Il padre dei frattali

Si deve a Mandelbrot l'intuizione che concetti considerati come curiosità astratte sono invece un apparato matematico per descrivere strutture irregolari

LUCIANO PIETRONERO

Lo scorso 14 Ottobre 2010 è morto a Cambridge (Usa) Benoit Mandelbrot, uno dei più grandi e originali scienziati del secolo. Era nato a Varsavia il 20 Novembre 1924 da una famiglia ebrea di origini lituane, ha vissuto a lungo in Francia e si è poi trasferito negli Usa presso il laboratorio T.J. Watson dell'Ibm dove ha svolto la maggior parte della sua attività scientifica. Proveniva da una famiglia con forte tradizione accademica: sua madre era laureata in medicina, e suo zio Szolem Mandelbrot era un famoso matematico, mentre suo padre si occupava della vendita di abiti.

Nel 1936 la famiglia lasciò la Polonia stabilendosi a Parigi e fu iniziato alla matematica dai suoi due zii. Nel 1939, a causa dello scoppio della guerra, si trasferì con la famiglia a Tulle, un paesino della Francia centrale, dove si diplomò nel 1942.

Educato in Francia, ha sviluppato la matematica di Gaston Julia e ha dato inizio alla rappresentazione grafica di equazioni su computer. Mandelbrot è il fondatore di ciò che oggi viene chiamata geometria frattale di cui uno degli esempi più famosi è il cosiddetto insieme di Mandelbrot.

I principali lavori sui frattali sono stati fatti presso i laboratori di ricerca T. J. Watson dell'Ibm presso New York in cui era Emeritus Fellow. È stato insignito di numerosi premi come ad esempio il Japan Prize (2003) e il Wolf prize per la fisica (1993) la cui motivazione era: «per aver trasformato la nostra visione della natura». Questa motivazione chiarisce che il contributo di Mandelbrot va molto al di là della geometria e della matematica e riguarda, in qualche modo, tutte le scienze.

La storia personale di Mandelbrot di emigrato e rifugiato ha profondamente influenzato la sua personalità e anche il suo percorso scientifico. Nonostante un ambiente familiare accademico e matematico si è sempre considerato un outsider e, in qualche senso, un rivoluzionario. La sua personalità era prorompente e combattiva e questo gli ha portato vantaggi ma anche problemi rispetto al riconoscimento del valore del suo lavoro anche perché questo, come vedremo, è caratterizzato da forti elementi soggettivi. In ogni caso la sua figura di scienziato ha qualcosa di grandioso e unico e non è assolutamente ovvio se e come questi concetti sarebbero stati scoperti da qualcun altro se non ci fosse stato lui. In questa meravigliosa avventura intellettuale è stato sostenuto con grandissimo affetto e ammirazione da sua moglie Aliette che seguiva tutti i dettagli scientifici delle varie discussioni e va considerata come una fondamentale co-protagonista delle sue scoperte.

La geometria frattale permette di caratterizzare le strutture che godono della proprietà di invarianza di scala, questo significa che le stesse proprietà si ripetono a varie scale. Il termine «frattale» (dal latino *fractus*: rotto o frammentato) è stato introdotto solo nel 1975 da B. Mandelbrot. In pochi anni questo concetto è divenuto però molto popolare in diverse discipline come matematica, fisica, biologia ed economia. «La geometria frattale è uno di quei concetti che a prima vista ispirano scetticismo, ma in un secondo momento diventano così naturale da domandarsi perché siano stati sviluppati solo recentemente». Queste parole di M.V. Berry descrivono appropriatamente l'impressione che questa nuova geometria, pur non usuale rispetto ai canoni matematici, rappresenti invece un concetto naturale e inevitabile per la descrizione di un gran numero di fenomeni, sia naturali che sociali. Da un punto di vista strettamente matematico i concetti di dimensione non intera e di autosomiglianza sono noti da molto tempo. Fin dal 1919 essi furono discussi da F. Hausdorff in una forma simile a quella attuale e si possono trovare anche nei lavori di


CORTESIA: POLITECNICO DI LOSANNA

Benoit Mandelbrot in un seminario del Politecnico di Losanna.

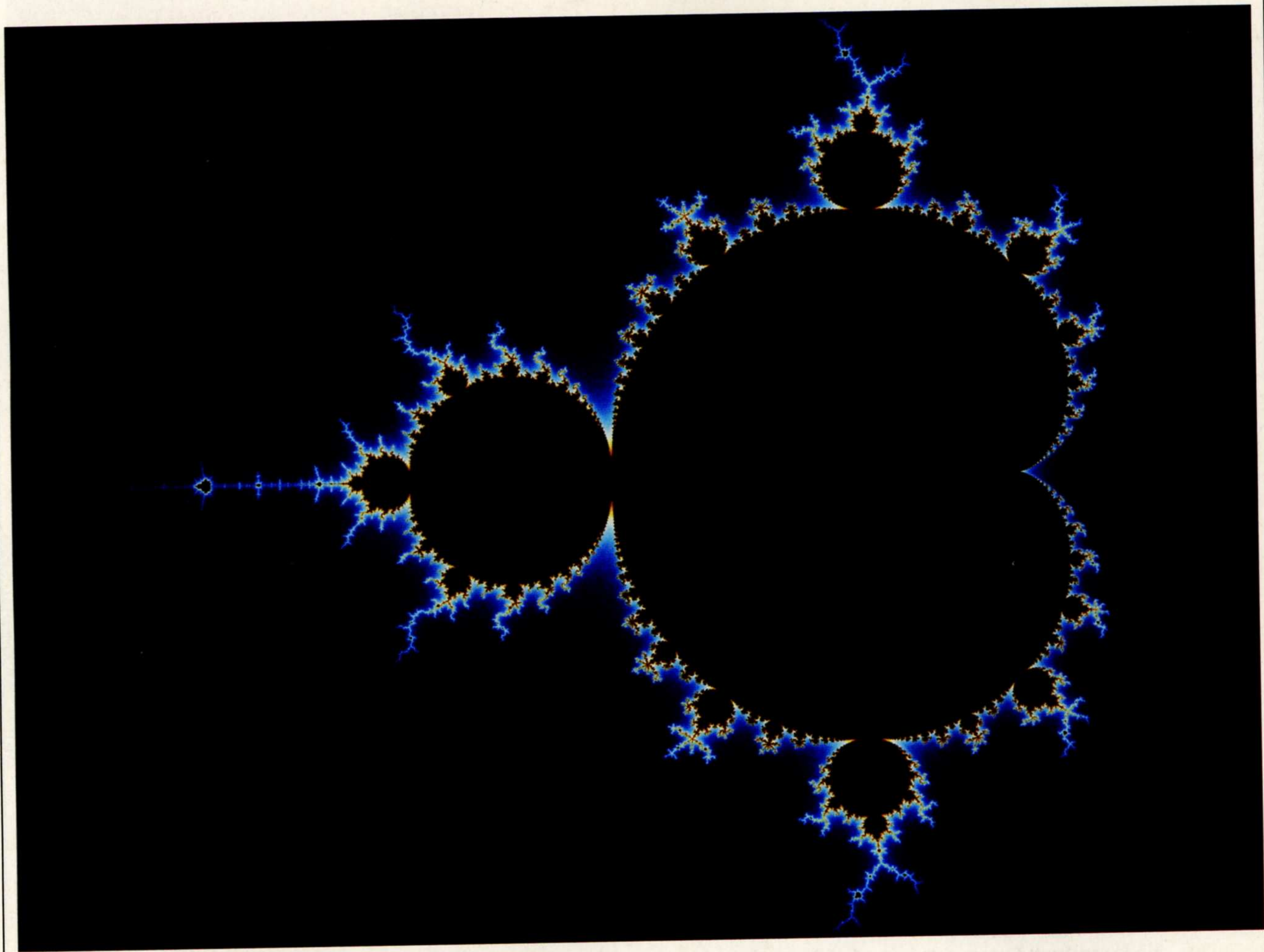
H. Poincaré del 1885. Anche Weierstrass, von Koch, Fatou, Julia e altri autori studiarono oggetti matematici con queste proprietà.

Per lungo tempo però questi concetti che descrivono le strutture fortemente irregolari sono stati relegati ai margini della matematica e quasi completamente ignorati nelle altre discipline. Il motivo è che la maggior parte dei metodi matematici e geometrici usuali sono basati sul concetto di regolarità o analiticità. Ciò significa, per esempio, che data una curva è possibile definire la sua tangente in modo univoco per ogni suo punto e quindi, per scale sufficientemente piccole, tale curva può essere approssimata dalla sua tangente e perde ogni altra struttura. Nelle strutture frattali o autosimili invece si ha la ripetizione della stessa struttura a tutte le scale e quindi una qualunque sottostruttura possiede ancora tutta la complessità di quella originale. L'autosomiglianza o invarianza di scala implica pertanto una grande irregolarità che non è possibile descrivere con i metodi matematici tradizionali. È facile constatare comunque che in natura l'irregolarità è molto comune, come dimostrano chiaramente le strutture di piante, montagne, nuvole, fulmini etc.

La fisiologia offre anche meravigliosi esempi di strutture frattali come le arterie e la struttura dei bronchi nei polmoni. Basti pensare che la superficie effettiva in cui l'ossigeno viene assorbito nei polmoni ha un'area di circa due campi da tennis, il tutto racchiuso in un volume di estensione estremamente minore. Questo è possibile grazie alle strutture frattali che sono state ampiamente utilizzate per l'ottimizzazione, attraverso la selezione, della fisiologia delle strutture biologiche.

Uno degli esempi storici che Mandelbrot discusse è quello della lunghezza della costa della Gran Bretagna. Alla scala di una carta geografica le strutture minime definibili sono dell'ordine dei chilometri. Guardando più attentamente la vera costa si potranno osservare anche anfrattuosità (strutture) dell'ordine di centinaia di metri, poi dei metri, dei centimetri e dei millimetri fino al livello del singolo granello di sabbia. Aumentando man mano la precisione della misura le nuove strutture che appaiono contribuiscono alla lunghezza totale del litorale. Tale lunghezza è pertanto definibile solo una volta assegnata una lunghezza minima delle strutture che si prendono in considerazione.

L'approccio scientifico tradizionale tende alla ricerca di regolarità e armonia nelle strutture matematiche dove le eventuali irregolarità vengono considerate come imperfezioni. Questo ha portato a trascurare tutta una serie di fenomeni che, seppure molto comuni e di notevole importanza, non presentano



Un insieme di Mandelbrot ottenuto considerando un processo iterativo nel suo complesso.

questi requisiti di regolarità. La geometria frattale ribalta questo punto di vista e permette di trattare le irregolarità come entità intrinseche e quantificabili in modo matematico. Si deve a Mandelbrot l'aver mostrato con numerosi esempi che concetti considerati curiosità astratte costituiscono invece un apparato matematico di nuovo tipo per la descrizione delle strutture intrinsecamente irregolari. In questo senso il modo in cui osserviamo la complessità della natura è stato completamente rivoluzionato da Mandelbrot e il contributo della geometria frattale è stato di allargare le frontiere della scienza a una vasta serie di fenomeni e strutture che prima venivano trascurati. La geometria frattale da sola non permette di capire perché e come queste strutture si sono generate però permette di porsi nuovi problemi in modo concreto con domande matematicamente ben poste.

La figura geometrica più nota e più studiata introdotta da Mandelbrot è il cosiddetto insieme di Mandelbrot mostrato in Figura 1. Si ottiene considerando un processo iterativo nel piano complesso. Per alcuni punti di partenza il processo diverge all'infinito, mentre per altri converge a un valore finito. L'insieme dei punti del piano complesso a partire dai quali il processo resta limitato si chiama insieme di Mandelbrot e corrisponde all'area in nero della figura in questa pagina. Al di fuori di questa area i vari colori danno un'idea della velocità con la quale l'interazione diverge all'infinito nelle altre zone. Le proprietà frattali di questa struttura sono evidenti e dimostrano come una iterazione non lineare estremamente semplice possa dar luogo a strutture di grande complessità. L'insieme di Mandelbrot è stato oggetto di raffinati e complessi studi che hanno portato a una nuova area della matematica.

L'insieme di Mandelbrot ha una stretta parentela con il cosiddetto caos deterministico che è definito da una più semplice iterazione sull'asse reale chiamato mappa logistica. Anche in questo caso si osserva una enorme complessità della struttura risultante e una grandissima sensibilità della dinamica del sistema rispetto alle condizioni iniziali. Nel regime caotico un piccolissimo cambiamento delle condizioni iniziali può produrre una traiettoria completamente diversa (effetto farfalla del caos).

Indipendentemente dal loro valore matematico intrinseco lo studio di queste mappe ha un formidabile valore metaforico rispetto ai sistemi fisici reali. Infatti se consideriamo che delle semplici mappe nonlineari producono strutture tanto complesse è naturale aspettarsi che anche delle equazioni nonlineari possano fare lo stesso. Questo succede ad esempio nelle equazioni di Navier-Stokes che descrivono il moto dei fluidi. Un parametro importante in queste equazioni è il numero di Reynolds. Per alcuni valori di questo parametro il fluido si comporta in modo laminare mentre per altri valori si ha un regime turbolento in cui appaiono dei vortici che possono essere interpretati come singolarità nella distribuzione delle velocità. Nel regime di turbolenza completamente sviluppata ogni vortice è frammentato e composto a sua volta da vortici più piccoli e così via. Lo studio delle proprietà del campo delle velocità in regime turbolento è stato iniziato da Kolmogorov nel 1941 e rimane tuttora per molti versi un problema aperto. La caratterizzazione delle singolarità dei vortici oltre l'approccio semplificato di Kolmogorov si deve a Mandelbrot con l'introduzione del concetto di Multifrattale che corrisponde a una generalizzazione del concetto frattale per una distribuzione invece che per un insieme.

È importante notare che il concetto di invarianza di scala non è nuovo nella fisica e si è sviluppato in modo parallelo ma indipendente dalla geometria frattale. Solo più tardi i due campi si sono in qualche modo unificati. Esso era ben noto nello studio delle proprietà critiche delle transizioni di fase ed è stato di cruciale importanza nella formulazione della teoria del gruppo di rinormalizzazione. Questa teoria fu sviluppata da Ken Wilson con importanti contributi di Ben Widom, Leo Kadanoff e Michael Fisher e corrisponde a un cambio fondamentale di prospettiva in cui si introduce lo spazio delle trasformazioni di scala e si riesce a scrivere e risolvere delle equazioni in questo nuovo spazio invece che nello spazio fisico usuale in cui il sistema è estremamente irregolare.

Nel caso dei fenomeni critici però l'autosimilarità era considerata una peculiarità della competizione tra ordine e disordine alla temperatura critica per sistemi in equilibrio termodinamico. Mandelbrot ha invece argomentato in modo molto efficace che l'invarianza di scala è una proprietà ben più generale ed è presente in molti fenomeni di non equilibrio in cui questa proprietà risulta da un processo di auto-organizzazione. Questa visione permette di capire perché le strutture con tali caratteristiche sono in realtà molto comuni e non dovute a situazioni molto peculiari come il punto critico dell'equilibrio termodinamico.

Una peculiarità dei frattali è il ruolo che ha avuto il calcolatore. Nel caso di problemi di tipo tradizionale il suo uso ha permesso di ottenere soluzioni accurate di problemi complicati. Nel caso delle strutture frattali, e in genere complesse, il suo ruolo è stato molto più fondamentale. I modelli matematici in questo campo sono di carattere iterativo e quindi specialmente adatti a essere programmati. Si è così scoperto che alcuni sistemi iterativi all'apparenza molto semplici possono generare strutture di grande complessità. Queste simulazioni al calcolatore rappresentano pertanto una sorta di esperimenti numerici per l'esplorazione e lo studio di queste strutture. In questo senso la geometria frattale ha reintrodotto elementi estetici nel campo scientifico che erano stati essenzialmente eliminati dall'avvento delle equazioni differenziali.

Rendersi conto che certe strutture in natura hanno proprietà frattali non spiega perché questo accada, ma è fondamentale per formulare le domande appropriate. Così negli anni Ottanta ci fu una grande attività, a cui partecipai anch'io, per definire dei modelli fisici per sistemi che mostrano proprietà frattali e di auto-organizzazione. Esempi particolarmente rilevanti di modelli fisici di crescita frattale sono quelli del Diffusion Limited Aggregation (Dla) e il Dielectric Breakdown Model (Dbm). Questi modelli sono basati su una probabilità di crescita definita dalle soluzioni dell'equazione di Laplace e pertanto hanno validità molto generale anche per fenomeni apparentemente diversi.

Nell'ambito di questi studi incontrai Mandelbrot per la prima volta a un congresso a Washington e ne fui molto impressionato. Per lui era un momento particolarmente eccitante perché la geometria frattale entrava prepotentemente nella fisica e molti degli studiosi che avevano lavorato sui fenomeni critici si stavano orientando allo studio delle strutture frattali. Dopo questo incontro ne seguirono moltissimi altri con infinite discussioni più o meno controverse.

Nel 2005 il mio studente di dottorato Carl Evertsz andò come post-doc da Mandelbrot a Yale. Con mia sorpresa fu Mandelbrot che si mise a lavorare sui temi della tesi di Evertsz invece che proporgli le attività del suo gruppo. Lo stesso accadde qualche anno dopo con Alessandro Vespignani. Questi eventi mettono in luce un aspetto molto peculiare dell'attività scientifica di Mandelbrot, che non era per nulla sistematica, almeno nel senso che si usa dare a questo termine. Per un collaboratore la situazione non era facile. Da un lato era al fianco di un grande personaggio della

ESO

La distribuzione delle galassie non è affatto regolare, ma presenta grandi ammassi e regioni quasi vuote.

scienza, dall'altro era difficile imparare in senso tradizionale. Veniva esposto a infiniti aneddoti, alcuni estremamente interessanti e unici, ma la visione era del tutto personale e non sistematica. In questo senso Mandelbrot non ha costruito una scuola anche se il suo lavoro ha influenzato un grandissimo numero di ricercatori.

Un altro aspetto peculiare era una certa insofferenza per i possibili sviluppi della fisica dei frattali che non fossero direttamente connessi al suo lavoro. All'inizio degli anni Novanta cercavo di sviluppare una teoria fisica per capire l'origine delle strutture frattali auto-organizzate ispirandomi al gruppo di rinormalizzazione. Mandelbrot cercò di dissuadermi da questa attività argomentando che la mia ambizione era motivata da fatto che la mia educazione cattolica mi portava ad apprezzare la liturgia del gruppo di rinormalizzazione, che invece non è applicabile ai sistemi frattali che sono molto più generali dei fenomeni critici. Trovai curioso questo argomento che non condivisi e continuai a sviluppare queste idee. In questo periodo c'è stato un altro sviluppo importante da parte di Per Bak (venuto a mancare qualche anno fa) e definito Self-organized-criticality. Il modello utilizzato era quello della pila di sabbia e delle relative valanghe. Le strutture non sono frattali nel senso geometrico ma la distribuzione delle dimensioni delle valanghe è definita da una legge di potenza che si estende su tutte le scale. In qualche modo i due campi si compenetrarono e i concetti frattali venivano estesi anche ad altre aree.

Un problema che invece ci ha visto uniti in una disputa decennale è quello della struttura dell'universo a grande scala. Questo è un esempio particolarmente importante dell'impatto della geometria frattale nell'interpretazione di un fenomeno fisico. L'analisi statistica tradizionale delle distribuzioni di galassie è basata sull'assunzione a priori che l'universo sia abbastanza omogeneo a scale relativamente piccole e che nelle distribuzioni osservate sia possibile definire una densità media intrinseca. In questa prospettiva l'analisi viene fatta attraverso le funzioni di correlazione tipiche della fisica dei liquidi e dei sistemi regolari. La distribuzione delle galassie non è affatto regolare ma presenta grandi ammassi e regioni quasi vuote su scale dell'ordine dell'intero sistema. C'è un generale consenso che almeno a piccole scale il clustering delle galassie mostra proprietà frattali. Il punto dibattuto è se a una certa scala ci sia evidenza per una distribuzione omogenea che è necessaria per il modello standard della cosmologia. Mandelbrot aveva notato queste proprietà già alla fine degli anni Settanta ma solo su base visiva, non aveva mai analizzato i dati reali. Così la sua speculazione che le proprietà frattali potessero avere un valore fondamentale ad esempio rispetto al paradosso di Olbers (il cielo è nero di notte) o al principio cosmologico condizionale venivano considerate come curiosità perché l'analisi tradizionale dei dati reali mostrava apparentemente una omogeneità a grande scala.

Questa situazione mi convinse però a rianalizzare i dati con metodi più generali che considerassero anche la possibilità di proprietà frattali e che fornissero un vero test per l'esistenza di una genuina omogeneità. Il risultato fu che il clustering delle galassie mostra ben definite proprietà frattali che si estendono fino ai limiti delle presenti osservazioni, dimostrando quindi che l'assunzione di omogeneità non è corretta. La nuova prospettiva, ottenuta a partire dagli stessi dati osservativi, ma con una metodologia più generale, cambia radicalmente le conoscenze sulle proprietà a larga scala dell'universo. Questi risultati hanno dato origine a un ampio dibattito e nel 1996 fu organizzato a Princeton un congresso per discutere i temi più controversi della cosmologia. Il primo dibattito fu tra me e Marc Davies sulla questione della frattalità o omogeneità a grande scala. In quella occasione ebbi l'onore di avere Mandelbrot come poderoso supporter. Ci divertimmo molto. La questione è tuttora dibattuta e si dovrebbe risolvere con il progresso dei dati osservativi.

A partire dai primi anni Sessanta, e fino ai giorni nostri, l'applicazione della geometria frattale a questioni economiche ha condotto Mandelbrot a mettere in discussione alcuni consolidati fondamenti dell'economia classica e della finanza moderna, quali l'ipotesi di razionalità dei comportamenti degli agenti economici, l'ipotesi dell'efficienza del mercato, e quella secondo cui i movimenti dei prezzi di mercato sono descrivibili come un cammino casuale (*random walk*) in analogia al moto browniano di una particella in un fluido. L'analisi frattale delle variabili economiche e finanziarie ha portato nell'ultima decade all'applicazione dei concetti frattali all'economia e alla finanza. Anche in questo campo il confronto è tuttora aperto e la crisi del 2008 ha portato nuovi argomenti all'importanza delle grandi fluttuazioni dei prezzi come elemento intrinseco del sistema economico. Una curiosità: durante la crisi del 1987 Mandelbrot mi telefonò entusiasta perché il crollo della borsa sembrava confermare le sue tesi. Non riuscii a gioire di quel fatto perché per me fu economicamente doloroso.

Negli ultimi anni il campo dei frattali è considerato il primo importante esempio dei cosiddetti sistemi complessi che sono, in qualche senso, più generali. Abbiamo già visto la distribuzione delle valanghe nella Self-organized-criticality. Recentemente c'è stato un grande sviluppo dei network complessi in cui la distribuzione dei legami dei siti è caratterizzata da grandi fluttuazioni come nel caso della rete di Internet. Si tratta dell'estensione delle proprietà frattali dallo spazio metrico a quello topologico. Possiamo quindi concludere che il lavoro di Benoit Mandelbrot costituisce una pietra miliare nella rivoluzione scientifica che ci fa passare dal semplice al complesso.

Luciano Pietronero, CNR e Dipartimento di Fisica, Università Sapienza, Roma

Bibliografia

Bak P. (1996) *How Nature Works*, Springer, New York.

Baryshev Y., Teerikorpi P. (2006) *La Scoperta dei Frattali Cosmici*. Bollati Boringhieri.

Coleman P.H., Pietronero L. (1992) The Fractal Structure of the Universe. *Phys. Rep.*, 213, 311-389.

Erzan A., Pietronero L., Vespignani A. (1995) The Fixed Scale Transformation Approach to Fractal Growth. *Rev. Mod. Phys.*, 67, 545-604.

Evertsz C.J.G., Peitgen H.O., Voss R.F., a c. di (1996) *Fractal geometry and Analysis*. Singapore, World Scientific.

Gabrielli A., Sylos Labini F., Joyce M., Petronero L. (2005) *Statistical Physics for Cosmic Structures*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

Kadanoff L.P. (1993) *From Order to Chaos*. World Scientific, Singapore.

Mandelbrot B. (1983) *the Fractal Geometry of Nature*. New York, Freeman.

Mandelbrot B., Hudson R.L. (2004) *The (Mis)behaviour of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin and Reward*, Basic Books New York

Peebles P.J.E., (1993) *Principles of Physical Cosmology*. Princeton, Princeton Univ. Press.

Peitgen H.O., Richeter P.H., (1987) *La Bellezza dei Frattali*, Bollati Boringhieri, Torino.

Pietronero L. (2007) *Complessità e altre storie*, Di Renzo Ed. Roma.

Pietronero L., Tosatti (1986) a c. di, *Fractals in Physics*. Amsterdam-New York, North Holland.