BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Sur la numération factorielle, application aux permutations

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 176-183

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__176_0>

Sur la numération factorielle, application aux permutations;
par M. C.-A. Laisant.

(Séance du 21 novembre 1888.)

Numération factorielle.

1. Un nombre entier quelconque étant donné, il tombe nécessairement entre les deux factorielles consécutives

$$n! = 1.2.3\ldots n,$$
$$(n+1)! = 1.2.3\ldots n(n+1),$$

ou bien il est exactement égal à une factorielle, ce que nous ne supposons pas pour l'instant.

En le divisant par $n!$, nous obtiendrons un quotient nécessairement inférieur à $n+1$, sans quoi le nombre donné N serait égal ou supérieur à $(n+1)!$

Si R est la reste de la division, nous avons donc

$$N = \alpha_n n! + R.$$

R étant inférieur à $n!$, nous pouvons le diviser par $(n-1)!$, ce qui donnera un quotient α_{n-1} qui peut être nul, mais est, en tous cas, inférieur à n, et un certain reste R_1. Répétant la même opération sur R_1, et ainsi de suite, nous voyons qu'en fin de compte le nombre N peut être mis sous la forme

$$(1) \qquad N = \alpha_n . n! + \alpha_{n-1} . (n-1)! + \ldots + \alpha_3 . 3! + \alpha_2 . 2! + \alpha_1,$$

chacun des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ pouvant prendre respectivement les valeurs entières

$$\begin{array}{l} 0,\ 1, \\ 0,\ 1,\ 2, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, n, \end{array}$$

sans jamais dépasser la valeur de son indice, c'est-à-dire de son *rang*, compté à partir de la droite.

On peut convenir d'écrire ce nombre N sous la forme

$$(2) \qquad (\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ représentant alors des *chiffres*, respectivement limités comme nous venons de le dire, et nous avons ainsi un système particulier de numération, que nous nommerons *numération factorielle*.

Si le nombre N, ou l'un des restes obtenus ci-dessus, se trouvait justement égal à une factorielle, hypothèse que nous avons tout d'abord écartée, il est clair que le quotient obtenu serait 1 et le reste 0, c'est-à-dire qu'à partir de ce reste ce qu'on obtiendrait s'écrirait

$$1000\ldots0.$$

2. Le plus grand nombre de n chiffres que nous puissions écrire dans le système de numération factorielle est évidemment, d'après ce qui vient d'être dit,

$$[n(n-1)\ldots3.2.]1 = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n!.$$

Le plus petit nombre de $n+1$ chiffres est

$$[(n+1)0.0\ldots0) = (n+1]!.$$

De là, l'identité

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1,$$

d'ailleurs facile à démontrer directement.

3. Dans le système de numération factorielle, tous les nombres pairs sont terminés par 0 et tous les nombres impairs par 1.

L'addition se fera sans peine, en ayant soin de bien observer le rang de la colonne sur laquelle on opère. Si, par exemple, à la quatrième colonne, on a trouvé pour somme 23, on décomposera par la pensée 23 en $4.5+3$, on posera 3 et l'on retiendra 4 pour l'ajouter à la cinquième colonne.

La soustraction se fera avec non moins de facilité.

La conversion d'un nombre (74 153 201), par exemple, du système factoriel dans le système décimal se fera sans peine, soit en calculant les diverses factorielles $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6, \ldots$ et les multipliant par les chiffres correspondants; soit, plus pratiquement peut-être, en multipliant le premier chiffre à gauche par son rang, ajoutant le deuxième chiffre, multipliant le résultat par le rang du deuxième chiffre, et ainsi de suite. Ainsi :

$$7.8+4 = 60,\quad 60.7+1 = 421,\quad 421.6+5 = 2531,\quad 2531.5+3 = 12658,$$
$$12658.4+2 = 50634,\quad 50634.3+0 = 151902,\quad 151902.2+1 = 303805 = \text{N}.$$

La conversion d'un nombre du système décimal dans le système factoriel se fera en divisant ce nombre par 2, le quotient obtenu par 3, et ainsi de suite; les chiffres cherchés seront précisément les restes successifs. L'exemple ci-dessus nous donnera de la sorte :

303805 | 2
1 | 151902 | 3
19 | 50634 | 4
10 26 | 12658 | 5
12 23 26 | 2531 | 6
0 34 15 13 | 421 | 7
2 8 11 1 | 60 | 8
3 5 4 | 7.

Nous donnons ci-dessous le Tableau des 84 premiers nombres entiers écrits dans le système factoriel :

0...	0	22...	320	44...	1310	66...	2300
1...	1	23...	321	45...	1311	67...	2301
2...	10	24...	1000	46...	1320	68...	2310
3...	11	25...	1001	47...	1321	69...	2311
4...	20	26...	1010	48...	2000	70...	2320
5...	21	27...	1011	49...	2001	71...	2321
6...	100	28...	1020	50...	2010	72...	3000
7...	101	29...	1021	51...	2011	73...	3001
8...	110	30...	1100	52...	2020	74...	3010
9...	111	31...	1101	53...	2021	75...	3011
10...	120	32...	1110	54...	2100	76...	3020
11...	121	33...	1111	55...	2101	77...	3021
12...	200	34...	1120	56...	2110	78...	3100
13...	201	35...	1121	57...	2111	79...	3101
14...	210	36...	1200	58...	2120	80...	3110
15...	211	37...	1201	59...	2121	81...	3111
16...	220	38...	1210	60...	2200	82...	3120
17...	221	39...	1211	61...	2201	83...	3121
18...	300	40...	1220	62...	2210	84...	3200
19...	301	41...	1221	63...	2211		
20...	310	42...	1300	64...	2220		
21...	311	43...	1301	65...	2221		

Permutations, et leur classification

4. Soient deux objets a, b, *classés* dans un certain ordre, c'est-à-dire représentés respectivement par 1 et 2, nombres qui désignent leurs rangs. On peut former avec ces deux objets les permutations ab et ba.

La première ne présente pas de dérangement ou d'inversion. Nous la figurerons par le signe 0; la seconde présente une inversion, nous la figurerons par le signe 1.

Prenons actuellement trois objets classés a, b, c ou 1, 2, 3. Ils permettent de former les six permutations

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312, \quad 321.$$

Si nous considérons une permutation quelconque, et si nous considérons les inversions qui existent entre le premier objet et ceux qui les suivent, elles seront au nombre de 0, 1 ou 2; 0 si le premier objet est 1; 1 si le premier objet est 2; et 2 si le premier objet est 3. Quant à la permutation de deux objets qui suit le premier, elle présente, comme nous venons de le dire, 0 ou 1 inversion. Nous pouvons donc figurer chacune des permutations par un signe composé de deux caractères, le premier étant 0, 1 ou 2 et représentant le nombre des inversions par rapport au premier objet, et le second étant 0 ou 1. Il en résulte que les signes figuratifs des six permutations ci-dessus seront respectivement

$$0\,0, \quad 0\,1, \quad 1\,0, \quad 1\,1, \quad 2\,0, \quad 2\,1.$$

Ces signes représentent, dans le système de numération factorielle, les nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

Si l'on écrit les permutations dans l'ordre que nous avons adopté plus haut, on voit donc que le *rang* de chacune d'elles sera $(p)+1$, en désignant par (p) son signe figuratif, considéré comme représentant un nombre écrit dans le système factoriel.

5. Il est facile de généraliser cette notion de proche en proche, de l'étendre aux permutations d'un nombre quelconque d'objets, et d'en déduire ainsi un mode de classification invariable de ces permutations. Par exemple, soient quatre objets a, b, c, d ou 1,

2, 3, 4. Prenons une permutation quelconque $c\ d\ a\ b$, ou 3 4 1 2.

Le premier objet étant 3, le nombre des inversions par rapport à cet objet est 2. La permutation 4 1 2 qui reste à la droite est figurée par 20, d'après ce que nous avons dit précédemment. Donc le signe figuratif de la permutation 3412 sera 220; et son rang sera $2\ 2\ 0 + 1 = 1\ 7$, en lisant 2 2 0 dans le système factoriel. Il s'agit donc de la 17^e permutation des 4 objets 1, 2, 3, 4.

L'identité entre les résultats obtenus ici et le système de la numération factorielle résulte de ce que le nombre des inversions entre un objet quelconque et ceux qui le suivent ne peut varier que de zéro à n, n indiquant le nombre des objets suivants, c'est-à-dire présente justement la même propriété que les chiffres de la numération factorielle.

6. Pour que cette classification des permutations d'un nombre quelconque d'objets soit véritablement utile, il faut pouvoir résoudre facilement, et pour ainsi dire à vue, ou avec très peu de calculs, les deux problèmes suivants :

Étant donnée une permutation de m objets, trouver le rang de cette permutation;

Étant donné le rang d'une permutation, trouver cette permutation.

Nous allons successivement les examiner en faisant immédiatement application à des exemples.

Si l'on donne une permutation quelconque de m objets 1, 2, 3,... m, le signe du premier objet, diminué d'une unité, donnera nécessairement le premier chiffre du signe figuratif de la permutation. Dans la permutation restant à droite, nous diminuerons de 1 les signes des objets supérieurs à celui du premier, et nous appliquerons la même règle, et ainsi de suite.

Soient, par exemple, 6 objets a, b, c, d, e, f ou 1, 2, 3, 4, 5, 6; considérons la permutation $d\ c\ f\ e\ a\ b$ ou 4 3 6 5 1 2. Nous ferons les transformations suivantes :

4.3 5 4 1 2
4.3.4 3 1 2
4.3.4.3.1.2

et il s'ensuit que le signe figuratif est

$$(3\ 2\ 3\ 2\ 0).$$

Le rang est donc

$$(3\ 2\ 3\ 2\ 0) + 1 = 3.5! + 2.4! + 3.3! + 2.2! + 1 = 431,$$

c'est-à-dire que la permutation donnée est la 431^e.

Passons maintenant au deuxième problème. Connaissant le rang d'une permutation, on aura immédiatement le signe représentatif en retranchant une unité, et convertissant le nombre ainsi obtenu dans le système factoriel.

Ayant obtenu ce symbole, on en augmentera tous les chiffres d'une unité; puis on écrira dans leur ordre tous les objets. Si le premier chiffre du résultat ainsi obtenu est c_1, on prendra l'objet du rang c_1 et on l'effacera de la liste pour le mettre en tête de la permutation; si le deuxième chiffre est c_2, on prendra l'objet de rang c_2 *parmi ceux qui restent,* et ainsi de suite. Ce procédé permet, comme on le voit, d'obtenir le résultat pour ainsi dire mécaniquement et sans calcul, du moment qu'on a le signe représentatif.

On demande, par exemple, la 17^e permutation de 4 objets. Nous convertissons $17 - 1 = 16$ dans le système factoriel et nous avons $(2\ 2\ 0)$. Nous en formons $3\ 3\ 1$; puis les quatre objets

$$a\ b\ c\ d$$

étant écrits dans leur ordre, nous prenons le 3^e, c; puis le 3^e de ceux qui restent, ou d; puis le premier de ceux qui restent, ou a; nous avons donc $c\ d\ a\ b$ pour la permutation cherchée.

Prenant, comme seconde application, le même exemple que plus haut, soit demandée la 431^e permutation de six objets

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f.$$

Convertissant 430 dans le système factoriel, nous avons $(3\ 2\ 3\ 2\ 0)$. Nous écrivons $4\ 3\ 4\ 3\ 1$; d'où nous déduisons, comme ci-dessus,

$$d\ c\ f\ e\ a\ b$$

pour la permutation cherchée.

7. Nous donnons ci-dessous le Tableau des permutations de

quatre objets, avec l'indication de leurs rangs et leurs signes figuratifs.

1re.....	1 2 3 4	0 0 0	13e.....	3 1 2 4	2 0 0
2e.....	1 2 4 3	0 0 1	14e.....	3 1 4 2	2 0 1
3e.....	1 3 2 4	0 1 0	15e.....	3 2 1 4	2 1 0
4e.....	1 3 4 2	0 1 1	16e.....	3 2 4 1	2 1 1
5e.....	1 4 2 3	0 2 0	17e.....	3 4 1 2	2 2 0
6e.....	1 4 3 2	0 2 1	18e.....	3 4 2 1	2 2 1
7e.....	2 1 3 4	1 0 0	19e.....	4 1 2 3	3 0 0
8e.....	2 1 4 3	1 0 1	20e.....	4 1 3 2	3 0 1
9e.....	2 3 1 4	1 1 0	21e.....	4 2 1 3	3 1 0
10e.....	2 3 4 1	1 1 1	22e.....	4 2 3 1	3 1 1
11e.....	2 4 1 3	1 2 0	23e.....	4 3 1 2	3 2 0
12e.....	2 4 3 1	1 2 1	24e.....	4 3 2 1	3 2 1

8. Le nombre total des inversions d'une permutation déterminée est évidemment égal à la somme des chiffres de son signe figuratif. Cela résulte de la définition même de ce signe. En considérant le Tableau ci-dessus, ou tout simplement en ayant égard à la formation successive des nombres entiers, dans le système de numération factorielle, il est clair que ce nombre d'inversions est :

pair, lorsque le rang de la permutation est de l'une des formes $4k$ ou $4k+1$;

impair, lorsque le rang de la permutation est de l'une des formes $4k+2$ ou $4k+3$.

Cette remarque est de nature à faciliter beaucoup la construction d'un déterminant, sans qu'il puisse y avoir aucune équivoque sur les signes.

Si, par exemple, nous avons à calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

nous formerons, dans leur ordre, les permutations

$$1\,2\,3,\quad 1\,3\,2,\quad 2\,1\,3,\quad 2\,3\,1,\quad 3\,1\,2,\quad 3\,2\,1,$$

auxquelles correspondront les signes

$$+\quad -\quad -\quad +\quad +\quad -,$$

c'est-à-dire que le déterminant est

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

Si tous les éléments du déterminant sont positifs, il y aura avantage à écrire d'une part les permutations de rangs

$$1, \quad 4,5, \quad 8,9, \quad 12,13, \quad 16,17, \quad \ldots,$$

qui fourniront les termes positifs; et, d'autre part, celles de rangs

$$2,3, \quad 6,7, \quad 10,11, \quad 14,15, \quad 18,19, \quad \ldots,$$

qui fourniront les termes négatifs.

On remarquera enfin que la notation proposée donne pour ainsi dire à vue la décomposition d'un déterminant suivant les éléments de la première colonne, par exemple; car, si l'on a le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix},$$

toute permutation dont le signe figuratif commencera par le chiffre p correspondra à un terme contenant a_{p+1}. Il n'y aura donc qu'à grouper ensemble les signes figuratifs commençant par p pour avoir, avec leurs signes, les termes contenant a_{p+1}, dans lesquels on mettra ensuite a_{p+1} en facteur commun.

Il est clair qu'on aurait de même les développements par rapport aux éléments de la deuxième, de la troisième colonne, etc., en amenant la colonne considérée au premier rang par une permutation préalable de colonnes.