

P2-2005-95

В. В. Скоков, В. Д. Тонеев

ГИДРОДИНАМИКА РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ ФАЙЕРБОЛА

Направлено в журнал «Ядерная физика»

## Гидродинамика расширяющегося файербола

Система релятивистских гидродинамических уравнений решается численно на основе метода SHASTA с введением корректирующих потоков для одно-, дву- и трехмерной геометрии. Точность предложенного метода продемонстрирована сравнением с точными аналитическими решениями для одномерной задачи Римана и лоренц-инвариантного продольного разлета в модели Бьеркена. Рассмотренный пример расширяющегося трехмерного файербола, начальные условия которого примерно соответствуют Pb + Pb-столкновениям при энергии  $\sim 160$  ГэВ на нуклон, указывает на то, что предполагаемая динамика разлета может существенно повлиять на результаты анализа средовых свойств адронов, извлекаемых из экспериментов с лептонами.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

## Перевод авторов

## Hydrodynamics of an Expanding Fireball

A set of relativistic hydrodynamic equations is solved numerically by means of the SHASTA method with flux corrected transport for the 1D-, 2D- and 3D-cases. Accuracy of this method is illustrated by comparison with the available exact analytical solutions for the 1D Riman problem and boost invariant longitudinal expansion in the Bjorken model. A given example of a 3D expanding fireball, whose initial state approximately corresponds to Pb + Pb collisions at the energy about 160 GeV per nucleon, shows that the assumed expansion dynamics noticeably influences the analysis of in-medium hadron properties inferred from experiments with leptons.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

## ВВЕДЕНИЕ

Приложение методов релятивистской гидродинамики к физике сильных взаимодействий адронов и ядер, начало которым положено работой Л. Д. Ландау [1] по описанию процесса множественного рождения частиц в адронных столкновениях, недавно отметило 50-летний юбилей. За это время гидродинамика не раз оказывалась востребованной для решения сложных физических задач, что в свою очередь приводило к необходимости развития различных гидродинамических сценариев и совершенствования вычислительных схем. Хотя условия применимости гидродинамики к адронным столкновениям не столь очевидны, уже в течение первого десятилетия с ее помощью были успешно исследованы глобальные характеристики и скейлинговые свойства ультрарелятивистских взаимодействий адронов, а также показана принципиальная самосогласованность гидродинамики с общими принципами квантовой теории поля (см. обзорные работы [2, 3]). В семидесятые годы с началом работ на релятивистских ускорителях тяжелых ионов в Дубне и Беркли гидродинамика вызвала большой интерес в связи с возможностью генерации ударных волн в ядерной материи. Активные теоретические и экспериментальные исследования в этом направлении (см. обзор [4]) хотя и не привели к открытию «простых» ударных волн, но показали наличие коллективного движения возбужденной ядерной материи гидродинамической природы, существенно влияющего на динамику взаимодействия ядер. Но более важным результатом явилось четкое понимание того, что гидродинамика в приложении к столкновению тяжелых ионов предоставляет уникальную возможность извлечь информацию о глобальных свойствах сильно сжатой и нагретой ядерной материи и, в частности, о ее уравнении состояния. Именно эта идея об извлечении из наблюдаемых характеристик информации об уравнении состояния возбужденной материи, включая возможность различных фазовых состояний, стала основной в программах исследований на ускорителях следующего поколения (Брукхейвен, ЦЕРН) и на релятивистском тяжелоионном коллайдере RHIC. Одним из последних «сюрпризов» гидродинамики явилось то, что она правильно предсказала величину и поведение эллиптического потока адронов в столкновении ядер при энергии RHIC [5]. Это действительно неожиданно, поскольку при столь высоких энергиях столкновения, как  $\sqrt{s_{NN}} \gtrsim 100$  ГэВ, можно было бы ожидать полного доминирования кварк-глюонных степеней свободы, однако оказалось, что пертурбативные партонные модели для правильного описания эллиптического потока требуют усиления сечения взаимодействия примерно в 50 раз [6].

Цель данной работы состоит в развитии численной схемы решения релятивистских гидродинамических уравнений, описывающих разлет сжатого и высоковозбужденного сгустка материи (файербола), образованного в результате столкновения релятивистских ядер. В работе использован метод SHASTA с скорректированным антидиффузионным потоком. Рассмотрены его одно-, дву- и трехмерные реализации. Результаты расчета сравниваются с имеющимися аналитическими решениями. В качестве примера трехмерной гидродинамики рассмотрена эволюция пионного файербола, образованного в Pb + Pb-столкновении при максимальной энергии ускорителя CERN-SPS.

## 1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Гидродинамические уравнения представляют собой запись локальных законов сохранения энергии-импульса и зарядов (например, барионного заряда). Несмотря на кажущуюся простоту, эти уравнения не имеют аналитического решения в общем случае и приводят к определенным сложностям, связанным с их численным моделированием. Гидродинамические уравнения могут быть записаны как [7]

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1)$$

$$\partial_\mu N_i^\mu = 0, \quad (2)$$

где  $T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}(x)$  и  $N_i^\mu \equiv N_i^\mu(x)$  — тензор энергии-импульса и ток сохраняющегося заряда. Мы ограничимся рассмотрением идеальной жидкости, для которой в приближении локального термодинамического равновесия справедливы следующие определения:

$$T^{\mu\nu} = (p + \varepsilon)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (3)$$

$$N_i^\mu = n_i u^\mu, \quad (4)$$

где  $p$  — давление,  $\varepsilon$  — плотность энергии,  $n_i$  может быть барионной плотностью  $n_B$ , плотностью странности  $n_S$  и т. д. Все эти величины даны в собственной системе координат жидкости, двигающейся с четырехскоростью  $u_\mu$ . Для того чтобы замкнуть систему уравнений (1), (2), необходимо ввести уравнение состояния  $p = p(\varepsilon, n_i)$ , характеризующее свойства рожденной в столкновении ядерной материи. Мы выберем его в простейшей форме

$$p = c_s^2 \varepsilon, \quad c_s^2 \leq \frac{1}{3}, \quad (5)$$

где предельное значение квадрата скорости звука  $c_s^2 = 1/3$  отвечает уравнению состояния ультрарелятивистского идеального газа адронов.

Уравнения (1) и (2) удобнее переписать, введя переменные в системе центра масс сталкивающихся ядер: плотность энергии  $E = T^{00}$ , плотность импульса  $\mathbf{M} = T^{0i}$  и плотность барионного заряда  $R_i = N_i^0$ . В терминах вновь введенных переменных мы имеем

$$\begin{aligned}\partial_t E + \nabla(E\mathbf{v}) &= -\nabla(p\mathbf{v}), \\ \partial_t \mathbf{M} + ((\mathbf{v}\nabla) + (\nabla\mathbf{v}))\mathbf{M} &= -\nabla p, \\ \partial_t R_i + \nabla(R_i\mathbf{v}) &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Эта система гидродинамических уравнений для идеальной жидкости является гиперболической и явно удовлетворяет условию причинности. Дополненная ур. (5), система (6) становится замкнутой и для ее решения необходимо только определить начальные условия.

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Рассмотрим ядерную материю, расширяющуюся в вакуум со скоростями, сравнимыми, а иногда (на переднем фронте разлета) даже равными скорости света. Это означает, что за промежуток времени  $\delta t$  материя распространяется в вакуум на расстояние, равное  $\delta t$ . В численных моделях мы вынуждены работать не с реальным временем и пространством, а рассматривать их сеточное приближение, что во многих случаях оправдано и нередко является единственным способом решения той или иной задачи.

Алгоритмы решения уравнений в частных производных методом конечных разностей должны удовлетворять так называемому критерию Куранта–Фридрихса–Леви (необходимый критерий устойчивости разностной схемы) [8]:  $u\delta t/\delta x < 1$ , т. е. временной шаг  $\delta t$  должен быть меньше шага по пространству  $\delta x$ . Применительно к нашей задаче это означает, что в рамках метода конечных разностей при распространении материи в вакуум со скоростью, близкой к световой, за один временной шаг  $\delta t$  возмущение перейдет из одной граничной ячейки в соседнюю с размером  $\delta x = \delta t/\lambda$ , где  $\lambda < 1$ , что явно нарушает причинность. Совершенно очевидно, что причинность будет восстановлена для больших значений  $\lambda$ , что запрещено критерием Куранта. Таким образом, наличие некоторой небольшой части материи, распространяющейся с нарушением причинности, является неизбежным недостатком конечно-разностных численных схем в релятивистской гидродинамике.

Так же непросто и выбор конкретной схемы метода конечных разностей. Схема должна сочетать эффективность метода с его простотой и прозрачностью. Наиболее простыми являются схемы первого (Up-wind [9]) и более высоких порядков (Leapfrog [9]) аппроксимации пространственной производной без использования методов коррекции. Как известно, недостатком

схемы первого порядка является появление искусственной диффузии, связанной с дискретизацией пространства-времени, что усиливает вклад в нарушение причинности переноса. Высокий порядок аппроксимации пространственных производных тоже не гарантирует успеха, т. к. могут образоваться нефизические осцилляции и решение станет неустойчивым на разрывах, образования которых следует ожидать при моделировании столкновения тяжелых ионов. Наиболее оптимальной стратегией здесь будет использование схемы высшего порядка в областях, не содержащих разрывов, и коррекция решения в областях, близких к разрывам, с помощью схемы низкого порядка. Одной из реализаций данной стратегии является схема SHASTA с коррекцией потоков (FCT-SHASTA). Схема была предложена в [10] и в дальнейшем развита в работах [11, 12], а также обобщена на произвольные схемы высокого и низкого порядков и многомерный случай [13]. В применении к столкновениям тяжелых ионов схема SHASTA активно исследовалась в [14]. Идеи этих работ были успешно использованы в методе частиц в ячейках [15].

В данной работе мы будем использовать оригинальный метод SHASTA с антидиффузией, применяя метод коррекции антидиффузии на разрывах.

Целью нашего алгоритма является построение решения системы уравнений (6), записанной в эйлеровых переменных, где в качестве  $R_i$  мы будем рассматривать барионную плотность в системе центра масс  $R_B$ . Переменные  $E$ ,  $M$ ,  $R_B$  будут представлены в виде их сеточной аппроксимации на фиксированной евклидовой сетке. Заметим, что алгоритм FCT-SHASTA явный и поэтому требует меньших затрат оперативной памяти, что является существенным преимуществом даже при современном развитии ЭВМ.

Начнем с рассмотрения абстрактного одномерного неоднородного уравнения переноса, отвечающего структуре ур.(6) :

$$\partial_t U + \partial_x(Uv + f) = 0. \quad (7)$$

В дальнейшем для конечной разности некоторой функции  $f(x, t)$  по пространственной координате мы будем использовать обозначение

$$\delta f_i^n = f_{i+1}^n - f_i^n, \quad (8)$$

где верхний и нижний индексы обозначают соответственно номер временного и пространственного шага.

Для уравнения (7) на каждом последующем  $n + 1$  временном шаге подсчитывается так называемое диффузионное решение (подробный вывод разностной схемы может быть найден в [10])

$$u_i^{(td)} = u_i^n - \frac{\delta F_i}{\delta x}, \quad (9)$$

где функция потока равна

$$F_i = -\delta x \left[ \frac{1}{2} Q_i^2 \delta u_i + (Q_i - \frac{1}{2}) u_i \right] + \delta t [Q_i (f_{i+1} - f_i) + f_i], \quad (10)$$

$$Q_i = \frac{\frac{1}{2} - \lambda v_j^{n+1/2}}{1 + \lambda \delta v_j^{n+1/2}}. \quad (11)$$

Далее подсчитывается антидиффузионный поток, учитывающий аномальную диффузию в (9):

$$A_i = \frac{\delta x}{8} \delta u_i^{(td)}. \quad (12)$$

Антидиффузионный поток (12) перед применением к ур.(9) должен быть скорректирован, чтобы избежать появления осцилляций, присущих схемам высокого порядка:

$$A_i^c = \sigma_i \max\{0, \min(\sigma_i \delta x \delta u_{i+1}^{(td)}, \sigma_i \delta x \delta u_{i-1}^{(td)}, \sigma_i A_i)\}, \quad \sigma_i = \text{sign}(A_i). \quad (13)$$

Используя теперь (13), мы получаем решение на следующем шаге:

$$u_i^{n+1} = u_i^{(td)} - \frac{\delta A_{i-1}^c}{\delta x}. \quad (14)$$

Полное решение (14) системы гидродинамических уравнений (6) в одномерном случае разлета полубесконечной материи для уравнения состояния ультрарелятивистского идеального газа (5) с  $n_B = 0$  представлено на рис. 1.

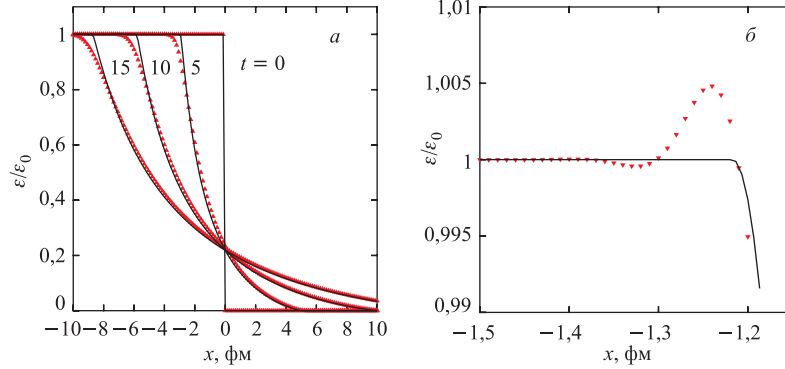


Рис. 1. Численные решения одномерных гидродинамических уравнений (6) для плотности энергии в различные моменты времени. Полное решение методом корректирующих потоков показано линиями, треугольники (а) — диффузионная схема первого порядка по времени, перевернутые треугольники (б) — схема второго порядка  $t = 2$  фм/с (см. текст)

Если мы ограничимся диффузионным решением (9) (т. е. положим равным нулю второе слагаемое в (14)), то получим разностную схему первого порядка точности по времени. Как видно из рис. 1, диффузионное приближение несколько сглаживает полное решение. Наоборот, если задать решение без коррекции антидиффузионного потока (т. е. положить  $A_i^c = A_i$  в (14)), то полученная схема будет схемой второго порядка точности по времени. Эта схема приводит к осцилляции решения (см. правую часть рис. 1, обратите внимание на масштаб осцилляций).

Обобщение одномерного кода FCT-SHASTA на многомерный случай выполнено в алгоритме «операторного расщепления» [11, 14], согласно которому операции транспорта и коррекции потока осуществляются независимо по каждому пространственному направлению на каждом временном шаге.

### 3. СРАВНЕНИЕ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ

Подставив (3) в гидродинамические уравнения (1) и выделив продольную и поперечную компоненты относительно четырехскорости  $u_\mu$ , имеем

$$u^\mu \partial_\mu \varepsilon + (p + \varepsilon) \partial_\mu u^\mu = 0, \quad (15)$$

$$(p + \varepsilon) u^\mu \partial_\mu u^\nu + (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \partial_\mu p = 0. \quad (16)$$

Аналогично после подстановки (4) закон сохранения барионного тока записывается как

$$u^\mu \partial_\mu n_B + n_B \partial_\mu u^\mu = 0. \quad (17)$$

**3.1. Задача Римана.** Фактически единственным случаем, допускающим точное решение системы уравнений (15)–(17), является задача Римана: одномерное расширение в пустоту полубесконечной материи, описываемой уравнением состояния (5). Для определенности мы рассматриваем расширение материи, чья граница расположена в точке  $x = 0$  и начальные распределения поля  $U$  (например, плотности энергии  $\varepsilon$ ) и профиля скорости в момент времени  $t = 0$  имеют разрыв

$$U(x, 0) \equiv \begin{cases} U_0, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$v(x, 0) \equiv \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (19)$$

Для  $t > 0$  разрыв поля будет распадаться, приводя к распределению

$$U(x, t) \equiv \begin{cases} U_0, & x < b_1 t, \\ U_{lr}(x), & b_1 t \leq x < b_r t, \\ 0, & x \geq b_r t. \end{cases} \quad (20)$$



Коэффициенты  $b_l < 0$  и  $b_r > 0$  есть скорости, с которыми распад скачка происходит соответственно влево и вправо относительно своего начального положения. В точном решении задачи Римана  $U_{lr}(x)$  — нетривиальная функция, учитывающая волну разрежения, прохождение волны через скачок и т. п. В частности, для плотности энергии она имеет вид [16]

$$\varepsilon(x/t) = \varepsilon_0 \cdot \begin{cases} 1, & -1 \leq x/t \leq -c_s, \\ \left[ \frac{1 - c_s}{1 + c_s} \frac{1 - x/t}{1 + x/t} \right]^{(1+c_s^2)/2c_s}, & -c_s < x/t \leq 1, \end{cases} \quad (21)$$

где скорость звука определена ур. (5).

На рис.2 аналитическое решение (21) сравнивается с численным, полученным при помощи алгоритма, описанного в предыдущем разделе. Начальное состояние задано в виде скачка плотности энергии (18). Как видно, в случае термодинамически нормальной материи,  $c_s^2 = 1/3$ , четко наблюдается волна разрежения, направленная в глубь вещества. Разработанный алгоритм прекрасно воспроизводит точное аналитическое решение. Как следует из соотношения (21), эволюция плотности энергии обладает свойством подобия: в представлении  $x/t$  распределение не меняется со временем.

**3.2. Бьеркенский режим.** Предполагая определенную масштабную инвариантность решения, можно упростить систему (15)–(17) и найти ее приближенные решения [17–20].

Предположим, что четырехвектор скорости может быть представлен в виде

$$u^\mu = \frac{\tilde{x}^\mu}{\tau}, \quad \tau = \sqrt{\tilde{x}_\mu \tilde{x}^\mu}. \quad (22)$$

Здесь  $\tilde{x}^\mu$  является вектором, построенным из четырехвектора координаты  $x^\mu$  при учете симметрии задачи. Например, при продольном разлете в так называемом бьеркенском режиме  $\tilde{x}^\mu$  запишется как

$$\tilde{x}^\mu = (t, 0, 0, z). \quad (23)$$

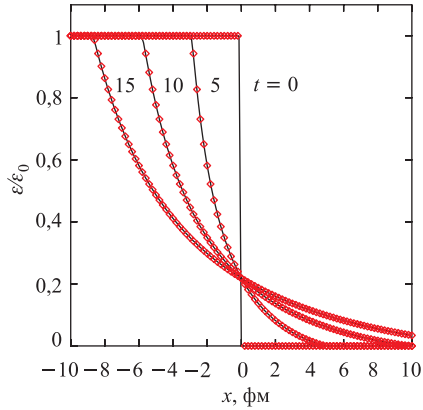


Рис. 2. Сравнение точного аналитического решения Римана для плотности энергии системы при одномерном разлете (кружки) с численным решением по алгоритму FCT-SHASTA (14) (кривые)

Если начальные условия однородны по всем переменным (в случае бьеркенского сценария [19] по быстроте, т. е. лоренц-инвариантны) кроме собственного времени  $\tau$ , то можно ожидать, что и в более поздние времена динамика сохранит эту симметрию в системе, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau), \quad p = p(\tau). \quad (24)$$

Учитывая последнее приближение, уравнения (15) и (17) перепишем в виде

$$\partial_\tau \varepsilon + (\partial_\mu u^\mu)(\varepsilon + p) = 0, \quad (25)$$

$$\partial_\tau n_B + (\partial_\mu u^\mu) n_B = 0. \quad (26)$$

Дополнительное предположение (22) относительно четырехвектора скорости позволяет еще более упростить гидродинамические уравнения

$$\partial_\tau \varepsilon + \frac{\partial_\mu \tilde{x}^\mu - 1}{\tau} (\varepsilon + p) = 0, \quad (27)$$

$$\partial_\tau n_B + \frac{\partial_\mu \tilde{x}^\mu - 1}{\tau} n_B = 0. \quad (28)$$

Последнее уравнение интегрируется непосредственно, даже без фиксации уравнения состояния,

$$n_B(\tau) = n_B(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{(\partial_\mu \tilde{x}^\mu - 1)}, \quad (29)$$

где  $\tau_0$  — начальный момент эволюции. Для того чтобы найти зависимость  $\varepsilon(\tau)$ , необходимо систему уравнений (27), (28) дополнить уравнением состояния (5). Тогда эволюция плотности энергии системы будет задаваться как

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{(1+c_s^2)(\partial_\mu \tilde{x}^\mu - 1)}. \quad (30)$$

В частном случае бьеркенского сценария (23) получаем (ср. с [20])

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{(1+c_s^2)}, \quad (31)$$

$$n_B(\tau) = n_B(\tau_0) \frac{\tau_0}{\tau}. \quad (32)$$

Наряду с описанием столкновений тяжелых ионов интересен и случай радиального разлета как модель эволюции ранней Вселенной. Нетрудно убедиться, что в общем случае в рамках высказанных предположений для  $d$ -мерного радиального разлета справедливы формулы

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{d(1+c_s^2)}, \quad (33)$$

$$n_B(\tau) = n_B(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^d; \quad (34)$$

т. е. с увеличением  $\tau$  для радиального изотропного разлета плотность убывает существенно быстрее, при этом показатель степени спада пропорционален размерности пространства  $d$ .

Для сопоставления с результатами Бьркена был рассчитан разлет в пустоту однородного слоя материи конечной ширины с нулевым начальным профилем скорости. Использовалось уравнение состояния ультрарелятивистского идеального газа адронов, т. е. показатель степени  $\tau$  в ур. (31) равен  $-(1 + c_s^2) = -4/3$ . Как видно из рис. 3, наклон численного решения асимптотически воспроизводит бьркенский результат, но отклонения последнего от точного решения велики в начальной стадии разлета фибрбола.

Гидродинамическая эволюция заканчивается, а распределения «замораживаются» в некоторой точке, если в ней перестают выполняться условия применимости гидродинамики. Мы используем простое условие замораживания: локальная плотность энергии в ячейке решетки ниже некоторого значения  $\varepsilon_{fr} \sim 0,3 \text{ ГэВ/фм}^3$ . При использовании локального критерия замораживание происходит с поверхности расширяющейся системы в течение всего времени эволюции. Уход «замороженной» материи из системы влияет на последующую эволюцию соседних ячеек, что приводит к увеличению  $\langle \varepsilon \rangle$  и уменьшению полного времени эволюции (см. рис. 3). Этот эффект не учитывается в имеющихся аналитических решениях гидродинамических уравнений.

**3.3. Трехмерный разлет.** Не существует точного аналитического решения гидродинамических уравнений в трехмерном случае, если не считать лоренц-инвариантного сферического разлета (33), (34), который по сути является одномерным. При столкновении релятивистских ядер система быстро эволюционирует в продольном направлении и медленно — в поперечном. Это обстоятельство используется в феноменологических моделях, где расширение в продольном направлении описывается лоренц-инвариантным бьркенским решением в пренебрежении или при слабой связи продольного расширения с поперечным движением [21, 22]. Применимость этого приближения зависит от энергии столкновения.

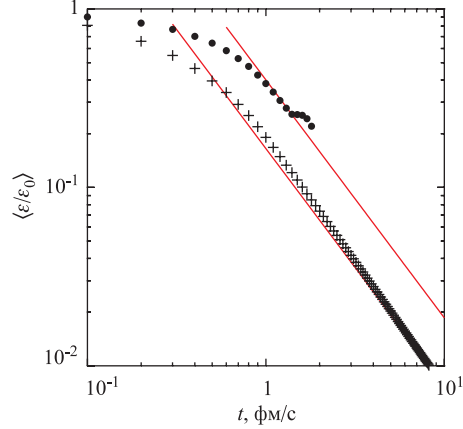


Рис. 3. Уравнение эволюции средней (по объему) плотности энергии  $\langle \varepsilon \rangle$ , полученной численным решением одномерной гидродинамики с учетом (кружки) и без учета (крестики) замораживания, с бьркенским аналитическим решением (прямые линии с наклоном  $-4/3$ , нормировка произвольная)

В качестве примера рассмотрим трехмерный разлет файерболла, начальное состояние которого примерно соответствует центральному Pb + Pb-столкновению при энергии 160 ГэВ на нуклон: однородный лоренц-сжатый цилиндр  $\pi R^2(2R)/\gamma$  радиуса  $R = 4$  фм ( $\gamma$  — гамма-фактор системы центра масс) с плотностью энергии  $\varepsilon_0 \approx 10$  ГэВ/фм<sup>3</sup> [23] и нулевым профилем скорости. Для определенности возьмем уравнение состояния ультррелятивистского газа пионов

$$p = \frac{\pi^2 g_\pi}{90} T^4 = \varepsilon/3, \quad (35)$$

где  $T$  — локальная температура и  $g_\pi = 3$  — фактор вырождения пионов.

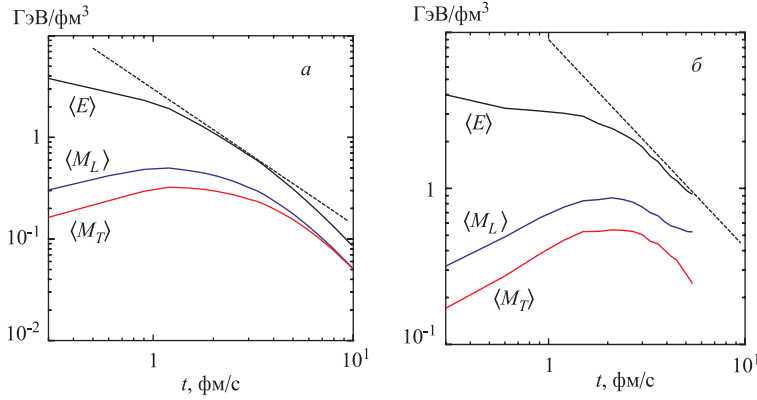


Рис. 4. Эволюция различных компонент тензора энергии-импульса. Начальное состояние файерболла отвечает однородному лоренц-сжатому цилиндру. Пунктирная линия симулирует бьержкенское решение  $\varepsilon \sim t^{-4/3}$ . Результаты получены с учетом (а) и без учета (б) процесса замораживания

Как видно из рис. 4, а, на начальной стадии разлета лоренц-сжатого цилиндра энергия системы  $\langle E \rangle$  спадает достаточно медленно, но сама система эффективно ускоряется в продольном направлении ( $\langle M_L \rangle > \langle M_T \rangle$ ). Далее разность  $\langle M_L \rangle - \langle M_T \rangle$  меняется слабо, но за счет расширения энергия  $\langle E \rangle$  убывает быстрее, и этот спад воспроизводится решением Бьержкена. На заключительной стадии  $\langle M_L \rangle \approx \langle M_T \rangle$  и поведение системы становится близким к сферическому разлету, поэтому энергия спадает еще быстрее. В приближении Бьержкена поперечное движение никак не связано с продольным, является чисто термодинамическим и определяется температурой (35). Поведение усредненных компонент тензора энергии-импульса несколько меняется, если включить процесс замораживания, рис. 4, б. Поскольку замораживаются в основном периферические ячейки с малой энергией,  $\varepsilon < \varepsilon_{fr}$ , то разность

$\langle M_L \rangle - \langle M_T \rangle$  остается практически постоянной. На последней стадии расширения скорость спада плотности энергии совпадает с бьеркинским значением  $-4/3$ , но, строго говоря, в этом случае приближение Бьеркена неприменимо.

Рассмотренные характеристики не являются наблюдаемыми. Переносчиками информации о свойствах горячей и сжатой материи могут служить слабо взаимодействующие с ядерной средой жесткие фотоны,  $e^+e^-$ - и  $\mu^+\mu^-$ -пары. В этой связи на рис. 5 представлена эволюция распределения по инвариантной массе  $e^+e^-$ -пар для того же случая, что и на рис. 4.

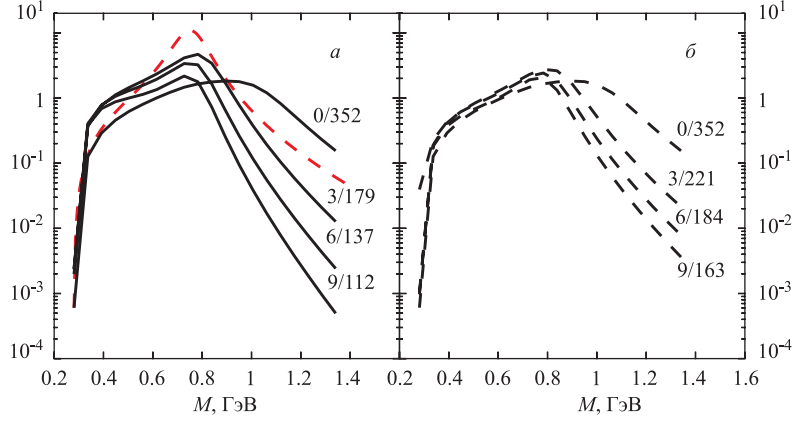


Рис. 5. Распределения по инвариантной массе  $e^+e^-$ -пар, рожденных в  $\pi\pi$ -взаимодействиях в области псевдобыстрот  $\eta \approx 0$  в момент времени  $t$ , рассчитанные численным решением трехмерных гидродинамических уравнений (а) и в модели продольного расширения Бьеркена (б). Точками показаны результаты для начального времени эволюции в пренебрежении эффектами среды (физический  $\rho$ -мезон) Две цифры, стоящие около кривых, указывают момент эволюции  $t$  (в фм/с) и среднюю температуру (в МэВ), достигнутую на это время

Согласно гипотезе векторной доминантности взаимодействие пионов идет через образование немассового  $\rho$ -мезона, который может конвертироваться в фотон с последующим распадом на  $e^+e^-$ -пару. В лидирующем порядке по электромагнитной константе связи  $\alpha = e^2/4\pi$  и в пренебрежении массами лептонов дифференциальная вероятность эмиссии дилептонов есть [24–26]:

$$\frac{d^8 N}{d^4 x d^4 q} = \frac{\alpha^2}{12\pi^4} \frac{R(q, T)}{e^{q_0/T} - 1}, \quad (36)$$

где  $R(q, T)$  — усредненная по спину спектральная функция фотонов и  $q^2 = M^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2$  — квадрат четырехимпульса лептонной пары.

Скорость эмиссии лептонной пары, представленная на рис. 5, есть интеграл от соотношения (36) по всему пространству, занимаемому системой на данный момент  $t$ , и по поперечным компонентам импульса пары.

Распределение по инвариантной массе дилептонов, представленное на рис. 5, указывает на сильное уширение спектральной функции  $\rho$ -мезона в горячей среде за счет перераспределения выхода лептонов как в сторону меньших, так и больших масс [26]. Изучение свойств  $\rho$ -мезона в среде является основной целью экспериментов с дилептонами [27]. Как форма инвариантного распределения, так и выход  $e^+e^-$ -пар меняются по ходу эволюции системы. Эволюция того же начального состояния, но рассчитанная в модели Бьеркена, приводит к заметно отличающимся распределениям дилептонов: из-за более высоких температур усилен (по сравнению с точной динамикой) выход лептонных пар с  $M$  выше значения массы физического  $\rho$ -мезона; более чем в два раза меняется абсолютная нормировка (за исключением, естественно, момента  $t = 0$ ). Надо отметить, что расхождение между этими модельными примерами нарастает со временем  $t$ .

Экспериментально измеряемой величиной является полный выход, т. е. соотношение (36) должно быть еще дополнительно проинтегрировано по  $t$ . Из представленных результатов следует, что ответ будет разный в зависимости от того, будет ли гидродинамическое расширение считаться точно или для этого будет использовано бьеркенское приближение, которое весьма популярно при оценках выхода дилептонов. Следует отметить, что рассчитанный нами интегральный выход лептонных пар не может быть непосредственно сопоставлен с экспериментом. Для такого анализа необходимо более обоснованно задать начальное состояние системы, воспользоваться более реалистическим уравнением состояния с учетом возможного фазового перехода, включить другие возможные источники дилептонов, в том числе и те, которые отвечают лептонному распаду адронов, образовавшихся на стадии замораживания системы. Кроме того, экспериментально дилептоны отбираются в определенной области параметра удара и измеряются в очень ограниченной области кинематических переменных, что влияет на форму и выход инвариантных распределений. Конкретный экспериментальный акцептанс должен быть аккуратно учтен при таком анализе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит и реализован метод численного решения релятивистских гидродинамических уравнений, описывающих стадию разлета возбужденной материи, образованной при столкновении тяжелых ионов. Существенным элементом метода является модификация схемы SHASTA путем введения корректирующих потоков, позволяющая как уменьшить эффекты численной диффузии, так и избежать возникающих осцилляций решения. Высокая точность численного метода продемонстрирована сравнением с двумя аналитическими решениями: точной одномерной задачи Римана и лоренц-инвариантного раз-

лета в режиме Бьеркена. Отмечается влияние эффекта замораживания на эволюцию системы, не учитываемого аналитическими решениями.

В качестве иллюстрации возможностей модели рассмотрена трехмерная эволюция файерболла, начальные условия которого примерно отвечают тем, что реализуются в Pb + Pb-столкновении при энергии  $\sim 160$  ГэВ на нуклон. Показано, что в этой области энергии термодинамические характеристики расширяющегося файерболла, оцененные с использованием одномерного лоренц-инвариантного решения Бьеркена, существенно отличаются от результатов, полученных численным решением точных релятивистских гидродинамических уравнений. Этот результат особенно важен для расчета процесса рождения лептонных пар, где традиционно гидродинамические оценки базируются на использовании приближенного бьеркенского решения. Это означает, что информация о свойствах адронов в условиях больших сжатий и высоких температур, извлекаемая из таких экспериментов с лептонами, существенно зависит от заложенной динамики, которая должна рассчитываться максимально аккуратно.

Авторы благодарны Ю. Иванову и В. Русских за полезные обсуждения. Работа частично поддержана Немецким исследовательским обществом (DFG project 436 RUS 113/558/0-2) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант РФФИ 03-02-04008).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1953. Т. 17. С. 51.
2. Фейнберг Е. Л. // Труды ФИАН. 1965. Т. 29. С. 155.
3. Розенталь И. Л. // УФН. 1975. Т. 116. С. 271.
4. Тонеев В. Д. и др. // ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. С. 1093.
5. Teaney D., Lauret J., Shuryak E. V. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 4783;  
Kolb P. F. et al. // Phys. Lett. B. 2001. V. 500. P. 232.
6. Molnar D., Gyulassy M. // Nucl. Phys. A. 2002. V. 697. P. 495 (Erratum-ibid // Nucl. Phys. A. 2002. V. 703. P. 893).
7. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика. М., Наука, 1988.
8. Courant R., Friedrichs K. O., Lewy H. // Math. Ann. 1928. V. 100. P. 32.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1966.
10. Boris J. P., Book D. L. // J. Comput. Phys. 1973. V. 11. P. 38.

11. *Book D. L., Boris J. P., Hein K.* // J. Comput. Phys. 1975. V. 18(3). P. 248.
12. *Boris J. P., Book D. L.* // J. Comput. Phys. 1976. V. 20(4). P. 397.
13. *Zalesak S.* // J. Comput. Phys. 1979. V. 31. P. 335.
14. *Rischke D. H., Bernard S., Maruhn J. A.* // Nucl. Phys. A. 1995. V. 595. P. 346; [nucl-th/9504018].
15. *Русских В. Н.* // Численные методы механики сплошной среды, сборник. 1997. Т. 1, вып. 5. С. 104.
16. *Courant R., Friedrichs K. O.* Supersonic flow and shock waves, N. Y., Springer, 1985.
17. *Hwa R. C.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2260;  
*Cooper F., Fry G., Schonberg E.* // Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 192.
18. *Chin C. B., Sudarshan C. B., Wang K. H.* // Phys. Rev. D. 1995. V. 12. P. 902.
19. *Bjorken J. P.* // Phys. Rev. D. 1984. V. 27. P. 140.
20. *Gyulassy M., Matsui T.* // Phys. Lett. B. 1986. V. 171. P. 419.
21. *Горенштейн М. И., Жданов В. И., Синюков Ю. М.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 833.
22. *Шуряк Э. В.* // ЯФ, 1972. Т. 16. С. 195;  
*Милехин Г. А.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 1185.
23. *Friman B., Nörenberg W., Toneev V. D.* // Eur. Phys. J. 1998. V. 3. P. 165.
24. *Gale C., Kapusta J.* // Nucl. Phys. B. 1991. V. 357. P. 65.
25. *Gale C., Lichard P.* // Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 33338.
26. *Rapp R., Wambach J.* // Adv. Nucl. Phys. 2000. V. 25. P. 1. (arXiv:hep-ph/9909229).
27. *Agakishiev G. et al. (CERES Collaboration)* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 1272;  
*Agakishiev G. et al. (CERES Collaboration)* // Phys. Lett. B. 1998. V. 422. P. 405;  
*Adamova D. et al. (CERES Collaboration)* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 042301;  
*Marin A. (CERES Collaboration)* // J. Phys. G. 2004. V. 30. P. S709 (arXiv:nucl-ex/0406007); J. Phys. G. 2004. V. 30. P. 2027.

Получено 27 июня 2005 г.



Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 13.07.2005.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,18. Уч.-изд. л. 1,67. Тираж 415 экз. Заказ № 54959.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)