Méthodes Expérimentales en Théorie des nombres et en Analyse

Henri Cohen

Institut de Mathématiques de Bordeaux

21 août 2007 Université d'été de St Flour

L'expérimentation en Mathématiques (1)

Dans toute science l'expérimentation joue un rôle primordial, et les mathématiques (que certains ne considèrent pas, à mon avis à tort, comme une science) ne font pas exception. Il est vrai toutefois que certaines branches des mathématiques sont plus sujettes à une démarche expérimentale que d'autres, et en particulier la théorie des nombres est probablement celle pour laquelle l'approche expérimentale est la plus importante.

De fait, les sciences dites "naturelles" (physique, chimie, biologie, etc...) considèrent fort justement les mathématiques comme un outil (même si certaines parties de la physique théorique ne sont autre que des mathématiques). La théorie des nombres peut en fait également être considérée comme une science "naturelle" puisque son objet fondamental est l'étude des entiers naturels. Et, de fait, elle utilise presque tout l'arsenal du reste des mathématiques comme outil.

L'expérimentation en Mathématiques (1)

Dans toute science l'expérimentation joue un rôle primordial, et les mathématiques (que certains ne considèrent pas, à mon avis à tort, comme une science) ne font pas exception. Il est vrai toutefois que certaines branches des mathématiques sont plus sujettes à une démarche expérimentale que d'autres, et en particulier la théorie des nombres est probablement celle pour laquelle l'approche expérimentale est la plus importante.

De fait, les sciences dites “naturelles” (physique, chimie, biologie, etc...) considèrent fort justement les mathématiques comme un outil (même si certaines parties de la physique théorique ne sont autre que des mathématiques). La théorie des nombres peut en fait également être considérée comme une science “naturelle” puisque son objet fondamental est l'étude des entiers naturels. Et, de fait, elle utilise presque tout l'arsenal du reste des mathématiques comme outil.

L'expérimentation en Mathématiques (2)

La démarche expérimentale en mathématiques, évidemment très voisine de celle de toute autre science, peut être schématisée de la manière suivante.

Tout d'abord on doit partir d'une observation si possible étonnante, nouvelle, ou curieuse, obtenue par exemple à l'aide d'un simple calcul. C'est la première étape de la recherche expérimentale en science : le plus important et excitant pour un scientifique n'est pas de dire "Eurêka, j'ai trouvé", mais "tiens, c'est bizarre".

Une deuxième étape consiste à trouver d'autres exemples de l'observation faite, et si possible, grâce à l'expérience accumulée, d'en déduire une conjecture, ou du moins un début de théorie expliquant les observations.

L'expérimentation en Mathématiques (2)

La démarche expérimentale en mathématiques, évidemment très voisine de celle de toute autre science, peut être schématisée de la manière suivante.
Tout d'abord on doit partir d'une observation si possible étonnante, nouvelle, ou curieuse, obtenue par exemple à l'aide d'un simple calcul. C'est la première étape de la recherche expérimentale en science : le plus important et excitant pour un scientifique n'est pas de dire “Eurêka, j'ai trouvé”, mais “tiens, c'est bizarre”.
Une deuxième étape consiste à trouver d'autres exemples de l'observation faite, et si possible, grâce à l'expérience accumulée, d'en déduire une conjecture, ou du moins un début de théorie expliquant les observations.

L'expérimentation en Mathématiques (2)

La démarche expérimentale en mathématiques, évidemment très voisine de celle de toute autre science, peut être schématisée de la manière suivante.
Tout d'abord on doit partir d'une observation si possible étonnante, nouvelle, ou curieuse, obtenue par exemple à l'aide d'un simple calcul. C'est la première étape de la recherche expérimentale en science : le plus important et excitant pour un scientifique n'est pas de dire “Eurêka, j'ai trouvé”, mais “tiens, c'est bizarre”.
Une deuxième étape consiste à trouver d'autres exemples de l'observation faite, et si possible, grâce à l'expérience accumulée, d'en déduire une conjecture, ou du moins un début de théorie expliquant les observations.

L'expérimentation en Mathématiques (3)

Dans une troisième étape, on cherchera encore d'autres exemples ou généralisations, pour se convaincre de la véracité de la théorie. Parfois, à ce stade il faut un peu modifier la conjecture pour rendre compte des exemples (ou bien on s'aperçoit que la conjecture est irréparable).

Dans une quatrième et dernière étape, qui est propre aux mathématiques (et aux disciplines connexes telles que la combinatoire, l'informatique, certaines parties de la physique théorique, etc...), on cherchera enfin à démontrer la conjecture. Certes cette étape est la plus importante, mais c'est aussi la plus ennuyeuse.

L'expérimentation en Mathématiques (3)

Dans une troisième étape, on cherchera encore d'autres exemples ou généralisations, pour se convaincre de la véracité de la théorie. Parfois, à ce stade il faut un peu modifier la conjecture pour rendre compte des exemples (ou bien on s'aperçoit que la conjecture est irréparable).
Dans une quatrième et dernière étape, qui est propre aux mathématiques (et aux disciplines connexes telles que la combinatoire, l'informatique, certaines parties de la physique théorique, etc...), on cherchera enfin à démontrer la conjecture. Certes cette étape est la plus importante, mais c'est aussi la plus ennuyeuse.

Outils : Logiciels

Pour faire de l'expérimentation, il faut des logiciels appropriés. Bien que les logiciels commerciaux tels que `Maple` ou `Mathematica` puissent bien sûr être utilisés, je recommande très vivement l'utilisation du logiciel libre et gratuit `Pari/GP`, développé sous ma direction depuis plus de 20 ans, et maintenant sous la direction de Karim Belabas. Ce logiciel est l'un des plus utilisés au monde dans la recherche en théorie des nombres et en analyse, et possède l'avantage d'avoir un apprentissage très simple, à l'opposé de beaucoup d'autres systèmes plus adaptés à des informaticiens. Des versions existent pour toutes les plateformes, et il est immédiat de le télécharger et de l'installer.

Que ce soit `Pari/GP` ou d'autres logiciels, il est nécessaire d'avoir à sa disposition un certain nombre d'algorithmes. A la base, des algorithmes de multiprécision, aussi bien en entiers qu'en réels, et d'autre part des algorithmes de manipulation d'objets standards tels que polynômes, séries, vecteurs et matrices.

Outils : Logiciels

Pour faire de l'expérimentation, il faut des logiciels appropriés. Bien que les logiciels commerciaux tels que `Maple` ou `Mathematica` puissent bien sûr être utilisés, je recommande très vivement l'utilisation du logiciel libre et gratuit `Pari/GP`, développé sous ma direction depuis plus de 20 ans, et maintenant sous la direction de Karim Belabas. Ce logiciel est l'un des plus utilisés au monde dans la recherche en théorie des nombres et en analyse, et possède l'avantage d'avoir un apprentissage très simple, à l'opposé de beaucoup d'autres systèmes plus adaptés à des informaticiens. Des versions existent pour toutes les plateformes, et il est immédiat de le télécharger et de l'installer.

Que ce soit `Pari/GP` ou d'autres logiciels, il est nécessaire d'avoir à sa disposition un certain nombre d'algorithmes. A la base, des algorithmes de multiprécision, aussi bien en entiers qu'en réels, et d'autre part des algorithmes de manipulation d'objets standards tels que polynômes, séries, vecteurs et matrices.

Outils : Accélération de la convergence (1)

Il existe en plus quelques algorithmes que j'appelle magiques, pour la plupart postérieurs aux années 1970, qui sont d'une puissance et d'une utilité remarquables, et qui de plus ont l'avantage d'être simples à programmer. J'en citerai trois.

(1). Les algorithmes d'accéleration de convergence de séries : Très fréquemment, bien qu'une série $S = \sum_{n\ge 0} u_n$ converge, la convergence est très lente (exemple typique $\sum_{n\ge 1} 1/n^2$). Il existe plusieurs méthodes permettant d'accélerer la convergence, et ainsi de calculer S a des centaines de décimales si on le désire. L'une, ancienne mais toujours très utile, est la formule sommatoire d'Euler–Mac Laurin, découverte presque en même temps que la formule de Taylor.

Outils : Accélération de la convergence (1)

Il existe en plus quelques algorithmes que j'appelle magiques, pour la plupart postérieurs aux années 1970, qui sont d'une puissance et d'une utilité remarquables, et qui de plus ont l'avantage d'être simples à programmer. J'en citerai trois.

(1). Les algorithmes d'accéleration de convergence de séries : Très fréquemment, bien qu'une série $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ converge, la convergence est très lente (exemple typique $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$). Il existe plusieurs méthodes permettant d'accélerer la convergence, et ainsi de calculer S a des centaines de décimales si on le désire. L'une, ancienne mais toujours très utile, est la formule sommatoire d'Euler–Mac Laurin, découverte presque en même temps que la formule de Taylor.

Outils : Accélération de la convergence (2)

Une méthode beaucoup plus récente utilise les polynômes de Tchebytchev pour accélerer des séries alternées $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ avec $u_n \geq 0$: elle ne necessite que 2 ou 3 lignes de programmation ! Elle est basée sur l'idée suivante : si u_n peut sécrire comme n-ième moment d'une fonction $w(t)$: $u_n = \int_0^1 t^n w(t)\,dt$, alors

$$S = \sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{w(t)}{1+t}\,dt\ ,$$

et si $P(t)$ est un polynôme quelconque, on a donc

$$S = \frac{1}{P(-1)}\int_0^1 w(t)\frac{P(-1)-P(t)}{1+t}\,dt + \frac{1}{P(-1)}\int_0^1 w(t)\frac{P(t)}{1+t}\,dt\ .$$

Outils : Accélération de la convergence (3)

Or $(P(-1) - P(t))/(1+t)$ est un polynôme, donc si on écrit

$$\frac{1}{P(-1)} \frac{P(-1) - P(t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n t^n$$

(où N est le degré de P), on a donc

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} c_n a_n + R, \quad \text{où} \quad R = \frac{1}{P(-1)} \int_0^1 w(t) \frac{P(t)}{1+t}\, dt\ ,$$

et, en supposant $w(t) \geq 0$ sur $[0,1]$ on a

$$|R| \leq \frac{\max_{t\in[0,1]}(|P(t)|)}{|P(-1)|} S\ .$$

Outils : Accélération de la convergence (4)

Le polynôme de degré N minimisant cette expression est, à un facteur multiplicatif près, le polynôme $T_N(1-2t)$, où T_N est le polynôme de Tchebytchev défini par $T_N(\cos(x)) = \cos(Nx)$.
Supposons que l'on ne veuille utiliser que les valeurs a_n pour $n \leq N$, ce qui produira une erreur de l'ordre de 6^{-N}. On utilise l'algorithme suivant, qui tient effectivement en trois lignes :

Poser $d \leftarrow (3+\sqrt{8})^N$, $d \leftarrow (d+1/d)/2$, $b \leftarrow -1$, $c \leftarrow -d$, et $s \leftarrow 0$.
Puis, pour $k=0$ jusqu'à $k=N-1$, répéter :
$c \leftarrow b-c$, $s \leftarrow s+c \cdot a_k$, $b \leftarrow (k+N)(k-N)b/((k+1/2)(k+1))$.
Le résultat est s/d.

Outils : Accélération de la convergence (4)

Le polynôme de degré N minimisant cette expression est, à un facteur multiplicatif près, le polynôme $T_N(1-2t)$, où T_N est le polynôme de Tchebytchev défini par $T_N(\cos(x)) = \cos(Nx)$. Supposons que l'on ne veuille utiliser que les valeurs a_n pour $n \leq N$, ce qui produira une erreur de l'ordre de 6^{-N}. On utilise l'algorithme suivant, qui tient effectivement en trois lignes :

Poser $d \leftarrow (3+\sqrt{8})^N$, $d \leftarrow (d+1/d)/2$, $b \leftarrow -1$, $c \leftarrow -d$, et $s \leftarrow 0$.
Puis, pour $k=0$ jusqu'à $k=N-1$, répéter :
$c \leftarrow b-c$, $s \leftarrow s+c\cdot a_k$, $b \leftarrow (k+N)(k-N)b/((k+1/2)(k+1))$.
Le résultat est s/d.

Outils : Intégration numérique (1)

(2). Les algorithmes de calcul numérique d'intégrales définies $\int_a^b f(t)\,dt$. Il existe des méthodes très anciennes pour celà (trapèzes, Simpson, Gauss), ou plus récentes (par exemple Richardson), mais c'est seulement dans les années 1970 qu'un groupe de chercheurs japonais (Mori, Takahashi) a trouvé une méthode révolutionnaire infiniment plus efficace que toutes les autres : la méthode doublement exponentielle. Elle permet de calculer des intégrales avec plusieurs milliers de décimales si on le souhaite, ce qui est inimaginable avec les autres méthodes, et est aussi appliquable aux intégrales impropres, par exemple avec a et/ou b égal à $\pm\infty$. De plus, elle est également très facile à programmer (quelques lignes).

Outils : Intégration numérique (2)

L'idée de base est très simple : supposons que l'on souhaite calculer $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ (un changement de variable affine ramène toute intégrale sur un intervalle compact à celle-ci). On fait le changement de variable magique $x = \phi(t)$ avec

$$\phi(t) = \tanh(\sinh(t)), \quad \text{d'où} \quad S = \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt\,.$$

La fonction $F(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$ tend vers 0 extrêmement vite (comme $2/e^{e^t}$, donc doublement exponentiellement), et pour calculer son intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ on utilise bêtement la formule $S \approx h\sum_{n=-N}^{N} F(nh)$, avec h et N convenablement choisis (par exemple $h = 1/128$ et $N = 332$ pour obtenir 100 décimales ! ! !).

Outils : Intégration numérique (3)

Pour les intégrales impropres, il faut changer la fonction magique. Par exemple :

– Pour $\int_0^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)$ ne tend pas vers 0 exponentiellement vite à l'infini, on prend $x = \phi(t) = e^{\sinh(t)}$.

– Pour $\int_0^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)$ tend vers 0 exponentiellement vite à l'infini, comme $e^{-g(x)}$, où g croit et tend vers l'infini avec x (par exemple $g(x) = x$) on prend $x = \phi(t) = g^{-1}(e^{t-e^{-t}})$.

– Pour $\int_0^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)$ est oscillante (par exemple $f(x) = \sin(x)/x$), il faut adapter la fonction ϕ. Par exemple si $f(x) = g(x)\sin(x)$ avec $g(x)$ non oscillante, on peut choisir $x = \phi(t) = (\pi/h)t/\left(1 - e^{-\sinh(t)}\right)$. Noter que ceci dépend de h.

Outils : Intégration numérique (3)

Pour les intégrales impropres, il faut changer la fonction magique. Par exemple :

– Pour $\int_0^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)$ ne tend pas vers 0 exponentiellement vite à l'infini, on prend $x = \phi(t) = e^{\sinh(t)}$.

– Pour $\int_0^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)$ tend vers 0 exponentiellement vite à l'infini, comme $e^{-g(x)}$, où g croit et tend vers l'infini avec x (par exemple $g(x) = x$) on prend $x = \phi(t) = g^{-1}(e^{t-e^{-t}})$.

– Pour $\int_0^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)$ est oscillante (par exemple $f(x) = \sin(x)/x$), il faut adapter la fonction ϕ. Par exemple si $f(x) = g(x)\sin(x)$ avec $g(x)$ non oscillante, on peut choisir $x = \phi(t) = (\pi/h)t/\left(1 - e^{-\sinh(t)}\right)$. Noter que ceci dépend de h.

Outils : Intégration numérique (3)

Pour les intégrales impropres, il faut changer la fonction magique. Par exemple :

– Pour $\int_0^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)$ ne tend pas vers 0 exponentiellement vite à l'infini, on prend $x = \phi(t) = e^{\sinh(t)}$.

– Pour $\int_0^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)$ tend vers 0 exponentiellement vite à l'infini, comme $e^{-g(x)}$, où g croit et tend vers l'infini avec x (par exemple $g(x) = x$) on prend $x = \phi(t) = g^{-1}(e^{t-e^{-t}})$.

– Pour $\int_0^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)$ est oscillante (par exemple $f(x) = \sin(x)/x$), il faut adapter la fonction ϕ. Par exemple si $f(x) = g(x)\sin(x)$ avec $g(x)$ non oscillante, on peut choisir $x = \phi(t) = (\pi/h)t/\left(1 - e^{-\sinh(t)}\right)$. Noter que ceci dépend de h.

Outils : Intégration numérique (4)

Trois remarques : (a). La relative ignorance de cette méthode par les spécialistes d'analyse numérique tient en particulier au fait qu'elle est utile en particulier pour le calcul a plusieurs dizaines de décimales, ce qui est souvent superflu en analyse numérique, mais pas en théorie des nombres

(b). Vu son importance et sa simplicité, elle devrait être enseignée en classes préparatoires et à l'université, au moins à égalité avec les autres méthodes. Il y a toutefois un problème pédagogique : elle n'est pas facile à justifier. Noter qu'on peut montrer que doublement exponentiel est optimal, il ne servirait à rien de choisir triplement exponentiel par exemple.

(c). La méthode marche le mieux quand la fonction à intégrer est très régulière dans l'intervalle ouvert $]a, b[$, mais elle peut très bien avoir des singularités raisonnables en a et b.

Outils : Intégration numérique (4)

Trois remarques : (a). La relative ignorance de cette méthode par les spécialistes d'analyse numérique tient en particulier au fait qu'elle est utile en particulier pour le calcul a plusieurs dizaines de décimales, ce qui est souvent superflu en analyse numérique, mais pas en théorie des nombres

(b). Vu son importance et sa simplicité, elle devrait être enseignée en classes préparatoires et à l'université, au moins à égalité avec les autres méthodes. Il y a toutefois un problème pédagogique : elle n'est pas facile à justifier. Noter qu'on peut montrer que doublement exponentiel est optimal, il ne servirait à rien de choisir triplement exponentiel par exemple.

(c). La méthode marche le mieux quand la fonction à intégrer est très régulière dans l'intervalle ouvert $]a, b[$, mais elle peut très bien avoir des singularités raisonnables en a et b.

Outils : Intégration numérique (4)

Trois remarques : (a). La relative ignorance de cette méthode par les spécialistes d'analyse numérique tient en particulier au fait qu'elle est utile en particulier pour le calcul a plusieurs dizaines de décimales, ce qui est souvent superflu en analyse numérique, mais pas en théorie des nombres
(b). Vu son importance et sa simplicité, elle devrait être enseignée en classes préparatoires et à l'université, au moins à égalité avec les autres méthodes. Il y a toutefois un problème pédagogique : elle n'est pas facile à justifier. Noter qu'on peut montrer que doublement exponentiel est optimal, il ne servirait à rien de choisir triplement exponentiel par exemple.
(c). La méthode marche le mieux quand la fonction à intégrer est très régulière dans l'intervalle ouvert $]a, b[$, mais elle peut très bien avoir des singularités raisonnables en a et b.

Outils : Intégration numérique (5)

Une version de l'algorithme sur $[-1,1]$ est la suivante : étant donnée une fonction C^∞ sur $[-1,1]$, une erreur ε, et un petit entier $r \geq 2$, on va calculer $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ avec une erreur inférieure à ε.

– Initialisation : $h \leftarrow 1/2^r$, $e_1 \leftarrow e^h$, $e_2 \leftarrow 1$, $i \leftarrow 0$.

– Précalculs, à faire une fois pour toutes : $c \leftarrow e_2 + 1/e_2$, $s \leftarrow e_2 - c$, $e_3 \leftarrow 2/\left(e^{2s}+1\right)$, $x[i] = 1 - e_3$, $w[i] \leftarrow ce_3(1 + x[i])$, $e_2 \leftarrow e_1 e_2$. Si $e_3 > \varepsilon$, mettre $i \leftarrow i + 1$ et recommencer les précalculs. Sinon $w[0] \leftarrow w[0]/2$, $n \leftarrow i$, $S \leftarrow 0$, et $p \leftarrow 2^r$ (note : on aura toujours $n \leq 20 \cdot 2^r$).

– L : Poser $p \leftarrow p/2$ et $i \leftarrow 0$.

– Tant que $i \leq n$ faire ce qui suit : si $(2p) \nmid i$ ou si $p = 2^{r-1}$ on pose $S = S + w[i](f(-x[i]) + f(x[i]))$. Puis poser $i \leftarrow i + p$.

– Si $p \geq 2$, retourner en L, sinon donner comme résultat $pS/2^r$.

Outils : L'algorithme LLL (1)

(3). Un dernier algorithme magique que je veux mentionner est l'algorithme LLL, du nom de ses inventeurs Arjen Lenstra, Hendrik Lenstra, et Laszlo Lovasz. Il est considéré comme l'un des plus importants algorithmes inventés dans la deuxième moitié du 20e siècle. Cette algorithme possède de multiples applications, même en dehors des mathématiques, mais pour nous l'application principale est la recherche de relations linéaires ou algébriques entre nombres réels ou complexes. Deux exemples illustrerons ceci.

Outils : L'algorithme LLL (2)

(a). Grâce à l'intégration numérique doublement exponentielle, ou a une somme de séries, on calcule aisément que

$$J = \int_0^{\alpha} \frac{\log(1-t)}{t}\, dt = -0.7553956195317414693865200 28\cdots \ ,$$

où $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$, l'inverse du nombre d'or. Maintenant comme j'ai une bonne intuition, je pense que J est une combinaison linéaire simple de π^2 et de $\log^2(\alpha)$. Grâce à LLL, en un dixième de milliseconde on trouve que, au moins à 28 décimales, on a effectivement :

$$J = \log^2(\alpha) - \frac{\pi^2}{10} \ .$$

Ceci a été trouvé sans aucune recherche des coefficients, je répète c'est magique.

Outils : L'algorithme LLL (2)

(a). Grâce à l'intégration numérique doublement exponentielle, ou a une somme de séries, on calcule aisément que

$$J = \int_0^{\alpha} \frac{\log(1-t)}{t}\,dt = -0.7553956195317414693865200 28\cdots\ ,$$

où $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$, l'inverse du nombre d'or. Maintenant comme j'ai une bonne intuition, je pense que J est une combinaison linéaire simple de π^2 et de $\log^2(\alpha)$. Grâce à LLL, en un dixième de milliseconde on trouve que, au moins à 28 décimales, on a effectivement :

$$J = \log^2(\alpha) - \frac{\pi^2}{10}\ .$$

Ceci a été trouvé sans aucune recherche des coefficients, je répète c'est magique.

Outils (7) : L'algorithme LLL (3)

(b). Le calcul d'une certaine valeur F de fonction transcendante (que nous rencontrerons plus loin) me donne

$$F = -191657.8328625472074713534448\cdots$$

Je pense que F est racine d'une équation du second degré.
Je donne ça à LLL qui effectivement en un dixième de milliseconde me dit qu'à 28 décimales F est bien racine du polynôme

$$x^2 + 191025x - 121287375\ .$$

A nouveau, ceci a été trouvé sans recherche systématique.
Reste à démontrer les deux assertions ci-dessus, mais c'est une autre histoire.

Outils (7) : L'algorithme LLL (3)

(b). Le calcul d'une certaine valeur F de fonction transcendante (que nous rencontrerons plus loin) me donne

$$F = -191657.832862547207471353448\cdots$$

Je pense que F est racine d'une équation du second degré.
Je donne ça à LLL qui effectivement en un dixième de milliseconde me dit qu'à 28 décimales F est bien racine du polynôme

$$x^2 + 191025x - 121287375 \ .$$

A nouveau, ceci a été trouvé sans recherche systématique.
Reste à démontrer les deux assertions ci-dessus, mais c'est une autre histoire.

Outils (7) : L'algorithme LLL (3)

(b). Le calcul d'une certaine valeur F de fonction transcendante (que nous rencontrerons plus loin) me donne

$$F = -191657.8328625472074713534448\cdots$$

Je pense que F est racine d'une équation du second degré.
Je donne ça à LLL qui effectivement en un dixième de milliseconde me dit qu'à 28 décimales F est bien racine du polynôme

$$x^2 + 191025x - 121287375\ .$$

A nouveau, ceci a été trouvé sans recherche systématique.
Reste à démontrer les deux assertions ci-dessus, mais c'est une autre histoire.

Deux exemples historiques (1)

Je vais donner une suite d'exemples tirés de la théorie des nombres et de l'analyse (au sens des séries et des intégrales) pour illustrer mon propos. En trichant très légerement avec l'histoire, l'une des premières conjectures numériques en analyse a été la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

Arrêtons nous un instant pour contempler ceci d'un point de vue expérimental.

Tout d'abord il faut pouvoir calculer numériquement la série de gauche, qui converge lentement : si on calcule comme c'est écrit mille termes (penser aux mathématiciens du 18e siècle), on n'a que trois décimales ! Heureusement les génies comme Euler, Bernoulli, et d'autres connaissaient déja des méthodes pour accélerer la convergence.

Deux exemples historiques (1)

Je vais donner une suite d'exemples tirés de la théorie des nombres et de l'analyse (au sens des séries et des intégrales) pour illustrer mon propos. En trichant très légerement avec l'histoire, l'une des premières conjectures numériques en analyse a été la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Arrêtons nous un instant pour contempler ceci d'un point de vue expérimental.
Tout d'abord il faut pouvoir calculer numériquement la série de gauche, qui converge lentement : si on calcule comme c'est écrit mille termes (penser aux mathématiciens du 18e siècle), on n'a que trois décimales ! Heureusement les génies comme Euler, Bernoulli, et d'autres connaissaient déja des méthodes pour accélerer la convergence.

Deux exemples historiques (2)

Ensuite, il faut s'apercevoir que la somme $1.644934066848\cdots$ est égale à $\pi^2/6$, ce qui n'est pas trop dur quand on a de l'expérience (ce sera beaucoup plus difficile dans le deuxième exemple). Reste à le démontrer, et ceci est nettement plus dur. Poursuivant le travail expérimental, on peut également constater que $\sum_{n\geq 1} 1/n^4 = \pi^4/90$, $\sum_{n\geq 1} 1/n^6 = \pi^6/945$, etc...

La démonstration de ces formules est plus délicate : bien qu'historiquement cela ne se soit passé comme cela, il n'est en fait pas très difficile de montrer que si on pose $P = \sqrt{6\sum_{n\geq 1} 1/n^2}$ (qui devrait donc être égal à π), alors $\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = P^2/6$ par définition, mais aussi $\sum_{n\geq 1} 1/n^4 = P^4/90$, $\sum_{n\geq 1} 1/n^6 = P^6/945$, etc... La difficulté consiste à montrer que $P = \pi$. Ceci est un exercice bien connu de prépa, et peut se faire, soit par identités trigonométriques, soit grâce à la théorie des séries de Fourier.

Deux exemples historiques (2)

Ensuite, il faut s'apercevoir que la somme $1.644934066848\cdots$ est égale à $\pi^2/6$, ce qui n'est pas trop dur quand on a de l'expérience (ce sera beaucoup plus difficile dans le deuxième exemple). Reste à le démontrer, et ceci est nettement plus dur. Poursuivant le travail expérimental, on peut également constater que $\sum_{n\geq 1} 1/n^4 = \pi^4/90$, $\sum_{n\geq 1} 1/n^6 = \pi^6/945$, etc...
La démonstration de ces formules est plus délicate : bien qu'historiquement cela ne se soit passé comme cela, il n'est en fait pas très difficile de montrer que si on pose $P = \sqrt{6\sum_{n\geq 1} 1/n^2}$ (qui devrait donc être égal à π), alors $\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = P^2/6$ par définition, mais aussi $\sum_{n\geq 1} 1/n^4 = P^4/90$, $\sum_{n\geq 1} 1/n^6 = P^6/945$, etc... La difficulté consiste à montrer que $P = \pi$. Ceci est un exercice bien connu de prépa, et peut se faire, soit par identités trigonométriques, soit grâce à la théorie des séries de Fourier.

Deux exemples historiques (3)

Comme deuxième exemple, je citerai la découverte par Gauss du lien entre la moyenne arithmético-géométrique (AGM) et de l'intégrale lemniscatique, mais je laisserai à Jean–François Mestre le soin de détailler cet exemple, qui illustre l'extraordinaire intuition expérimentale de Gauss.

Numérologie ou pas (1) ?

Tout système de calcul multiprécision montre que

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999999925007259\cdots$$

Est-ce une coïncidence numérique ? On va se convaincre du contraire de deux façons.
Tout d'abord, on peut chercher à remplacer 163 par d'autres entiers, voire par d'autres rationnels. Effectivement, on trouve par exemple

$$e^{\pi\sqrt{67}} = 147197952743.9999986624542\cdots$$

$$e^{\pi\sqrt{43}} = 884736743.999777466034 90\cdots$$

Un peu moins spectaculaire, mais pas mal quand même.

Numérologie ou pas (1) ?

Tout système de calcul multiprécision montre que

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999999925007259\cdots$$

Est-ce une coïncidence numérique ? On va se convaincre du contraire de deux façons.

Tout d'abord, on peut chercher à remplacer 163 par d'autres entiers, voire par d'autres rationnels. Effectivement, on trouve par exemple

$$e^{\pi\sqrt{67}} = 147197952743.9999986624542\cdots$$

$$e^{\pi\sqrt{43}} = 884736743.999777466034906\cdots$$

Un peu moins spectaculaire, mais pas mal quand même.

Numérologie ou pas (2) ?

On peut rendre les exemples ci-dessus beaucoup plus jolis en remarquant qu'ils se terminent tous par $743.999\cdots$. Et en plus, quand on prend la racine cubique après avoir soustrait 744, ca reste entier ! ! ! Ainsi :

$$(e^{\pi\sqrt{163}} - 744)^{1/3} = 640319.99999999999999999999999939031\cdots$$
$$(e^{\pi\sqrt{67}} - 744)^{1/3} = 5279.9999999999999840073\cdots$$
$$(e^{\pi\sqrt{43}} - 744)^{1/3} = 959.999999999919511\cdots$$

On est maintenant moralement certain qu'il se passe quelque chose.

Numérologie ou pas (2) ?

On peut rendre les exemples ci-dessus beaucoup plus jolis en remarquant qu'ils se terminent tous par $743.999\cdots$. Et en plus, quand on prend la racine cubique après avoir soustrait 744, ca reste entier ! ! ! Ainsi :

$$(e^{\pi\sqrt{163}} - 744)^{1/3} = 640319.99999999999999999999999939031\cdots$$

$$(e^{\pi\sqrt{67}} - 744)^{1/3} = 5279.9999999999999840073\cdots$$

$$(e^{\pi\sqrt{43}} - 744)^{1/3} = 959.99999999919511\cdots$$

On est maintenant moralement certain qu'il se passe quelque chose.

Numérologie ou pas (2) ?

On peut rendre les exemples ci-dessus beaucoup plus jolis en remarquant qu'ils se terminent tous par $743.999\cdots$. Et en plus, quand on prend la racine cubique après avoir soustrait 744, ca reste entier ! ! ! Ainsi :

$$(e^{\pi\sqrt{163}} - 744)^{1/3} = 640319.9999999999999999999999939031\cdots$$
$$(e^{\pi\sqrt{67}} - 744)^{1/3} = 5279.999999999999840073\cdots$$
$$(e^{\pi\sqrt{43}} - 744)^{1/3} = 959.999999999919511\cdots$$

On est maintenant moralement certain qu'il se passe quelque chose.

Numérologie ou pas (3) ?

Convaincus d'être devant un phénomène interessant, la deuxième étape consiste à essayer de cerner le phénomène de plus près, en trouvant des phénomènes plus précis ou d'autres exemples analogues.

Dans ce cas précis, continuons l'expérimentation. Nous allons poser $q = e^{-\pi\sqrt{163}} = 3.8089 \cdots 10^{-18}$, et essayer d'aller plus loin dans l'approximation. Nous avons vu que $1/q = e^{\pi\sqrt{163}}$ est très proche d'un entier $N = 262537412640768744$. Plus précisément, on calcule que $N - 1/q = 7.499274 \cdots 10^{-13}$. Jusque là, rien de nouveau.

Mais q aussi est très petit ! Pris d'une soudaine inspiration, on divise par q et on trouve :

$$(N - 1/q)/q = 196883.999999999918130 \cdots$$

De plus en plus curieux. Donc N est proche de $1/q + 196884q$.

Numérologie ou pas (3) ?

Convaincus d'être devant un phénomène interessant, la deuxième étape consiste à essayer de cerner le phénomène de plus près, en trouvant des phénomènes plus précis ou d'autres exemples analogues.
Dans ce cas précis, continuons l'expérimentation. Nous allons poser $q = e^{-\pi\sqrt{163}} = 3.8089 \cdots 10^{-18}$, et essayer d'aller plus loin dans l'approximation. Nous avons vu que $1/q = e^{\pi\sqrt{163}}$ est très proche d'un entier $N = 262537412640768744$. Plus précisément, on calcule que $N - 1/q = 7.499274 \cdots 10^{-13}$. Jusque là, rien de nouveau.
Mais q aussi est très petit ! Pris d'une soudaine inspiration, on divise par q et on trouve :

$$(N - 1/q)/q = 196883.999999999918130 \cdots$$

De plus en plus curieux. Donc N est proche de $1/q + 196884q$.

Numérologie ou pas (3) ?

Convaincus d'être devant un phénomène interessant, la deuxième étape consiste à essayer de cerner le phénomène de plus près, en trouvant des phénomènes plus précis ou d'autres exemples analogues.
Dans ce cas précis, continuons l'expérimentation. Nous allons poser $q = e^{-\pi\sqrt{163}} = 3.8089\cdots 10^{-18}$, et essayer d'aller plus loin dans l'approximation. Nous avons vu que $1/q = e^{\pi\sqrt{163}}$ est très proche d'un entier $N = 262537412640768744$. Plus précisément, on calcule que $N - 1/q = 7.499274\cdots 10^{-13}$. Jusque là, rien de nouveau. Mais q aussi est très petit ! Pris d'une soudaine inspiration, on divise par q et on trouve :

$$(N - 1/q)/q = 196883.99999999918130\cdots$$

De plus en plus curieux. Donc N est proche de $1/q + 196884q$.

Numérologie ou pas (4) ?

Il n'y a pas de raison de s'arrêter en si bon chemin. On calcule de même

$$(N - (1/q + 196884q))/q^2 = -21493759.999999996707\cdots ,$$

donc N est proche de $1/q + 196884q - 21493760q^2$.
Continuant de cette manière on obtient $N = S(q)$ avec

$$\begin{aligned} S(q) = \frac{1}{q} &+ 196884q - 21493760q^2 + 864299970q^3 \\ &- 20245856256q^4 + 333202640600q^5 \\ &- 4252023300096q^6 + 44656994071935q^7 \\ &- 401490886656000q^8 + 3176440229784420q^9 + \cdots \end{aligned}$$

Numérologie ou pas (4) ?

Il n'y a pas de raison de s'arrêter en si bon chemin. On calcule de même

$$(N - (1/q + 196884q))/q^2 = -21493759.999999996707\cdots ,$$

donc N est proche de $1/q + 196884q - 21493760q^2$.
Continuant de cette manière on obtient $N = S(q)$ avec

$$\begin{aligned} S(q) = \frac{1}{q} &+ 196884q - 21493760q^2 + 864299970q^3 \\ &- 20245856256q^4 + 333202640600q^5 \\ &- 4252023300096q^6 + 44656994071935q^7 \\ &- 401490886656000q^8 + 3176440229784420q^9 + \cdots \end{aligned}$$

Numérologie ou pas (5) ?

C'est tout à fait remarquable. Mais il reste encore un point à éclaircir avant de terminer l'expérimentation : la série qu'on vient d'obtenir est-elle liée au nombre 163 ou est-elle universelle ?

Remplaçons 163 par 67 pour voir. On peut soit recommencer la même chose pour voir si les coefficients seront les mêmes (c'est le cas), soit directement poser $q = e^{-\pi\sqrt{67}}$ dans la série ci-dessus. Je rappelle que $e^{\pi\sqrt{67}} = 147197952743.99999866\cdots$, ce qui est pas mal mais pas si extraordinaire.

On trouve effectivement que

$$S\left(e^{-\pi\sqrt{67}}\right) = 147197952744 + 4.72\cdots 10^{-96}$$
$$S\left(e^{-\pi\sqrt{43}}\right) = 8847836744 + 7.67\cdots 10^{-74},$$

donc visiblement cette série est universelle.

Numérologie ou pas (5) ?

C'est tout à fait remarquable. Mais il reste encore un point à éclaircir avant de terminer l'expérimentation : la série qu'on vient d'obtenir est-elle liée au nombre 163 ou est-elle universelle ?

Remplaçons 163 par 67 pour voir. On peut soit recommencer la même chose pour voir si les coefficients seront les mêmes (c'est le cas), soit directement poser $q = e^{-\pi\sqrt{67}}$ dans la série ci-dessus. Je rappelle que $e^{\pi\sqrt{67}} = 147197952743.99999866\cdots$, ce qui est pas mal mais pas si extraordinaire.

On trouve effectivement que

$$S\left(e^{-\pi\sqrt{67}}\right) = 147197952744 + 4.72\cdots 10^{-96}$$
$$S\left(e^{-\pi\sqrt{43}}\right) = 8847836744 + 7.67\cdots 10^{-74},$$

donc visiblement cette série est universelle.

Numérologie ou pas (5) ?

C'est tout à fait remarquable. Mais il reste encore un point à éclaircir avant de terminer l'expérimentation : la série qu'on vient d'obtenir est-elle liée au nombre 163 ou est-elle universelle ?
Remplaçons 163 par 67 pour voir. On peut soit recommencer la même chose pour voir si les coefficients seront les mêmes (c'est le cas), soit directement poser $q = e^{-\pi\sqrt{67}}$ dans la série ci-dessus. Je rappelle que $e^{\pi\sqrt{67}} = 147197952743.99999866\cdots$, ce qui est pas mal mais pas si extraordinaire.
On trouve effectivement que

$$S\left(e^{-\pi\sqrt{67}}\right) = 147197952744 + 4.72\cdots 10^{-96}$$
$$S\left(e^{-\pi\sqrt{43}}\right) = 8847836744 + 7.67\cdots 10^{-74} ,$$

donc visiblement cette série est universelle.

Numérologie ou pas (6) ?

Est-ce toujours vrai ? En fait j'ai triché et j'ai oublié de mentionner que ça marche aussi pour 58 :

$$e^{\pi\sqrt{58}} = 24591257751.99999982221\cdots$$

Ici la série $S(q)$ ne marche plus. On trouve plutôt, exactement de la même manière, la série

$$T(q) = 1/q + 4372q + 96256q^2 + 1240002q^3 + 10698752q^4 + 74428120q^5 + 431529984q^6 + \cdots$$

Si on écrit un petit programme, on voit que $S(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est extrêmement proche d'un entier (beaucoup plus que $e^{\pi\sqrt{D}}$ lui-même, ce qu'on abrégera en EXPE) pour $D = 3, 7, 11, 19, 27, 43, 67, 163$, que $S(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 4, 8, 12, 16, 28$,

Numérologie ou pas (6) ?

Est-ce toujours vrai ? En fait j'ai triché et j'ai oublié de mentionner que ça marche aussi pour 58 :

$$e^{\pi\sqrt{58}} = 24591257751.99999982221\cdots$$

Ici la série $S(q)$ ne marche plus. On trouve plutôt, exactement de la même manière, la série

$$T(q) = 1/q + 4372q + 96256q^2 + 1240002q^3 + 10698752q^4 + 74428120q^5 + 431529984q^6 + \cdots$$

Si on écrit un petit programme, on voit que $S(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est extrêmement proche d'un entier (beaucoup plus que $e^{\pi\sqrt{D}}$ lui-même, ce qu'on abrégera en EXPE) pour $D = 3, 7, 11, 19, 27, 43, 67, 163$, que $S(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 4, 8, 12, 16, 28$,

Numérologie ou pas (7) ?

que $T(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 4, 6, 10, 18, 22, 58$, et que $T(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 5, 7, 9, 13, 25, 37$.

La partie expérimentale est loin d'être terminée : si

$$U(q) = 1/q + 79q - 352q^2 + 1431q^3 - 4160q^4 + 13015q^5 - 31968q^6 + 81162q^7 + \cdots ,$$

alors $U(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 5/3, 7/3, 11/3, 19/3, 31/3, 59/3$, $U(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 2, 4/3, 10/3, 14/3, 26/3, 34/3$, et si

$$V(q) = 1/q + 783q - 8672q^2 + 65367q^3 - 371520q^4 + \cdots ,$$

alors $V(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 17/3, 25/3, 41/3, 49/3, 89/3$, $V(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 16/3, 20/3$.

Pour un exemple avec des dénominateurs plus grands, si

$$W(q) = 1/q + 9q^2 - 6q^3 + 4q^4 + \cdots ,$$

alors $W(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 82/19$.

Numérologie ou pas (7) ?

que $T(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 4, 6, 10, 18, 22, 58$, et que $T(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 5, 7, 9, 13, 25, 37$.
La partie expérimentale est loin d'être terminée : si

$$U(q) = 1/q + 79q - 352q^2 + 1431q^3 - 4160q^4 + 13015q^5 - 31968q^6 + 81162q^7 + \cdots ,$$

alors $U(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 5/3, 7/3, 11/3, 19/3, 31/3, 59/3$, $U(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 2, 4/3, 10/3, 14/3, 26/3, 34/3$, et si

$$V(q) = 1/q + 783q - 8672q^2 + 65367q^3 - 371520q^4 + \cdots ,$$

alors $V(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 17/3, 25/3, 41/3, 49/3, 89/3$, $V(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 16/3, 20/3$.
Pour un exemple avec des dénominateurs plus grands, si

$$W(q) = 1/q + 9q^2 - 6q^3 + 4q^4 + \cdots ,$$

alors $W(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 82/19$.

Numérologie ou pas (7) ?

que $T(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 4, 6, 10, 18, 22, 58$, et que $T(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 5, 7, 9, 13, 25, 37$.
La partie expérimentale est loin d'être terminée : si

$$U(q) = 1/q + 79q - 352q^2 + 1431q^3 - 4160q^4 + 13015q^5 - 31968q^6 + 81162q^7 + \cdots ,$$

alors $U(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 5/3, 7/3, 11/3, 19/3, 31/3, 59/3$, $U(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 2, 4/3, 10/3, 14/3, 26/3, 34/3$, et si

$$V(q) = 1/q + 783q - 8672q^2 + 65367q^3 - 371520q^4 + \cdots ,$$

alors $V(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 17/3, 25/3, 41/3, 49/3, 89/3$, $V(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 16/3, 20/3$.
Pour un exemple avec des dénominateurs plus grands, si

$$W(q) = 1/q + 9q^2 - 6q^3 + 4q^4 + \cdots ,$$

alors $W(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 82/19$.

Numérologie ou pas (7) ?

que $T(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 4, 6, 10, 18, 22, 58$, et que $T(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 5, 7, 9, 13, 25, 37$.
La partie expérimentale est loin d'être terminée : si

$$U(q) = 1/q + 79q - 352q^2 + 1431q^3 - 4160q^4 \\ + 13015q^5 - 31968q^6 + 81162q^7 + \cdots ,$$

alors $U(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 5/3, 7/3, 11/3, 19/3, 31/3, 59/3$, $U(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 2, 4/3, 10/3, 14/3, 26/3, 34/3$, et si

$$V(q) = 1/q + 783q - 8672q^2 + 65367q^3 - 371520q^4 + \cdots ,$$

alors $V(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 17/3, 25/3, 41/3, 49/3, 89/3$, $V(-e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 16/3, 20/3$.
Pour un exemple avec des dénominateurs plus grands, si

$$W(q) = 1/q + 9q^2 - 6q^3 + 4q^4 + \cdots ,$$

alors $W(e^{-\pi\sqrt{D}})$ est EXPE pour $D = 82/19$.

Numérologie ou pas (8) ?

Bien qu'il reste des expériences à faire sur ce sujet, nous nous arrêterons là. Il faudrait maintenant à la fois comprendre ce que sont ces séries $S(q)$, $T(q)$, etc..., et ce que sont ces nombres rationnels $D = 3, 7, 11, 19, 27, 43, 67, 163$, etc...

Les séries $S(q)$,... s'appellent des fonctions modulaires, et plus précisément dans notre cas des Hauptmoduln : par exemple, si on pose

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) \quad \text{et} \quad E_4(q) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} n^3 \frac{q^n}{1 - q^n} ,$$

on a

$$S(q) - 744 = \frac{E_4(-q)^3}{\eta(-q)^{24}} \quad \text{et} \quad T(q) - 24 = \left(\frac{\eta(q)}{\eta(q^2)}\right)^{24} + 4096 \left(\frac{\eta(q^2)}{\eta(q)}\right)^{24}$$

(les constantes -744 et -24 ont peu de signification).

Numérologie ou pas (8) ?

Bien qu'il reste des expériences à faire sur ce sujet, nous nous arrêterons là. Il faudrait maintenant à la fois comprendre ce que sont ces séries $S(q)$, $T(q)$, etc..., et ce que sont ces nombres rationnels $D = 3, 7, 11, 19, 27, 43, 67, 163$, etc...

Les séries $S(q)$,... s'appellent des fonctions modulaires, et plus précisément dans notre cas des Hauptmoduln : par exemple, si on pose

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) \quad \text{et} \quad E_4(q) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} n^3 \frac{q^n}{1 - q^n} \ ,$$

on a

$$S(q) - 744 = \frac{E_4(-q)^3}{\eta(-q)^{24}} \quad \text{et} \quad T(q) - 24 = \left(\frac{\eta(q)}{\eta(q^2)} \right)^{24} + 4096 \left(\frac{\eta(q^2)}{\eta(q)} \right)^{24}$$

(les constantes -744 et -24 ont peu de signification).

Numérologie ou pas (9) ?

Le phénomène observé (le fait que les valeurs soient entières pour certaines valeurs de D) est la base de la théorie de la multiplication complexe. D'ailleurs, comme phénomène connexe on peut observer que pour les valeurs de D non divisibles par 3 données ci-dessus ($D = 7, 11, 19, 43, 67, 163$), le polynôme $x^2 + x + (D+1)/4$ ne prend comme valeurs que des nombres premiers pour $0 \leq x < (D-3)/4$, le plus spectaculaire étant le polynôme $x^2 + x + 41$ qui ne prend que des valeurs premières pour $0 \leq x < 40$.

Autres phénomènes non numérologiques (1)

On peut bien sûr donner beaucoup d'autres exemples d'apparente numérologie qui cache en fait une théorie mathématique tout à fait sérieuse. Je donnerai deux exemples. Tout d'abord, rappellons que

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=\pi\ .$$

La convergence de cette série est très lente (il faut en gros 1 million de termes pour avoir 6 décimales). On peut en fait très efficacement accélérer la convergence de cette série en utilisant la méthode basée sur les polynômes de Tchebytchev, mais tel n'est pas mon propos. Calculons plutôt la somme S des 500000 premiers termes. On trouve que $S=3.1415906\cdots$, alors que $\pi=3.1415926\cdots$, d'où une erreur de 2 millionnièmes, ce qui est attendu.

Autres phénomènes non numérologiques (1)

On peut bien sûr donner beaucoup d'autres exemples d'apparente numérologie qui cache en fait une théorie mathématique tout à fait sérieuse. Je donnerai deux exemples. Tout d'abord, rappellons que

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=\pi\ .$$

La convergence de cette série est très lente (il faut en gros 1 million de termes pour avoir 6 décimales). On peut en fait très efficacement accélérer la convergence de cette série en utilisant la méthode basée sur les polynômes de Tchebytchev, mais tel n'est pas mon propos. Calculons plutôt la somme S des 500000 premiers termes. On trouve que $S=3.1415906\cdots$, alors que $\pi=3.1415926\cdots$, d'où une erreur de 2 millionnièmes, ce qui est attendu.

Autres phénomènes non numérologiques (2)

Jusque là pas de surprise. Pourtant, calculons plus de décimales : on trouve

$$S = 3.14159065358979324\mathbf{0}, \quad \text{alors que}$$
$$\pi = 3.14159265358979323\mathbf{8}\ .$$

Donc, bien que la 6-ième décimale soit fausse, les 9 suivantes sont correctes !. Et ça continue ! On a

$$S = 3.14159065358979324046264338326950288419729139937510305097 49$$
$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 49$$

et on peut encore continuer longtemps. C'est une conséquence de la formule sommatoire d'Euler–Mac Laurin déjà mentionnée.

Autres phénomènes non numérologiques (2)

Jusque là pas de surprise. Pourtant, calculons plus de décimales : on trouve

$$S = 3.14159065358979324\mathrm{0}, \quad \text{alors que}$$
$$\pi = 3.14159265358979323\mathrm{8}\ .$$

Donc, bien que la 6-ième décimale soit fausse, les 9 suivantes sont correctes !. Et ça continue ! On a

$$S = 3.14159065358979324046264338326950288419729139937510305097494$$
$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494$$

et on peut encore continuer longtemps. C'est une conséquence de la formule sommatoire d'Euler–Mac Laurin déjà mentionnée.

Autres phénomènes non numérologiques (3)

Comme autre phénomène, je donne la jolie fausse identité suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n/10)^2} = 5\sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \; .$$

Si on essaye de vérifier ceci sur ordinateur, on trouve que les deux membres sont effectivement égaux à $8.3622692545275\cdots$, même à 100 décimales. Et pourtant, l'identité est fausse, mais il faut travailler à plus de 430 décimales pour s'en apercevoir, car la différence entre les deux membres est de l'ordre de 10^{-427}. A nouveau, ce type de numérologie a une explication mathématique : ici, c'est l'équation fonctionnelle de la fonction theta.

Autres phénomènes non numérologiques (3)

Comme autre phénomène, je donne la jolie fausse identité suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n/10)^2} = 5\sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \,.$$

Si on essaye de vérifier ceci sur ordinateur, on trouve que les deux membres sont effectivement égaux à $8.3622692545275\cdots$, même à 100 décimales. Et pourtant, l'identité est fausse, mais il faut travailler à plus de 430 décimales pour s'en apercevoir, car la différence entre les deux membres est de l'ordre de 10^{-427}. A nouveau, ce type de numérologie a une explication mathématique : ici, c'est l'équation fonctionnelle de la fonction theta.

Une intégrale difficile (1)

Lors d'une conférence à Montréal en 2002, H. Muzzafar a annoncé qu'il savait calculer explicitement des intégrales du type

$$J(a) = \int_0^1 \frac{\log(1+t^a)}{1+t}\, dt\ ,$$

où a est un nombre réel racine d'une equation du type $x^2 - tx \pm 1 = 0$, et a défié les auditeurs à les calculer de manière "élémentaire". Je ne sais effectivement pas le faire, et je n'ai même pas réussi à reproduire la démonstration (non publiée) de l'auteur. Utilisant les outils d'intégration numérique et l'algorithme LLL, j'ai pu constater expérimentalement que les identités suivantes sont valables à plusieurs centaines de décimales (ce qui ne prouve rien bien sûr, voir l'exemple ci-dessus) :

Une intégrale difficile (2)

$$J(1+\sqrt{2}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \frac{\log(2)\log(1+\sqrt{2})}{2} - \frac{\pi^2}{24} \,,$$

$$J(3+2\sqrt{2}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \frac{3\log(2)\log(1+\sqrt{2})}{2} + \frac{3\pi^2}{8} - \frac{\pi^2(3+2\sqrt{2})}{12} \,,$$

$$J(2+\sqrt{3}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \frac{\log(2)\log(2+\sqrt{3})}{2} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2(2+\sqrt{3})}{12} \,,$$

$$J(2+\sqrt{5}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \frac{2\log(2)\log(2+\sqrt{5})}{3} - \frac{\pi^2}{12} \,,$$

$$J(4+\sqrt{17}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \log(2)\log(4+\sqrt{17}) - \frac{\pi^2}{6} \,,$$

$$J(4+\sqrt{15}) = \log(2)\log(\sqrt{3}+\sqrt{5}) + \log(2+\sqrt{3})\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2(4+\sqrt{15})}{12} \,.$$

Exercice : calculez explicitement $J(6+\sqrt{35})$ et $J(12+\sqrt{143})$.

Une intégrale difficile (2)

$$J(1+\sqrt{2}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \frac{\log(2)\log(1+\sqrt{2})}{2} - \frac{\pi^2}{24}\ ,$$

$$J(3+2\sqrt{2}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \frac{3\log(2)\log(1+\sqrt{2})}{2} + \frac{3\pi^2}{8} - \frac{\pi^2(3+2\sqrt{2})}{12}\ ,$$

$$J(2+\sqrt{3}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \frac{\log(2)\log(2+\sqrt{3})}{2} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2(2+\sqrt{3})}{12}\ ,$$

$$J(2+\sqrt{5}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \frac{2\log(2)\log(2+\sqrt{5})}{3} - \frac{\pi^2}{12}\ ,$$

$$J(4+\sqrt{17}) = \frac{\log^2(2)}{2} + \log(2)\log(4+\sqrt{17}) - \frac{\pi^2}{6}\ ,$$

$$J(4+\sqrt{15}) = \log(2)\log(\sqrt{3}+\sqrt{5}) + \log(2+\sqrt{3})\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2(4+\sqrt{15})}{12}\ .$$

Exercice : calculez explicitement $J(6+\sqrt{35})$ et $J(12+\sqrt{143})$.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (1)

Bien que faisant intervenir des notions plus difficiles, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (BSD) est à mon avis l'un des problèmes les plus élégants et importants de toutes les mathématiques (il y a d'ailleurs un prix de 1 million de dollars pour sa solution). C'est un cas typique de mathématiques expérimentales moderne.

Dans les années 1960, deux mathématiciens Britanniques, Bryan Birch et Peter Swinnerton-Dyer, ont calculé numériquement "la valeur en 1 de fonctions L de courbes elliptiques". Peu importe la signification de ces mots, mais ils ont constaté, et c'est là tout leur génie expérimental, que cette valeur semblait être égale à 0 si et seulement si la courbe avait une infinité de points à coordonnées rationnelles.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (1)

Bien que faisant intervenir des notions plus difficiles, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (BSD) est à mon avis l'un des problèmes les plus élégants et importants de toutes les mathématiques (il y a d'ailleurs un prix de 1 million de dollars pour sa solution). C'est un cas typique de mathématiques expérimentales moderne.

Dans les années 1960, deux mathématiciens Britanniques, Bryan Birch et Peter Swinnerton-Dyer, ont calculé numériquement "la valeur en 1 de fonctions L de courbes elliptiques". Peu importe la signification de ces mots, mais ils ont constaté, et c'est là tout leur génie expérimental, que cette valeur semblait être égale à 0 si et seulement si la courbe avait une infinité de points à coordonnées rationnelles.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (2)

Peu après, ils ont généralisé cette constatation, je le répète purement expérimentale, et c'est devenu une conjecture très précise, la conjecture BSD. J'insiste sur le fait que même dans sa formulation initiale, cette conjecture n'est pas démontrée.

De nombreux théorèmes, pour la plupart très difficiles, ont été démontrés concernant cette conjecture, et par les meilleurs spécialistes au monde (Coates–Wiles, Kolyvagin, Gross–Zagier, Rubin, Nekovar,...). Et pourtant, on peut raisonnablement dire qu'on n'a très peu avancé sur le sujet.

Il m'est impossible de donner les définitions, mais je donne l'idée générale, grâce à plusieurs exemples, et je prie le lecteur de me faire confiance.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (2)

Peu après, ils ont généralisé cette constatation, je le répète purement expérimentale, et c'est devenu une conjecture très précise, la conjecture BSD. J'insiste sur le fait que même dans sa formulation initiale, cette conjecture n'est pas démontrée.

De nombreux théorèmes, pour la plupart très difficiles, ont été démontrés concernant cette conjecture, et par les meilleurs spécialistes au monde (Coates–Wiles, Kolyvagin, Gross–Zagier, Rubin, Nekovar,...). Et pourtant, on peut raisonnablement dire qu'on n'a très peu avancé sur le sujet.

Il m'est impossible de donner les définitions, mais je donne l'idée générale, grâce à plusieurs exemples, et je prie le lecteur de me faire confiance.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (2)

Peu après, ils ont généralisé cette constatation, je le répète purement expérimentale, et c'est devenu une conjecture très précise, la conjecture BSD. J'insiste sur le fait que même dans sa formulation initiale, cette conjecture n'est pas démontrée.
De nombreux théorèmes, pour la plupart très difficiles, ont été démontrés concernant cette conjecture, et par les meilleurs spécialistes au monde (Coates–Wiles, Kolyvagin, Gross–Zagier, Rubin, Nekovar,...). Et pourtant, on peut raisonnablement dire qu'on n'a très peu avancé sur le sujet.
Il m'est impossible de donner les définitions, mais je donne l'idée générale, grâce à plusieurs exemples, et je prie le lecteur de me faire confiance.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (3)

Comme premier exemple, considérons le problème de la représentation d'un entier c comme somme de deux cubes de nombres rationnels, c'est à dire l'équation $c = a^3 + b^3$, avec a et b dans $\mathbb{Q}$. Réduisant au même dénominateur, ceci équivaut à la solubilité en nombres entiers de l'équation $x^3 + y^3 = cz^3$, avec $z \neq 0$.
Par exemple, le nomber 15 est représentable, car

$$15 = (397/294)^3 + (683/294)^3 ,$$

et c'est la représentation la plus simple. Par contre, on peut montrer que le nombre 14 n'est pas représentable.
Une conséquence de la conjecture BSD, qui est loin d'être démontrée, est que tout entier sans facteur carré (non divisible par un carré autre que 1) et congru à 4, 6, 7 ou 8 modulo 9 est effectivement une somme de deux cubes de nombres rationnels. Noter que BSD ne nous donne pas la représentation en question, et que la réciproque est fausse (par exemple $91 = 3^3 + 4^3$ alors que $91 \equiv 1 \pmod 9$).

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (3)

Comme premier exemple, considérons le problème de la représentation d'un entier c comme somme de deux cubes de nombres rationnels, c'est à dire l'équation $c = a^3 + b^3$, avec a et b dans $\mathbb{Q}$. Réduisant au même dénominateur, ceci équivaut à la solubilité en nombres entiers de l'équation $x^3 + y^3 = cz^3$, avec $z \neq 0$. Par exemple, le nomber 15 est représentable, car

$$15 = (397/294)^3 + (683/294)^3 \ ,$$

et c'est la représentation la plus simple. Par contre, on peut montrer que le nombre 14 n'est pas représentable.

Une conséquence de la conjecture BSD, qui est loin d'être démontrée, est que tout entier sans facteur carré (non divisible par un carré autre que 1) et congru à 4, 6, 7 ou 8 modulo 9 est effectivement une somme de deux cubes de nombres rationnels. Noter que BSD ne nous donne pas la représentation en question, et que la réciproque est fausse (par exemple $91 = 3^3 + 4^3$ alors que $91 \equiv 1 \pmod 9$).

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (3)

Comme premier exemple, considérons le problème de la représentation d'un entier c comme somme de deux cubes de nombres rationnels, c'est à dire l'équation $c = a^3 + b^3$, avec a et b dans $\mathbb{Q}$. Réduisant au même dénominateur, ceci équivaut à la solubilité en nombres entiers de l'équation $x^3 + y^3 = cz^3$, avec $z \neq 0$. Par exemple, le nomber 15 est représentable, car

$$15 = (397/294)^3 + (683/294)^3 \ ,$$

et c'est la représentation la plus simple. Par contre, on peut montrer que le nombre 14 n'est pas représentable.
Une conséquence de la conjecture BSD, qui est loin d'être démontrée, est que tout entier sans facteur carré (non divisible par un carré autre que 1) et congru à 4, 6, 7 ou 8 modulo 9 est effectivement une somme de deux cubes de nombres rationnels. Noter que BSD ne nous donne pas la représentation en question, et que la réciproque est fausse (par exemple $91 = 3^3 + 4^3$ alors que $91 \equiv 1 \pmod 9$).

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (4)

Comme deuxième exemple, citons le problème des nombres congruents. C'est le dernier problème datant des anciens Grecs qui n'est toujours pas complètement résolu ! On dit qu'un entier S est un nombre congruent s'il est égal à la surface d'un triangle Pythagoricien, c'est à dire un triangle rectangle à cotés rationnels, comme le célèbre triangle $(3, 4, 5)$, de surface 6, qui montre que 6 est un nombre congruent. Le problème consiste à donner une caractérisation simple des nombres congruents. La conjecture BSD donne une réponse complète à ce problème, de deux façons différentes, mais je n'en citerai qu'une.

On peut toujours se ramener à S sans facteur carré. BSD prévoit alors que si S est congru à 5, 6 ou 7 modulo 8, alors S est congruent (sans donner d'indication sur le triangle rectangle).

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (4)

Comme deuxième exemple, citons le problème des nombres congruents. C'est le dernier problème datant des anciens Grecs qui n'est toujours pas complètement résolu ! On dit qu'un entier S est un nombre congruent s'il est égal à la surface d'un triangle Pythagoricien, c'est à dire un triangle rectangle à cotés rationnels, comme le célèbre triangle $(3, 4, 5)$, de surface 6, qui montre que 6 est un nombre congruent. Le problème consiste à donner une caractérisation simple des nombres congruents. La conjecture BSD donne une réponse complète à ce problème, de deux façons différentes, mais je n'en citerai qu'une.
On peut toujours se ramener à S sans facteur carré. BSD prévoit alors que si S est congru à 5, 6 ou 7 modulo 8, alors S est congruent (sans donner d'indication sur le triangle rectangle).

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (5)

Pour S congru à 1, 2 ou 3 modulo 8, la condition est plus difficile à expliquer. Définissons une fonction arithmétique $a(n)$ de la manière suivante :

(1). Pour $n = p$ premier, on pose $a(p) = 0$ si $p \mid S$, ou si $p = 2$ ou si $p \equiv 3 \pmod 4$. Sinon, on a $p \equiv 1 \pmod 4$, donc il existe a et b tels que $p = a^2 + b^2$, et on peut supposer $a \equiv -1 \pmod 4$. On pose alors $a(p) = -2a$ si $2S$ est un carré modulo p, et $a(p) = 2a$ sinon.

(2). Si $k \geq 2$ et p est premier, on définit $a(p^k)$ par la récurrence

$$a(p^k) = a(p)a(p^{k-1}) - \chi(p)pa(p^{k-2}) ,$$

où $\chi(p) = 1$ sauf quand $p \mid 2S$, auquel cas $\chi(p) = 0$.

(3). Enfin, si n est arbitraire, on pose

$$a(n) = \prod_{i=1}^{g} a(p_i^{k_i}), \quad \text{où} \quad n = \prod_{i=1}^{g} p_i^{k_i} .$$

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (5)

Pour S congru à 1, 2 ou 3 modulo 8, la condition est plus difficile à expliquer. Définissons une fonction arithmétique $a(n)$ de la manière suivante :

(1). Pour $n = p$ premier, on pose $a(p) = 0$ si $p \mid S$, ou si $p = 2$ ou si $p \equiv 3 \pmod 4$. Sinon, on a $p \equiv 1 \pmod 4$, donc il existe a et b tels que $p = a^2 + b^2$, et on peut supposer $a \equiv -1 \pmod 4$. On pose alors $a(p) = -2a$ si $2S$ est un carré modulo p, et $a(p) = 2a$ sinon.

(2). Si $k \geq 2$ et p est premier, on définit $a(p^k)$ par la récurrence

$$a(p^k) = a(p)a(p^{k-1}) - \chi(p)pa(p^{k-2}) \ ,$$

où $\chi(p) = 1$ sauf quand $p \mid 2S$, auquel cas $\chi(p) = 0$.

(3). Enfin, si n est arbitraire, on pose

$$a(n) = \prod_{i=1}^{g} a(p_i^{k_i}), \quad \text{où} \quad n = \prod_{i=1}^{g} p_i^{k_i} \ .$$

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (5)

Pour S congru à 1, 2 ou 3 modulo 8, la condition est plus difficile à expliquer. Définissons une fonction arithmétique $a(n)$ de la manière suivante :

(1). Pour $n = p$ premier, on pose $a(p) = 0$ si $p \mid S$, ou si $p = 2$ ou si $p \equiv 3 \pmod 4$. Sinon, on a $p \equiv 1 \pmod 4$, donc il existe a et b tels que $p = a^2 + b^2$, et on peut supposer $a \equiv -1 \pmod 4$. On pose alors $a(p) = -2a$ si $2S$ est un carré modulo p, et $a(p) = 2a$ sinon.

(2). Si $k \geq 2$ et p est premier, on définit $a(p^k)$ par la récurrence

$$a(p^k) = a(p)a(p^{k-1}) - \chi(p)pa(p^{k-2}) ,$$

où $\chi(p) = 1$ sauf quand $p \mid 2S$, auquel cas $\chi(p) = 0$.

(3). Enfin, si n est arbitraire, on pose

$$a(n) = \prod_{i=1}^{g} a(p_i^{k_i}), \quad \text{où} \quad n = \prod_{i=1}^{g} p_i^{k_i} .$$

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (6)

Le résultat est alors le suivant, en admettant la conjecture BSD : si S est un entier sans facteur carré congru à 1, 2 ou 3 modulo 8, alors S est un nombre congruent si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n} e^{-\pi n/(2S\sqrt{\delta})} = 0 ,$$

où $\delta = 1$ si S est pair et $\delta = 2$ si S est impair.

Cet énoncé d'apparence très complexe, est en fait une reformulation de BSD dans le contexte des nombres congruents.

Je donne un dernier exemple qui montre à quel point la conjecture BSD est "facile" à formuler, et pourtant est hors de portée.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (6)

Le résultat est alors le suivant, en admettant la conjecture BSD : si S est un entier sans facteur carré congru à 1, 2 ou 3 modulo 8, alors S est un nombre congruent si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n} e^{-\pi n/(2S\sqrt{\delta})} = 0 ,$$

où $\delta = 1$ si S est pair et $\delta = 2$ si S est impair.
Cet énoncé d'apparence très complexe, est en fait une reformulation de BSD dans le contexte des nombres congruents.
Je donne un dernier exemple qui montre à quel point la conjecture BSD est "facile" à formuler, et pourtant est hors de portée.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (7)

Pour tout nombre premier p considérons la congruence

$$y^2 + xy \equiv x^3 - x^2 - 79x + 289 \pmod{p} ,$$

et appellons $N(p)$ le nombre de couples (x, y) modulo p vérifiant cette congruence.
Nous définissons une fonction arithmétique $a(n)$ de la manière suivante :
(1). Pour $n = p$ premier, on pose $a(p) = p - N(p)$.
(2). Si $k \geq 2$ et p est premier, on définit $a(p^k)$ par la récurrence

$$a(p^k) = a(p)a(p^{k-1}) - \chi(p)pa(p^{k-2}) ,$$

où $\chi(p) = 1$ sauf quand $p = 2$ ou $p = 117223$, auquel cas $\chi(p) = 0$ (si vous vous posez la question de savoir d'où vient 117223, posez $Y = y + x/2$ dans l'équation ci-dessus et calculez le discriminant du polynôme de degré 3 du membre de droite obtenu).

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (8)

(3). Enfin, si n est arbitraire, on pose

$$a(n) = \prod_{i=1}^{g} a(p_i^{k_i}), \quad \text{où} \quad n = \prod_{i=1}^{g} p_i^{k_i}\ .$$

Bien que la définition paraisse compliquée, $a(n)$ est très facile à calculer (quelques secondes pour 1 million de valeurs), et est un entier assez petit. Par exemple, pour $n = 1, 2, ...$ on a

$$a(n) = 1, -1, -3, 1, -4, 3, -5, -1, 6, 4, -6, -3, -6, 5, 12, ...$$

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (9)

D'autre part, pour tout $x > 0$ posons

$$f(x) = \int_1^\infty e^{-xt} \log(t)^2 \, dt \ ,$$

et enfin soit S la série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) f\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{234446}}\right) \ ,$$

qui converge exponentiellement vite car $f(x) \sim 2e^{-x}/x^3$ est exponentiellement petit quand x est grand.
Un calcul numérique facile montre que S est voisin de 0 a plusieurs milliers de décimales. Ceci est pourtant une conjecture : bien que ce soit un cas particulier de BSD, c'est presque certainement aussi difficile à démontrer que la conjecture générale, qui est du même type.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (9)

D'autre part, pour tout $x > 0$ posons

$$f(x) = \int_1^\infty e^{-xt} \log(t)^2 \, dt \ ,$$

et enfin soit S la série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) f\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{234446}}\right) \ ,$$

qui converge exponentiellement vite car $f(x) \sim 2e^{-x}/x^3$ est exponentiellement petit quand x est grand.
Un calcul numérique facile montre que S est voisin de 0 a plusieurs milliers de décimales. Ceci est pourtant une conjecture : bien que ce soit un cas particulier de BSD, c'est presque certainement aussi difficile à démontrer que la conjecture générale, qui est du même type.