

P2-2005-194

О. О. Воскресенская, А. Н. Сисакян, А. В. Тарасов,  
Г. Т. Горосян\*

СТРУКТУРА АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССА  $Z_1 Z_2 \rightarrow l^+ l^- Z_1 Z_2$   
ВНЕ РАМОК БОРНОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Направлено в журнал «Письма в ЖЭТФ»

---

\* Ереванский физический институт, Армения

Воскресенская О. О. и др.

P2-2005-194

Структура амплитуды процесса  $Z_1 Z_2 \rightarrow l^+ l^- Z_1 Z_2$  вне рамок борновского приближения

Проведено ресуммирование ряда теории возмущений для амплитуды образования лептонных пар в ядро-ядерных соударениях на основе теоремы Ватсона и гипотезы инфракрасной стабильности. Получено явное выражение для этой амплитуды, справедливое с точностью до величин девятого порядка по постоянной тонкой структуры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований, Дубна, 2005

Voskresenskaya O. O. et al.

P2-2005-194

A Structure for the Amplitude of the  $Z_1 Z_2 \rightarrow l^+ l^- Z_1 Z_2$  Reaction Beyond the Born Approximation

A resummation of the perturbative series for the amplitude of lepton pair production in the nucleus-nucleus collisions is performed on the basis of the Watson theorem and the hypothesis of the infrared stability. An explicit expression for this amplitude valid up to terms of ninth order in fine structure constant is obtained.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 2005

Наблюдаемый в последнее время рост интереса к процессу образования лептонных пар в ядро-ядерных соударениях в значительной мере связан с вводом в действие ускорительного комплекса тяжелых ионов RHIC и ожидаемым вскоре вводом LHC.

Известно [1, 2], что при высоких энергиях основной вклад в полное сечение взаимодействия тяжелых ядер вносит процесс

$$Z_1 + Z_2 \rightarrow Z_1 + Z_2 + e^+ + e^-, \quad (1)$$

описание которого вне рамок борновского приближения остается одной из важнейших нерешенных задач КЭД. Попыткам решить эту проблему посвящена серия работ нескольких групп авторов [3–18]. Однако, несмотря на значительные затраченные усилия, существенного прогресса в этой области достигнуть не удалось.

Прежде всего, оказались безуспешными попытки полностью непertурбативного решения проблемы, предпринятые авторами [3–6]. Последовательный же анализ поправок к результатам борновского приближения в рамках пертурбативной КЭД, начатый авторами [14–18], находится еще в начальной стадии. Причиной тому является необходимость систематизации и расчета огромного числа фейнмановских диаграмм (ФД) в рамках этого подхода.

Намного более экономным с вычислительной точки зрения является «полупертурбативный» подход [19], опирающийся на ватсоновское представление оператора рассеяния  $T$  задачи двух центров в терминах операторов рассеяния  $T_{1(2)}$  одноцентровых задач

$$T = T_1 + T_2 - T_1 \otimes G \otimes T_2 - T_2 \otimes G \otimes T_1 + T_1 \otimes G \otimes T_2 \otimes G \otimes T_1 + T_2 \otimes G \otimes T_1 \otimes G \otimes T_2 \dots, \quad (2)$$

$$T_k = V_k - V_k \otimes G \otimes T_k, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

В развернутом виде последние уравнения переписываются следующим образом:

$$T_k(x_2, x_1) = V_k(x_2, x_1) - \int d^4x'_1 d^4x'_2 V_k(x_2, x'_2) G(x'_2 - x'_1) T_k(x'_1, x_1), \quad (4)$$

где

$$V_k(x_2, x_1) = e\gamma_\mu A_{\mu_k}(x_1)\delta(x_2 - x_1), \quad (5)$$

$A_{\mu_k}$  — 4-потенциал электромагнитного поля, создаваемого ионом  $Z_k$  ( $k = 1, 2$ );  $G(x - x')$  — свободная причинная функция распространения фермиона.

Амплитуда  $M$  процесса (1) связана с оператором рассеяния (2) соотношением

$$M = \bar{u}(p_2) \int d^4x_1 d^4x_2 \exp(ip_1x_1 + ip_2x_2) T(x_2, x_1) v(p_1), \quad (6)$$

где  $u(p_2)$ ,  $u(p_1)$  — биспиноры, описывающие состояния свободных электрона и позитрона с 4-импульсами  $p_2$  и  $p_1$  соответственно.

Решения уравнений (4) более просто выглядят в импульсном представлении: \*

$$T_1(p, p') = \int d^4x d^4x' \exp(ipx - ip'x') T_1(x, x') \quad (7)$$

$$= (2\pi)^2 \delta(p_+ - p'_+) \gamma_+ [\theta(p_+) f_1^{(+)}(\mathbf{p}_T - \mathbf{p}'_T) - \theta(-p_+) f_1^{(-)}(\mathbf{p}_T - \mathbf{p}'_T)],$$

$$T_2(p, p') = \int d^4x d^4x' \exp(ipx - ip'x') T_2(x, x') \quad (8)$$

$$= (2\pi)^2 \delta(p_- - p'_-) \gamma_- [\theta(p_-) f_2^{(+)}(\mathbf{p}_T - \mathbf{p}'_T) - \theta(-p_-) f_2^{(-)}(\mathbf{p}_T - \mathbf{p}'_T)],$$

$$f_k^{(\pm)}(\vec{q}) = \frac{i}{2\pi} \int d^2x \exp[i\mathbf{q}\mathbf{x}] \left(1 - S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})\right), \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

$$S_k^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \exp[\pm i\chi_k(\mathbf{x} - \mathbf{b}_k)], \quad (10)$$

$$\chi_k(\mathbf{b}) = e \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(\sqrt{b^2 + z^2}) dz, \quad e = \sqrt{\alpha}. \quad (11)$$

Выше:  $\mathbf{b}_k$  — прицельные параметры сталкивающихся ионов в их системе центра масс (СЦМ);  $\Phi_k(r)$  — их кулоновские потенциалы в системах покоя. Световые компоненты  $a_{\pm}$  4-вектора  $a_{\mu} = (a_0, a_z, \mathbf{a}_T)$ , где  $a_{\mu} = \gamma$  или  $p, p'$ , определены обычным образом ( $a_{\pm} = a_0 \pm a_z$ ); ось  $z$  выбрана в направлении движения ядра  $Z_2$ .

Соотношениями (2)–(11) решается проблема частичного ресуммирования (эйконализации) ряда теории возмущений, обсуждавшегося в работах [14–18]. Поскольку фазовые сдвиги (11), отвечающие неэкранированным кулоновским потенциалам, бесконечны, то сконструированные из них величины (7)–(10), строго говоря, бессмысленны.

Для придания им смысла на промежуточном этапе рассмотрения задачи необходимо ввести «инфракрасную регуляризацию» величин  $\Phi_k(r)$  и рассматривать их как предельные значения «слегка» экранированных потенциалов

$$\Phi_k(r) = \lim_{\lambda_k \rightarrow 0} Z_k \cdot e \cdot \exp(-\lambda_k \cdot r)/r. \quad (12)$$

---

\*Выражения (7), (8) справедливы в ультррелятивистском пределе  $\gamma_{1,2} \rightarrow \infty$  ( $\gamma_{1,2}$  — лоренц-факторы сталкивающихся ядер в их СЦМ) при выполнении условий  $p_{\pm}(p'_{\pm}) \ll m\gamma_{1,2}$ , то есть в области пионизации.

При этом

$$\chi_k(\mathbf{b}) = 2Z_k\alpha K_0(\lambda_k \cdot b) \xrightarrow{\lambda_k \rightarrow 0} -2Z_k\alpha [\ln(\lambda_k b) + C] . \quad (13)$$

Эта процедура абсолютно идентична инфракрасной регуляризации фотонных пропагаторов (путем введения фиктивной бесконечно малой массы фотона  $\lambda$ ), обычно предпринимаемой для обеспечения конечности вкладов отдельных петлевых ФД в амплитуду процесса (1) (равно как и других электродинамических процессов) в пертурбативной КЭД.

Наблюдаемые величины, пропорциональные квадратам модулей амплитуд, представляемых суммой бесконечного числа диаграмм Фейнмана, не должны зависеть от величины нефизической «массы фотона»  $\lambda$ . При  $\lambda \rightarrow 0$  они должны стремиться к конечным и однозначным предельным значениям. Такое свойство физических величин называется «инфракрасной стабильностью» (ИКС).

Механизм инфракрасной «стабилизации» физических величин разнообразен. Наиболее известный из них состоит в том, что инфракрасные расходимости отдельных ФД складываются в общий фазовый множитель (с расходящимся при  $\lambda_k \rightarrow 0$  значением фазы) перед инфракрасностабильной частью амплитуды, не влияющий на значение наблюдаемой величины.

Таким свойством в пертурбативной КЭД обладают, например, амплитуды упругого рассеяния заряженных частиц. Этим же свойством обладает и амплитуда процесса  $eZ_1Z_2 \rightarrow eZ_1Z_2$ , кроссинг-сопряженного процессу (1).

Амплитуда же процесса (1) сама по себе (вместе с фазовыми множителями) является ИКС-величиной. В пертурбативной КЭД это обеспечивается полным взаимным сокращением логарифмически расходящихся (при  $\lambda_k \rightarrow 0$ ) вкладов отдельных петлевых диаграмм в амплитуду этого процесса.

В рамках нашего «полупертурбативного» подхода аналогами петлевых ФД являются «парциальные» амплитуды, под которыми мы будем подразумевать величины, получаемые подстановкой в правую часть соотношения (6) отдельных членов операторного разложения (2).

Хотя при  $\lambda_k \rightarrow 0$  эти величины остаются конечными (ограниченными по модулю), они все же не стремятся к определенным предельным значениям, а становятся бесконечноосциллирующими функциями своих аргументов (подобно, например, амплитудам  $eZ$ -рассеяния).

Величины такого рода будем называть инфракрасно-нестабильными (ИКНС). Простейшие из них — это  $S$ -операторы  $e^\pm Z_k$ -рассеяния  $S_k^{(\pm)}(\vec{x})$ , являющиеся наряду с функциями распространения  $G(x-x')$  основными структурными элементами «парциальных» амплитуд. Последние же, очевидно, представимы в виде суперпозиции произведений величин  $S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})$ .

Подавляющее большинство этих произведений, как и сами  $S$ -операторы  $S_k^{(\pm)}(\vec{x})$ , являются ИКНС-величинами. Исключение составляют лишь произведения вида

$$\prod_i S_1^{(+)}(\mathbf{x}_i) S_1^{(-)}(\mathbf{x}'_i) \prod_j S_2^{(+)}(\mathbf{x}_j) S_2^{(-)}(\mathbf{x}'_j), \quad (14)$$

являющиеся ИКС в силу соотношений

$$\lim_{\lambda_k \rightarrow 0} S_k^{(+)}(\mathbf{x}) S_k^{(-)}(\mathbf{x}') = \exp \left[ 2i Z_k \alpha \cdot \ln \left( \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{b}_k|}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}_k|} \right) \right] = \text{const}(\lambda_k). \quad (15)$$

В силу свойства ИКС амплитуды (6) в целом ИКНС-компоненты отдельных «парциальных» амплитуд взаимно сокращаются, приводя к окончательному ИКС-результату для этой амплитуды. Проследить это сокращение удастся лишь после явного выполнения интегрирований по световым компонентам всех промежуточных 4-импульсов в выражениях для «парциальных» амплитуд.

Поскольку вклады «инфракрасно-нестабильного большинства» аннулируются, окончательное выражение для амплитуды (6), вопреки прогнозам авторов [14–18], оказывается сравнительно простым и обладающим следующими свойствами:

- (i) амплитуда (6) является функционалом следующей ИКС-комбинации величин  $S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} \Omega_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) &= \Omega_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1) \Omega_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2), \\ \Omega_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= 1 - S_k^{(+)}(\mathbf{x}) S_k^{(-)}(\mathbf{x}'), \quad k = 1, 2; \end{aligned} \quad (16)$$

- (ii) она представима в виде бесконечной суммы

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \{ \Omega_{12} \}, \quad (17)$$

слагаемые которой при  $Z_1 \alpha \ll 1$ ,  $Z_2 \alpha \ll 1$  пропорциональны  $(Z_1 Z_2 \alpha^2)^{2n-1}$ ;

- (iii) величины  $M_1 \{ \Omega_{12} \}$  являются «полиномами»  $n$ -й степени от  $\Omega_{12}$ , не содержащими свободных членов.

Явные выражения для  $M_1 \{ \Omega_{12} \}$ ,  $M_2 \{ \Omega_{12} \}$  следующие:

$$M_1 = \frac{i}{(4\pi)^3} \bar{u}(p_2) \left[ \int \prod_{i=1}^3 d^2 k_i R_1 \right] v(p_1), \quad (18)$$

$$M_2 = \frac{i}{(4\pi)^3} \bar{u}(p_2) \left[ \int \prod_{i=1}^3 d^2 k_i R_2 \right] v(p_1) + \frac{i}{(4\pi)^7} \bar{u}(p_2) \left[ \int \prod_{i=1}^7 d^2 k_i \tilde{R}_2 \right] v(p_1), \quad (19)$$

$$R_1 = \gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+ \nu_3 \gamma_- \Omega_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) (L_b + i\pi)(a+b)^{-1} \quad (20)$$

$$+ \gamma_- \nu_1 \gamma_+ \nu_2 \gamma_- \nu_3 \gamma_+ \Omega_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) (L_c + i\pi)(a+c)^{-1},$$

$$R_2 = \gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+ \nu_3 \gamma_- \Omega_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) (L_b/3)(L_b^2 + \pi^2)(a+b)^{-1} \quad (21)$$

$$+ \gamma_- \nu_1 \gamma_+ \nu_2 \gamma_- \nu_3 \gamma_+ \Omega_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) (L_c/3)(L_c^2 + \pi^2)(a+c)^{-1},$$

$$L_b = \ln(a/b), \quad L_c = \ln(a/c), \quad (22)$$

$$a = \mu_1 \mu_3, \quad b = \mu_2 p_{2+} p_{1-}, \quad c = \mu_2 p_{2-} p_{1+}, \quad (23)$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_{2T} - \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{q}_4 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_{1T}, \quad (24)$$

$$\tilde{R}_2 = \gamma_+ \nu_1 \gamma_- \nu_2 \gamma_+ \nu_3 \gamma_- \nu_4 \gamma_+ \nu_5 \gamma_- \nu_6 \gamma_+ \nu_7 \gamma_-$$

$$\times \Omega_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \Omega_1(\mathbf{q}_5, \mathbf{q}_7) \Omega_2(\mathbf{q}_6, \mathbf{q}_8)$$

$$\times (L_{\tilde{b}}^2 + \pi^2) (L_{\tilde{b}}/3 + i\pi) (\tilde{a} + \tilde{b})^{-1} \quad (25)$$

$$+ \gamma_- \nu_1 \gamma_+ \nu_2 \gamma_- \nu_3 \gamma_+ \nu_4 \gamma_- \nu_5 \gamma_+ \nu_6 \gamma_- \nu_7 \gamma_+$$

$$\times \Omega_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \Omega_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \Omega_2(\mathbf{q}_5, \mathbf{q}_7) \Omega_1(\mathbf{q}_6, \mathbf{q}_8)$$

$$\times (L_{\tilde{c}}^2 + \pi^2) (L_{\tilde{c}}/3 + i\pi) (\tilde{a} + \tilde{c})^{-1},$$

$$L_{\tilde{b}} = \ln(\tilde{a}/\tilde{b}), \quad L_{\tilde{c}} = \ln(\tilde{a}/\tilde{c}), \quad (26)$$

$$\nu_i = m - \gamma_T \mathbf{k}_i, \quad \mu_i = m^2 + \mathbf{k}_i^2, \quad (27)$$

$$\tilde{a} = \mu_1 \mu_3 \mu_5 \mu_7, \quad \tilde{b} = \mu_2 \mu_4 \mu_6 p_{2+} p_{1-}, \quad \tilde{c} = \mu_2 \mu_4 \mu_6 p_{2-} p_{1+}, \quad (28)$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_{2T} - \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{q}_4 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4, \quad (29)$$

$$\mathbf{q}_5 = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5, \quad \mathbf{q}_6 = \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_6, \quad \mathbf{q}_7 = \mathbf{k}_6 - \mathbf{k}_7, \quad \mathbf{q}_8 = \mathbf{k}_7 + \mathbf{p}_{1T},$$

$$\Omega_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 x d^2 x' \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x} + i\mathbf{q}'\mathbf{x}') \Omega_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad j = 1, 2, \quad (30)$$

где  $m$  — масса электрона.

Выражение для  $M_3$  уже достаточно громоздко и поэтому не приводится. К тому же, в этом нет практической необходимости, поскольку простые оценки показывают, что относительный вклад интерференции амплитуд  $M_1$  и  $M_3$  в сечение процесса (1) является величиной порядка  $(Z_1 Z_2 \alpha^2)^4 L^{-1}$ ,  $L = \ln \gamma_1 \cdot \ln \gamma_2$ , что даже при «низких» энергиях  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim 10$  намного меньше 1% при реалистичных значениях  $Z_1, Z_2$ .

Таким образом, приведенные выше выражения для амплитуд  $M_1$  и  $M_2$  решают (с оговоренной выше точностью) проблему выхода за рамки борновского приближения в описании процесса (1).

Проблема унитарных (то есть связанных с множественным образованием пар) поправок к этому результату, а также вопросы соотношения между амплитудами кроссинг-сопряженных процессов

$$Z_1 + Z_2 \rightarrow Z_1 + Z_2 + e^+ + e^-,$$

$$e^\pm + Z_1 + Z_2 \rightarrow e^\pm + Z_1 + Z_2$$

будут освещены отдельно.

Авторы благодарят за обсуждения вопросов, затронутых в работе, Э. А. Кураева и С. Р. Геворкяна.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Landau L. D., Lifshits E. M. // Phys. Z. Sowjet. 1934. V. 6. P. 244.
2. Racah G. // Nuovo Cimento. 1937. V. 14. P. 93.
3. Segev B., Wells J. C. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 1849.
4. Baltz A. J., McLerran L. // Phys. Rev. C. 1998. V. 58. P. 1679.
5. Segev B., Wells J. C. // Phys. Rev. C. 1999. V. 59. P. 2753.
6. Eichmann U., Reinhardt G., Schramm S. et al. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 1223.
7. Ivanov D. Yu., Schiller A., Serbo V. G. // Phys. Lett. B. 1999. V. 454. P. 155.
8. Eichmann U., Reinhardt G., Greiner W. // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 062710.
9. Lee R. N., Miltsein A. I. // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 032103.
10. Lee R. N., Miltsein A. I., Serbo V. G. hep-ph/0108014.
11. Lee R. N., Miltsein A. I. // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 032106.
12. Baltz A. J., Gelis F., McLerran L. et al. // Nucl. Phys. A. 2001. V. 695. P. 395.
13. Baltz A. J. nucl-th/0305083.
14. Bartos E., Gevorkyan S. R., Kuraev E. A. et al. // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 042720.
15. Bartos E., Gevorkyan S. R., Kuraev E. A. et al. // Phys. Lett. B. 2002. V. 538. P. 45.
16. Gevorkyan S. R., Kuraev E. A. // J. Phys. G. 2003. V. 29. P. 1227.



17. *Bartos E., Gevorkyan S. R., Kuraev E. A.* // *Yad. Fiz.* 2004. V. 67. P. 1945.
18. *Bartos E., Gevorkyan S. R., Kuraev E. A.* hep-ph/0410263.
19. *Sissakian A. N., Tarasov A. V., Torosyan H. T. et al.* JINR E2-2004-192. Dubna, 2004.
20. *Watson K. M.* // *Phys. Rev.* 1953. V. 89. P. 575.

Получено 7 декабря 2005 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 13.01.2006.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,44. Уч.-изд. л. 0,5. Тираж 415 экз. Заказ № 55177.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)