

P11-2005-158

И. В. Амирханов, Э. Павлушова<sup>1</sup>, М. Павлуш<sup>1</sup>,  
Т. П. Пузынина, И. В. Пузынин, И. Сархадов<sup>2</sup>

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ДИФФУЗИИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕНОСА  
ВЛАГИ В ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ

Направлено в журнал «Materials and Structures»

---

<sup>1</sup> Технический университет, Кошице, Словакия

<sup>2</sup> Таджикский государственный национальный университет, Душанбе

Амирханов И. В. и др.

P11-2005-158

Численное решение обратной задачи диффузии для коэффициента переноса влаги в пористом материале

На основе решения нелинейного уравнения диффузии с начальными и граничными условиями восстанавливается коэффициент переноса влаги в образце пористого материала путем минимизации функционала, который выражает отклонение вычисленных профилей концентрации влаги для определяемого коэффициента переноса влаги от их экспериментальных значений в определенные моменты времени. Коэффициент переноса в отличие от предыдущих работ ищется в виде суммы степенной и экспоненциальной функций концентрации влаги. Показатель степенной функции зависит от времени. При этом получается более точное совпадение вычисленных профилей концентрации с их экспериментальными значениями по сравнению с предыдущими работами.

Экспоненциальное слагаемое обеспечивает хорошее совпадение упомянутых профилей при больших временах вблизи границы образца, откуда происходит испарение влаги в атмосферу.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Amirkhanov I. V. et al.

P11-2005-158

Numerical Solution of an Inverse Diffusion Problem for the Moisture Transfer Coefficient in a Porous Material

On the basis of the solution of a nonlinear diffusion equation with initial and boundary conditions, a transport coefficient of moisture in a sample of a porous material is found by minimization of a functional, which expresses diversion of the computed profile of moisture concentration in well-defined time moments from their experimental values for the defined moisture transport coefficient. In this case the transport coefficient as opposed to the previous works is found as a sum of the degree and exponential functions of the moisture concentration. The exponent of the power function depends on time. Thus, a more accurate coincidence of the computed profiles of the moisture concentration with their experimental profiles is gained in comparison to previous works performed by other authors.

The exponential term provides a good coincidence of the mentioned profiles for big times nearby the boundary of the sample, where evaporation of the moisture to the atmosphere takes place.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

## ВВЕДЕНИЕ

Проникновение и перенос влаги приводят к химическим и физическим повреждениям строительных материалов. Поэтому изучение этих процессов в пористых строительных материалах важно для оценки долговечности строительных сооружений, использующих эти материалы. Феноменологически перенос влаги описывается уравнением диффузии с использованием коэффициента переноса влаги, который зависит от количества влаги. Некоторые такие зависимости можно найти в работе [1]. Для определения коэффициента переноса влаги в определенном материале необходимы экспериментальные количественные измерения пространственного распределения влаги в разные моменты времени.

В работе [2] предложен метод анализа количества влаги в строительных материалах, основанный на облучении нейтронами образца строительного материала, не разрушающем его, и регистрации сигналов от не поглощенных образцом нейтронов. В качестве примера приводятся экспериментальные данные распределения влаги в прямоугольном кирпиче с размерами  $3 \times 9 \times 12$  см в процессе его сушки. Все боковые поверхности образца водо- и воздухопроницаемы, кроме одной, с размерами  $3 \times 12$  см, откуда происходит испарение влаги в атмосферу. В предположении одномерного движения влаги в образце вдоль его ширины, равной 9 см, вычислен коэффициент переноса влаги в образце, эмпирически определенный в виде полинома третьей степени от концентрации влаги. Коэффициенты полинома вычислялись из условия минимума квадратичного функционала, определяющего отклонение экспериментальных данных от теоретических результатов, получаемых на основе численного решения нелинейного уравнения диффузии.

В работе [3] в качестве экспериментальных данных берется решение модельной задачи. Используя подход, предложенный в [1], провели изучение свойств модели в зависимости от степени полинома, набора его коэффициентов и количества используемых экспериментальных данных. При минимизации функционала был использован метод Ньютона. В работе [4] исходная модель исследовалась градиентным методом минимизации функционала.

В настоящей работе коэффициент переноса влаги восстанавливается по экспериментальным данным работы [2] (рис. 1, б) с помощью минимизации функционала методом Ньютона. В отличие от предыдущих работ предполагается явная зависимость коэффициента переноса влаги от времени  $D(w, t)$ .

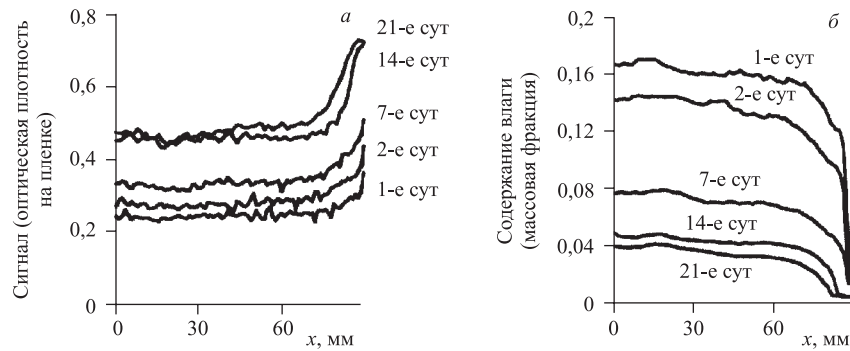


Рис. 1. Профили переноса нейтронов вдоль ширины образца на 1, 2, 7, 14 и 21-е сут (а) и соответствующих распределений концентраций влажности (б), полученных с помощью анализа преобразованных сигналов [2]

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Моделирование переноса влаги будем проводить на основе нелинейного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(w, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad t > 0, \quad 0 < x < 1. \quad (1)$$

Здесь  $w$  — концентрация влаги;  $D(w, t)$  — коэффициент переноса влаги;  $t$  — время;  $x$  — пространственная координата вдоль ширины образца. В данной работе  $D(w, t)$  выбираем в виде

$$D(w, t) = p_0 w^{p(t)} + A e^{-\mu(w-v_0)}, \quad p(t) = e_0 + \frac{e_1 - e_0}{1 + (e_1/e_0 - 1)e^{B(t-t_0/20)}}. \quad (2)$$

Обоснование такого выбора приведено в разд. 3.

Уравнение (1) будем решать со следующими начальным

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad 0 < x < 1 \quad (3)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0, \quad -D(w(1, t), t) \frac{\partial w}{\partial x}(1, t) = \beta(w(1, t) - v_0), \quad t > 0, \quad (4)$$

где  $w_0(x)$  — распределение влаги при  $t = 0$  ( $v_0 = 0,019645$ );  $p_0, \mu, A, e_0, e_1, B, t_0, \beta$  — параметры задачи.

Параметры  $A$ ,  $\mu$ ,  $B$ ,  $\beta$  легко определяются решением прямой задачи (1)–(4), а остальной набор параметров  $P = [p_0, e_0, e_1, t_0]$  будем уточнять минимизацией функционала

$$S(P) = \sum_{j=1}^M \int_0^1 [w(x, t_j) - w_e(x, t_j)]^2 dx, \quad (5)$$

где  $M = 4$  — количество дней, в которые проводились измерения концентрации влаги;  $w_e(x, t_j)$  — профиль экспериментальных данных  $t_j$ -х сут,  $w(x, t)$  — решение задачи (1)–(4).

Все величины, входящие в задачу (1)–(5), переведены в безразмерные единицы. Здесь  $w = w(x, t)/w_0$  ( $w_0 = 0,2$  г/см<sup>3</sup> — размерная константа);  $t = t/t_0$  ( $t_0 = 28800$  мин — время испарения);  $x = x/x_0$  — координата ( $x_0 = 9$  см — ширина образца, вдоль которой происходит перенос влаги).

Экспериментальные данные (рис. 1, б) переведены в безразмерные формы, которые показаны на рис. 2. В дальнейшем сравнение вычисляемых профилей пойдет именно с этими обработанными экспериментальными данными.

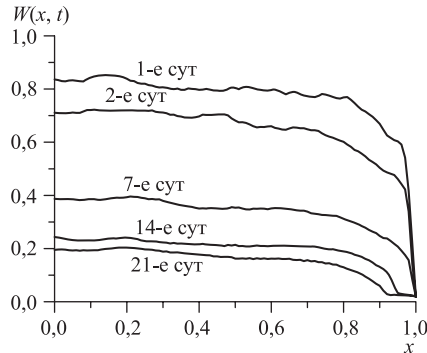


Рис. 2. Профили безразмерных концентраций влаги вдоль ширины образца в 1, 2, 7, 14 и 21-е сут ( $t = 0; 0,05; 0,3; 0,65; 1$ ) соответственно сверху вниз. Верхняя кривая представляет начальное условие (3)

Умножая обе стороны уравнения (1) на  $dx dt$ , после интегрирования по  $t$  от  $T_1$  до  $T_2$  и по  $x$  от нуля до единицы, получаем интегральную форму закона сохранения:

$$\int_0^1 [w(x, T_1) - w(x, T_2)] dx = - \int_{T_1}^{T_2} dt D(w(1, t)) \frac{\partial w}{\partial x}(1, t). \quad (6)$$

В дальнейшем используем это соотношение для проверки точности численных результатов.

## 2. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим сначала численное решение прямой задачи (1)–(5).

Введем равномерную прямоугольную сетку  $\{t_j = \tau j \ (j = 0, 1, \dots, n), x_i = hi \ (i = 0, 1, \dots, m)\}$ , где  $\tau$  и  $h$  — соответственно шаги по переменным  $t$  и  $x$ .

Для решения уравнения (1) с граничным и начальными условиями (3), (4) будем использовать следующую абсолютно устойчивую конечно-разностную схему с точностью аппроксимации  $O(\tau + h^2)$  [5]:

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ C_i^{j+1} \frac{w_{i+1}^{j+1} - w_i^{j+1}}{h} - C_{i-1}^{j+1} \frac{w_i^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}}{h} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad (7)$$

$$C_i^{j+1} = C(w_i^{j+1}) = [D(w_{i+1}^{j+1}, t_j) + D(w_i^{j+1}, t_j)] / 2, \quad (8)$$

$$\frac{3w_0^{j+1} - 4w_1^{j+1} + w_2^{j+1}}{2h} = 0, \quad (9)$$

$$-C_{m-1}^{j+1} \frac{w_m^{j+1} - w_{m-1}^{j+1}}{h} = \beta(w_m^{j+1} - v_0), \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (10)$$

На каждом  $j + 1$ -м слое уравнение (7) представляет собой нелинейную граничную задачу, которая решается методом простых итераций. Предположим, что значение влаги  $w_i^{j+1(s)}$  на  $s$ -й итерации известно. При вычислении следующего  $s + 1$ -го приближения будем брать в функции  $C(w_i^{j+1})$  выражения (8) значение влаги  $w_i^{j+1(s)}$  из предыдущей итерации.

Таким образом, мы получаем следующую схему итераций:

$$-C_{i-1}^{j+1(s)} w_{i-1}^{j+1(s+1)} + \left[ C_{i-1}^{j+1(s)} + C_i^{j+1(s)} + \frac{h^2}{\tau} \right] w_i^{j+1(s+1)} - C_i^{j+1(s)} w_{i+1}^{j+1(s+1)} = \frac{h^2}{\tau} w_i^j, \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$3w_0^{j+1(s+1)} - 4w_1^{j+1(s+1)} + w_2^{j+1(s+1)} = 0, \quad (12)$$

$$-C_{m-1}^{j+1(s)} w_{m-1}^{j+1(s+1)} + [\beta h + C_{m-1}^{j+1(s)}] w_m^{j+1(s+1)} = \beta h v_0. \quad (13)$$

В этом случае мы имеем линейную задачу относительно  $w_i^{j+1(s+1)}$ , которая решается методом прогонки.

Итерационный процесс завершается при выполнении условия

$$\max |w_i^{j+1(s+1)} - w_i^{j+1(s)}| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где  $\varepsilon > 0$  — заранее заданное малое число.

В качестве начального приближения на каждом слое  $j+1$  берем значение концентрации влаги с предыдущего слоя  $j$  ( $w_i^{j+1(0)} = w_i^j$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ). В работе [3] для данной схемы на основе ее анализа мы выбирали шаги интегрирования  $h = 10^{-2}$ ,  $\tau = 1/28800$ . В этой работе численные эксперименты проводим с теми же шагами.

Метод Ньютона применяем для поиска точки  $P$  локального минимума функционала (5), в которой, как известно, градиент  $S'(P) = 0$ . Поэтому формула метода Ньютона имеет вид [6, 7]

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - [S''(P^{(k)})]^{-1} S'(P^{(k)}). \quad (14)$$

Здесь  $S''(P^{(k)}) = A$  — симметричная матрица Гессе размерности  $4 \times 4$  вторых производных функционала (5), вычисляемых по формуле

$$A_{rs} = \frac{\partial^2 S}{\partial P_r \partial P_s}, \quad r, s = 0, 1, 2, 3. \quad (15)$$

Первые и вторые производные по параметрам  $\partial S / \partial P_r$ ,  $\partial^2 S / \partial P_r \partial P_s$ , которые выступают в правых частях уравнений (14) и (15), определяем численно из решения прямой задачи (1)–(5) при разных наборах параметров. Покажем это, например, для производных  $\partial S / \partial P_1$ ,  $\partial^2 S / \partial P_1^2$  и  $\partial^2 S / \partial P_1 \partial P_2$ :

$$\frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{S(P_0, P_1 + \Delta_1, P_2, P_3) - S(P_0, P_1 - \Delta_1, P_2, P_3)}{2\Delta_1},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial P_1^2} = \frac{S(P_0, P_1 + \Delta_1, P_2, P_3) - 2S(P_0, P_1, P_2, P_3) + S(P_0, P_1 - \Delta_1, P_2, P_3)}{\Delta_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial P_1 \partial P_2} = \left( \frac{\partial S}{\partial P_1}(P_0, P_1, P_2 + \Delta_2, P_3) - \frac{\partial S}{\partial P_1}(P_0, P_1, P_2 - \Delta_2, P_3) \right) / 2\Delta_2.$$

Здесь  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  достаточно малые положительные числа. Итерационный процесс Ньютона можно завершить по разным признакам. Например, по малости нормы функционала (5) в точке  $P^{(k+1)}$ , нормы  $\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\|$ , относительной ошибки  $\|P^{(k+1)} - P^*\| / \|P^*\|$ , нормы градиента  $\|S'(P^{(k)})\|$ . В случае сходимости итерационного процесса все эти значения стремятся к нулю.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для численного решения прямой задачи (1)–(4) выбираем некоторые параметры задачи  $A$ ,  $\mu$ ,  $\beta$ . При увеличении  $\beta$  до  $\beta = 1500$  функционал уменьшается, однако при  $\beta > 1500$  не происходит существенного уменьшения функционала, поэтому выбрали  $\beta = 1500$ . Значения параметров  $A$ ,  $\mu$  выбираем путем решения прямой задачи, таким образом, чтобы экспериментальные и вычисленные профили концентрации влаги при  $t = 0,65$ ; 1 (14-е и 21-е сут) вблизи границы  $x = 1$  имели общие горизонтальные участки (см. рис. 3). Это достигается при значениях  $A = 1,5$ ;  $\mu = 150$ .

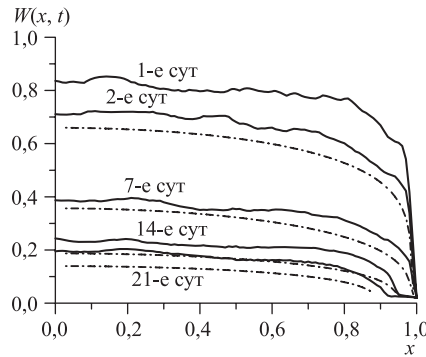


Рис. 3. Вычисленные профили концентрации влаги для коэффициента переноса влаги с набором параметров  $\mu = 150$ ;  $A = 1,5$ ;  $p_0 = 40$ ;  $B = 30$ ;  $e_0 = 4$ ;  $e_1 = 2$ ;  $t_0 = 4$  для 2, 7, 14 и 21-х сут ( $t = 0,05$ ;  $0,3$ ;  $0,65$ ;  $1$ ) (пунктирные линии) и экспериментальные профили концентрации влаги (сплошные линии) в эти же дни. Значение функционала (5):  $S = 0,0115$

Для установления явного вида коэффициента переноса влаги  $D(w, t)$  проводились следующие численные эксперименты. Путем решения прямой задачи для коэффициента переноса в виде  $D(w) = p_0 w^\gamma + A e^{-\mu(w-v_0)}$  установили, что при значениях параметров  $p_0 = 40$ ,  $\gamma = 5$  вычисленный профиль концентрации влаги на вторые сутки ( $t = 0,05$ ) хорошо совпадает с ее экспериментальным профилем. Дальше хорошее совпадение вычисленного профиля концентрации влаги после пяти суток с ее экспериментальным профилем на седьмые получается, когда в момент  $t = 0,05$  значение  $\gamma = 5$  заменяется на  $\gamma = 3,3$ . Дальнейшее совпадение вычисленных и экспериментальных профилей на 14-е и 21-е сут происходит, когда в момент времени  $t = 0,3$  (седьмые сут) значение  $\gamma = 3,3$  заменяется на  $\gamma = 2,6$ . Таким образом, при скачкообразном изменении показателя степени по времени в формуле  $D(w)$  при временах  $t = 0,05$ ;  $0,3$ ;  $0,65$  получается хорошее совпадение вычисленных и экспериментальных профилей влаги. Исходя из этого



выбираем показатель степени в выражении для  $D(w)$  в виде функции времени  $p(t)$ , которая меняется непрерывно и принимает упомянутые значения  $\gamma$  при временах  $t = 0,05; 0,3; 0,65$ . Для  $B$  удачным значением оказалось  $B = 30$ .

Таким способом мы пришли к выбору формулы коэффициента переноса влаги в виде (2). Второй член в формуле (2) обеспечивает хорошее совпадение вычисленных профилей концентрации влаги с их экспериментальными профилями вблизи границы  $x = 1$  на 14-е и 21-е сут ( $t = 0,65; 1$ ).

Для минимизации функционала выбираем удачные начальные значения параметров, по которым производится минимизация. Начиная с этих значений проводим минимизацию функционала по методу Ньютона. Удачные начальные значения параметров  $\mu, A, \beta, B$ , как уже упомянули, определились путем решения прямой задачи. Остальные параметры  $P = [p_0, e_0, e_1, t_0]$  уточним по методу Ньютона при начальных значениях  $P = [p_0, e_0, e_1, t_0]$ , равных 40, 2, 4, 4 соответственно. Для этого набора решим численно задачу (1)–(5), используя линеаризованную разностную схему (11)–(13). На рис. 3 приведены вычисленные профили концентрации влаги при данном наборе параметров коэффициента переноса влаги (пунктирные линии) и экспериментальные профили (сплошные линии), т.е. для случая, когда параметры  $P = [p_0, e_0, e_1, t_0]$  еще не уточнялись по методу Ньютона.

Как видно, вычисленные профили плохо совпадают с их экспериментальными профилями, однако для этого набора получается хорошее совпадение вычисленных и экспериментальных профилей около границы  $x = 1$  для 14-х и 21-х сут. Это совпадение получается благодаря правильному выбору параметров  $\mu = 150$  и  $A = 1,5$ . Хорошее совпадение вычисленных и экспериментальных профилей во все времена и во всех точках достигается после минимизации функционала по параметрам  $[p_0, e_0, e_1, t_0]$ .

После применения метода Ньютона получаем для отдельных итераций *it* табл. 1 значений параметров  $[p_0, e_0, e_1, t_0]$ , а также табл. 2 значений  $S$  функционала (5) максимальной нормы

$$\|S1\| = \max \left[ \left| \frac{\partial S}{\partial P_0} \right|, \left| \frac{\partial S}{\partial P_1} \right|, \left| \frac{\partial S}{\partial P_2} \right|, \left| \frac{\partial S}{\partial P_3} \right| \right] \quad (16)$$

и значений определителя  $|S2|$  матрицы Гессе. Из табл. 2 видно, что метод Ньютона сходится. Набор исходных параметров  $[p_0, e_0, e_1, t_0] = [40, 2, 4, 4]$  сходится к предельному набору

$$[54, 570104474089; 2, 644214925718; 6, 05922987825; 3, 39386031925]. \quad (17)$$

Значения  $S$  функционала (5) после 12 итераций понижаются до  $S = 0,00069508216989$ , следовательно, исходное значение  $0,01158937915096$  уменьшается примерно в 16 раз. Норма  $\|S1\|$  стремится к нулю, поэтому градиент

**Таблица 1.** Динамика изменения параметров  $[p_0, e_0, e_1, t_0]$  от итерации к итерации при минимизации функционала по методу Ньютона

$it$	$p_0$	$e_0$	$e_1$	$t_0$
0	40,000000000000	2,000000000000	4,000000000000	4,000000000000
1	45,897953029587	2,471819011470	4,907060733852	3,652008350024
2	48,147788167516	2,561556053494	5,546198172161	3,403421908937
3	41,996471117789	2,491158550930	5,551147207920	3,283609804021
4	47,775778020372	2,569923112223	5,817763291408	3,333800258886
5	51,363492583927	2,609622858440	5,946988829901	3,366397470221
6	53,803759741997	2,636398857536	6,033716165344	3,387904496349
7	54,501770797589	2,643515806078	6,056949521286	3,393318626290
8	54,570010319609	2,644214418853	6,059228027818	3,393859984287
9	54,570105074654	2,644214932391	6,059229899760	3,393860324353
10	54,570104469678	2,644214925669	6,059229878094	3,393860319213
11	54,570104474251	2,644214925721	6,059229878258	3,393860319252
12	54,570104474089	2,644214925718	6,059229878252	3,393860319251

**Таблица 2.** Динамика изменения значения  $S$  функционала (5), нормы  $\|S1\|$  (16) и определителя  $|S2|$  матрицы Гессе от итерации к итерации при минимизации функционала по методу Ньютона

$it$	$S$	$\ S1\ $	$ S2 $
0	0,01158937915096	—	—
1	0,00176840315096	0,03174279324876	-0,0000000001780
2	0,00078912933326	0,00337524428210	-0,0000000000162
3	0,00072372543631	$0,70230017773797e - 3$	$-0,0000000007741e - 3$
4	0,00070326985936	$0,52868751453547e - 3$	$0,0000000024972e - 3$
5	0,00069640903909	$0,47268459030834e - 3$	$0,0000000015911e - 3$
6	0,00069513120527	$0,14996738810649e - 3$	$0,0000000009542e - 3$
7	0,00069507801252	$0,57958079002451e - 4$	$0,00000000072293e - 4$
8	0,00069508216497	$0,44630036296668e - 5$	$0,00000000642000e - 5$
9	0,00069508216994	$0,43373377399446e - 7$	$0,00000063500432e - 7$
10	0,00069508216989	$0,26527716655289e - 11$	$0,00634963960712e - 11$
11	0,00069508216989	$0,18661829893907e - 13$	$0,63496398795644e - 13$
12	0,00069508216989	$0,00542101086243e - 13$	$0,63496398799835e - 13$

$S' \sim 0$ . Стабилизируется также значение определителя матрицы Гессе. Оно равно  $|S2| = 0,63496398799835 \cdot 10^{-13}$ .

Над рис. 4 приведены вычисленные профили концентрации влаги для предельного набора параметров (штрихпунктирные линии) и экспериментальные профили (сплошные линии). Как видно, эти профили неплохо совпадают. Заметим, что имеется также очень хорошая сходимость вычисленных профи-

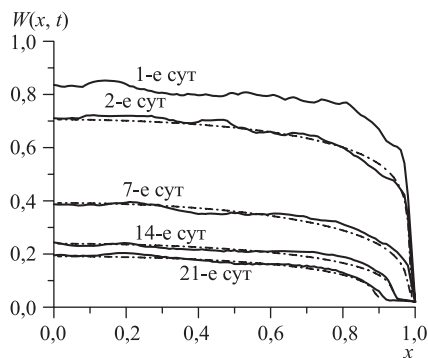


Рис. 4. Вычисленные профили концентрации влаги для коэффициента переноса влаги с набором параметров  $\mu = 150$ ;  $A = 1,5$ ;  $B = 30$ ;  $p_0 = 40$ ;  $e_0 = 4$ ;  $e_1 = 2$ ;  $t_0 = 4$  после минимизации по Ньютону для 2, 7, 14 и 21-х сут ( $t = 0,05$ ;  $0,3$ ;  $0,65$ ;  $1$ ) (штрихпунктирные линии) и экспериментальные профили концентрации влаги (сплошные линии) в эти же дни. Значение функционала (5)  $S = 0,0007$

лей к экспериментальным профилям вблизи границы  $x = 1$ , которая достигается благодаря добавлению члена  $Ae^{-\mu(w-v_0)}$  в формуле (2).

Закон сохранения в интегральной форме (6) при  $T_1 = 0,65$  (14-е сут) и  $T_1 = 1$  (21-е сут) выполняется с точностью  $1,32 \cdot 10^{-6}$ .

Рис. 5 отражает изменения профилей  $D(w, t)$  и  $D(x, t)$  по времени для предельного набора коэффициентов. Необычное поведение  $D(w, t)$  и про-

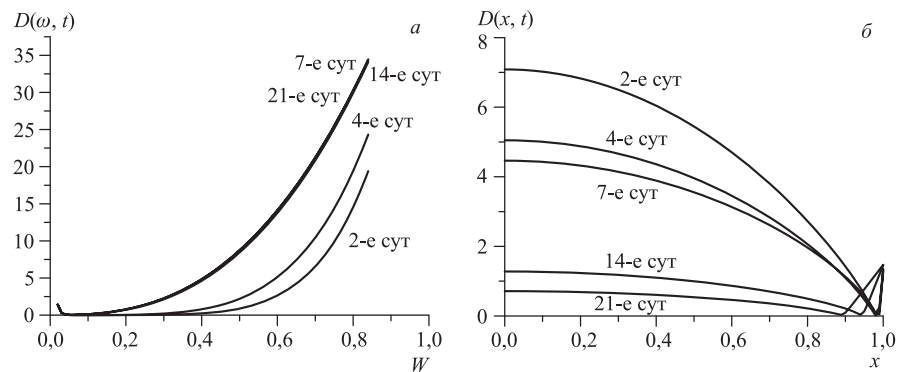


Рис. 5. Динамика изменения  $D(w, t)$  (а) и  $D(x, t)$  (б) по времени, которая соответствует 2, 4, 7 и 21-м сут. На графике (а) кривые, отвечающие 7, 14 и 21-м сут, мало отличаются друг от друга

странственных профилей коэффициента переноса влаги  $D(x, t)$  в разные моменты времени вблизи границы  $x = 1$  связано с наличием экспоненциального члена в формуле (2).

На рис. 6 приведены графики изменения по времени концентрации влаги  $w(1, t)$  и ее пространственной производной  $\frac{\partial w}{\partial x}(1, t)$  на границе  $x = 1$ .

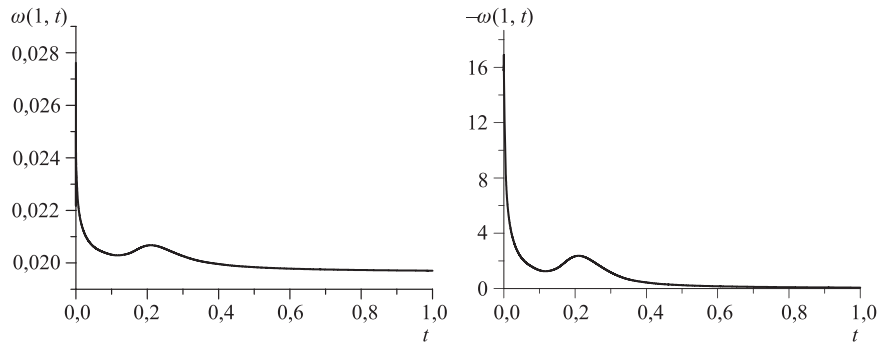


Рис. 6. Зависимость от времени концентрации влаги  $w(1, t)$  и ее пространственной производной  $\frac{\partial w}{\partial x}(1, t)$  на границе  $x = 1$

Рис. 7 изображает динамику по времени коэффициента переноса влаги и потока  $-D(w(1, t), t) \frac{\partial w}{\partial x}(1, t)$  в точке  $x = 1$ , где имеет место переход влаги из образца материала в атмосферу.

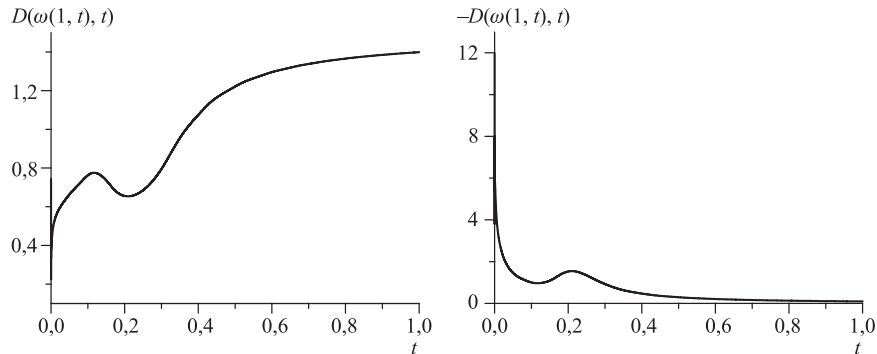


Рис. 7. Зависимость от времени коэффициента переноса влаги  $D(1, t)$  и потока влаги  $-D(w(1, t), t) \frac{\partial w}{\partial x}(1, t)$  на границе  $x = 1$

Следует подчеркнуть, что большое значение  $\beta$  ( $\beta = 1500$ ) в граничном условии (2) указывает на то, что решение задачи (1)–(5) должно слабо отличаться от решения этого же уравнения с граничным условием первого рода

на границе  $x = 1$ , т. е.  $w(1, t) = v_0$ . Численным экспериментом установлено, что поведение потоков, профилей влаги для этих двух случаев действительно слабо отличается.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе метода решения нелинейного уравнения диффузии с начальными и граничными условиями, путем решения прямой задачи впервые предложен метод поиска вида функции коэффициента переноса влаги  $D(w, t)$  в виде суммы степенной и экспоненциальной функций от концентрации влаги  $w$ , в котором показатель степенной функции является функцией времени  $p(t)$ . При этом после выбора значений параметров  $p_0, A, \mu, e_0, e_1, B, t_0$  обеспечивается лучшее совпадение вычисленных и экспериментальных профилей концентрации влажности. Выбор некоторых параметров производится путем решения прямой задачи диффузии, а остальные параметры определяются путем минимизации функционала по этим параметрам.

Результаты численных экспериментов позволяют сделать следующие выводы:

1. Для значений параметров  $A = 1,5; B = 30; \mu = 150$  и предельных значений параметров  $p_0, e_0, e_1, t_0$

[54, 57010447408928; 2, 64421492571830;

6, 05922987825184; 3, 39386031925092]

получается лучшее совпадение вычисленных и экспериментальных профилей концентрации влажности.

2. Лучшее совпадение вычисленных и экспериментальных профилей концентрации влажности вблизи границы  $x = 1$  описывается благодаря присутствию экспоненциального слагаемого в выражении для  $D(w, t)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 03-01-00657, № 05-01-00645-а и VEGA, гранты 1/2647/05, 1/1006/04, 1/1089/04.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wittman X., Sadouki H., Wittman F.H. Numerical Evaluation of Drying Test Data // Transactions of 10th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Techn. 1989. V. Q. P. 71–79.
2. Pleinert H., Sadouki H., Wittman F.H. Determination of moisture distribution in porous building materials by neutron transmission analysis // Materials and Structures. 1998. V. 31. P. 218–224.

3. *Амирханов И. В. и др.* Численное исследование модели испарения влаги в строительных материалах // Вестник РУДН, Серия: Прикладная и компьютерная математика. 2005. Т. IV, № 1. С. 96–106.
4. *Amirkhanov I. V. et al.* Application of gradient method to a moisture evaporation model // 10th Scientific Conference Rzeszow-Lviv-Kosice, 11–13 September, 2005. P. 6.
5. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. С. 258–276.
6. *Васильев Ф. П.* Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974. С. 66–69.
7. *Турчак Л. М.* Основы численных методов. М.: Наука, 1987. С. 176–181.

Получено 14 октября 2005 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 9.12.2005.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,87. Тираж 315 экз. Заказ № 55140.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)