm	42,05 cm
A3	42,05 cm	29,73 cm
A4	29,73 cm	21,00 cm
A5	21,00 cm	14,86 cm

TABLA 1: Distintas hojas DIN

UNA PROPORCIÓN ELEGANTE: EL RECTÁNGULO ÁUREO

Tratemos ahora de conseguir un rectángulo que al quitarle el cuadrado más grande posible, quede un rectángulo *semejante* al primero (figura 6).

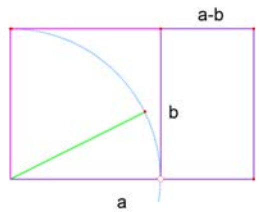


FIGURA 6: Rectángulo áureo

Como es fácil ver, el mayor cuadrado que se le puede quitar a un rectángulo es el que tiene por lado el lado menor del rectángulo. Si las dimensiones del primero son a y b, las dimensiones del segundo serán b y $a - b$.

Para que ambos rectángulos sean *semejantes* se tiene que verificar:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

$$a^2 - ab = b^2$$

$$a^2 - ab - b^2 = 0 \text{ ; dividiendo por } b^2 \text{ resulta:}$$

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0 \text{ y haciendo } \frac{a}{b} = x \text{ queda:}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación es

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

que en notación decimal es

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$$

Esta proporción es la que aparecía en el primer ejemplo de las tarjetas y en la cara de *La Gioconda*. Era conocida ya en la cultura griega con el nombre de *proporción áurea* o *sección áurea* y se consideraba como el canon ideal en lo que a belleza y armonía se refiere. El número $1,6180339887...$, que tiene infinitas cifras decimales, se llama *número áureo* o *número de oro* y se representa por la letra griega Φ (Fi)[1].

¿Cómo se construye un rectángulo áureo?

Para construir un rectángulo áureo se parte de un cuadrado dividido por la mitad (ver figura 7). Tomando como radio la diagonal de uno de los rectángulos se traza un arco que corte a la prolongación de la base del cuadrado.

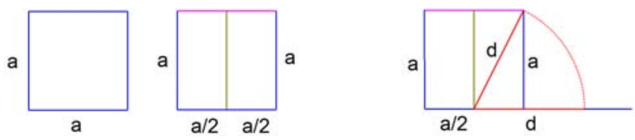


FIGURA 7: Construcción de un rectángulo áureo

Por este punto de intersección se levanta una perpendicular y se cierra el rectángulo como se ve en la figura 8.

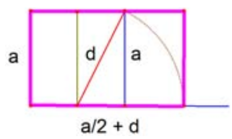


FIGURA 8: Construcción de un rectángulo áureo

DEMOSTRACIÓN. La longitud de la diagonal d la podemos obtener por el Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (\frac{a}{2})^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$$

de donde resulta $d = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Entonces, el lado mayor del rectángulo es

$$\frac{a}{2} + d = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El lado menor es a y, por tanto, la relación entre ambos es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

[1]Se cree que el uso de Φ para designar al *número de oro* procede de la inicial de Phidias, arquitecto autor del Parthenon griego.

TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos.

UN RECTÁNGULO MÁS CERCANO: LA PROPORCIÓN CORDOBESA

Trescientos años a.C. Euclides de Alejandría (325-265 a.C.) escribió el primer libro conocido sobre Geometría, "*Los Elementos*", donde se trata por primera vez la *proporción áurea* o *regla de oro*. En el s. IX d.C. "*Los Elementos*" fueron publicados en árabe y estudiados en las escuelas de Córdoba. La capital del Califato fue depositaria del tesoro euclidiano durante la Edad Media, hasta que ocurrió un hecho que se puede considerar como una de las primeras acciones de espionaje científico de las que se tiene conocimiento.

FIGURA 9: Euclides de Alejandría

En 1120, un británico, adiestrado en el idioma y en las costumbres, disfrazado de estudiante hispanoárabe, logró sacar una copia de "Los Elementos" que fue publicada en 1472. Hasta 1535, en que se descubre el texto griego, el mundo no cuenta más que con esta traducción árabe; por lo que cabe pensar que los trabajos de Leonardo da Vinci y Luca Pacioli en el Renacimiento se hicieron a partir del texto cordobés.

Parecía razonable, pues, buscar en la arquitectura cordobesa muestras de la existencia pre-renacentista de la proporción áurea. Sin embargo un trabajo realizado en 1944 por la Universidad Central desveló que, salvo alguna excepción, el rectángulo áureo no aparece por ninguna parte. Posteriormente, en 1951, la Diputación de Córdoba realiza un test a estudiantes de Arquitectura en el que se pedía que buscaran esa proporción en los monumentos y edificios de la ciudad, pero extrañamente aparece otro tipo de relación que se repite con asiduidad. Se encontró que la mayoría de los rectángulos observados guardaban la proporción

$$\textit{lado mayor} \,/\, \textit{lado menor} \simeq 1'3.$$

Buscando una explicación a este hecho observaríamos que muchas de las fuentes que se ven por las plazas de Córdoba y muchas de las bóvedas de sus iglesias son *octogonales* y si calculamos la relación entre el radio de la circunferencia circunscrita al octógono y el lado del mismo resulta:

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = 1,306562964...,$$

precisamente, la encontrada por los estudiantes de Arquitectura.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un octógono regular y la circunferencia circunscrita al mismo

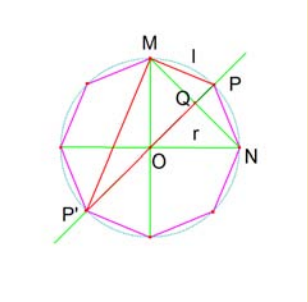


FIGURA 10: Lado y radio del octógono regular

El triángulo MON es rectángulo y por el Teorema de Pitágoras: $MN^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$, de donde, $MN = r\sqrt{2}$. Pero el triángulo MOQ también es rectángulo e isósceles por lo que $OQ = QM$ y, como $QM = \frac{1}{2}MN$, resulta: $OQ = r\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ahora, en el triángulo MPP', que también es rectángulo, podemos aplicar el Teorema del Cateto: $l^2 = PP' \cdot QP = 2r \cdot (OP - OQ) = 2r(r - r\frac{\sqrt{2}}{2}) = r^2(2-\sqrt{2})$. Por lo tanto:

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

TEOREMA DEL CATETO

En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

FIGURA 11: Como hemos dicho, esta proporción aparece en multitud de edificios de Córdoba, por lo que se le ha llamado *la proporción cordobesa*. Un ejemplo es la puerta de Alhaken II en la Mezquita, donde puede apreciarse que la mayoría de los rectángulos que se ven son *rectángulos cordobeses*.

3 RECTÁNGULOS Y POLÍGONOS REGULARES

Hemos visto que la *proporción cordobesa* "procede" de la relación entre el radio del octógono regular y su lado. ¿Habrá también relaciones parecidas en otras formas rectangulares?

Si consideramos un cuadrado y su circunferencia circunscrita (figura 12), observamos que la relación entre el lado y el radio es, por el Teorema de Pitágoras, $l^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$, o sea, $\frac{l}{r} = \sqrt{2}$. Ésta es la proporción de los rectángulos en la norma DIN.

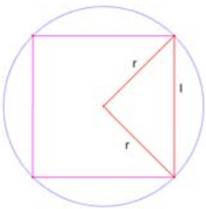


FIGURA 12: Lado y radio del cuadrado

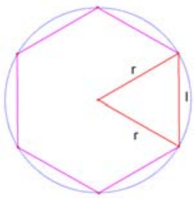


FIGURA 13: Lado y radio del hexágono regular

En el hexágono regular (figura 13) el lado es igual al radio y, por tanto, la relación entre ellos es 1, que es la proporción que existe entre los lados del cuadrado (base y altura iguales).

Por último, en el decágono regular, la relación entre el radio y el lado del decágono es precisamente el *número áureo*. Esta afirmación es algo más complicada de probar y la incluimos con la advertencia ya hecha de que su lectura no es necesaria en un contexto divulgativo.

DEMOSTRACIÓN.- En primer lugar vamos a analizar la presencia del *número áureo* en el pentágono regular. Veamos en la figura 14 la relación que existe entre la diagonal y el lado del pentágono.

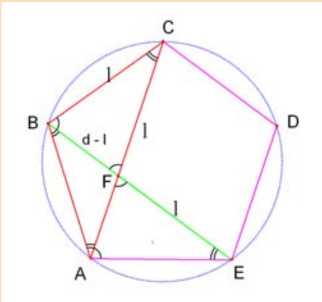


FIGURA 14: Lado y diagonal del pentágono regular

Los triángulos AFE, BFC y AFB son isósceles, como lo demuestra la igualdad de los ángulos marcados (*ángulos inscritos* en la circunferencia). Por otra parte, los triángulos ABC y AFB son semejantes (tienen la misma forma) porque sus ángulos respectivos son iguales. Por lo tanto:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{BF}, \text{ es decir, } \frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$$

Quitando denominadores resulta: $d^2 - dl = l^2$, esto es, $d^2 - dl - l^2 = 0$. Si dividimos los dos miembros de esta ecuación por l^2, nos queda: $(\frac{d}{l})^2 - \frac{d}{l} - 1 = 0$ y, resolviendo la ecuación,

$$\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Esto quiere decir que la diagonal y el lado del pentágono regular, así como los segmentos en que las diagonales se cortan, están en *proporción áurea*.

Si volvemos ahora al decágono regular (figura 15) observamos que los triángulos AOB y AGC, ambos isósceles, son semejantes por la igualdad de sus ángulos respectivos.

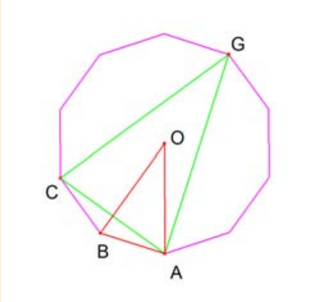


FIGURA 15: Lado y radio del decágono regular

Por lo tanto, la relación que existe entre sus lados es la misma en los dos. En el primero un lado coincide con el lado del decágono regular y el otro es el radio de la circunferencia circunscrita, mientras que en el segundo los lados correspondientes son el lado y la diagonal del pentágono regular, que, como ya hemos visto, están en *proporción áurea*. Entonces, la relación entre el radio y el lado del decágono regular es el *número áureo*. ■

ÁNGULOS INSCRITOS

Los *ángulos inscritos* en una circunferencia son aquéllos que tienen su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma. Su valor es la *mitad* del arco que abarcan sus lados.

Una tabla para resumir lo anterior

En la tabla 2 aparecen: en la primera columna los cuatro primeros polígonos regulares con un número par de lados, en la segunda la relación que existe entre el lado del polígono y el radio de su circunferencia circunscrita y en la tercera el tipo de rectángulo que tiene sus lados en esa proporción.

Polígono regular	Relación radio/lado	Tipo de rectángulo
cuadrado	$\frac{l}{r} = \sqrt{2}$	DIN A
hexágono	$\frac{l}{r} = 1$	Cuadrado
octógono	$\frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	Cordobés
decágono	$\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	Áureo

TABLA 2: Relación entre lado y radio en polígonos regulares

Mención aparte merece el pentágono regular en el que hemos visto cómo está presente la *proporción áurea*; también el pentágono estrellado (figura 16), cuyos segmentos están relacionados por el número Φ.

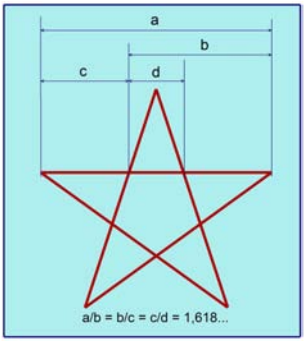


FIGURA 16: Estrella pentagonal

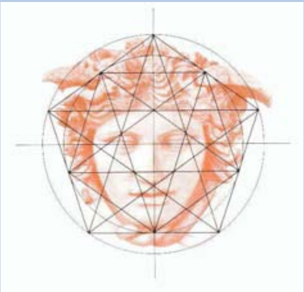


FIGURA 17: Máscara del dios Hermes

El dios griego Hermes Trismegisto, que significa "Hermes, el tres veces grande", es conocido también por su nombre romano Mercurio e identificado con el dios egipcio Thor. Muchas de las investigaciones numéricas de los pitagóricos proceden de las enseñanzas de Hermes, así como el "hermetismo" característico de la escuela pitagórica. El pentágono regular y la estrella pentagonal (*pentagrama*) se convirtieron en el símbolo de los seguidores de Pitágoras.

4 UN PASEO POR LA HISTORIA

A lo largo de la Historia la *proporción áurea* ha estado presente en numerosas manifestaciones artísticas tales como Arquitectura, Pintura, Escultura o Música. Vamos a hacer un breve recorrido por algunas de estas manifestaciones de la cultura.

Egipto. La Tumba de Petosiris (300 a.C.)

La tumba de Petosiris está situada en la necrópolis de Tuna el-Gebel, en las inmediaciones de la antigua Khmun (Hermópolis, ciudad de Hermes, actual el-Ashmunein). Petosiris fue un antiguo sacerdote del dios Thot (el Hermes griego) que llegó a ser muy venerado. En su tumba, que se convirtió en lugar de peregrinación, se empieza a percibir el carácter sagrado que tuvo la *proporción áurea* hasta el Renacimiento.

FIGURA 18: Tumba de Petosiris

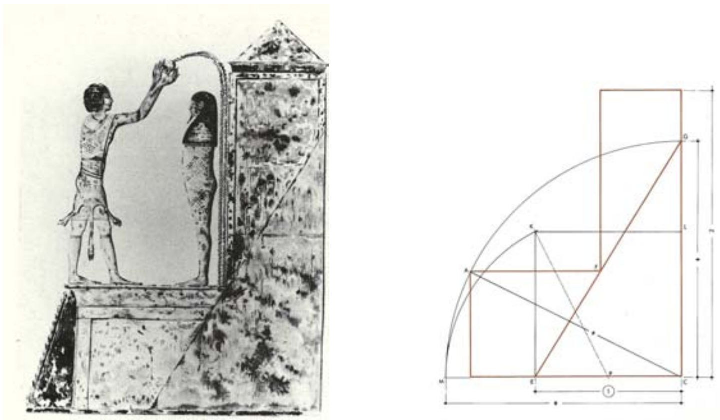


FIGURA 19: Bajorrelieve de la Tumba de Petosiris y el número áureo

Podemos observar en el dibujo de la figura 19 la construcción del lado mayor del rectángulo áureo a partir del cuadrado de lado 1, siguiendo los pasos que se han descrito antes.

Grecia. El Parthenon (432 a.C.)

FIGURA 20: El Parthenon

El Parthenon es un templo situado en la Acrópolis de Atenas y dedicado a la diosa Atenea. De estilo *dórico* su construcción fue iniciada por Pericles en el año 447 a.C. y realizada por los arquitectos Ictino y Calícrates bajo la dirección de Phidias, autor de la decoración escultórica. Es de mármol pentélico blanco extraído de las canteras del monte Pentélico, a 13 km de Atenas. Su construcción culminó el año 432 a.C.

En el Parthenon podemos observar la presencia de rectángulos áureos y secciones áureas en muchas de sus líneas.

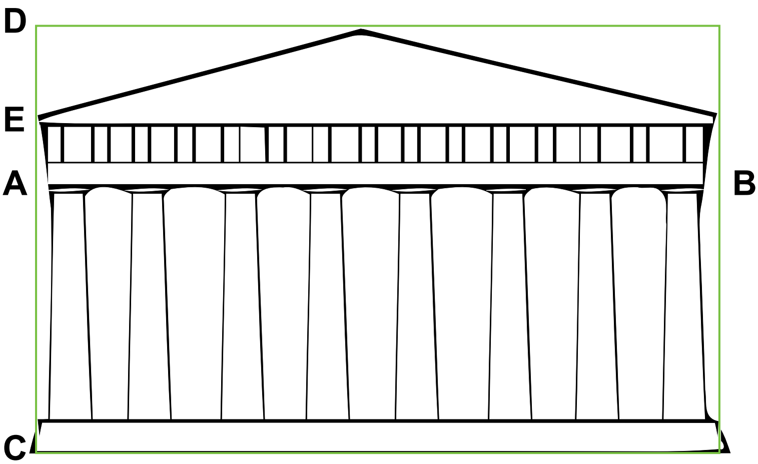


FIGURA 21: El número áureo en el Parthenon

En particular (ver figura 21) tenemos:

$$\frac{AB}{CD} = \Phi \qquad \frac{CD}{CA} = \frac{CA}{AD} = \Phi$$

Euclides se refería también a la proporción áurea como *"división de una línea en media y extrema razón"*, que es lo que apreciamos en la altura del Parthenon. La proporción se definía como aquélla en la que *el segmento mayor es al menor como el total es al mayor*, es decir, si $a > b$, $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, que es equivalente a la ecuación que veíamos al obtener el rectángulo áureo.

Renacimiento. Leonardo da Vinci (1452 - 1519)

Para Leonardo el hombre es el centro del Universo y en él debe encarnarse la perfección. En el hombre de Vitrubio[2] realiza un estudio anatómico buscando en las proporciones del cuerpo humano el canon clásico o ideal de belleza (figura 22).

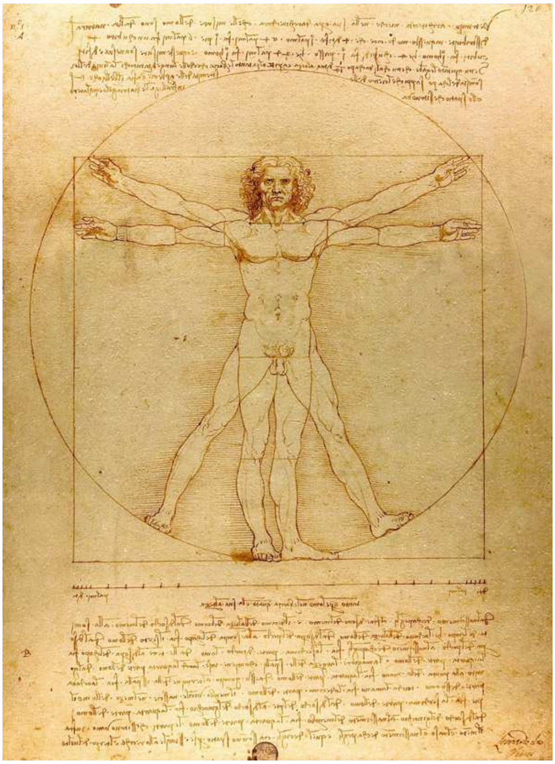


FIGURA 22: El hombre de Vitrubio

El ombligo es el centro de una circunferencia que circunscribe al hombre, pasando por las puntas de brazos y piernas extendidas, a la vez que su cuerpo queda enmarcado en el interior de un cuadrado.

Y además, el ombligo divide la altura del hombre en dos segmentos cuya proporción es el *número de oro* Φ. La razón entre la altura y la distancia del ombligo a los pies también es Φ.

[2]Marcus Vitruvius Pollio, arquitecto romano del siglo I a.C. autor del tratado sobre arquitectura más antiguo que se conserva, *De Architectura*.

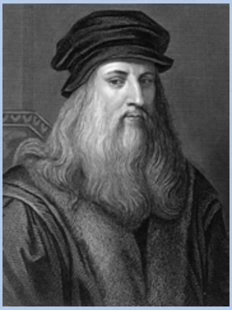


FIGURA 23: Leonardo da Vinci

Leonardo nace en la ciudad de Vinci, cerca de Florencia, el 15 de abril de 1452. Fue educado en casa de su abuelo paterno hasta que en 1469 viaja con su padre a Florencia donde inicia su formación pictórica. En muchas de sus obras escoge la *proporción áurea* para enmarcar las figuras que aparecen en ellas, como, por ejemplo, *La Gioconda*. Más tarde, en Milán, conoce al matemático Luca Pacioli con quien establece una gran amistad y dibuja para él las tablas que se grabaron en su libro *De Divina Proportione*. En Milán pinta su mejor obra, *La Última Cena*, ejemplo singular del uso del Espacio Proyectivo en la pintura. Fue, además de pintor, ingeniero, inventor, anatomista, escultor, arquitecto, urbanista, botánico, músico, poeta, filósofo y escritor.

Renacimiento. Santa María Novella (Florencia, 1470)

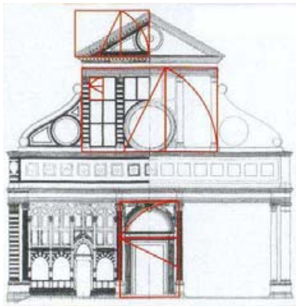


FIGURA 24: Iglesia de Santa María Novella

En la fachada de Santa María (figura 24) se aprecian gran cantidad de formas geométricas, cuadrados, círculos y rectángulos, que dan proporción y armonía a la obra. Para su autor, Leon Battista Alberti (1404 - 1472), las formas geométricas impulsan a meditar sobre las verdades de la fe. La presencia de rectángulos áureos y el pensamiento de Alberti nos recuerda de nuevo el carácter sagrado de Φ.

En el dibujo podemos ver marcados los rectángulos áureos, caracterizados por la forma de construirlos que quedaba reflejada en la figura 8.

La existencia de cuadrados en la fachada hace que $\sqrt{2}$ junto con Φ sean los números predominantes en toda ella.

Renacimiento. Luca Pacioli (1445 - 1517)

Luca Pacioli fue fraile franciscano entre 1470 y 1477, tras lo cual empezó a dar clases de Matemáticas, publicando en 1497 su obra principal, la *Summa de arithmetica, proportioni et proportionalita*.
En 1497 marcha a Milán donde conoce a Leonardo da Vinci, quien ilustra su libro *De divina proportione*. En esta obra Luca Pacioli llama por primera vez **divina proporción** a la *proporción áurea*. De esa forma, reafirma en el Renacimiento el carácter sagrado que ya tuviera en la antigüedad.

FIGURA 25: Luca Pacioli

Renacimiento. Piero de la Francesca (1416 - 1492)

En la pintura renacentista se hace patente la idea del hombre como centro del Universo. Los cuadros adquieren profundidad; para lograrlo, el ojo del pintor se sitúa delante de la escena, *proyecta* su mirada sobre ella y *corta* por un plano que es el cuadro. Nace así la Geometría Proyectiva, a la que se le dedica un capítulo de este libro.

PIERO DE LA FRANCESCA

"Yo digo que la perspectiva significa literalmente..., las cosas vistas a la distancia, representadas como si estuvieran encerradas en el interior de límites dados y en proporción, de acuerdo a la cantidad de sus distancias, sin las cuales nada podría ser degradado correctamente."

Libro III de la *Prospectiva pingendi*

En su cuadro La Flagelación (figura 26) se puede apreciar la profundidad de la escena y cómo las estancias están enmarcadas en rectángulos áureos.

En El Bautismo de Cristo (figura 27) se observan similitudes con el Hombre de Vitrubio, existiendo relaciones áureas entre la altura de Jesús

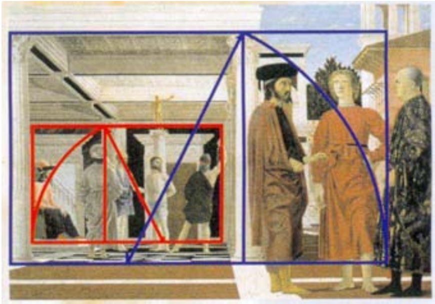


FIGURA 26: La Flagelación

y las posiciones del ombligo y El Espíritu Santo. Como hemos dicho, la sacralidad de Φ es patente en el Renacimiento.

Se llegó a plantear que las relaciones que verifica Φ tales como:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} = 1$$

eran una explicación matemática al Misterio de la Santísima Trinidad

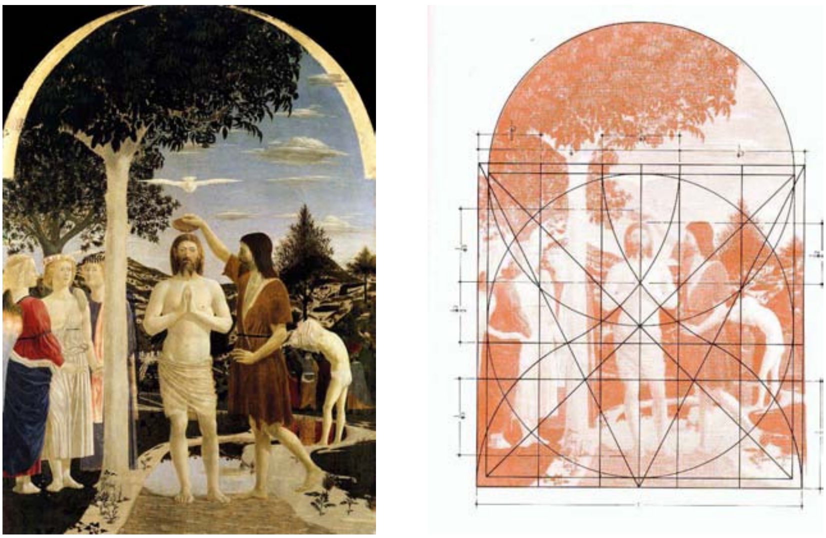


FIGURA 27: El Bautismo de Cristo

Arquitectura civil moderna

El edificio que alberga el Congreso de los Diputados (figura 28) en Madrid, construido el año 1850, es una muestra del uso de la *proporción áurea* en la construcción de esa época. En la imagen puede verse una forma práctica de localizar *rectángulos áureos*: se proyecta, por ejemplo, nuestro DNI sobre la fachada, buscando si hay coincidencia superpuesta con algún rectángulo. En tal caso existiría una *semejanza* (misma forma) entre ambos rectángulos y como nuestro DNI es *áureo*, también lo sería el rectángulo localizado.

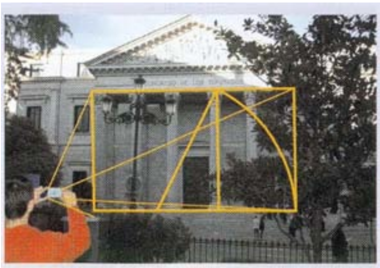


FIGURA 28: Palacio de las Cortes

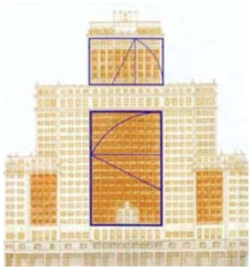


FIGURA 29: Edificio en Plaza de España

Otro ejemplo es el también madrileño Edificio España del año 1953. En el dibujo de la figura 29 se han marcado algunos *rectángulos áureos* de los que llenan la fachada.

Le Corbusier (1887 - 1965)

El arquitecto francés Charles E. Jeanneret-Gris, conocido por Le Corbusier, publicó en 1948 su libro *Le Modulor* en el que, siguiendo la tradición de Vitrubio y da Vinci, diseña un sistema de medidas del cuerpo humano en el que cada una se obtiene dividiendo la anterior por el *número áureo* (ver figura 30).

El sistema se inicia con la medida del hombre con la mano levantada (226 cm) y con su mitad, la altura del ombligo (113 cm). A partir de ahí se obtienen las series de la tabla 3.

Estas medidas del cuerpo humano propuestas por Le Corbusier estaban destinadas a ser usadas en arquitectura como base del diseño, quedando así el *número áureo* implícitamente presente en las construcciones.

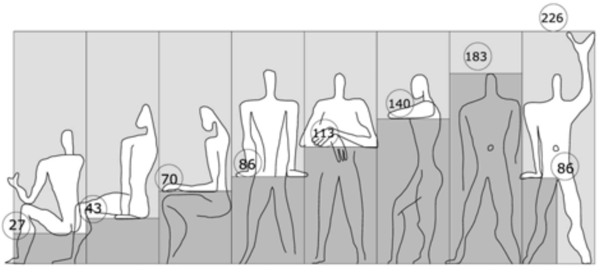


FIGURA 30: Le Modulor de Le Corbusier

serie azul (cm)	226	140	86	53	33	20	...
serie roja (cm)	113	70	43	26	16	10	...

TABLA 3: Las series de Le Corbusier

Pintura del siglo XX. Salvador Dalí (1904 - 1989)

La obra de Salvador Dalí es un ejemplo clásico del uso de la Geometría en la pintura. En la figura 31 vemos el cuadro de Dalí Leda Atómica. La modelo está situada encajando perfectamente en los vértices de un pentágono regular, como puede apreciarse en uno de los bocetos previos dibujados por el pintor.

FIGURA 31: Leda Atómica

En La Última Cena (1955), por ejemplo, Cristo y los doce apóstoles se encuentran dentro de un dodecaedro regular, formado por doce pentágonos regulares que, como se recordará, están estrechamente relacionados con la *divina proporción*.

Recoge además la idea de Platón según la cual el dodecaedro representa la esencia misma del Universo, en el que se pueden inscribir los demás poliedros regulares, el cubo, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, representación a su vez de los cuatro elementos, tierra, fuego, aire y agua, respectivamente.

5 ¿CÓMO SE REPRODUCEN LOS CONEJOS?

Contando parejas de conejos

Observemos la figura 32: se parte de una pareja de conejos, que al mes se hace adulta y engendra una nueva pareja. Al tercer mes ya hay dos parejas. La primera pareja, que ya es adulta, vuelve a engendrar, mientras que la segunda no lo hará hasta el mes siguiente. Y así sucesivamente. ¿Cuántas parejas habrá en el sexto mes? ¿Y en el séptimo?

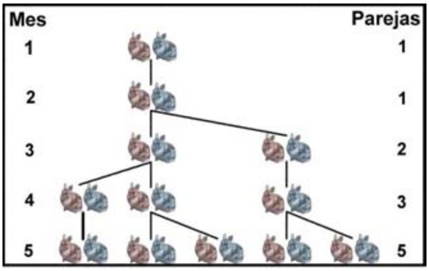


FIGURA 32: ¿Cuántas parejas habría en el 6º mes?

La sucesión de Fibonacci y el número áureo

¿Qué tiene todo esto que ver con nuestro *número de oro*? Si observamos el número de parejas que hay cada mes, obtenemos la siguiente sucesión:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \cdots$$

Esta sucesión parte de los números $1,\ 1,$ y a partir de ahí cada número es la suma de los dos anteriores. Se conoce con el nombre de *sucesión de Fibonacci* y presenta numerosas curiosidades.

Si cogemos tres términos consecutivos (por ejemplo, $34,\ 55,\ 89$), el producto de los extremos es igual al cuadrado del número central más/menos una unidad ($3026 = 3025 + 1$). Cosa parecida ocurre si tomamos cuatro términos consecutivos ($21 \times 89 = 34 \times 55 - 1$).

Volviendo a las series azul y roja de Le Corbusier, nos damos cuenta de que ambas son *sucesiones de Fibonacci* "a la inversa", es decir, cada término es igual a la suma de los dos siguientes.

Pero lo que nos importa ahora de la *sucesión de Fibonacci* es lo que ocurre si dividimos cada término entre el anterior, a partir del segundo. Se obtiene la siguiente sucesión, en notación decimal aproximada:

$$1, 2, 1'5, 1'666, 1'6, 1'625, 1'615, 1'619, 1'6176, 1'6181, 1'6179, 1'6180, \cdots$$

¡¡ Nos acercamos al *número áureo* $\simeq 1,6180339887498948482$...!!

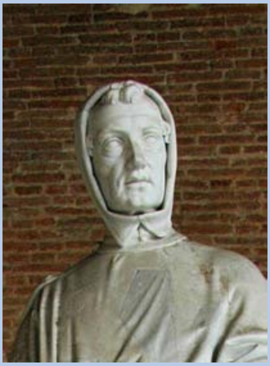


FIGURA 33: Fibonacci

Leonardo de Pisa, más conocido por **Fibonacci** (1170 - 1250), fue un matemático italiano famoso por la invención de la sucesión que lleva su nombre, surgida como consecuencia del estudio del crecimiento de las poblaciones de conejos. Fibonacci escribió en 1202 el libro de los cálculos o del ábaco, *Liber abaci*, en el que estudia la producción de conejos a partir de una pareja, que es fecunda cuando cumple un mes de edad y engendra otra pareja, que tarda un mes en nacer. Esta pareja es adulta al mes y ambas parejas vuelven a engendrar cada una otra pareja. Y así sucesivamente.

Un enigma áureo

En la figura 34 se han cambiado de posición los trozos de colores. ¿Cómo es posible que aparezca un hueco en la segunda disposición?

Solución del enigma: *Los puntos señalados en la hipotenusa del triángulo* ***no están alineados****, porque* $\frac{2}{5}$ *no es igual a* $\frac{3}{8}$ $(2 \times 8 > 3 \times 5)$*; realmente no*

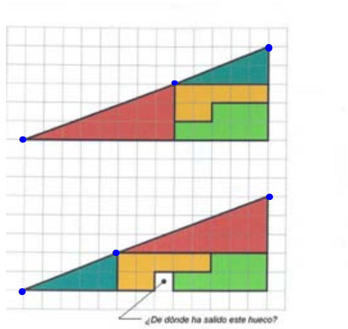


FIGURA 34: Un enigma aureo

existe el triángulo rectángulo grande, los segmentos que deberían completar la hipotenusa forman una ***V*** *muy abierta. Al cambiar de posición los trozos, la* ***V*** *se invierte y hay un aumento de superficie, que se compensa con el hueco "fantasma". Lo interesante de este enigma es ver que los números* 2, 3, 5 *y* 8 *son términos consecutivos de la* sucesión de Fibonacci *y que la diferencia entre* 2×8 *y* 3×5 *es, como vimos antes,* 1.

6 EL NÚMERO ÁUREO EN LA MÚSICA

Un ejemplo de la presencia de la sección áurea en la Música lo tenemos en el compositor húngaro Bèla Bartók (1881 - 1945). Tanto la *proporción áurea* como la *sucesión de Fibonacci* son usadas como patrón para determinar ciertos elementos de sus composiciones. También en la Quinta sinfonía de Beethoven (1770-1827) se ha podido mostrar cómo el tema principal a lo largo de la obra está separado por un número de compases que pertenece a la *sucesión de Fibonacci*. Así mismo, en varias sonatas para piano de Mozart (1756-1791) la proporción entre el desarrollo del tema y su introducción es cercana a la *razón áurea*.

Las escalas de tipo áureo presentan en su estructura intervalos de 1:5, 1:3, 1:2, que surgen de la proporción 5:3:2, tres números de la *sucesión de Fibonacci*. En la figura 35 podemos ver un modelo de escala 1:2.

FIGURA 35: Modelo de escala 1:2

7 EL NÚMERO ÁUREO EN LA NATURALEZA

Como ya se comentó al principio, el *número áureo* y también la *sucesión de Fibonacci* están presentes en muchas manifestaciones de la Naturaleza. Vamos a detenernos en algunas de ellas.

La espiral áurea

Si tomamos un rectángulo áureo $ABCD$ (ver figura 36) y le quitamos el cuadrado $AEFD$, resulta que el rectángulo $EBCD$, como ya sabemos, es también áureo. Si á éste le quitamos el cuadrado $EBGH$, el rectángulo resultante $HGCF$ es áureo también.

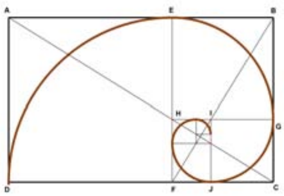


FIGURA 36: La espiral áurea

Este proceso se puede reproducir indefinidamente, obteniéndose una sucesión de rectángulos encajados que convergen hacia un punto. Si unimos los vértices opuestos de los cuadrados con arcos de circunfe-rencias, obtenemos una espiral que se llama *espiral áurea o espiral de Durero*.[3]

Esta espiral fue ideada por el famoso pintor de Núrenmberg Albert Durero (1471 - 1528) buscando una curva que aproximara bien otra espiral famosa, *la espiral logarítmica*, que se caracteriza por ser constante el ángulo que forma la tangente en cada punto con el radio vector. Como se sabe, ésta no puede dibujarse con regla y compás, lo que sí es posible y sencillo en la *espiral áurea*; basta recordar la construcción de un rectángulo áureo, pues a partir de él se dibuja la espiral.

Un perfecto ejemplo de espiral logarítmica es la concha del nautilus. En la figura 37 se aprecia mediante un corte los compartimentos que ocupa el animal, que aumentan de tamaño manteniendo la misma forma.[4]

[3]En realidad no es una *espiral* porque está formada por arcos de circunferencia.

[4]Una información más detallada sobre la *espiral logarítmica* puede verse en el capítulo de este mismo libro "CAMINANDO SOBRE LAS CURVAS".

FIGURA 37: La concha del nautilus

Los girasoles y las piñas también presentan espirales áureas en su estructura. En la figura 38 pueden verse espirales en los dos sentidos, *levógiro* (sentido contrario a las agujas del reloj) y *dextrógiro* (mismo sentido que las agujas del reloj).

FIGURA 38: Espirales áureas en los girasoles y en las piñas

Galileo Galilei (1564 - 1642)

Terminamos la sección con esta frase de Galileo que nos hace reflexionar sobre la necesidad de mirar el mundo con ojos matemáticos, viendo las Matemáticas que hay en la belleza, para apreciar así la belleza de las propias Matemáticas.

> *La Naturaleza está escrita en ese gran libro que siempre está delante de nuestros ojos, el Universo, pero que no podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender ni una palabra de él, sin lo cual se deambula en vano a través de un oscuro laberinto.*

A modo de epílogo

La Geometría posee dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea en media y extrema razón. El primero puede compararse al oro, el segundo a una joya.

Johannes Kepler (1571 - 1630)

En este capítulo hemos pretendido acercarnos un poco a esa joya de la que nos hablaba el gran astrónomo y matemático alemán. Esperamos haberlo conseguido.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J.M. ALBAIGÈS: *La proporción áurea*. Biblioteca Desafíos matemáticos, 2007

[2] MATILA C. GHYKA: *El número de oro*. Poseidon, 1992.

[3] MATILA C. GHYKA: *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Poseidon, 1983.

[4] INTERNET: *La proporción áurea, el número áureo*.

http://descartes.cnice.mec.es/
http://es.wikipedia.org/
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/
http://www.isftic.mepsyd.es/

[5] ROBERT LAWLOR: *Geometría Sagrada*. Editorial Debate, 1993

ANTONIO ARANDA PLATA
Departamento de Álgebra
Universidad de Sevilla

3 LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

En este capítulo, presentamos el Problema de los Puentes de Königsberg y analizamos la solución que le dio el matemático Leonhard Euler en 1735, a partir de un proceso de modelización ideado por él mismo y que dio lugar al nacimiento de dos ramas de las matemáticas: la Teoría de Grafos y la Topología.

1 INTRODUCCIÓN

Una pregunta repetida que nos encontramos los matemáticos en el devenir de nuestro quehacer diario es ¿para qué sirven las Matemáticas? De hecho, está totalmente constatado que cuando un profesor de Matemáticas de cualquier nivel (incluyendo el universitario) empieza a hablar a sus alumnos de un tema nuevo, surge inevitablemente desde los pupitres la clásica cuestión: profesor y esto, ¿para qué sirve?

Responder esta pregunta en un contexto tan general es demasiado complicado. Podemos simplificar y decir que las Matemáticas (y, por tanto, los matemáticos) sirven (servimos) para resolver problemas. Pero esta respuesta, de nuevo, es muy general y ambigua, porque invita, a su vez, a plantear nuevos interrogantes, por ejemplo, ¿qué tipo de problemas se resuelven? Y más, ¿qué es, para los matemáticos, un problema?

El propósito de este capítulo es el de ilustrar, con un ejemplo concreto, qué piensan los autores sobre cómo responder a las cuestiones anteriores y conducir al lector (o, al menos intentarlo) a través de la historia que se cuenta a encontrar sus propias respuestas.

Y, ¿por qué hemos elegido precisamente el Problema de los Puentes de Königsberg para usarlo como ejemplo en un libro de divulgación matemática? En primer lugar, porque la historia de los Puentes de Königsberg resulta muy fácil de leer y de entender por cualquier persona que, aún sin tener muchos conocimientos de Matemáticas, tenga algo de interés por leer algunos temas de esta disciplina, sin que ello le suponga un gran esfuerzo mental a la hora de captar el mensaje que se le está transmitiendo.

Por otra parte, también se ha pretendido con la narración de esta historia, de una manera sencilla y amena, dar a conocer cómo la resolución de un problema aparentemente intrascendente, produjo el nacimiento de dos ramas de las Matemáticas que pudieran parecer alejadas en sus técnicas y objetivos, la Teoría de Grafos y la Topología, Matemática Discreta y Matemática Pura, respectivamente.

Y para finalizar, otro propósito que también nos anima es mostrar cuál es, en nuestra opinión, el trabajo de un matemático (por supuesto, aparte del de, como cualquier científico, saber transmitir sus conocimientos y logros): hacer Matemáticas. ¿Y qué se entiende por esto último? Pues, básicamente, hacer Matemáticas es sinónimo de resolver problemas, tanto aquellos propios como aquellos que le puedan llegar desde fuera, para cuyo tratamiento son muy útiles los razonamientos y planteamientos matemáticos habituales.

En esta historia veremos cómo un matemático, Leonhard Euler, cuando es requerido para resolver un problema de la vida real (el problema de los Puentes de Königsberg), aparentemente alejado de todo tipo de Matemáticas, procede en primer lugar a modelizarlo, es decir, a prescindir del significado físico real de los elementos del problema (zonas de la ciudad y puentes en este caso, como se verá a continuación), a crear una nueva teoría matemática adecuada a este modelo (la Teoría de Grafos, en este caso), a resolver el problema según los fundamentos de esta teoría y, finalmente, a traducir la solución obtenida (en grafos) a la situación real de partida. Podemos resumir su trabajo, nuestro trabajo, en el siguiente esquema:

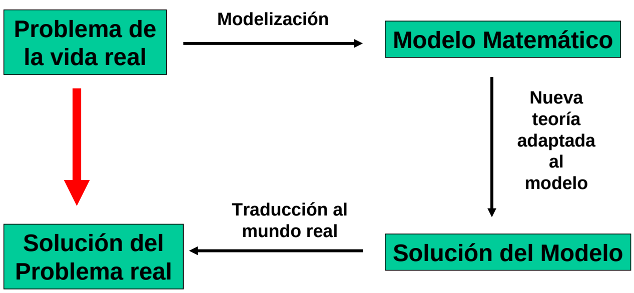


FIGURA 1: El trabajo de los matemáticos.

En este capítulo presentaremos el Problema de los Puentes de Königsberg y analizaremos la ingeniosa solución que le dio el matemático Euler en 1735, como resultado de un proceso de modelización ideado por él mismo, mediante la introducción de una nueva teoría matemática, la Teoría de Grafos, como base de esta resolución.

Desde este momento, nos permitimos aconsejar al lector para que, a la vez que se va narrando la historia, trate de ir averiguando por su cuenta si existe el camino que se plantea, si la solución, caso de existir, es única o no, si este problema es parecido a otros que pudieran ocurrírsele y, en definitiva, si, en lugar de llegar a la posible solución considerando todas las posibilidades, es capaz de formular una estrategia que lleve a la misma de una forma más simple, rápida y lógica a la vez. Es decir, en una palabra, que él mismo intente ir haciendo Matemáticas.

2 LA CIUDAD DE KÖNIGSBERG

La palabra "Königsberg" significa en alemán "Colina real" (*König* = *rey* y *Berg* = *monte*). La ciudad de Königsberg (en algunos textos se escribe Koenigsberg o Konigsberg), actualmente llamada Kaliningrado, es una ciudad portuaria de Europa Oriental, situada a orillas del Mar Báltico en territorios de la Federación Rusa y a unos 50 kilómetros de la frontera con Polonia. Hasta mediados del siglo pasado, Königsberg pertenecía al imperio prusiano, estando situada al este del mismo y está atravesada por el río Pregel, que en la actualidad se denomina Pregolya y que desagua en el Lago del Vístula, comunicado a su vez con el Mar Báltico por el estrecho de Baltiysk. Es la capital de la provincia de Kaliningrado, que según Wikipedia (véase la referencia [6]) ocupa 13.612 km^2 y que tenía en 2004 una población de 968.200 habitantes. Dicha provincia se encuentra aislada del resto del territorio ruso, con fronteras al norte con Lituania y al sur con Polonia, ambos países de la Unión Europea.

Königsberg tiene su origen en una fortaleza del siglo XIII (aproximadamente hacia 1255) construida por el Rey Ottokar II de Bohemia. Su función era ser el centro de la lucha para expulsar a los pueblos paganos bálticos fuera de la Prusia histórica e instaurar el régimen germánico cristiano. Fue destruida en 1263 por los prusianos y, posteriormente, reedificada en 1268. Más tarde, Königsberg entró a formar parte de la Liga Hanseática en el siglo XIV, hacia 1365. Desde el siglo XVI al XVII albergó a los maestres de la Orden Teutónica y a los Duques de Prusia.

La ciudad sufrió mucho durante la guerra de los siete años, en la que la ocuparon primero los rusos, en el siglo XVIII, tras la batalla de Frienland y luego los franceses, en el siglo XIX. Durante todo ese tiempo y hasta 1945, Königsberg fue la capital de Prusia Oriental, habiendo también pertenecido al Imperio Alemán y al III Reich.

FIGURA 2: Situación actual de Königsberg

Durante las dos guerras mundiales, Königsberg fue duramente atacada y seriamente dañada. Muchos de sus edificios históricos fueron derrumbados por bombardeos. En 1946, en la Conferencia de Berlín, la ciudad pasó a manos de la antigua URSS, que le cambió el nombre, un año después, por el de Kaliningrado, en honor de Mijaíl Kalinin. En ella estuvo una de las principales bases de submarinos nucleares de la extinta Unión Soviética. Tras la independencia de Lituania en 1991, la región queda bajo soberanía rusa, aunque separada del resto de Rusia, debido a su importancia estratégica por ser el único puerto ruso del Mar Báltico libre de hielo durante todo el año.

La recientes reuniones entre la Unión Europea y la Federación Rusa han confirmado las discrepancias sobre el futuro de Kaliningrado. Su proximidad con la frontera polaca la convierte también en un importante enclave defensivo ante el proyecto de escudo nuclear planteado por los Estados Unidos y la OTAN.

FIGURA 3: Universidad en Kaliningrado.

Entre sus principales construcciones se encuentra la Universidad Albertina (hoy Universidad Estatal Immanuel Kant de Rusia), fundada en 1544 por el duque de Prusia, Alberto de Brandenburgo. Esta universidad pronto se convirtió en un importante centro de estudios al que asistía un gran número de estudiantes por el espíritu de la reforma que predominaba en él. En el siglo XVII, decayó su importancia debido a las largas guerras y a las continuas disputas teológicas, aunque después, bajo la protección de los reyes prusianos, la universidad alcanzó un nuevo período de esplendor, sobre todo en tiempos del filósofo nacido en la propia ciudad, Immanuel Kant.

Otra gran construcción es la Catedral de Königsberg, iniciada en el año 1325, de estilo fundamentalmente gótico alemán, en la que se estuvo trabajando hasta mediados del siglo XVI. Fue casi destruida en la Segunda Guerra Mundial y restaurada a partir de 1990. En su interior hay numerosas esculturas y pinturas del renacimiento flamenco, así como la biblioteca Wallenrodt, donada en 1650 y que se encuentra en la torre principal.

FIGURA 4: La Catedral de Königsberg.

También caben destacar el palacio, obra de Von Unfried, en el que fueron coronados los principales reyes de Prusia, como Federico III, en 1701 y Guillermo I, en 1861 y la Iglesia de Cristo Salvador, la mayor de la provincia, situada cerca de la plaza central de la ciudad, de estilo ruzo-bizantino, terminada en el año 2006.

Königsberg tiene también un parque zoológico fundado en 1896 donde se pueden ver alrededor de 2300 animales.

FIGURA 5: La catedral y el río.

3 CIUDADANOS DESTACADOS NACIDOS EN KÖNIGSBERG

En la ciudad de Königsberg nacieron tres de las personalidades científicas y filosóficas más importantes de los últimos tres siglos, contando con el actual. En concreto y por orden cronológico, el filósofo Immanuel Kant, el físico Gustav R. Kirchoff y el matemático David Hilbert vieron la luz por primera vez en esta ciudad y pasaron en ella los primeros años de sus vidas. Ofrecemos a continuación unas breves notas biográficas.

FIGURA 6: Inmanuel Kant

Immanuel Kant (1724-1804), para muchos uno de los más grandes filósofos de todos los tiempos y el pensador más influyente de la era moderna, nació en Königsberg en 1724. Tras realizar sus estudios primarios, Kant ingresó en la universidad, donde gustaba del estudio de los autores clásicos. También se dedicó a estudiar Física y Matemáticas. Sin embargo, la muerte de su padre hizo que Kant tuviese que abandonar sus estudios y ganarse la vida como tutor privado. En 1755, reanudó sus estudios universitarios y obtuvo el doctorado. Posteriormente, impartió clases en la universidad y dio conferencias de Ciencias y Matemáticas, para llegar paulatinamente a disertar sobre casi todas las ramas de la Filosofía. Durante este periodo, sus escritos y conferencias hicieron que se ganara una gran reputación como filósofo, aunque ello no bastó para que se le concediera una cátedra, que no logró hasta 1770, cuando se le designó profesor de Lógica y Metafísica. En años posteriores continuó con su labor docente, atrayendo un gran número de estudiantes a su ciudad natal. Sus nada ortodoxas enseñanzas religiosas le crearon problemas con el gobierno de Prusia, hasta el punto de que el rey, Federico Guillermo II, le llegó a prohibir impartir clases sobre asuntos religiosos, orden que Kant obedeció hasta la muerte del monarca. Ya una vez retirado, en 1798, Kant publicó un epítome con sus ideas en materia religiosa. Sus principales obras son: "*Los Fundamentos de la Metafísica de las Costumbres*", "*La Crítica del Juicio*" y "*Primeros Principios Metafísicos de las Ciencias de la Naturaleza*". Kant murió el 12 de Febrero de 1804 en su ciudad natal, donde había pasado toda su vida.

Kirchoff (1824-1887), físico alemán nacido en Königsberg en 1824, era hijo de un abogado. A los 18 años entró en la universidad de su ciudad, obtuvo el doctorado cinco años después y recibió una beca para continuar estudios de postgraduado en París, a donde no pudo viajar por la revolución de 1848. Fue profe sor en Berlín y también en las universidades de Breslay y Heidelberg.

Entre sus descubrimientos científicos más importantes citamos la formulación, en 1845, de sus leyes relativas a las corrientes eléctricas en las redes de conductores, sus aportaciones a la Física de las Radiaciones, que le acreditan como creador del Análisis Espectral y su contribución al conocimiento de la constitución íntima de la materia. En 1859 comunicó a la Academia de Berlín la presencia de sodio en el Sol, abriendo de esta forma un nuevo capítulo de la Física: la Astrofísica. Ese mismo año, estableció la ley que lleva su nombre y que afirma que la relación entre el poder emisor y el absorbente es la misma para todos los cuerpos y sólo depende de la temperatura. En 1860 realizó unas investigaciones sobre las transformaciones del calor en energía luminosa y, a partir de 1864, trabajó en diversas cuestiones de la Física, tales como las descargas eléctricas oscilantes, la velocidad del sonido en los tubos sonoros o las características del éter (que entonces se creía existente). Murió en 1887 en Berlín.

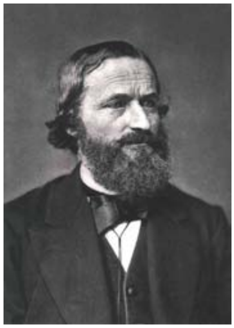


FIGURA 7: Gustav. R. Kirchoff

David Hilbert(1862-1943), eminente matemático alemán, nació en Königsberg el 23 de enero de 1862. Estudió en el instituto y en la universidad de su ciudad, doctorándose bajo la dirección del profesor Lindemann en 1885. Seguidamente, se incorporó al profesorado de dicha universidad en 1886, llegando a obtener el título de catedrático. En 1895, reclamado por Klein, consiguió la Cátedra de Matemáticas en la Universidad de Gottingen, donde continuó toda su carrera profesional. Hilbert trabajó muchas ramas de la Matemática Pura y Aplicada, como la Teoría de la Relatividad, la teoría de invariantes, el Análisis Funcional (son especialmente conocidos sus Espacios de Hilbert), las ecuaciones integrales y el cálculo de variaciones, entre otras. Estos trabajos influyeron de forma notable en la Geometría, aumentando su prestigio al participar en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París a finales del siglo XIX. En su intervención, propuso sus 23 problemas abiertos, muchos de los cuales han sido resueltos abriendo nuevos campos en

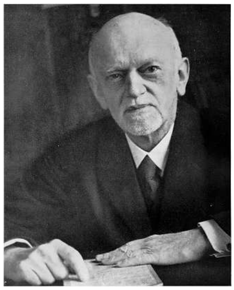


FIGURA 8: David Hilbert

las Matemáticas. Se retiró en 1930, siendo nombrado ciudadano de honor de la ciudad de Königsberg. Murió en Gottingen, en 1943. Su lema fue: "Nosotros debemos conocer, nosotros conoceremos".

4 EL PROBLEMA DE LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

FIGURA 9: El río Pregel.

Como ya se ha comentado, en el siglo XVII la ciudad de Königsberg estaba atravesada por el rio Pregel (actualmente llamado Pregolya), que se dividía en el Viejo y en el Nuevo Pregel. Este río formaba dos islas a su paso por la ciudad, una de las cuales, la más pequeña, se llamaba la isla Kneiphof.

Para unir las cuatro partes de la ciudad separadas por las geografía, existían siete puentes, cuya situación se detalla en la siguiente figura:

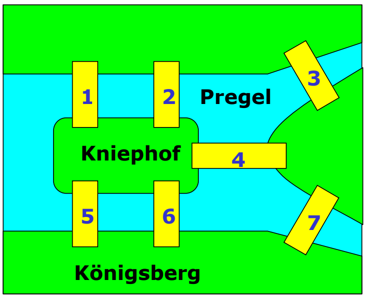


FIGURA 10: Los Puentes de Königsberg.

Los nombres de estos puentes en alemán, inglés y español son los que se recogen a continuación:

1.- Kraemer / Shopkeeper / Tendero
2.- Schmiede / Blacksmith / Herrero
3.- Holz / Wooden / Madera
4.- Honig / Honey / Miel
5.- Greune / Green / Verde
6.- Koettel / Guts, Giblets / Despojos
7.- Hohe / High / Alto

FIGURA 11: Königsberg en tiempos de Euler.

Cuenta la literatura que los domingos por la mañana y los días de fiesta, los habitantes de la ciudad en sus paseos se entretenían tratando de resolver el siguiente problema: ¿Es posible recorrer todas las zonas de la ciudad, atravesando todos los puentes, una y sólo una vez cada uno de ellos? Y en tal caso, ¿se podría volver al punto de partida?

Mientras unos negaban la posibilidad de hacerlo y otros dudaban, nadie sostenía que fuese posible realmente. De hecho, es un dato histórico que un comité de jóvenes universitarios de la ciudad de viaje de estudios por Europa visitó, en 1735, a Leonhard Euler, matemático suizo nacido en Basilea en 1707, para pedirle que resolviera el conflictivo problema.

5 SOLUCIÓN DE EULER AL PROBLEMA DE LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

Euler, una vez enterado del problema, se dedicó por completo al estudio del mismo, dando una solución simple e ingeniosa, que servía también para cualquier número de puentes.

Para empezar, Euler formuló el problema de la siguiente manera:

En la ciudad de Koenigsberg, en Prusia, hay una isla A llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes a, b, c, d, e, f, g, que cruzan los dos brazos del río. La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes sólo una vez... Se me ha informado que, mientras unos negaban la posibilidad de hacerlo y otros lo dudaban, nadie sostenía que fuese posible realmente. El problema podría resolverse haciendo cuidadosamente una tabla de todos los recorridos posibles asegurándose así, por inspección, de cual de todos ellos, si es que alguno hay, satisface lo requerido. Este método de solución, sin embargo, es demasiado tedioso y difícil a causa del gran número de combinaciones posibles... Por tanto, lo descarté y traté de buscar otro que mostrase sólamente si se puede descubrir un camino que satisfaga la condición prescrita.

A los pocos meses de habérsele sido planteado el problema, Euler presentó un voluminoso informe a la Academia Rusa de San Petersburgo, en el que afirmaba haber demostrado la imposibilidad de tal ruta. Posteriormente, en 1736, publicó un artículo titulado *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"* (véase la referencia [3]), en el que resolvía el problema en el caso más general, obteniendo condiciones sobre la existencia de soluciones para cualquier problema del mismo tipo. Este artículo es considerado por varios autores como el nacimiento de la Teoría de Grafos, utilizada actualmente en una gran cantidad de aplicaciones y también como una de las primeras manifestaciones de una "nueva Geometría" en la que únicamente importa la posición de los objetos y no sus medidas. Ya Leibniz había sido el primero en hablar de la "geometriam situs", palabras latinas que designaban a la geometría de la posición y que actualmente se traducen como Topología.

No se sabe si Euler estuvo o no en Königsberg. Lo más problable es que no, pero modelizó el problema mediante un dibujo de puntos (que representaban las zonas de la ciudad) y una línea entre dos de esos puntos por cada puente, si lo había, que uniera las dos zonas representadas (es decir, pintó lo que conocemos hoy en día por un grafo). Además, se dio cuenta que para cruzar cada zona de la ciudad hay que entrar en ella por un puente y salir por otro distinto. De ahí, dedujo en general que:

- Si en la ciudad hay más de dos regiones a las que conducen un número impar de puentes, la ruta no es posible.
- Si sólo hay dos regiones a las que llega un número impar de puentes, la ruta se podrá realizar, comenzando en una de esas regiones.
- Si no hay regiones a las que conduzcan un número impar de puentes, la ruta pedida se podrá realizar, comenzando en cualquier zona y volviendo a ella.

Empleando un lenguaje más actual y propio de las Matemáticas, la solución dada por Euler se podría enunciar así:

La condición necesaria y suficiente para que tal ruta exista es que el número de zonas de la ciudad a las que le llega un número impar de puentes sea 0 (en cuyo caso la ruta será cerrada, es decir, comenzará y acabará en la misma región) ó 2 (en cuyo caso la ruta será abierta, es decir, comenzará en una región y terminará en otra distinta).

O, utilizando la terminología de la Teoría de Grafos, alguno de cuyos detalles se presentan en la siguiente sección:

La condición necesaria y suficiente para que un grafo pueda recorrerse pasando por todas sus aristas (líneas) una y sólo una vez es que o bien todos los vértices (puntos) tengan valencia (número de aristas que inciden en un vértice) par (en cuyo caso la ruta será cerrada) o bien sólo haya dos vértices de valencia impar (en cuyo caso la ruta será abierta), comenzando en uno de tales vértices y terminando en el otro.

A tales rutas, caso de existir, se les llama por los especialistas *recorridos o caminos eulerianos*, por razones obvias. Hay que indicar también que, en realidad, Euler sólo demostró la condición necesaria en su artículo de 1736, quizás porque, para él, la condición suficiente era trivial. Esta condición suficiente tuvo que esperar casi siglo y medio para ser probada, lo que hizo Carl F. Hierholzer, en 1873 (véase la referencia [5]).

Como anécdotas y antes de terminar esta sección con una breve biografía de Leonhard Euler, decir que en 1875 los alemanes construyeron un nuevo puente en la ciudad de Könisberg, situado más allá de la isla de Kniephof, con lo cual ya sí era posible realizar la ruta comentada, si bien el camino era abierto. Además, sólo cuatro de los puentes originales de Königsberg en 1735 sobrevivieron a la Segunda Guerra Mundial. Los de Blacksmith y Guts fueron destruidos durante la guerra, los de Shopkeeper y Green fueron reconstruídos por los rusos, que los sustituyeron por la carretera de Leninsky Prospekt y el de Honey fue reconstruido por los alemanes en 1935, por lo que sólo los puentes de Wooden y High se conservan actualmente indemnes.

Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler es uno de los más grandes científicos de nuestra historia. Su obra se encuentra en todas los campos de las matemáticas y también en astronomía, óptica, acústica y mecánica. Era un hombre entrañable, animoso y alegre, que además, poseía una gran energía en su trabajo.

Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea (Suiza). Su padre, pastor calvinista, deseaba que su hijo siguiera sus pasos, por lo que Euler inició estudios de Teología. Sin embargo, el mismo padre, que había recibido formación matemática de Jakob Bernoulli (1654-1705), reconoció enseguida el talento de su hijo y abandonó su idea de convertirlo en clérigo. Así, el joven Leonhard estudió en la Universidad de Basilea Teología, Lenguas Orientales, Medicina, Astronomía, Física y Matemáticas, teniendo como profesor de esta última disciplina a Johann Bernoulli (1667-1748). A los 17 años, Euler recibe una mención honorífica de la Academia de las Ciencias de París, por un trabajo sobre la mejor disposición de los mástiles de un barco. No sería ésta la primera vez, ya que Euler consiguió en doce ocasiones dicha mención.

FIGURA 12: Leonhard Euler

En 1727, fue invitado por la emperatriz Catalina I para que ocupara un puesto en la Academia de San Petersburgo (hoy Leningrado), donde ya trabajaban sus amigos, los hermanos Daniel y Nikolaus Bernoulli, como profesores de Matemáticas. Durante el viaje, Euler se entera de la muerte de Nikolaus por lo que a poco de llegar, estuvo a punto de volverse, aunque finalmente no lo hizo. En 1730 ocupa la Cátedra de Filosofía Natural y en 1733 sucede a su amigo Daniel, que abandona Rusia para hacerse cargo de una Cátedra de Matemáticas en Basilea.

Leonhard se casa con Catherine Gsell y llega a tener trece hijos, aunque no todos sobrevivieron a la infancia. De hecho, se decía de él que "Euler producía memorias en la media hora, entre la primera y segunda llamadas a comer" o que "componía a menudo sus memorias con un bebé en su regazo mientras que los niños mayores jugaban a su alrededor".

Euler publica incesantemente en la revista de la Academia. Fue el iniciador del Análisis Matemático y de la Geometría Analítica de tres dimensiones y hacía cálculos sin ningún esfuerzo aparente. Aplicó también el cálculo matemático a la Astronomía, llegando a resolver un problema astronómico en sólo tres días, cuando en opinión de los astrónomos se hubiesen necesitado varios meses para hacerlo. No obstante, forzó tanto la vista en resolver ese problema que sufrió la pérdida de la visión de un ojo a los 30 años (hecho que le haría ganarse el apodo de cíclope) y sufrió de ceguera casi total durante los últimos 17 años de su vida. En 1741, recibe otra invitación, esta vez de Federico el Grande de Prusia, para incorporarse a la Academia de Berlín, en donde pasa 25 años. Cuando sus relaciones con el rey se deterioran, acepta en 1766 un nuevo ofrecimiento de Catalina la Grande y vuelve a Rusia.

Euler es considerado una de los autores más prolíficos de la historia. A lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos. Añadiendo su obra póstuma, se alcanza la cifra de 886 trabajos. Contribuyó al avance de la ciencia, introduciendo y popularizando algunas notaciones en Matemáticas: utilizó la letra "e" para indicar la base del logaritmo neperiano, la letra griega "pi" para designar la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, y la letra "i" para designar la unidad imaginaria.

También en Geometría encontramos huellas de Euler. Utilizó las letras minúsculas "a, b, c" para los lados de un triángulo y las mayúsculas para los vértices y ángulos "A, B, C" opuestos a cada uno de los lados. Llamó "R, r, s", respectivamente, a los radios de la circunferencia circunscrita, inscrita y al semiperímetro del triángulo. Demostró que el ortocentro (punto donde se cortan las alturas de un triángulo), el baricentro (punto donde se cortan las medianas) y el circuncentro (punto donde se cortan las mediatrices), están alineados, formando la llamada Recta de Euler.

Entre sus obras clásicas más famosas se encuentran (con el título ya traducido, ya que Euler escribió estas obras en latín) "*Introducción al análisis de los infinitésimos*", en 1748, "*Instituciones de cálculo diferencial*", en 1755 e "*Instituciones de cálculo integral*", en 1768. Leonhard muere finalmente en San Petersburgo el 7 de septiembre de 1783, habiendo continuado trabajando hasta el último día de su vida.

6 LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG Y LA TEORÍA DE GRAFOS

De lo visto anteriormente puede colegirse que la resolución por Euler del problema de los puentes de Königsberg constituye un claro ejemplo de un proceso de modelización. En primer lugar, Euler reemplazó el mapa de la ciudad por un simple *diagrama de puntos* (que denotó con las letras A, B, C y D y que representaban las zonas de la ciudad) y *aristas* entre ellos (que representaban los siete puentes). Este diagrama constituye el germen de lo que posteriormente se conocería como *grafo*, razón por la cual muchos autores consideran a Euler como el *"padre"i"* de la Teoría de Grafos.

Básicamente, un grafo consiste en un conjunto finito de *vértices* (puntos) y un conjunto finito de *aristas* (líneas) entre ellos. En versión actualizada, el diagrama de Euler podría contemplarse ahora tal y como se observa en la siguiente figura:

En un grafo, dos vértices se dicen *adyacentes* si ambos son extremos de una arista. Toda arista es *incidente* con sus vértices extremos y dos aristas se dicen *incidentes* si ambas comparten un vértice común. Se denomina

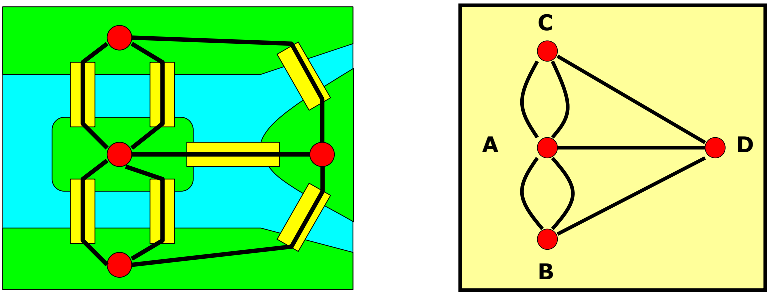


FIGURA 13: El grafo de Königsberg.

valencia (o *grado*) de un vértice al número de vértices adyacentes con él o bien al número de aristas incidentes con él. Por convenio, un vértice no se considera adyacente consigo mismo y los vértices de valencia 0 se denominan *vértices aislados*.

Relativo a los problemas de incidencia y adyacencia, tiene especial importancia el denominado *Lema del Apretón de Manos (Handshake Lemma)*, según el cual en todo grafo el número de vértices con valencia impar es par.

Un *camino* en un grafo es una sucesión consecutiva de vértices y aristas del grafo, comenzando por un vértice, del tipo $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{r-1}, e_r$, de tal manera que cada arista e_i una los vértices v_{i-1} y v_i.

Veamos cómo a partir únicamente de estos dos conceptos básicos, el problema de los Puentes de Königsberg puede ser reformulado usando terminología de la Teoría de Grafos:

EL PROBLEMA DE LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG EN LENGUAJE DE TEORÍA DE GRAFOS

> El objeto del problema es encontrar un camino (no necesariamente cerrado) sobre un grafo que contenga cada arista del grafo una y sólo una vez.

En Teoría de Grafos, un camino de este tipo se denomina, como ya se ha comentado más arriba, camino euleriano y Euler probó entonces que el grafo de Königsberg no posee un camino euleriano cerrado.

Sin embargo, al construirse el nuevo puente de 1875, el grafo correspondiente cambió:

Obsérvese que ahora hay dos vértices de valencia par (B y C) y dos con valencia impar (D con 3 y A con 5). Por tanto, ya sí es posible el recorrido,

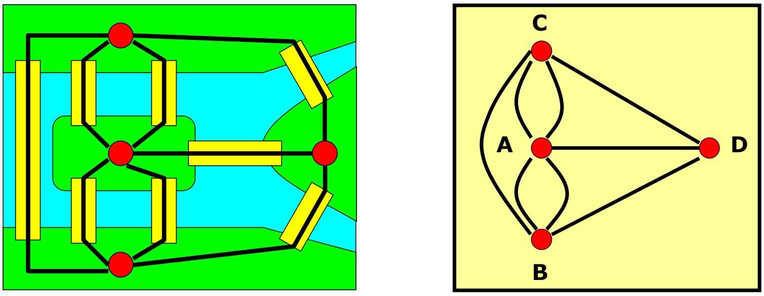


FIGURA 14: El nuevo grafo de Königsberg.

siendo estos dos vértices de valencia impar los vértices inicial y final del mismo. Además, el camino es abierto, pues se empieza en un punto y se termina en otro distinto. Un posible camino sería, por ejemplo: DCBDACABA.

La Teoría de Grafos también permite la resolución de problemas relativos a campos tan separados como puedan ser la lingüística, la investigación operativa, la electricidad, la genética, la sociología, etc. Para una visión más general de los aspectos básicos de esta teoría, el lector puede consultar los libros de Bollobas (ver la referencia [2]) o de Harary (ver la referencia [4]).

Un problema relacionado con el de los Puentes de Königsberg: El problema de dibujar una figura sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por una misma línea

El concepto de camino euleriano en un grafo, definido anteriormente, permite dar una interpretación geométrica intuitiva y simple de los grafos eulerianos como aquellos grafos que se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista, permitiéndose sin embargo pasar dos veces por el mismo vértice. En particular, se tienen las siguientes afirmaciones:

- Todo grafo que no tenga vértices de valencia impar se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista. Más concretamente, se puede dibujar empezando desde cualquier vértice y el dibujo será cerrado, es decir, que terminará en el mismo vértice donde empezó.

- Si un grafo tiene exactamente dos vértices de valencia impar, entonces se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista, pero en este caso hay que empezar siempre en uno de esos dos vértices y terminar en el otro. Este es el caso que se da cuando se añade un puente más al problema original de los Puentes de Königsberg.

- Si un grafo tiene 4 ó más vértices de valencia impar, entonces no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista. Este es el caso del problema original de los Puentes de Königsberg.

Finalmente, como ejercicio de aplicación práctica de estas sencillas reglas, proponemos al lector que estudie (y dibuje, en su caso) la posibilidad de dibujar las dos siguientes figuras (la letra hache mayúscula y el sobre de una carta), sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista:

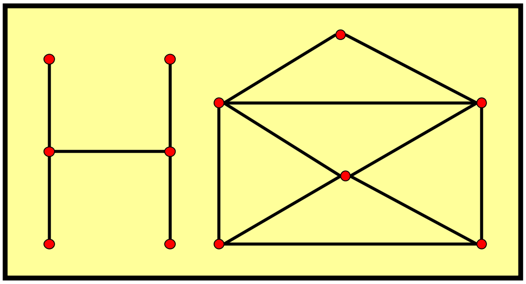


FIGURA 15: ¿Se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea?

BIBLIOGRAFÍA

[1] N.L. Biggs, E.K. Lloyd y R.J. Wilson: *Graph Theory 1736-1936*. Clarendon Press, 1986.

[2] B. Bollobas: *Graph Theory, 2ª Ed.*. Springer-Verlaj, 1985.

[3] L. Euler: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Commentarii Academice Scientarum Imperialis Petropolitane 8 (1736), 128-140.

[4] F. Harary: *Graph Theory*. Addison Wesley, 1969.

[5] C. Hierholzer: *On the possibility of traversing a line-system without repetition or discontinuity*. Mathematische Annalen 6 (1873), 30-32.

[6] *Kaliningrado*. Wikipedia, la enciclopedia libre.
http://es.wikipedia.org/wiki/Kaliningrado

ALFONSO CARRIAZO
LUIS M. FERNÁNDEZ
JUAN NÚÑEZ
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Sevilla

4 ENLOSADOS Y PAVIMENTACIONES

En este capítulo vamos a tratar el problema de pavimentar un suelo plano con baldosas que tengan forma de polígonos regulares del mismo lado, bien de forma que coincidan en cada vértice el mismo número de polígonos de cada tipo y en el mismo orden, lo que se denomina una **pavimentación regular**, o bien de manera que no coincidan en cada vértice el mismo número de polígonos de cada tipo ni en el mismo orden, lo que se denomina una **pavimentación no regular**.

1 INTRODUCCIÓN

¿Has reparado en alguna ocasión, estimado lector, en la cantidad de suelos diferentes que existen? ¿Te has fijado en que en la mayoría de ellos las losetas son o bien rectangulares o bien cuadradas, pero todas iguales? Sin embargo, ¿no has observado que existen también muchos otros tipos de losetas? Pues bien, en este capítulo vamos a ocuparnos de los suelos, vamos a tratar de explicar por qué ocurre lo que te acabamos de comentar, y qué otros tipos diferentes de suelos se podría uno encontrar. Y todo ello lo vamos a hacer con ayuda de la Geometría. Sí, no te asustes, verás como todo lo que sigue está al alcance de cualquiera. Vamos a comenzar aclarando con precisión algunos de los conceptos que utilizaremos. En el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (DRAE), podemos encontrar las siguientes palabras:

Enlosado: 1. m. Suelo cubierto de losas.

Losa: 1. f. Piedra llana y de poco grueso, casi siempre labrada, que sirve para solar y otros usos.

Loseta: 1. f. baldosa.

Pavimentación: 1. f. Acción y efecto de pavimentar.

Pavimento: 1. m. suelo (superficie artificial).

Pero bueno, en cualquier caso, tampoco tenemos por qué complicarnos la vida. En lo que sigue, utilizaremos indistintamente las palabras *enlosado y pavimentación* como sinónimos. Ahora, una vez aclarado esto, vamos a recordar algunos conceptos de Geometría Elemental, normalmente muy conocidos pero que también resultan indispensables para entender adecuadamente el contenido de lo que sigue.

Recordamos en primer lugar la noción de polígono. Un **polígono** (del griego "polys": varios, muchos, y "gôno": ángulo) es una figura geométrica plana limitada por tres o más líneas rectas que se cortan dos a dos en unos puntos llamados **vértices**. Los segmentos de tales rectas entre cada pareja de vértices se denominan **lados** del polígono.

Es importante notar que en un polígono, a cada vértice le corresponde un **ángulo interior** definido por los dos lados que convergen en él.

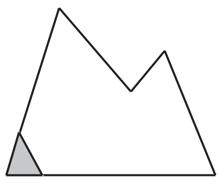


FIGURA 1: Ángulo interior

Entre los polígonos, merecen especial atención los denominados *polígonos regulares*. Un **polígono regular** es un polígono en el que todos los lados tienen la misma longitud y todos los ángulos interiores son de la misma medida. Algunos ejemplos de polígonos regulares son los siguientes:

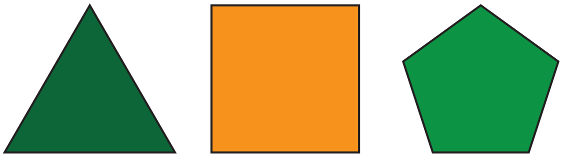


FIGURA 2: Triángulo equilátero, cuadrado y pentágono

Los tres primeros polígonos regulares tienen, respectivamente, 3, 4 y 5 lados y se conocen como triángulo equilátero, cuadrado y pentágono.

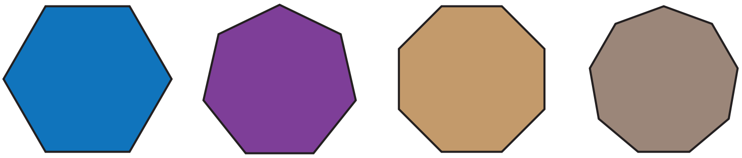


FIGURA 3: hexágono, heptágono, octógono y eneágono

En la figura 3 pueden observarse los polígonos regulares de 6, 7, 8 y 9 lados. Sus nombres son: hexágono, heptágono, octógono y eneágono. Cabe destacar que el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono son los polígonos regulares más utilizados en el diseño de pavimentaciones regulares.

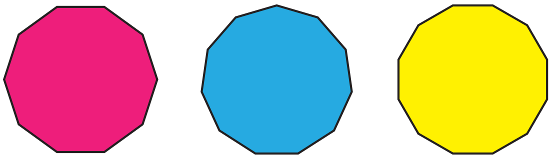


FIGURA 4: decágono, undecágono y dodecágono

En la figura anterior se muestran los siguientes polígonos regulares: decágono, undecágono y dodecágono. Estos polígonos tienen, respectivamente, 10, 11 y 12 lados.

En Geometría se demuestra (generalmente por inducción) el siguiente resultado:

RESULTADO 1

La suma de todos los ángulos interiores de un polígono es $180(n-2)$, siendo n el número de lados del polígono.

Este resultado trae como consecuencia éste otro, referido al valor del ángulo interior de un polígono regular:

RESULTADO 2

El ángulo interior de un polígono regular de n lados es $\frac{180\,(n-2)}{n}$.

En lo que sigue, denotaremos por ϕ_n al ángulo del polígono regular de n lados. De acuerdo entonces con el resultado anterior se tienen:

$$\begin{array}{rlrlrl}
\phi_3 = & 60^{\underline{o}} & \phi_4 = & 90^{\underline{o}} & \phi_5 = & 108^{\underline{o}} \\
\phi_6 = & 120^{\underline{o}} & \phi_7 = & 128{,}57^{\underline{o}} & \phi_8 = & 135^{\underline{o}} \\
\phi_9 = & 140^{\underline{o}} & \phi_{10} = & 144^{\underline{o}} & \phi_{11} = & 164{,}45^{\underline{o}} \\
\phi_{12} = & 150^{\underline{o}} & \phi_{13} = & 152{,}31^{\underline{o}} & \phi_{14} = & 154{,}28^{\underline{o}}
\end{array}$$

Por otra parte, también haremos uso en este capítulo del siguiente resultado, muy conocido en Geometría Elemental:

RESULTADO 3

En cada vértice de un polígono regular, la suma de los ángulos que concurren en él (el interior y el de fuera) es de 360º.

2 PAVIMENTACIONES REGULARES

Recordamos que, tal como se indicó en la Introducción, una pavimentación se dice **regular** si las baldosas son todos polígonos regulares del mismo lado, de forma que coincidan en cada vértice el mismo número de polígonos de cada tipo y en el mismo orden.

Entre estas pavimentaciones pueden distinguirse las tres siguientes, según estén formadas por un solo tipo de polígono, dos o tres polígonos regulares diferentes.

Pavimentaciones regulares formadas por un único tipo de polígono regular

Comencemos por el caso más sencillo, el de las pavimentaciones regulares del suelo en las que todas las baldosas sean polígonos regulares iguales entre sí.

Esta condición exige que el ángulo ϕ_n sea un divisor de 360, lo que sólo es cierto entonces para tres tipos de polígonos regulares: los triángulos equiláteros ($\phi_3 = 60$), los cuadrados ($\phi_4 = 90$) y los hexágonos regulares ($\phi_6 = 120$).

Por tanto, se obtienen de esta forma los siguientes tres tipos de enlosados: aquéllos en los que en cada vértice o bien concurren seis triángulos equiláteros ($360 : 60 = 6$), lo que esquemáticamente representaremos por (3-3-3-3-3-3), o bien cuatro cuadrados ($360 : 90 = 4$), lo que esquemáticamente representaremos por (4-4-4-4), o bien, finalmente, tres hexágonos regulares ($360 : 120 = 3$), que vendrá representado por (6-6-6). Si nos fijamos bien en el suelo que pisamos, probablemente observaremos enlosados de estos tres tipos, siendo la cuadrícula (4-4-4-4) la más frecuente de encontrar.

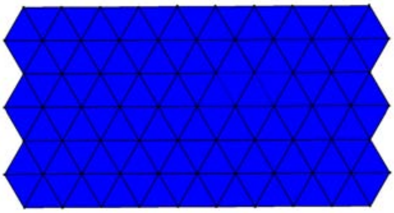


FIGURA 5: (3-3-3-3-3-3)

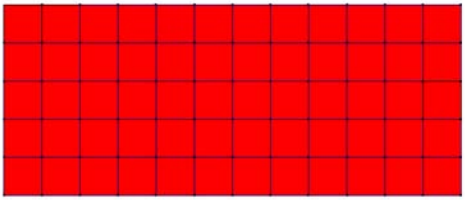


FIGURA 6: (4-4-4-4)

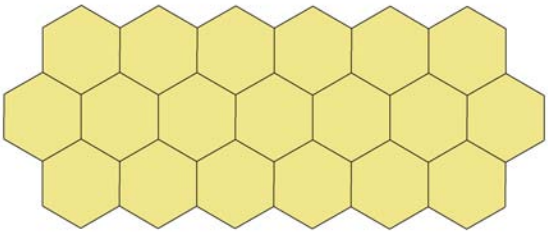


FIGURA 7: (6-6-6)

Pavimentaciones regulares formadas por dos tipos de polígonos regulares distintos

También podemos encontrar pavimentaciones formadas por dos tipos de polígonos regulares distintos. Al respecto, existen cuatro posibilidades.

- Formadas por triángulos equiláteros y por cuadrados.

  En este caso, sólo pueden darse dos configuraciones distintas, formadas ambas por 3 triángulos y 2 cuadrados , que representaremos por (3-3-3-4-4) y (3-3-4-3-4), respectivamente. Esto es debido a que $3 \times 60 + 2 \times 90 = 360$. Obsérvese cómo cambia la configuración al alterarse el orden de los polígonos.

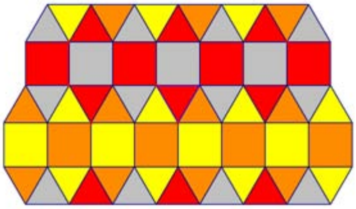


FIGURA 8: (3-3-3-4-4)

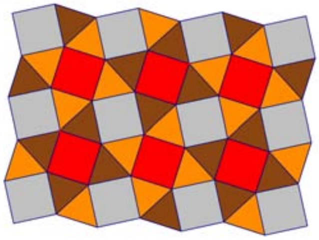


FIGURA 9: (3-3-4-3-4)

- Formadas por triángulos equiláteros y por hexágonos regulares.

  En este caso, también hay sólo dos posibles configuraciones distintas que representaremos por (3-3-3-3-6) y (3-6-3-6), respectivamente.

  Esto es debido a que, en la primera, $3 \times 60 + 1 \times 120 = 360$, y en la segunda, a que $2 \times 60 + 2 \times 120 = 360$.

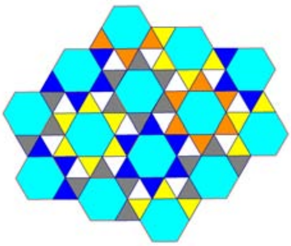


FIGURA 10: (3-3-3-3-6)

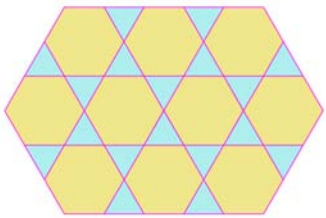


FIGURA 11: (3-6-3-6)

- Formadas por cuadrados y por octógonos regulares.

  En este caso, sólo hay una única pavimentación posible, la (8-8-4), debido a que $\phi_4 = 90 = 45 \times 2$ y $\phi_8 = 135 = 45 \times 3$, y por tanto,

$1 \times 90 + 2 \times 135 = 360$. Nótese que esta pavimentación es la única en la que aparecen octógonos regulares.

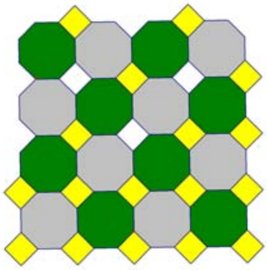


FIGURA 12: (8-8-4)

- Formadas por triángulos equiláteros y dodecágonos regulares.

  En este caso, hay también una única pavimentación posible, la (12-12-3), ya que $\phi_3 = 60$ y $\phi_{12} = 150$, con lo que se podrían completar los $360^{\underline{o}}$ según $150^{\underline{o}} + 150^{\underline{o}} + 60^{\underline{o}}$. La configuración sería entonces la (12-12-3).

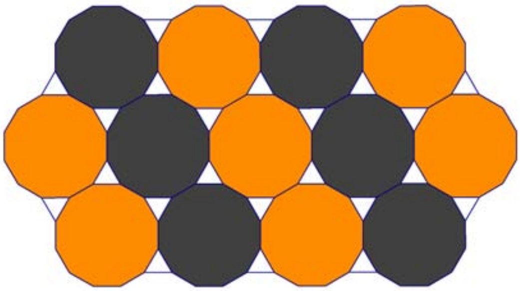


FIGURA 13: (12-12-3)

Pavimentaciones regulares formadas por tres tipos de polígonos regulares distintos

Otro caso más interesante, si cabe, que el anterior, es el que constituyen las pavimentaciones formadas por tres tipos distintos de polígonos regulares. Entre ellas, las dos únicas posibles son:

- Formadas por dodecágonos regulares, hexágonos regulares y cuadrados.

  En este caso, sólo hay una única pavimentación posible, la (12-6-4). Esto es debido a que $\phi_{12} = 150, \phi_6 = 120$ y $\phi_4 = 90$. Entonces, $150 + 120 + 90 = 360$.

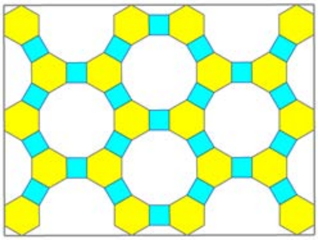


FIGURA 14: (12-6-4)

- Formadas por hexágonos regulares, cuadrados y triángulos equiláteros.

  En este caso, también hay una única pavimentación posible, la (6-4-3-4), ya que como $\phi_6 = 120, \phi_4 = 90$ y $\phi_3 = 60$, se tiene que $1 \times 120 + 2 \times 90 + 1 \times 60 = 360$.

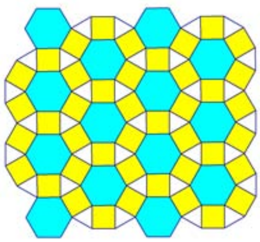


FIGURA 15: (6-4-3-4)

Como curiosidades al respecto podríamos indicar que estos últimos enlosados son los más bonitos desde un punto de vista más geométrico que estético, si bien son los menos vistos. ¿Cuál es la razón de que éstos sean bastante menos frecuentes que los ya citados en primer lugar? Pues, posiblemente que para el fabricante de baldosas lo más económico sea hacer todas las baldosas iguales.

Otra pregunta que podríamos hacernos es la siguiente: ¿por qué en todas estas últimas pavimentaciones aparecen dodecágonos regulares, octógonos regulares, hexágonos regulares, cuadrados y triángulos equiláteros y no otros polígonos regulares?

La respuesta es la siguiente y ya se esbozó al principio del capítulo. Estos cuatro tipos de polígonos regulares son los únicos cuyos ángulos internos, $150^{\underline{o}}$ para el dodecágono, $120^{\underline{o}}$ para el hexágono, $90^{\underline{o}}$ para el cuadrado y $60^{\underline{o}}$ para el triángulo equilátero, son múltiplos de $30^{\underline{o}}$. Bastaría reunir 12 veces este ángulo de $30^{\underline{o}}$ para conseguir que $12 \times 30 = 360$. Esto sólo puede hacerse con los polígonos regulares antes citados.

Para terminar esta sección, nos podríamos preguntar si serían posibles enlosados con 4 tipos de baldosas distintas. Como vamos a ver a continuación, la respuesta a esta pregunta es negativa.

En efecto, si en cada vértice del enlosado concurriesen cuatro polígonos regulares distintos, en el caso en que éstos tuvieran el menor número de lados posibles para que la suma de los ángulos fuera la menor posible, tendrían que ser un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular y un hexágono regular. Sin embargo, en este caso, se tendría $\phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 = 60 + 90 + 108 + 120 = 378$, que es una cantidad superior a la permitida, 360.

Por tanto, como consecuencia de todo lo visto anteriormente, puede destacarse el siguiente:

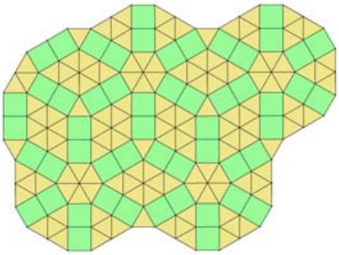
RESULTADO 4

Sólo existen 11 posibles pavimentaciones regulares formadas todas ellas por uno, dos o tres tipos de polígonos regulares.

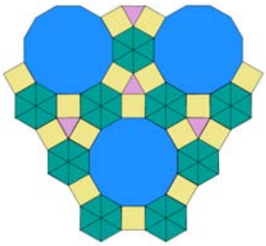
3 PAVIMENTACIONES NO REGULARES

No obstante, si se omite la exigencia de que tengan que concurrir el mismo número de baldosas iguales en cada vértice de la pavimentación, es decir, si se consideran pavimentaciones *no regulares*, entonces sí existen otras pavimentaciones distintas a las once anteriormente consideradas.

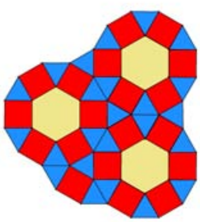
La primera de ellas está formada por triángulos equiláteros y cuadrados. En ella tenemos vértices en los que sólo concurren triángulos y en los que inciden tanto cuadrados como triángulos.



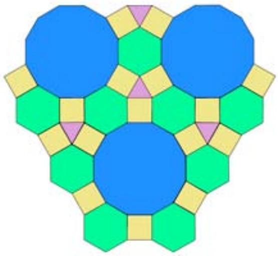
En la segunda figura tenemos los siguientes polígonos regulares: triángulos equiláteros, cuadrados y dodecágonos. En este caso, tenemos tres tipos distintos de vértices: aquéllos en los que concurren sólo triángulos, triángulos y cuadrados, y triángulos, cuadrados y dodecágonos.



La tercera figura responde a una configuración formada por triángulos, cuadrados y hexágonos. En ella encontramos dos tipos de vértices: aquéllos en los que concurren triángulos y cuadrados, y en los que concurren cuadrados, triángulos y hexágonos.



En esta última figura tenemos los siguientes polígonos regulares: triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos, y dodecágonos. Nos encontramos con vértices donde concurren triángulos, cuadrados y hexágonos; y otros en los que concurren cuadrados, hexágonos y dodecágonos.



4 EJEMPLOS DE ESTOS ENLOSADOS EN LA VIDA REAL

Artistas, escultores, arquitectos y constructores de todos los tiempos han utilizado figuras geométricas en sus trabajos. Para algunos artistas que trabajaban en construcciones arquitectónicas, la representación de figuras humanas o animales estaba prohibida, por lo que se veían obligados a utilizar formas geométricas para decorar los edificios.

En esta sección mostraremos algunas imágenes que se han obtenido de la vida real. Veremos cómo todas ellas se corresponden con algunas de las pavimentaciones que se han mostrado en las secciones anteriores y se propone al lector que encuentre más ejemplos.

Éstos son ejemplos de pavimentación (6-6-6):

En la siguiente figura mostramos imágenes de un comercio y del suelo del Paseo Sagasta en Zaragoza.

Estas imágenes son ejemplos de la pavimentación (8-8-4).

Finalmente, mostramos una fotografía correspondiente al interior de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla donde tenemos un ejemplo de la pavimentación (4-4-4-4).

BIBLIOGRAFÍA

[1] F.J. Echarte *Baldosas*. Revista de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas Thales, **73** (1987) 9–14.

[2] M. Ceballos, F.J. Echarte, A.B. Granados y A. Grau *Polígonos sobre Baldosas*. Poster QuiFiMat, 2006.

MANUEL CEBALLOS GONZÁLEZ
FRANCISCO JAVIER ECHARTE REULA
JUAN NÚÑEZ VALDÉS
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Sevilla

5 LA MAGIA DEL ÁLGEBRA

En el desarrollo del Álgebra clásica, como conjunto de métodos de resolución de diversos tipos de ecuaciones, han existido momentos estelares importantes, de los que daremos algunas simples pinceladas. Señalaremos lo que de misterio y magia ha tenido a lo largo de los tiempos, sin sorprendernos de que resolver una ecuación sea como resolver un misterio o incógnita. Como ocurre en la vida misma, y en estos casos también, han aparecido situaciones o personajes propios de la Mafia, más que de la Magia.

1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

En primer lugar, el origen de la resolución de ecuaciones está en el planteamiento de diversos problemas prácticos derivados de las mediciones agrícolas, el intercambio comercial, el reparto de cantidades, la posición de los astros, etc.

Las grandes culturas antiguas, babilonias, egipcias, o chinas, del segundo milenio antes de Cristo nos han transmitido sus conocimientos en la resolución de algunos de aquellos problemas, usando sencillas ecuaciones de primer y segundo grado.

FIGURA 1: La tablilla Plimpton 322 que se conserva en la Universidad de Columbia, del año 1800 a.C. con la primera relación de ternas pitagóricas de la que se tenga conocimiento.

El siguiente problema aparece planteado y resuelto en el papiro de Rhind, del 1650 a.C. En términos actuales el problema se podría enunciar así: "Repartir una herencia de 24 monedas entre dos hermanos, sabiendo que el hermano pequeño debe recibir la séptima parte de lo que recibe el hermano mayor".

En notación actual el problema sería resolver la ecuación

$$x + \frac{x}{7} = 24$$

La solución se buscaba por el método de la "posición o solución falsa", consistente en ensayar con un valor aproximado e irse acercando gradualmente al valor exacto. En este caso, podríamos ensayar, por ejemplo, con el valor $x = 7$, que sustituido en la ecuación produce $7 + 7/7 = 8$. Como el cociente entre el término de partida 24 y el obtenido 8 es 3, entonces la solución exacta se obtiene aplicando este factor de proporcionalidad al valor inicial, es decir que la solución es $7 \times 3 = 21$.

H. Rhind, anticuario escocés compró en 1858 este papiro, copiado por el escriba Ahmés a mitad del siglo XVII a.C. de un papiro anterior desconocido, conteniendo 85 problemas, con la finalidad de enseñar distintas técnicas de resolución a futuros escribas. Comienza la portada del papiro con algo de magia y de misterio: *"Cuidadoso cálculo para penetrar en las cosas, en el conocimiento de todas las cosas que existen, misterios... todos los secretos".*

PROBLEMA 34 DEL PAPIRO DE RHIND

Una cantidad, un medio de ella y un cuarto de ella, añadidas juntas son 10, ¿cuál es la cantidad?

PROBLEMA 40 DEL PAPIRO DE RHIND

Dividir 100 panes entre 5 hombres de tal forma que las partes estén en progresión aritmética (es decir, se diferencien en una misma cantidad) y que la séptima parte de la suma de las tres mayores coincida con la suma de las dos más pequeñas.

En este caso se trata de un problema algebraico con dos ecuaciones y dos incógnitas.

La matemática griega más centrada en la geometría no generó muchos avances en estos problemas algebraicos, quizás con la única excepción de Diofanto (250 d.C.), cuyo atribuido epitafio ya era un problema algebraico.

EPITAFIO DE DIOFANTO

Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirla, llorándole durante cuatro años. De todo esto, deduce su edad.

Solución. Traducido a lenguaje matemático, si x es la edad de Diofanto en años, el epitafio se escribe así:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

o bien,

$$9=x(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2})=\frac{3x}{28}$$

es decir,

$$x=84$$

MAGIA

Con el lenguaje de las ecuaciones de primer grado ya se tiene suficiente bagaje para hacer magia. Vamos a enseñar a hacer un juego de adivinación de una carta. Se toma una baraja española de 48 cartas y se le quitan las figuras (sotas, caballos y reyes), con lo que las 36 cartas restantes son todas las numeradas del 1 al 9. Se dice a un espectador que elija una de las cartas, sin mostrársela al mago, que elige otra, un 6, sin mostrarla a nadie. Ambos tienen, por tanto, una carta que el otro desconoce. El truco está en que el espectador encuentre inesperadamente las dos cartas.

Ambos depositan las dos cartas elegidas, boca abajo, en la mesa, la del espectador a la izquierda y la del mago a la derecha. Se ordena al espectador a hacer unas cuentas mentales muy sencillas (sumar, restar y multiplicar) que el mago le va diciendo sucesivamente:

1.- Sumarle dos al número de su carta.

2.- Al resultado multiplicarlo por cinco.

3.- Al nuevo resultado restarle siete.

4.- Al nuevo resultado multiplicarlo por dos.

Ahora el mago pide al espectador escribir el número final obtenido encima de la dos cartas: la decena sobre la carta del espectador y la unidad sobre la del mago. A continuación se pide al espectador que descubra las cartas y el resultado sorprenderá a los presentes: el número obtenido tras las operaciones coincidirá con los números de las cartas descubiertas.

FIGURA 2: Momento final del truco, mostrando las cartas, en este caso 56.

A principios de 2004 nace el Grupo de Divulgación de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, formado por un buen número de profesores de la misma, con el objetivo de divulgar las matemáticas y mostrarlas más atractivas e interesantes a los alumnos de Secundaria y Bachillerato.

Desde entonces, se han iniciado múltiples actividades divulgativas, dirigidas fundamentalmente a colegios e institutos, enmarcadas en lo que se denomina el Plan de Divulgación de la Facultad de Matemáticas. Entre otras, se imparten charlas en las que se deja patente algún aspecto de las Matemáticas de utilidad en la vida real. De este modo se muestra la parte más real y cotidiana de las matemáticas, destruyendo en gran medida la idea de ciencia abstracta y lejana que tienen para el gran público.

A la vista de la cantidad de charlas divulgativas que se han producido y siguen produciéndose, se ha considerado la oportunidad de plasmarlas en un libro, para que llegasen a un público más amplio.

El ánimo de los profesores que participamos en el proyecto es el de llegar, con claridad y sencillez, al mayor número de lectores posible, y conseguir de ese modo que se disfrute de las matemáticas como lo hacemos nosotros.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

SECRETARIADO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

ISBN 978-84-472-1220-0
9 788447 212200