Analüütiline geomeetria

Afiinne ruum ja eukleidiline punktiruum

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee
www.staff.ttu.ee/∼mvaljas
Tallinna Tehnikaülikool

April 13, 2012

Algmõisted geomeetrias

Geomeetria ülesehitamiseks ei piisa ainult vektori mõistest.
Geomeetrilise vektori defineerimisel lugesime algmõisteteks punkti, sirge, tasandi ja ruumi.
Geomeetria uurib tasandilisi ja ruumilisi kujundeid. Need kujundid on saadud tegelikkusest pärinevate mõistete ja vahekordade abstraktsioonina. Sellised kujundid on näiteks kolmnurk, rööpkülik, tetraeeder, rööptahukas jne.

Kõikide nende ühiseks omaduseks on see, et need koosnevad punktidest, s.t neid kujundeid saab vaadelda kui punktihulki.

Mõiste ***punkt*** on tekkinud keha kaduvväikese osa abstraheerimise tulemusena. Punktil ei ole mõõtmeid, kuid tema asukoha ruumis saab määrata.

Algmõisted geomeetrias

Geomeetria ülesehitamiseks ei piisa ainult vektori mõistest. Geomeetrilise vektori defineerimisel lugesime algmõisteteks punkti, sirge, tasandi ja ruumi.

Geomeetria uurib tasandilisi ja ruumilisi kujundeid. Need kujundid on saadud tegelikkusest pärinevate mõistete ja vahekordade abstraktsioonina. Sellised kujundid on näiteks kolmnurk, rööpkülik, tetraeeder, rööptahukas jne.

Kõikide nende ühiseks omaduseks on see, et need koosnevad punktidest, s.t neid kujundeid saab vaadelda kui punktihulki.

Mõiste ***punkt*** on tekkinud keha kaduvväikese osa abstraheerimise tulemusena. Punktil ei ole mõõtmeid, kuid tema asukoha ruumis saab määrata.

Geomeetria ülesehitamiseks ei piisa ainult vektori mõistest. Geomeetrilise vektori defineerimisel lugesime algmõisteteks punkti, sirge, tasandi ja ruumi.
Geomeetria uurib tasandilisi ja ruumilisi kujundeid. Need kujundid on saadud tegelikkusest pärinevate mõistete ja vahekordade abstraktsioonina. Sellised kujundid on näiteks kolmnurk, rööpkülik, tetraeeder, rööptahukas jne.

Kõikide nende ühiseks omaduseks on see, et need koosnevad punktidest, s.t neid kujundeid saab vaadelda kui punktihulki.

Mõiste ***punkt*** on tekkinud keha kaduvväikese osa abstraheerimise tulemusena. Punktil ei ole mõõtmeid, kuid tema asukoha ruumis saab määrata.

Algmõisted geomeetrias

Geomeetria ülesehitamiseks ei piisa ainult vektori mõistest. Geomeetrilise vektori defineerimisel lugesime algmõisteteks punkti, sirge, tasandi ja ruumi.

Geomeetria uurib tasandilisi ja ruumilisi kujundeid. Need kujundid on saadud tegelikkusest pärinevate mõistete ja vahekordade abstraktsioonina. Sellised kujundid on näiteks kolmnurk, rööpkülik, tetraeeder, rööptahukas jne.

Kõikide nende ühiseks omaduseks on see, et need koosnevad punktidest, s.t neid kujundeid saab vaadelda kui punktihulki.

Mõiste ***punkt*** on tekkinud keha kaduvväikese osa abstraheerimise tulemusena. Punktil ei ole mõõtmeid, kuid tema asukoha ruumis saab määrata.

Algmõisted geomeetrias

Geomeetria ülesehitamiseks ei piisa ainult vektori mõistest. Geomeetrilise vektori defineerimisel lugesime algmõisteteks punkti, sirge, tasandi ja ruumi.
Geomeetria uurib tasandilisi ja ruumilisi kujundeid. Need kujundid on saadud tegelikkusest pärinevate mõistete ja vahekordade abstraktsioonina. Sellised kujundid on näiteks kolmnurk, rööpkülik, tetraeeder, rööptahukas jne.

Kõikide nende ühiseks omaduseks on see, et need koosnevad punktidest, s.t neid kujundeid saab vaadelda kui punktihulki.

Mõiste ***punkt*** on tekkinud keha kaduvväikese osa abstraheerimise tulemusena. Punktil ei ole mõõtmeid, kuid tema asukoha ruumis saab määrata.

Punkt kui algmõiste

Valime algmõisteks punkti.

Hermann Weyl (1885–1955) – saksa matemaatik, kes lõi uue vektoritele tugineva geomeetria aksiomaatika, mis ilmus esmakordselt 1918. aastal Berliinis raamatus "Ruum, aeg ja mateeria".

Tähistame kõikide punktide hulka $\mathbb{A}$ ning seome sellega vektorruumi $\mathbb{V}$.

Siin ja edaspidi vaatleme vektorruume üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$ ning sellepärast me seda asjaolu alati ei rõhuta. Seega on kõik skalaarid (korpuse elemendid) reaalarvud.

Punkt kui algmõiste

Valime algmõisteks punkti.

Hermann Weyl (1885–1955) – saksa matemaatik, kes lõi uue vektoritele tugineva geomeetria aksiomaatika, mis ilmus esmakordselt 1918. aastal Berliinis raamatus "Ruum, aeg ja mateeria".

Tähistame kõikide punktide hulka $\mathbb{A}$ ning seome sellega vektorruumi $\mathbb{V}$.

Siin ja edaspidi vaatleme vektorruume üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$ ning sellepärast me seda asjaolu alati ei rõhuta. Seega on kõik skalaarid (korpuse elemendid) reaalarvud.

Punkt kui algmõiste

Valime algmõisteks punkti.

Hermann Weyl (1885–1955) – saksa matemaatik, kes lõi uue vektoritele tugineva geomeetria aksiomaatika, mis ilmus esmakordselt 1918. aastal Berliinis raamatus "Ruum, aeg ja mateeria".

Tähistame kõikide punktide hulka $\mathbb{A}$ ning seome sellega vektorruumi $\mathbb{V}$.

Siin ja edaspidi vaatleme vektorruume üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$ ning sellepärast me seda asjaolu alati ei rõhuta. Seega on kõik skalaarid (korpuse elemendid) reaalarvud.

Punkt kui algmõiste

Valime algmõisteks punkti.

Hermann Weyl (1885 – 1955) – saksa matemaatik, kes lõi uue vektoritele tugineva geomeetria aksiomaatika, mis ilmus esmakordselt 1918. aastal Berliinis raamatus "Ruum, aeg ja mateeria".

Tähistame kõikide punktide hulka $\mathbb{A}$ ning seome sellega vektorruumi $\mathbb{V}$.

Siin ja edaspidi vaatleme vektorruume üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$ ning sellepärast me seda asjaolu alati ei rõhuta. Seega on kõik skalaarid (korpuse elemendid) reaalarvud.

Afiinne ruum

Hulga $\mathbb{A}$ elemente ehk punkte tähistame suurte ladina tähtedega, s.t $\mathbb{A} = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots\}$. newline

Definitsioon

Mittetühja hulka $\mathbb{A}$ nimetatakse ***afiinseks ruumiks*** üle vektorruumi $\mathbb{V}$, kui on antud kujutus $\vartheta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ nii, et on täidetud järgmised aksioomid:

1. $\forall A \in \mathbb{A}, \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{V}$ korral $\exists\, ! B \in \mathbb{A},$ nii et $\vartheta(A, B) = \vec{a}$.
2. $\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, \forall C \in \mathbb{A}$ korral $\vartheta(A, B) + \vartheta(B, C) = \vartheta(A, C)$.

Edaspidi tähistame afiinse ruumi punktide paarile (A, B) vastavusse seatud vektorit $\vartheta(A, B) = \overrightarrow{AB}$.

Hulga $\mathbb{A}$ elemente ehk punkte tähistame suurte ladina tähtedega, s.t $\mathbb{A} = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots\}$. newline

Definitsioon

Mittetühja hulka $\mathbb{A}$ nimetatakse ***afiinseks ruumiks*** üle vektorruumi $\mathbb{V}$, kui on antud kujutus $\vartheta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ nii, et on täidetud järgmised aksioomid:

1. $\forall A \in \mathbb{A}, \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{V}$ korral $\exists\, ! B \in \mathbb{A},$ nii et $\vartheta(A, B) = \vec{a}$.
2. $\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, \forall C \in \mathbb{A}$ korral $\vartheta(A, B) + \vartheta(B, C) = \vartheta(A, C)$.

Edaspidi tähistame afiinse ruumi punktide paarile (A, B) vastavusse seatud vektorit $\vartheta(A, B) = \overrightarrow{AB}$.

Hulga $\mathbb{A}$ elemente ehk punkte tähistame suurte ladina tähtedega, s.t $\mathbb{A} = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots\}$. newline

Definitsioon

Mittetühja hulka $\mathbb{A}$ nimetatakse ***afiinseks ruumiks*** üle vektorruumi $\mathbb{V}$, kui on antud kujutus $\vartheta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ nii, et on täidetud järgmised aksioomid:

1. $\forall A \in \mathbb{A}, \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{V}$ korral $\exists\, ! B \in \mathbb{A},$ nii et $\vartheta(A, B) = \vec{a}$.
2. $\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, \forall C \in \mathbb{A}$ korral $\vartheta(A, B) + \vartheta(B, C) = \vartheta(A, C)$.

Edaspidi tähistame afiinse ruumi punktide paarile (A, B) vastavusse seatud vektorit $\vartheta(A, B) = \overrightarrow{AB}$.

Afiinne ruum

Afiinse ruumiga $\mathbb{A}$ seotud vektorruumi $\mathbb{V}$ nimetatakse afiinse ruumi ***rihiruumiks***.

Afiinset ruumi, mille rihiruumiks on n-mõõtmeline vektorruum, nimetatakse n-mõõtmeliseks ja tähistatakse $\mathbb{A}_n$.
Afiinse ruumi definitsioonis esitatud nõudeid võib selgitada järgmiselt.

1. Afiinses ruumis määravad iga kaks punkti A ja B täpselt ühe vektori $\vec{a}$, mille alguspunktiks on punkt A ja lõpp-punktiks punkt B.
2. Afiinses ruumis võib iga vektorit $\vec{a}$ rakendada mistahes punktist A, sel juhul on tema lõpp-punkt B samas afiinses ruumis üheselt määratud.
3. Affiinse ruumi iga kolme punkti A, B ja C korral $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$.

Afiinne ruum

Afiinse ruumiga $\mathbb{A}$ seotud vektorruumi $\mathbb{V}$ nimetatakse afiinse ruumi ***rihiruumiks***.

Afiinset ruumi, mille rihiruumiks on n-mõõtmeline vektorruum, nimetatakse n-mõõtmeliseks ja tähistatakse $\mathbb{A}_n$.

Afiinse ruumi definitsioonis esitatud nõudeid võib selgitada järgmiselt.

1. Afiinses ruumis määravad iga kaks punkti A ja B täpselt ühe vektori $\vec{a}$, mille alguspunktiks on punkt A ja lõpp-punktiks punkt B.
2. Afiinses ruumis võib iga vektorit $\vec{a}$ rakendada mistahes punktist A, sel juhul on tema lõpp-punkt B samas afiinses ruumis üheselt määratud.
3. Affiinse ruumi iga kolme punkti A, B ja C korral $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$.

Afiinne ruum

Afiinse ruumiga $\mathbb{A}$ seotud vektorruumi $\mathbb{V}$ nimetatakse afiinse ruumi ***rihiruumiks***.

Afiinset ruumi, mille rihiruumiks on n-mõõtmeline vektorruum, nimetatakse n-mõõtmeliseks ja tähistatakse $\mathbb{A}_n$.
Afiinse ruumi definitsioonis esitatud nõudeid võib selgitada järgmiselt.

1. Afiinses ruumis määravad iga kaks punkti A ja B täpselt ühe vektori $\vec{a}$, mille alguspunktiks on punkt A ja lõpp-punktiks punkt B.
2. Afiinses ruumis võib iga vektorit $\vec{a}$ rakendada mistahes punktist A, sel juhul on tema lõpp-punkt B samas afiinses ruumis üheselt määratud.
3. Affiinse ruumi iga kolme punkti A, B ja C korral $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$.

Afiinse ruumiga $\mathbb{A}$ seotud vektorruumi $\mathbb{V}$ nimetatakse afiinse ruumi ***rihiruumiks***.

Afiinset ruumi, mille rihiruumiks on n-mõõtmeline vektorruum, nimetatakse n-mõõtmeliseks ja tähistatakse $\mathbb{A}_n$.
Afiinse ruumi definitsioonis esitatud nõudeid võib selgitada järgmiselt.

1. Afiinses ruumis määravad iga kaks punkti A ja B täpselt ühe vektori $\vec{a}$, mille alguspunktiks on punkt A ja lõpp-punktiks punkt B.
2. Afiinses ruumis võib iga vektorit $\vec{a}$ rakendada mistahes punktist A, sel juhul on tema lõpp-punkt B samas afiinses ruumis üheselt määratud.
3. Affiinse ruumi iga kolme punkti A, B ja C korral $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$.

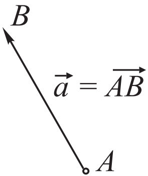
Afiinne ruum

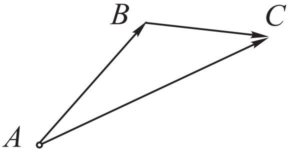
Afiinse ruumiga $\mathbb{A}$ seotud vektorruumi $\mathbb{V}$ nimetatakse afiinse ruumi ***rihiruumiks***.

Afiinset ruumi, mille rihiruumiks on n-mõõtmeline vektorruum, nimetatakse n-mõõtmeliseks ja tähistatakse $\mathbb{A}_n$.
Afiinse ruumi definitsioonis esitatud nõudeid võib selgitada järgmiselt.

1. Afiinses ruumis määravad iga kaks punkti A ja B täpselt ühe vektori $\vec{a}$, mille alguspunktiks on punkt A ja lõpp-punktiks punkt B.
2. Afiinses ruumis võib iga vektorit $\vec{a}$ rakendada mistahes punktist A, sel juhul on tema lõpp-punkt B samas afiinses ruumis üheselt määratud.
3. Affiinse ruumi iga kolme punkti A, B ja C korral $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$.

Viimast nimetatakse ***kolmnurga aksioomiks***





Järeldused...

Järeldus
Iga $A \in \mathbb{A}_n$ korral $\overrightarrow{AA} = \vec{\theta} \in \mathbb{V}_n$.

Tõestus.
Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$. Olgu $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AA} = \vec{x}$, siis vektorruumi aksioomide põhjal võime kirjutada, et

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{x} = \vec{a},$$

millest $\vec{x} = \vec{\theta}$. Järelikult $\overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$. □

Järeldus
Iga $A, B \in \mathbb{A}_n$ korral kehtib võrdus $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Tõestus.
Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$, millest $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. □

Järeldus

Iga $A \in \mathbb{A}_n$ korral $\overrightarrow{AA} = \vec{\theta} \in \mathbb{V}_n$.

Tõestus.

Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$. Olgu $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AA} = \vec{x}$, siis vektorruumi aksioomide põhjal võime kirjutada, et

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{x} = \vec{a},$$

millest $\vec{x} = \vec{\theta}$. Järelikult $\overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$. □

Järeldus

Iga $A, B \in \mathbb{A}_n$ korral kehtib võrdus $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Tõestus.

Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$, millest $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. □

Järeldused...

Järeldus

Iga $A \in \mathbb{A}_n$ korral $\overrightarrow{AA} = \vec{\theta} \in \mathbb{V}_n$.

Tõestus.

Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$. Olgu $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AA} = \vec{x}$, siis vektorruumi aksioomide põhjal võime kirjutada, et

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{x} = \vec{a},$$

millest $\vec{x} = \vec{\theta}$. Järelikult $\overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$. □

Järeldus

Iga $A, B \in \mathbb{A}_n$ korral kehtib võrdus $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Tõestus.

Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$, millest $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. □

Järeldus

Iga $A \in \mathbb{A}_n$ korral $\overrightarrow{AA} = \vec{\theta} \in \mathbb{V}_n$.

Tõestus.

Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$. Olgu $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AA} = \vec{x}$, siis vektorruumi aksioomide põhjal võime kirjutada, et

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{x} = \vec{a},$$

millest $\vec{x} = \vec{\theta}$. Järelikult $\overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$. □

Järeldus

Iga $A, B \in \mathbb{A}_n$ korral kehtib võrdus $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Tõestus.

Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$, millest $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. □

Järeldus
Kui $\overrightarrow{AB} = \vec{\theta}$, siis $A = B$.

Tõestus.
Vastavalt eeldusele $\overrightarrow{AB} = \vec{\theta} = \overrightarrow{AA}$. Afiinse ruumi definitsiooni teisest tingimusest järeldubki $A = B$. $\square$

Definitsioon
Afiinse ruumi $\mathbb{A}_n$ ***reeperiks*** nimetatakse hulka $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, mis koosneb afiinse ruumi fikseeritud punktist O ja rihiruumi baasist. Punkti O nimetatakse ***reeperi alguspunktiks***.

Järeldus
Kui $\overrightarrow{AB} = \vec{\theta}$, siis $A = B$.

Tõestus.
Vastavalt eeldusele $\overrightarrow{AB} = \vec{\theta} = \overrightarrow{AA}$. Afiinse ruumi definitsiooni teisest tingimusest järeldubki $A = B$. $\square$

Definitsioon
Afiinse ruumi $\mathbb{A}_n$ ***reeperiks*** nimetatakse hulka $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, mis koosneb afiinse ruumi fikseeritud punktist O ja rihiruumi baasist. Punkti O nimetatakse ***reeperi alguspunktiks***.

Järeldus
Kui $\overrightarrow{AB} = \vec{\theta}$, siis $A = B$.

Tõestus.
Vastavalt eeldusele $\overrightarrow{AB} = \vec{\theta} = \overrightarrow{AA}$. Afiinse ruumi definitsiooni teisest tingimusest järeldubki $A = B$. □

Definitsioon
Afiinse ruumi $\mathbb{A}_n$ ***reeperiks*** nimetatakse hulka $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, mis koosneb afiinse ruumi fikseeritud punktist O ja rihiruumi baasist. Punkti O nimetatakse ***reeperi alguspunktiks***.

Definitsioon

Reeperi $\mathfrak{R}$ alguspunktist O afiinse ruumi punkti X suunduvat vektorit $\overrightarrow{OX}$ nimetatakse punkti X ***kohavektoriks*** selle reeperi suhtes.

Afiinse ruumi mistahes punktil X on reeperi suhtes olemas kohavektor $\overrightarrow{OX}$, mis kuulub rihiruumi $\mathbb{V}_n$. Järelikult võime selle vektori avaldada vektorruumi $\mathbb{V}_n$ baasi $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ kaudu kujul

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

kus arvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on vektori $\vec{x}$ koordinaadid.

Definitsioon

Reeperi $\mathfrak{R}$ alguspunktist O afiinse ruumi punkti X suunduvat vektorit $\overrightarrow{OX}$ nimetatakse punkti X ***kohavektoriks*** selle reeperi suhtes.

Afiinse ruumi mistahes punktil X on reeperi suhtes olemas kohavektor $\overrightarrow{OX}$, mis kuulub rihiruumi $\mathbb{V}_n$. Järelikult võime selle vektori avaldada vektorruumi $\mathbb{V}_n$ baasi $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ kaudu kujul

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

kus arvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on vektori $\vec{x}$ koordinaadid.

Punkti koordinaadid

Punkti koordinaatide definitsioon afiinses ruumis.

Definitsioon

Punkti X ***koordinaatideks*** afiinse ruumi $\mathbb{A}_n$ fikseeritud reeperi $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ suhtes nimetatakse tema kohavektori $\overrightarrow{OX}$ koordinaate vektorruumi $\mathbb{V}_n$ vastava baasi $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ suhtes ja tähistatakse $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Kokkuvõtlikult saame selle definitsiooni esitada kujul:

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \iff \overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

Punkti koordinaadid

Punkti koordinaatide definitsioon afiinses ruumis.

Definitsioon

Punkti X ***koordinaatideks*** afiinse ruumi $\mathbb{A}_n$ fikseeritud reeperi $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ suhtes nimetatakse tema kohavektori $\overrightarrow{OX}$ koordinaate vektorruumi $\mathbb{V}_n$ vastava baasi $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ suhtes ja tähistatakse $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Kokkuvõtlikult saame selle definitsiooni esitada kujul:

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \iff \overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

Järeldus

Olgu punktide $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ koordinaadid antud fikseeritud reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes. Siis vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid reeperile vastava baasi suhtes on $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$.

Tõestus.

Vastavalt eeldusele võime kirjutada

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n,\\ \overrightarrow{OB} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n.\end{aligned}$$

Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, millest

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =\\ &= (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + (b_2 - a_2)\vec{e}_2 + \ldots + (b_n - a_n)\vec{e}_n.\end{aligned}$$

Vektori koordinaadid

Järeldus

Olgu punktide $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ koordinaadid antud fikseeritud reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes. Siis vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid reeperile vastava baasi suhtes on $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$.

Tõestus.

Vastavalt eeldusele võime kirjutada

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n, \\ \overrightarrow{OB} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, millest

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \\ &= (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + (b_2 - a_2)\vec{e}_2 + \ldots + (b_n - a_n)\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Järeldus

Olgu punktide $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ja $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ koordinaadid antud fikseeritud reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes. Siis vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid reeperile vastava baasi suhtes on
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$.

Tõestus.

Vastavalt eeldusele võime kirjutada

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n, \\ \overrightarrow{OB} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Kolmnurga aksioomi põhjal saame $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, millest

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \\ &= (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + (b_2 - a_2)\vec{e}_2 + \ldots + (b_n - a_n)\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Ühemõõtmeline afiinne ruum $\mathbb{A}_1$ on sirge, mille rihiruumiks on ühemõõtmeline vektorruum $\mathbb{V}_1$.

Reeper ühemõõtmelises afiinses ruumis on $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}\}$ ning igal punktil X on selle reeperi suhtes üks reaalarvuline koordinaat, sest selle punkti kohavektor peab avalduma kujul $\overrightarrow{OX} = x\vec{e}$.

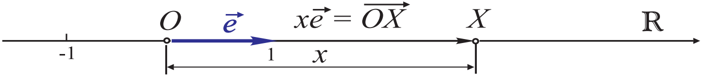


Figure : Afiinne sirge

Afiinne sirge

Ühemõõtmeline afiinne ruum $\mathbb{A}_1$ on sirge, mille rihiruumiks on ühemõõtmeline vektorruum $\mathbb{V}_1$.

Reeper ühemõõtmelises afiinses ruumis on $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}\}$ ning igal punktil X on selle reeperi suhtes üks reaalarvuline koordinaat, sest selle punkti kohavektor peab avalduma kujul $\overrightarrow{OX} = x\vec{e}$.

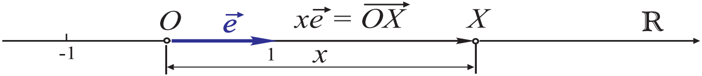


Figure : Afiinne sirge

Vaatleme kahemõõtmelist afiinset ruumi $\mathbb{A}_2$.

Tema rihiruum on $\mathbb{V}_2$.

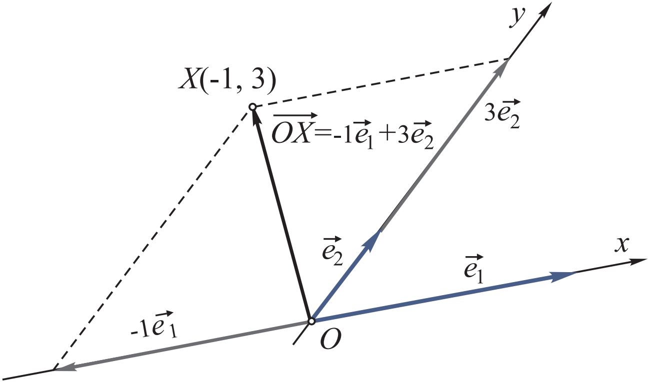


Figure : Reeper

Afiinne tasand

Vaatleme kahemõõtmelist afiinset ruumi $\mathbb{A}_2$.

Tema rihiruum on $\mathbb{V}_2$.

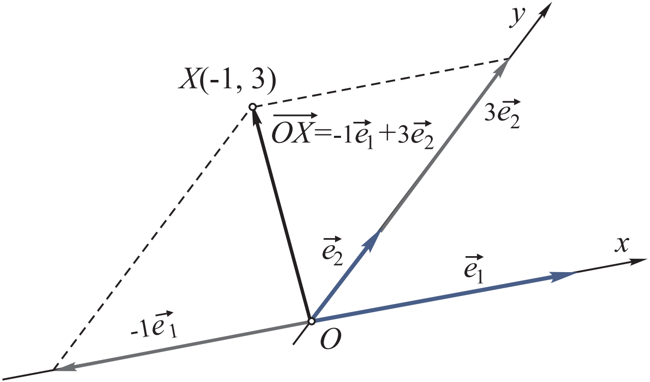


Figure : Reeper

Definitsioon

Afiinset ruumi $\mathbb{A}_n$, mille rihiruumiks on eukleidiline vektorruum $\mathbb{E}_n$, nimetatakse ***eukleidiliseks punktiruumiks*** ehk ***eukleidiliseks ruumiks*** ja tähistatakse sümboliga $\mathbb{R}^n$.

Olgu $\mathfrak{B}^{\perp} = \{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$ mingi ristbaas eukleidilise ruumi $\mathbb{R}^n$ rihiruumis.

Definitsioon

Eukleidilise ruumi ***ristreeperiks*** nimetatakse hulka $\mathfrak{R}^{\perp} = \{O, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$, mis koosneb ruumi ühest punktist ja rihiruumi ristbaasist.

Definitsioon

Afiinset ruumi $\mathbb{A}_n$, mille rihiruumiks on eukleidiline vektorruum $\mathbb{E}_n$, nimetatakse ***eukleidiliseks punktiruumiks*** ehk ***eukleidiliseks ruumiks*** ja tähistatakse sümboliga $\mathbb{R}^n$.

Olgu $\mathfrak{B}^\perp = \{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$ mingi ristbaas eukleidilise ruumi $\mathbb{R}^n$ rihiruumis.

Definitsioon

Eukleidilise ruumi ***ristreeperiks*** nimetatakse hulka $\mathfrak{R}^\perp = \{O, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$, mis koosneb ruumi ühest punktist ja rihiruumi ristbaasist.

Eukleidiline punktiruum

Definitsioon

Afiinset ruumi $\mathbb{A}_n$, mille rihiruumiks on eukleidiline vektorruum $\mathbb{E}_n$, nimetatakse ***eukleidiliseks punktiruumiks*** ehk ***eukleidiliseks ruumiks*** ja tähistatakse sümboliga $\mathbb{R}^n$.

Olgu $\mathfrak{B}^\perp = \{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$ mingi ristbaas eukleidilise ruumi $\mathbb{R}^n$ rihiruumis.

Definitsioon

Eukleidilise ruumi ***ristreeperiks*** nimetatakse hulka $\mathfrak{R}^\perp = \{O, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$, mis koosneb ruumi ühest punktist ja rihiruumi ristbaasist.

Eukleidiline tasand

Vaatleme eukleidilist tasandit $\mathbb{R}^2$.

Valime eukleidilisel tasandil mingi ristreeperi $\mathfrak{R}^{\perp} = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Ristreeperiga on seotud tavaline Descartes'i ristkoordinaadistik..

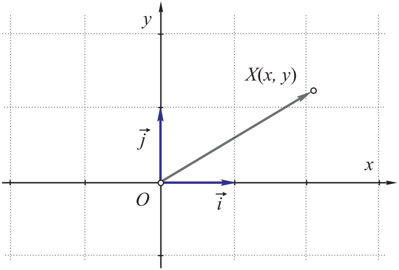


Figure : Ristkoordinaadid tasandil

Rene Descartes

Rene Descartes (1596 – 1650) – prantsuse matemaatik ja filosoof. Tema ladinapärase nimekuju **Renatus Cartesius** tõttu nimetatakse neid ka karteesiuse ristkoordinaatideks.