

P11-2004-183

Э. А. Айрян, Я. Буша, Е. Е. Донец, И. Покорны,  
О. И. Стрельцова\*

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПАДА  
ВОЗМУЩЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ  
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА  
С ДИЛАТОНОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ТЕХНОЛОГИИ **МРІ****

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

---

\*E-mail:strel@jinr.ru

Айрян Э. А. и др.

P11-2004-183

Численное исследование распада возмущенных стационарных решений системы уравнений Янга–Миллса с дилатоном с использованием технологии MPI

В работе численно исследовалась нелинейная задача распада неустойчивых сферически-симметричных стационарных решений в системе уравнений Янга–Миллса с дилатоном, которая представляет собой связанную систему двух нелинейных эволюционных уравнений гиперболического типа. С целью уменьшения расчетного времени применялись параллельные вычисления с использованием нескольких процессоров. При решении трехдиагональных систем, возникающих после соответствующей дискретизации исходной задачи, были применены: параллельная реализация метода встречных прогонок, который эффективен для расчетов на двух процессорах, и метод разбиения системы на  $p$  групп, позволяющий проводить параллельные расчеты для произвольного числа  $p$  процессоров. Параллельные вычисления с применением технологии MPI проводились на кластере с использованием  $p$  процессоров, где  $p = 1, 2, 3, \dots, 7$ .

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2004

Перевод авторов

Hayryan E. A. et al.

P11-2004-183

Numerical Studies of Perturbed Static Solutions Decay in the Coupled System of Yang–Mills–Dilaton Equations with use of MPI technology

Numerical study results for nonlinear decay of perturbed static spherically symmetric regular solutions in the coupled system of Yang–Mills–dilaton equations are presented. The system under consideration is a coupled system of nonlinear evolution equations of a hyperbolic type. The parallel computing technique with use of multiprocessor computing system was applied in order to reduce sufficiently a total simulation time. We used parallelization of counter Thomas algorithm, which is effective for solving on two processors, as well as the partition method that allows one to solve the problem in parallel on  $p$  processors with the scope to solve tridiagonal systems of linear equations that arise from finite difference approximations to the original problem. Parallel computing with use of the message passing interface (MPI) was done on cluster with  $p = 1, 2, 3, \dots, 7$  processors.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2004

## ВВЕДЕНИЕ

При исследовании динамики нелинейных систем особую роль играют стационарные решения соответствующих нелинейных уравнений. Являясь точками локального экстремума функционала действия такие стационарные решения также могут претендовать на роль глобальных или промежуточных аттракторов в соответствующей эволюционной задаче Коши [1–3].

Проведенные в последние десять лет исследования, в том числе численный анализ гравитационного коллапса безмассовых полей материи, привели к открытию ряда новых неожиданных закономерностей: были обнаружены самоподобие и универсальность решений вблизи формирования сингулярностей, критическое поведение решений, закон масштабного преобразования массы образующейся черной дыры и др. [4, 5]. Еще более интересные результаты были получены при анализе коллапса нелинейно взаимодействующих безмассовых полей материи, таких как, например, поле Янга–Миллса [6]. В таких системах существуют неустойчивые стационарные регулярные решения с конечной энергией, которые, как оказалось, играют роль промежуточных аттракторов в задаче коллапса, а также выполняют роль «барьера» в функциональном пространстве решений, разделяя коллапсирующие решения и регулярные решения, описывающие рассеяние. Как оказалось позднее, роль гравитационного поля в таких системах не является определяющей; качественно похожие закономерности были обнаружены при численном моделировании коллапса нелинейных волн в плоском пространстве для поля Янга–Миллса в размерности  $5+1$  и других системах [7]. Это объясняется тем, что все эти системы являются надкритическими по терминологии систем уравнений в частных производных [8] и, в силу этого, демонстрируют качественно эквивалентные динамические свойства.

Как было показано в нашей предыдущей работе [9], к числу надкритических систем также относится связанная система уравнений Янга–Миллса с дилатонным полем. Дилатон — скалярное поле, естественно возникающее в теории суперструн; в низкоэнергетическом эффективном действии дилатон нелинейным образом (через экспоненту) взаимодействует с калибровочным полем Янга–Миллса. Дилатон также называют скалярным гравитоном, так как система калибровочных полей с дилатонным полем в плоском пространстве-времени обнаруживает свойства, схожие с самогравитирующей системой калибровочных полей (системой уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса).

При изучении процесса формирования сингулярности в связанной системе нелинейных волновых уравнений, описывающих взаимодействующие поля Янга–Миллса и дилатонного поля (ЯМд), было установлено следующее [9]. При однопараметрическом задании начального распределения поля Янга–Миллса в виде локализованной волны, распространяющейся к началу сферической системы координат  $r = 0$ , существует критическое значение

параметра  $a_{cr}$ , разделяющего режимы рассеяния ( $a < a_{cr}$ ) и сжатия, приводящего к формированию сингулярности ( $a > a_{cr}$ ). На роль «барьера» в функциональном пространстве решений, разделяющего эти режимы, могут претендовать неустойчивые стационарные решения, которые действительно существуют и были давно известны [10]. Таких решений бесконечно много и они могут быть параметризованы числом нулей  $N$  соответствующей функции Янга–Миллса. Все эти стационарные решения являются неустойчивыми, и число соответствующих неустойчивых мод для каждого такого решения тоже равно  $N$ . Собственные значения и собственные функции, описывающие неустойчивые моды стационарных регулярных решений в связанной системе уравнений ЯМд, были получены недавно в нашей работе [11].

Постановка задачи моделирования распада неустойчивых стационарных решений путем возмущения их собственных неустойчивых мод представляется совершенно естественной. Поэтому в настоящей работе в качестве начальных условий для эволюционной задачи рассматриваются возмущенные стационарные решения связанной системы Янга–Миллса с дилатоном, где в качестве возмущений берутся полученные ранее [11] собственные возмущения.

Одной из интересных особенностей стационарных решений системы ЯМд является быстрое смещение асимптотической области к большим значениям  $r$  с увеличением номера  $N$ , что обуславливает разработку адаптивных алгоритмов для проведения эволюционных расчетов. Для этих целей нами применялись два подхода: использование квазиравномерных сеток и масштабирования. Для расчетов мы использовали квазиравномерные сетки по пространственной переменной, экспоненциально сгущающиеся к центру симметрии  $r = 0$ , и вводили степенное масштабирование по радиальной координате. Для ускорения расчетов возникла необходимость использовать параллельные алгоритмы решения трехдиагональных систем, возникающих после дискретизации задачи.

Началом разработки методов решения трехдиагональных систем принято считать работу Томаса [12]. Полное описание метода прогонки и его разновидности, пригодных также для параллельных методов, можно найти в [13]. Первый параллельный алгоритм был предложен Хокни и Голубом в работе [14]. Параллельным и векторным методам решения линейных систем посвящена книга [15], где дан краткий обзор параллельных методов решения трехдиагональных и ленточных систем. Обширный список работ по алгоритмам параллельного решения трехдиагональных систем с 1965 г. по 1999 г. приведен на сайте [http://ta.twi.tudelft.nl/wagm/users/lin/Biblio/tri\\_sol.html](http://ta.twi.tudelft.nl/wagm/users/lin/Biblio/tri_sol.html).

В работе [16] был предложен метод разделения системы уравнений, предназначенный для случая, когда число процессоров намного меньше числа уравнений. В результате строится вспомогательная редуцированная система, причем каждому процессору соответствует одно уравнение этой системы. В

работе [17] установлено диагональное преобладание этой системы, тогда как численная устойчивость алгоритма Ванга проанализирована в работе [18].

В настоящей работе мы использовали новый метод разбиения исходной системы уравнений для дальнейшего распараллеливания, предложенный в [19]; этот метод мы будем ниже называть «Метод разбиения системы». Для распараллеливания мы использовали технологию MPI (Message Passing Interface), которая позволяет проводить вычисления на кластерах с многопроцессорной архитектурой.

Настоящая статья устроена следующим образом: в следующей главе приведена постановка задачи распада стационарных решений связанной системы Янга–Миллса с дилатоном, коротко рассмотрены результаты задач нахождения стационарных решений и собственных неустойчивых мод и предложенная вычислительная схема. Во второй главе приведены параллельные алгоритмы и MPI-подпрограммы решения трехдиагональных систем, возникающих после дискретизации задачи. В третьей главе представлены результаты моделирования задачи распада стационарных решений и проиллюстрирована эффективность выбранных параллельных алгоритмов.

## 1. ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА С ДИЛАТОНОМ

**1.1. Основные уравнения.** Связанная система уравнений Янга–Миллса с дилатоном (ЯМд) в пространстве Минковского размерности 3+1 описывается функционалом действия:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int \left( \frac{1}{2} (\partial\Phi)^2 - \frac{\exp(k\Phi)}{4g^2} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \right) d^3x dt, \quad (1)$$

где  $\Phi$  — дилатонное поле;  $F^{a\mu\nu}$  — тензор поля Янга–Миллса,  $k$  и  $g$  — дилатонная и калибровочная константы соответственно.

В сферически-симметричном случае дилатонное поле и поле ЯМ могут быть описаны двумя функциями  $\Phi(t, r)$  и  $f(t, r)$ :

$$\Phi = \Phi(r, t), \quad A_0^a = 0, \quad A_i^a = \epsilon_{aik} \frac{x^k}{r^2} \left( f(r, t) - 1 \right), \quad (2)$$

где  $A_i^a$  — потенциалы поля ЯМ. После подстановки соотношений (2) в (1) и замены  $\Phi \rightarrow \Phi/k$ ,  $r \rightarrow (k/g)r$ ,  $t \rightarrow (k/g)t$  и  $S \rightarrow g * kS$  в действии исчезают зависимости от двух параметров  $k$  и  $g$ . Интегрирование в (1) по угловым переменным позволяет представить эффективное действие в следующем виде [9]:

$$S = - \int \left[ \frac{1}{2} r^2 \Phi_r^2 - \frac{1}{2} r^2 \Phi_t^2 + e^\Phi \left( f_r^2 - f_t^2 + \frac{(f^2 - 1)^2}{2r^2} \right) \right] dr dt. \quad (3)$$

Тогда уравнения движения

$$f_{tt} + f_t \Phi_t - f_{rr} - f_r \Phi_r = \frac{f(1-f^2)}{r^2}, \quad (4a)$$

$$\Phi_{tt} - \Phi_{rr} - \frac{2\Phi_r}{r} = -\frac{e^\Phi}{r^2} \left( f_r^2 - f_t^2 + \frac{(f^2-1)^2}{2r^2} \right) \quad (4b)$$

вытекают из (3) как необходимое условие экстремума функционала.

Система нелинейных уравнений (4) имеет две особые точки  $r = 0$  и  $r = \infty$ . Мы будем рассматривать только решения, ограниченные в этих точках.

Требованию регулярности при  $r = 0$  удовлетворяют решения, представимые в виде ряда в окрестности этой точки

$$\begin{aligned} f(t, r)_{r \rightarrow 0} &= \pm 1 - b(t)r^2 + O(r^4), \\ \Phi(t, r)_{r \rightarrow 0} &= \Phi_0(t) + \Phi_2(t)r^2 + O(r^4). \end{aligned} \quad (5)$$

где  $b(t)$ ,  $\Phi_0(t)$ ,  $\Phi_2(t)$  — ограниченные гладкие функции. Инвариантность уравнений (4) относительно замены  $f \rightarrow -f$  позволяет выбрать значение  $f(t, 0) = 1$ . И так как преобразование  $\Phi \rightarrow \Phi + \lambda$ ,  $r \rightarrow r \exp[-\lambda/2]$  с  $\lambda = \text{const}$  не меняет уравнений, то можно положить  $\Phi_0(0) = 0$ .

Из разложения (5) для  $f(t, r)$  и  $\Phi(t, r)$  получаем краевые условия в точке  $r = 0$

$$f(t, r = 0) = 1, \quad \Phi_r(t, r = 0) = 0. \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что асимптотическое поведение регулярных решений при  $r \rightarrow \infty$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(t, r)_{r \rightarrow \infty} &= \pm \left( 1 - \frac{c}{r} + O(r^{-2}) \right), \\ \Phi(t, r)_{r \rightarrow \infty} &= \Phi_\infty - \frac{d}{r} + O(r^{-4}), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $c, d$  и  $\Phi_\infty$  — константы. Из (7) получаем краевые условия на бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} f(t, r) &= \pm 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f_r(t, r) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(t, r) &= \Phi_\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r(t, r) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим важное свойство рассматриваемой системы — так как подынтегральная функция (3) не содержит явно время  $t$ , то энергия

$$E = \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} r^2 \Phi_r^2 + \frac{1}{2} r^2 \Phi_t^2 + e^\Phi \left( f_r^2 + f_t^2 + \frac{(f^2-1)^2}{2r^2} \right) \right] dr \quad (9)$$

сохраняется, т.е.  $dE/dt = 0$ . Это единственный интеграл движения у рассматриваемой системы.

**1.2. Стационарные решения.** При нахождении стационарных решений система эволюционных уравнений (4) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$f'' + f'\Phi' = -\frac{f(1-f^2)}{r^2}, \quad (10a)$$

$$\Phi'' + \frac{2\Phi'}{r} = \frac{e^\Phi}{r^2} \left[ f'^2 + \frac{(f^2-1)^2}{2r^2} \right], \quad (10б)$$

вытекающей из (3) как необходимое условие экстремума на множестве функций  $\{f(r), \Phi(r)\}$ , удовлетворяющих условиям

$$f(0) = 1, \quad \Phi'(0) = 0, \quad f(\infty) = (-1)^N, \quad \Phi'(\infty) = 0. \quad (11)$$

Связанная система нелинейных волновых уравнений (4) имеет счетное множество стационарных регулярных решений, которое может быть параметризовано через число нулей  $N$  функции ЯМ [10].

В работе [10] стационарные решения были получены численно методом стрельбы по отношению к параметру  $b$  (5). В нашей недавней работе [11] стационарные решения альтернативно получены как решения нелинейной краевой задачи на конечном интервале  $r \in [0, R_\infty]$  с краевыми условиями

$$f(0) = 1, \quad \Phi'(0) = 0, \quad f(R_\infty) = (-1)^N, \quad \Phi'(R_\infty) = 0,$$

где  $R_\infty$  есть заданная «актуальная бесконечность».

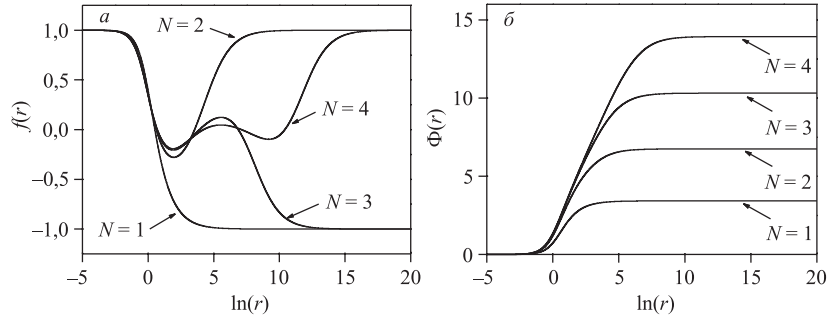


Рис. 1. Стационарные решения с  $N = 1, 2, 3, 4$ : а) функция ЯМ  $f(r)$ ; б) дилатонная функция  $\Phi(r)$

В качестве примеров на рис. 1 представлены стационарные решения с  $N = 1, 2, 3, 4$  нулями функции ЯМ: функция ЯМ  $f_N(r)$  и дилатонные функции  $\Phi_N(r)$ .

**1.3. Неустойчивые моды стационарных решений.** Проведенный в [10] анализ устойчивости стационарных решений относительно линейных возмущений методом фазовых функций Калоджеро–Дегаспериса [20] показал, что стационарное решение с  $N$  нулями функции ЯМ имеет  $N$  неустойчивых мод. Соответствующие собственные функции и собственные значения были получены численно [11] как решения матричной задачи Штурма–Лиувилля. В работе [11] подробно изложен метод решения, ниже коротко приведем полученные результаты.

В рамках линейной теории возмущений рассматривались сферически-симметричные возмущения вида

$$f(t, r) = f_N(r) + \epsilon V_f(r) e^{i\omega t}, \quad \Phi(t, r) = \Phi_N(r) + \epsilon V_\Phi(r) e^{i\omega t}, \quad (12)$$

где  $f_N(r)$ ,  $\Phi_N(r)$  – стационарное решение с  $N$  нулями функции ЯМ. Критерием неустойчивости стационарных решений является наличие хотя бы одного отрицательного собственного значения  $\lambda = -\omega^2$ . Для решений с  $N = 1, 2, 3, 4$  были получены численно соответствующие собственные функции и собственные значения  $\lambda_N^j, j = 1, \dots, N$ . Поскольку для каждого фиксированного стационарного решения с  $N$  нулями функции ЯМ собственные значения быстро стремятся к нулевому значению снизу с увеличением  $j$ , то имеет смысл рассматривать только основные возмущения:  $V_f^1, V_\Phi^1, \lambda_N^1$ , которые и определяют время жизни данного неустойчивого стационарного решения.

Одной из интересных особенностей рассматриваемой задачи является быстрое смещение асимптотической области к большим значениям  $r$  с увеличением номера  $N$  (которое параметризует счетное множество стационарных решений). В таблице приведены достаточные значения  $R_\infty$ , необходимые для вычисления собственных неустойчивых мод стационарных решений с  $N = 1, \dots, 4$ , и первые (наименьшие) собственные значения. На рис. 2 представлены собственные функции  $V_f^1$  и  $V_\Phi^1$  стационарных решений с  $N = 1, \dots, 4$ .

Первые собственные значения  $\lambda_N^1$  и значение параметра  $R_\infty$

N	1	2	3	4
$\lambda_N^1$	$9,0566 \times 10^{-2}$	$7,5382 \times 10^{-2}$	$4,9346 \times 10^{-2}$	$4,3455 \times 10^{-2}$
$R_\infty$	$2 \times 10^3$	$2 \times 10^5$	$2 \times 10^7$	$1 \times 10^8$



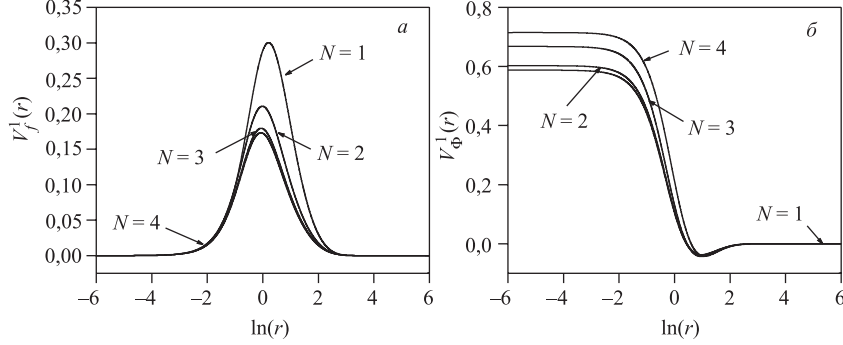


Рис. 2. Основные собственные возмущения стационарных решений с  $N = 1, 2, 3, 4$ : а) функции ЯМ  $f_N(r)$ ; б) дилатонной функции  $\Phi_N(r)$

**1.4. Начально-краевая задача для системы ЯМд.** Для изучения эволюции возмущенных стационарных регулярных решений рассмотрим следующую постановку начально-краевой задачи для системы нелинейных волновых уравнений (4).

*Начальные условия.* В качестве начальных условий для функции Янга-Миллса  $f(t, r)$  и дилатонной функции  $\Phi(t, r)$  рассмотрим возмущенные решения (12) с различными значениями параметра  $\epsilon$ . Из (12) получаем значения функций и производных по времени при  $t = 0$ :

$$f(0, r)f^0(r) = f_N(r) + \epsilon V_f(r), \quad f_t(0, r) = \tilde{f}^0(r) = \epsilon \sqrt{\lambda} V_f(r); \quad (13)$$

$$\Phi(0, r) = \Phi^0(r) = \Phi_N(r) + \epsilon V_\Phi(r), \quad \Phi_t(0, r) = \tilde{\Phi}^0(r) = \epsilon \sqrt{\lambda} V_\Phi(r). \quad (14)$$

Как отмечалось выше, система нелинейных волновых уравнений имеет две особые точки  $r = 0$  и  $r = \infty$ , в которых из требования регулярности были получены *краевые условия* (6) и (8). Для численного решения задачи полубесконечный интервал  $r \in [0, \infty)$  заменялся конечным отрезком  $r \in [0, R_\infty]$ . При этом значение  $R_\infty$  выбиралось таким, чтобы возмущение за все время счета  $T$  не успевало достичь правого края.

Таким образом, *начально-краевая задача* для связанной системы уравнений Янга-Миллса с дилатоном имеет вид

$$(e^\Phi f_t)_t = (e^\Phi f_r)_r + e^\Phi \frac{f(1-f^2)}{r^2}, \quad (15)$$

$$r^2 \Phi_{tt} = (r^2 \Phi_r)_r - e^\Phi \left( f_r^2 - f_t^2 + \frac{(f^2 - 1)^2}{2r^2} \right), \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R_\infty; \quad (16)$$

$$f(0, r) = f^0(r), \quad f_t(0, r) = \tilde{f}^0(r),$$

$$\Phi(0, r) = \Phi^0(r), \quad \Phi_t(0, r) = \tilde{\Phi}^0(r), \quad 0 < r < R_\infty; \quad (17)$$

$$f(t, 0) = 1, \quad \Phi_r(t, 0) = 0, \quad (18)$$

$$f(t, R_\infty) = f^0(R_\infty), \quad \Phi(t, R_\infty) = \Phi^0(R_\infty), \quad 0 < t < T. \quad (19)$$

Как было отмечено выше, для численного исследования эволюции возмущенных стационарных решений приходится работать с большими массивами данных, возникающих из-за необходимости моделировать эволюцию на больших интервалах по пространственной координате  $r \in [0, R_\infty]$ . В этом случае можно обеспечить значительную редукцию используемых массивов, если ввести масштабированную пространственную переменную следующим образом:

$$x = r^\mu, \quad r = x^{1/\mu}, \quad 1/\mu = \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Выбор значения степени  $\nu$  делается в зависимости от номера  $N$  рассматриваемого стационарного решения и соответствующего значения параметра  $R_\infty$ .

После перехода к переменной  $x$  в уравнениях (15) и (16) получим

$$\nu x^{\nu-1} (e^\Phi f_t)_t = (\mu x^{1-\nu} e^\Phi f_x)_x + V_1, \quad (20)$$

$$\nu x^{3\nu-1} \Phi_{tt} = (\mu x^{1+\nu} \Phi_x)_x + V_2, \quad (21)$$

где функции  $V_1$  и  $V_2$  имеют вид

$$V_1 = \frac{\nu}{x^{1+\nu}} e^\Phi f(1-f^2), \quad (22)$$

$$V_2 = -e^\Phi \left( \mu x^{1-\nu} f_x^2 - \nu x^{\nu-1} f_t^2 + \frac{\nu}{x^{\nu+1}} \frac{(f^2-1)^2}{2} \right). \quad (23)$$

Функционал энергии (9) в новой переменной  $x$  принимает вид

$$E = \int_0^{+\infty} \left[ \frac{x^{3\nu-1}}{2\mu} \Phi_t^2 + \frac{\mu}{2} x^{\nu+1} \Phi_x^2 + \nu x^{\nu-1} e^\Phi f_t^2 + \right. \\ \left. + \mu x^{1-\nu} e^\Phi f_x^2 + e^\Phi \frac{(f^2-1)^2}{2\mu x^{1+\nu}} \right] dx. \quad (24)$$

Теперь построим разностную схему для начально-краевой задачи (15)–(19) на равномерной сетке по переменной  $x$ , для которой методом энергетических неравенств [21] получим энергетическое тождество.

Зададим в области  $\bar{D} = \{0 \leq x \leq x_\infty, 0 \leq t \leq T\}$  прямоугольную сетку  $\Omega = \hat{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ , квазиравномерную по пространственной координате  $x$  и равномерную по временной координате  $t$  с шагом  $\tau$ :

$$\hat{\omega}_h = \{x_i \in [0, x_\infty], i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = x_\infty\},$$

$$x_i - x_{i-1} = h_i, \quad h_i = 0, 5(h_i + h_{i+1});$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, K, t_0 = 0, t_K = T\}.$$

Рассмотрим сеточное функциональное пространство  $H_h$ , состоящее из функций, заданных на сетке  $\hat{\omega}_h$ . Определим на нем скалярное произведение и норму следующим образом:

$$(y, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_i, \quad \|y\|_* = \sqrt{(y, y)_*}, \quad y, v \in H_h. \quad (25)$$

Далее, положим

$$\begin{aligned} (y, v] &= \sum_{i=1}^N y_i v_i h_i, & \|y\| &= \sqrt{(y, y]}, \\ [y, v) &= \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i h_{i+1}, & \|[y &= \sqrt{[y, y)}. \end{aligned}$$

Следуя [21], введем следующие обозначения:  $y_i$  — значения сеточной функции  $y$  в узле  $(x_i, t_j)$ ,  $\hat{y}_i = y(x_i, t_{j+1})$  и  $\check{y}_i = y(x_i, t_{j-1})$ ; для левой, правой и центральной первых разностных производных по времени:  $y_t = (\hat{y}_i - y_i)/\tau$ ,  $y_{\bar{t}} = (y_i - \check{y}_i)/\tau$ ,  $y_{t^\circ} = (\hat{y}_i - \check{y}_i)/(2\tau)$ ; для первых разностных производных по  $x$ :  $y_x = (y_{i+1} - y_i)/h_{i+1}$ ,  $y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h_i$ ,  $y_{\hat{x}} = (y_{i+1} - y_i)/h_i$ . Для упрощения записи для сеточных функций будем использовать исходные обозначения  $f$  и  $\Phi$ . Операторы разностного дифференцирования второго порядка для функций  $f$  и  $\Phi$  представим в виде

$$(\Lambda_{tt}^f f)_i = \nu x_i^{\nu-1} (e^{\frac{\Phi_i + \hat{\Phi}_i}{2}} f_{\bar{t}})_{t,i}, \quad (\Lambda_{tt}^\Phi \Phi)_i = \nu x_i^{3\nu-1} \Phi_{\bar{t},i} \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_{xx}^f f)_i &= (k f_{\bar{x}})_{\hat{x},i}, \quad k_i = \frac{1}{2}(a_i + a_{i-1}), \quad a_i = \frac{\mu}{2} \tilde{x}_i^{1-\nu} p_i, \\ p_i &= (e^{\frac{\Phi_i + \hat{\Phi}_i}{2}} + e^{\frac{\Phi_i + \check{\Phi}_i}{2}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_{xx}^\Phi \Phi)_i &= (\mu \tilde{x}_i^{1+\nu} \Phi_{\bar{x}})_{\hat{x},i}, & i &= 1, 2, \dots, N-1, \\ (\Lambda_{xx}^\Phi \Phi)_0 &= \frac{\mu \tilde{x}_1^{1+\nu} \Phi_{x,0}}{h_1}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{x}_i = x_i - 0,5h_i$ ,  $\hat{x}_i = x_i + 0,5h_i$ . Вводя произвольный вещественный параметр  $\sigma$ , рассмотрим однопараметрическое семейство схем с весами для задачи (17)–(21):

$$\Lambda_{tt}^f f = \Lambda_{xx}^f (\sigma \hat{f} + (1-2\sigma)f + \sigma \check{f}) + V_1, \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{tt}^{\Phi} \Phi &= \Lambda_{xx}^{\Phi} \left( \sigma \hat{\Phi} + (1 - 2\sigma)\Phi + \sigma \check{\Phi} \right) + V_2; \\
f(0, x) &= f^0(x), \quad f_t(0, x) = \check{f}^0(x), \\
\Phi(0, x) &= \Phi^0(x), \quad \Phi_t(0, x) = \check{\Phi}^0(x), \\
f(t, 0) &= 1, \quad f(t, x_N) = f^0(x_N), \\
(\Lambda_{tt}^{\Phi} \Phi)_{,0} &= \Lambda_{xx}^{\Phi} \left( \sigma \hat{\Phi} + (1 - 2\sigma)\Phi + \sigma \check{\Phi} \right)_{,0} + V_{2,0}, \\
\Phi(t, x_N) &= \Phi^0(x_N).
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
(\Lambda_{tt}^{\Phi} \Phi)_{,0} &= \Lambda_{xx}^{\Phi} \left( \sigma \hat{\Phi} + (1 - 2\sigma)\Phi + \sigma \check{\Phi} \right)_{,0} + V_{2,0}, \\
\Phi(t, x_N) &= \Phi^0(x_N).
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
(\Lambda_{tt}^{\Phi} \Phi)_{,0} &= \Lambda_{xx}^{\Phi} \left( \sigma \hat{\Phi} + (1 - 2\sigma)\Phi + \sigma \check{\Phi} \right)_{,0} + V_{2,0}, \\
\Phi(t, x_N) &= \Phi^0(x_N).
\end{aligned} \tag{29}$$

Для построения консервативной разностной схемы с выполнением дискретного аналога закона сохранения энергии необходимо определить разностные аналоги выражений  $V_1$  (22) и  $V_2$  (23). Потенциальное слагаемое  $V_1$  запишем в виде, предложенном в работе [22] для кубической нелинейности:

$$V_1 = p \frac{\nu}{2x^{1+\nu}} \frac{G(\hat{f}) - G(\check{f})}{\hat{f} - \check{f}},$$

где  $G(f)$  определяется следующим образом:

$$G(f) = \int_0^f (u - u^3) du = \frac{f^2}{2} \left( 1 - \frac{f^2}{2} \right).$$

Учитывая, что для  $u \neq v$

$$H(u, v) = \frac{G(u) - G(v)}{u - v} = \frac{(u + v)(2 - u^2 - v^2)}{4},$$

получаем выражение для потенциала  $V_1$  в виде

$$V_1 = p \frac{\nu}{x^{1+\nu}} \frac{(\hat{f} + \check{f})(2 - \hat{f}^2 - \check{f}^2)}{8}. \tag{30}$$

Для определения дискретного аналога  $V_2$  умножим скалярно уравнение (26) на  $f_{t^\circ}$  и, замечая, что  $\sigma \hat{f} + (1 - 2\sigma)f + \sigma \check{f} = f + \sigma \tau^2 f_{\bar{t}t}$ , получим

$$(\Lambda_{tt}^f f, f_{t^\circ})_* - (\Lambda_{xx}^f f, f_{t^\circ})_* - \sigma \tau^2 (\Lambda_{xx}^f f_{\bar{t}t}, f_{t^\circ})_* - (V_1, f_{t^\circ})_* = 0. \tag{31}$$

Учитывая краевые условия (29), после вычисления скалярных произведений получаем равенство для уравнения (26)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( \left\| \sqrt{\nu} x^{\frac{\nu-1}{2}} e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}} f_{\bar{t}} \right\|_*^2 + \frac{1}{8} \left\| \sqrt{\mu \tilde{x}}^{\frac{1-\nu}{2}} (e^{\frac{\Phi}{2}} f_{\bar{x}} + e^{\frac{\Phi}{2}} \check{f}_{\bar{x}}) \right\|^2 - \right. \\
& \quad - \frac{\tau^2}{8} \left\| \sqrt{\mu \tilde{x}}^{\frac{1-\nu}{2}} (e^{\frac{\Phi}{2}} f_{\bar{x}})_{\bar{t}} \right\|^2 + \frac{1}{8} \left\| \sqrt{\mu \tilde{x}}^{\frac{1-\nu}{2}} (e^{\frac{\Phi}{2}} f_{\bar{x}} + e^{\frac{\Phi}{2}} \check{f}_{\bar{x}}) \right\|^2 - \\
& \quad \frac{\tau^2}{8} \left\| \sqrt{\mu \tilde{x}}^{\frac{1-\nu}{2}} (e^{\frac{\Phi}{2}} f_{\bar{x}})_{\bar{t}} \right\|^2 + \frac{\sigma \tau^2}{2} \left\| \sqrt{\mu \tilde{x}}^{\frac{1-\nu}{2}} e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}} f_{\bar{x}\bar{t}} \right\|^2 + \\
& \quad + \frac{\sigma \tau^2}{2} \left\| \sqrt{\mu \tilde{x}}^{\frac{1-\nu}{2}} e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}} f_{\bar{x}\bar{t}} \right\|^2 + \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} \left\| \sqrt{\frac{\mu}{x^{1+\nu}}} e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}} (1 - f^2) \right\|_*^2 + \frac{1}{4} \left\| \sqrt{\frac{\mu}{x^{1+\nu}}} e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}} (1 - \check{f}^2) \right\|_*^2 \right) + \\
& \quad + \frac{1}{2} (V_2, \Phi_{t^\circ})_* = 0,
\end{aligned}$$

из которого определяем дискретный аналог  $V_2$

$$\begin{aligned}
(V_2)_{,i} &= \left( \nu x^{\nu-1} f_{\bar{t}} f_t - \frac{\mu h_i}{4 h_i} \tilde{x}^{1-\nu} \left[ f_{\bar{x}} (\check{f}_{\bar{x}} + \hat{f}_{\bar{x}}) + \sigma \tau^2 (f_{\bar{x}\bar{t}}^2 + f_{\bar{x}t}^2) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu h_{i+1}}{4 h_i} \tilde{x}^{1-\nu} \left[ f_x (\check{f}_x + \hat{f}_x) + \sigma \tau^2 (f_{x\bar{t}}^2 + f_{xt}^2) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\nu}{8 x^{1+\nu}} \left\{ (1 - \hat{f}^2)^2 + 2(1 - f^2)^2 + (1 - \check{f}^2)^2 \right\} \right)_i e^{\Phi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\
(V_2)_{,0} &= -\frac{\mu}{4} \tilde{x}_0^{1-\nu} \left( f_{x,0} (\check{f}_{x,0} + \hat{f}_{x,0}) + \sigma \tau^2 (f_{\bar{x}\bar{t},1}^2 + f_{\bar{x}t,1}^2) \right) e^{\Phi_0}. \quad (32)
\end{aligned}$$

Заметим, что при вычислении скалярных произведений нами использовалось равенство

$$\frac{1}{\tau} [e^{\frac{\Phi}{2}} - e^{\frac{\check{\Phi}}{2}}] = e^{\frac{\Phi}{2}} \Phi_{t^\circ},$$

записанное с точностью до  $O(\tau^2)$ .

Для нахождения разностного аналога закона сохранения энергии умножим скалярно уравнение (27) на  $\frac{1}{2} \Phi_{t^\circ}$  и после сложения полученного выражения с уравнением  $\Lambda_{xx}^\Phi \left( \sigma \hat{\Phi} + (1 - 2\sigma) \Phi + \sigma \check{\Phi} \right)_{,0} + V_{2,0} = 0$ , умноженным на  $\frac{h_1}{2} (\Phi_{t^\circ})_{,0}$ , и уравнением (32), после умножения на 2, получаем *энергети-*

ческое тождество для разностной задачи (26)–(29):

$$\begin{aligned}
E_t^j &= 0, \tag{33} \\
E^j &= \|\sqrt{\nu}x^{\frac{\nu-1}{2}}e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}}f_{\check{t}}\|_*^2 + \frac{1}{8}\|\sqrt{\mu\check{x}}^{\frac{1-\nu}{2}}(e^{\frac{\Phi}{2}}f_{\check{x}} + e^{\frac{\check{\Phi}}{2}}\check{f}_{\check{x}})\|_*^2 - \\
&- \frac{\tau^2}{8}\|\sqrt{\mu\check{x}}^{\frac{1-\nu}{2}}(e^{\frac{\Phi}{2}}f_{\check{x}})_{\check{t}}\|_*^2 + \frac{\sigma\tau^2}{2}\|\sqrt{\mu\check{x}}^{\frac{1-\nu}{2}}e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}}f_{\check{x}\check{t}}\|_*^2 + \\
&+ \frac{1}{8}\|\sqrt{\mu\check{x}}^{\frac{1-\nu}{2}}(e^{\frac{\Phi}{2}}f_{\check{x}} + e^{\frac{\check{\Phi}}{2}}\check{f}_{\check{x}})\|_*^2 - \frac{\tau^2}{8}\|\sqrt{\mu\check{x}}^{\frac{1-\nu}{2}}(e^{\frac{\Phi}{2}}f_{\check{x}})_{\check{t}}\|_*^2 + \\
&+ \frac{\sigma\tau^2}{2}\|\sqrt{\mu\check{x}}^{\frac{1-\nu}{2}}e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}}f_{\check{x}\check{t}}\|_*^2 + \frac{1}{4}\|\sqrt{\frac{\nu}{x^{1+\nu}}}e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}}(1-f^2)\|_*^2 + \\
&+ \frac{1}{4}\|\sqrt{\frac{\nu}{x^{1+\nu}}}e^{\frac{\Phi+\check{\Phi}}{4}}(1-\check{f}^2)\|_*^2 + \frac{1}{2}\|\sqrt{\nu x^{3\nu-1}}\Phi_{\check{t}}\|_*^2 + \\
&+ \frac{1}{8}\|\sqrt{\mu\check{x}^{\nu+1}}(\Phi_{\check{x}} + \check{\Phi}_{\check{x}})\|_*^2 + \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2\|\sqrt{\mu\check{x}^{\nu+1}}\Phi_{\check{x}\check{t}}\|_*^2. \tag{34}
\end{aligned}$$

Как следует из полученного выражения, величина  $E^j$  неотрицательна для любых  $f, \check{f}, \Phi, \check{\Phi}$ , если потребовать  $\sigma > 1/4$ .

Энергетическое тождество (33) означает, что при значениях  $\sigma > 1/4$  разностная схема (26)–(29) безусловно устойчива по начальным данным в энергетической норме, определяемой функционалом (34), и выполняется дискретный аналог закона сохранения энергии (24):  $E = E^{j+1} = E^j = \dots = E^0$ .

*Итерационная схема.* Разностная задача (26)–(29) на каждом временном слое  $j$  решается следующим итерационным методом. Пусть  $s$  — номер итерации, тогда запишем потенциальное слагаемое  $V_1$  следующим образом:

$$V_1 = p \frac{\nu}{8x^{1+\nu}} \left\{ \check{f}(2 - \check{f}^2) + 2\hat{f}^{(s)} - \hat{f}^{(s+1)}[(\hat{f}^{(s)})^2 + \check{f}^2 + \hat{f}^{(s)}\check{f}] \right\}. \tag{35}$$

Перепишем уравнение (26) в виде линейного уравнения относительно  $\hat{f}_i^{(s+1)}$ :

$$A_i \hat{f}_{i-1}^{(s+1)} + B_i \hat{f}_i^{(s+1)} + C_i \hat{f}_{i+1}^{(s+1)} = D_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \tag{36}$$

$$A_i = \frac{\sigma}{h_i \check{h}_i} k_i, \quad C_i = \frac{\sigma}{h_{i+1} \check{h}_i} k_{i+1},$$

$$-B_i = A_i + C_i + \frac{x_i^{\nu-1} \nu}{\tau^2} e^{\frac{\Phi_1 + \check{\Phi}_1^{(s)}}{2}} + p_i \frac{\nu}{8x_i^{1+\nu}} \left\{ (\hat{f}_i^{(s)})^2 + \check{f}_i^2 + \hat{f}_i^{(s)} \check{f}_i \right\},$$

$$\begin{aligned}
-D_i &= \frac{x_i^{\nu-1}\nu}{\tau^2} e^{\frac{\Phi_i}{2}} \left( e^{\frac{\hat{\Phi}_i^{(s)}}{2}} + e^{\frac{\check{\Phi}_i}{2}} \right) f_i - e^{\frac{\Phi_i}{2}} \check{f}_i + \\
&\quad + p_i \frac{\nu}{8x_i^{1+\nu}} \left\{ \check{f}_i(2 - \check{f}_i^2) + 2\hat{f}_i^{(s)} \right\} + \\
&\quad + \frac{1-2\sigma}{\sigma} [A_i f_{i-1} - (A_i + C_i) f_i + A_{i+1} f_{i+1}] + \\
&\quad + [A_i \check{f}_{i-1} - (A_i + C_i) \check{f}_i + C_i \check{f}_{i+1}]. \quad (37)
\end{aligned}$$

Далее, запишем уравнение (28) относительно  $\hat{\Phi}_0^{(s+1)}$

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_0^{(s+1)} &= \hat{\Phi}_1^{(s)} + \frac{1-2\sigma}{\sigma} [\Phi_1 - \Phi_0] + \check{\Phi}_1 - \check{\Phi}_0 - \frac{\exp[\Phi_0]}{4\sigma \tilde{x}_1^{2\nu}} \times \\
&\quad \times \left[ (f_1 - f_0)(\hat{f}_1^{(s)} - \hat{f}_0^{(s)} + \check{f}_1 - \check{f}_0) + \right. \\
&\quad \left. + \sigma(\hat{f}_1^{(s)} - \hat{f}_0^{(s)} - f_1 + f_0)^2 + \sigma(f_1 - f_0 - \check{f}_1 + \check{f}_0)^2 \right] \quad (38)
\end{aligned}$$

и перепишем уравнение (27) в виде линейного уравнения относительно  $\hat{\Phi}_i^{(s+1)}$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_i \hat{\Phi}_{i-1}^{(s+1)} + \tilde{B}_i \hat{\Phi}_i^{(s+1)} + \tilde{C}_i \hat{\Phi}_{i+1}^{(s+1)} &= \tilde{D}_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (39) \\
\tilde{A}_i &= \frac{\sigma\mu}{h_i \tilde{h}_i} \tilde{x}_i^{1+\nu}, \quad \tilde{C}_i = \frac{\sigma\mu}{h_{i+1} \tilde{h}_i} \tilde{x}_{i+1}^{1+\nu}, \quad -\tilde{B}_i = \tilde{A}_i + \tilde{C}_i + \frac{x_i^{3\nu-1}\nu}{\tau^2}, \\
-\tilde{D}_i &= \frac{x_i^{3s-1}}{\mu\tau^2} (2\Phi_i - \hat{\Phi}_i) + V_{2,i} + \frac{1-2\sigma}{\sigma} [\tilde{A}_i \Phi_{i-1} - (\tilde{A}_i + \tilde{C}_i) \Phi_i + \\
&\quad + \tilde{C}_i \Phi_{i+1}] + [\tilde{A}_i \check{\Phi}_{i-1} - (\tilde{A}_i + \tilde{C}_i) \check{\Phi}_i + \tilde{C}_i \check{\Phi}_{i+1}].
\end{aligned}$$

Каждая итерация требует решения трех уравнений (36), (38) и (39). В качестве нулевой итерации использовалась формула

$$\hat{f}^{(0)} = 2f - \check{f}, \quad \hat{\Phi}^{(0)} = 2\Phi - \check{\Phi}.$$

Критерий остановки итерационного процесса был выбран в виде

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} | \hat{f}_i^{(s+1)} - \hat{f}_i^{(s)} | < \varepsilon \quad \text{и} \quad \max_{0 \leq i \leq N-1} | \hat{\Phi}_i^{(s+1)} - \hat{\Phi}_i^{(s)} | < \varepsilon. \quad (40)$$

Для решения полученных трехдиагональных систем (36) и (39) мы использовали два параллельных алгоритма, позволяющих производить расчеты на компьютерных кластерах с параллельной архитектурой.







В [19] доказана также следующая теорема, устанавливающая возможность применения метода прогонки для решения вспомогательной системы (43):

**Теорема 1.** *Если матрица системы (41) имеет диагональное преобладание и положительные элементы главной диагонали, то этими же свойствами обладает и матрица системы (43).*

Теперь уже не сложно описать алгоритм параллельного метода разбиения системы:

1. Каждый из  $p$  процессоров выполняет преобразования, приведенные выше для соответствующей группы уравнений (строки 12–32 подпрограммы в разд. 2.2).
2. Коэффициенты вспомогательной системы (43) пересылаются одному процессору (строки 47 и 83 разд. 2.2), который решает систему (43) и пересылает полученные решения  $x_{s_k}$  и  $x_{f_k}$   $k$ -му процессору (строки 69 и 85 подпрограммы в разд. 2.2).

3. Процессор с индексом  $k$  определяет остальные неизвестные по формулам

$$x_i = \hat{d}_i - \hat{a}_i \cdot x_{s_k} - \hat{c}_i \cdot x_{f_k}, \quad i = s_k + 1, \dots, f_k - 1$$

согласно (42) (строки 92–96 подпрограммы в разд. 2.2).

**2.2. MPI-подпрограммы метода разбиения системы.** Разностная задача (26)–(29) на каждом временном слое решается приведенным выше итерационным методом. Для решения трехдиагональных систем (36) и (39) нами использовались три подпрограммы, написанных на языке MPI Fortran:

- для однократного решения системы;
- для первого прохождения метода деления системы в случае, когда предполагается повторное решение системы с той же матрицей системы но с разными правыми частями;
- для повторного решения системы.

*Первое решение системы*

Для однократного решения системы мы используем подпрограмму со следующим названием и входными параметрами:

```
01 subroutine tridiag_partitioning_solution(a,b,c,d,x,n,ne,np2)
```

Для многократного решения следует использовать модифицированные подпрограммы для первого и повторного расчетов. В отличие от метода

встречных прогонок, пространство памяти выделенное для элементов верхней и нижней диагонали используется для вспомогательных коэффициентов. Поэтому на выходе используются массивы `auxa`, `auxb` и `auxc`. Кроме того, матрица вспомогательной интерфейс-системы одна и та же и ее можно сохранить в массивах `aa`, `ba` и `ca` для повторного счета. По сравнению с подпрограммой одноразового решения, в следующей подпрограмме `first_tridiag_partitioning_solution` добавлены строки 16, 19, 25 и 31.

```

01      subroutine first_tridiag_partitioning_solution
02      1 (a,b,c,d,aa,ba,ca,auxa,auxb,auxc,x,n,ne,np2)
03      include "headspppart.f"
04      include 'mpif.h' ! definition of MPI-objects
05      integer status(MPI_STATUS_SIZE) ! matrix
06      integer comm,typ,tag,ierr,myP,Pr
07      dimension a(0:n),b(0:n),c(0:n),d(0:n),x(0:n),work(8),
08      1 aa(0:npps),ba(0:npps),ca(0:npps),da(0:npps),xa(0:npps),
09      2 auxa(0:n),auxb(0:n),auxc(0:n)
10      common/mpl/comm,typ,tag,ierr,myP,Pr
11      c Each processor computes corresponding tasks
12      do i=kpt(myP)+2,kpt(myP+1)-1 ! forward elimination
13          a(i-1)=a(i-1)/b(i-1)
14          c(i-1)=c(i-1)/b(i-1)
15          d(i-1)=d(i-1)/b(i-1)
16          auxb(i-1)=b(i-1)
17          b(i)=b(i)-c(i-1)*a(i)
18          d(i)=d(i)-d(i-1)*a(i)
19          auxa(i)=a(i)
20          a(i)=-a(i-1)*a(i)
21      enddo
22      do i=kpt(myP+1)-3,kpt(myP)+1,-1 ! backward elimination
23          a(i)=a(i)-a(i+1)*c(i)
24          d(i)=d(i)-d(i+1)*c(i)
25          auxc(i)=c(i)
26          c(i)=-c(i)*c(i+1)
27      enddo
28      i=kpt(myP)
29      b(i)=b(i)-a(i+1)*c(i)
30      d(i)=d(i)-d(i+1)*c(i)
31      auxc(i)=c(i)
32      c(i)=-c(i)*c(i+1)
33      c Composing the auxiliary interface system
34      if (myP.eq.0) then
35          indk=kpt(0)
36          aa(1)=a(indk)
37          ba(1)=b(indk)
38          ca(1)=c(indk)
39          da(1)=d(indk)
40          indk=kpt(1)-1
41          aa(2)=a(indk)
42          ba(2)=b(indk)
43          ca(2)=c(indk)
44          da(2)=d(indk)
45          ind=2
46          do ip=1,Pr-1
47              call MPI_Recv(work(1),8,typ,ip,tag,comm,status,ierr)
48              ind=ind+1
49              aa(ind)=work(1)
50              ba(ind)=work(2)

```

```

51         ca(ind)=work(3)
52         da(ind)=work(4)
53         ind=ind+1
54         aa(ind)=work(5)
55         ba(ind)=work(6)
56         ca(ind)=work(7)
57         da(ind)=work(8)
58     enddo
59 c     Solving the auxiliary interface system
60     call first_tridiag_solution(aa,ba,ca,da,xa,npps,np2)
61 c     Definition of the processors boundary solutions
62     indk=kpt(0)
63     x(indk)=xa(1)
64     indk=kpt(1)-1
65     x(indk)=xa(2)
66     ind=1
67     do ip=1,Pr-1
68         ind=ind+2
69         call MPI_iSend(xa(ind),2,typ,ip,tag,comm,ierr)
70     enddo
71 else
72 c     Composing the auxiliary interface system
73     indk=kpt(myP)
74     work(1)=a(indk)
75     work(2)=b(indk)
76     work(3)=c(indk)
77     work(4)=d(indk)
78     indk=kpt(myP+1)-1
79     work(5)=a(indk)
80     work(6)=b(indk)
81     work(7)=c(indk)
82     work(8)=d(indk)
83     call MPI_Send(work(1),8,typ,0,tag,comm,ierr)
84 c     Definition of the processor boundary solutions
85     call MPI_Recv(work(1),2,typ,0,tag,comm,status,ierr)
86     indk=kpt(myP)
87     x(indk)=work(1)
88     indk=kpt(myP+1)-1
89     x(indk)=work(2)
90 endif
91 c     Determination of inner solutions for each processor
92     xleft=x(kpt(myP))
93     xright=x(kpt(myP+1)-1)
94     do i=kpt(myP)+1,kpt(myP+1)-2
95         x(i)=d(i)-xleft*a(i)-xright*c(i)
96     enddo
97     return
98 end

```

#### *Повторное решение системы*

При повторном решении достаточно преобразовать лишь элементы правой стороны, решить вспомогательную систему и определить остальные неизвестные. В подпрограмме `second_tridiag_partitioning_solution` по сравнению с подпрограммой `first_tridiag_partitioning_solution` отсутствуют строки 13, 14, 16, 17, 19, 20, 23, 25, 26, 29, 31, 32, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 49, 50, 51, 54, 55, 56, 74, 75, 76, 79, 80 и 81. Кроме того, в строках, где определяются преобразования коэффициентов `d`, вместо массивов `a`, `b` и `c` используются массивы `auxa`, `auxb` и `auxc`.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

**3.1. Физическая интерпретация результатов.** На основе предложенной вычислительной схемы была исследована эволюция возмущенных стационарных решений с  $N = 1, 2, 3$ , и 4 нулями функции Янга–Миллса. В качестве возмущений брались первые (основные) собственные моды стационарных решений. Расчеты эволюционной задачи проводились с начальными условиями (12) при различных значениях параметра  $\epsilon$ .

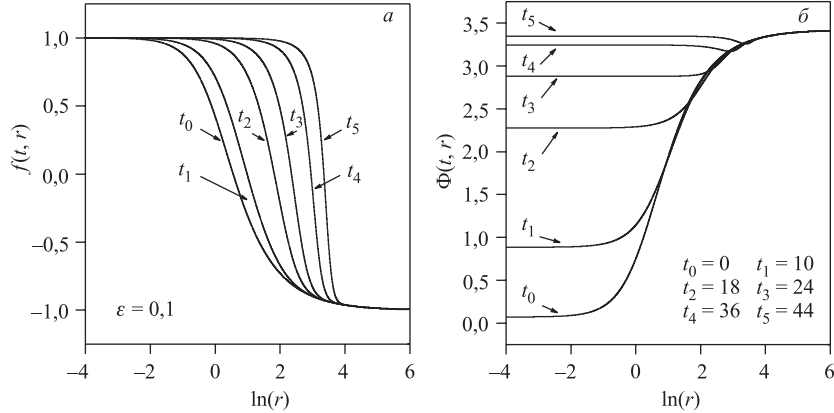


Рис. 3. Эволюция возмущенного стационарного решения с  $N = 1$  и  $\epsilon = 0, 1$

На рис. 3 представлена эволюция возмущенного стационарного решения с одним узлом функции Янга–Миллса с параметром  $\epsilon = 0, 1$  в разные моменты времени. В начале эволюции решения описываются выражением для линейных возмущений (12) (линейный режим). При дальнейшей эволюции волна поля Янга–Миллса распространяется по направлению к  $r = \infty$  (режим рассеяния).

На рис. 4 представлена эволюция возмущенного стационарного решения с одним узлом функции Янга–Миллса с параметром  $\epsilon = -0, 1$ . В начале эволюции решения описываются выражением для линейных возмущений (12) (линейный режим). При дальнейшей эволюции волна поля Янга–Миллса сжимается к центру симметрии  $r = 0$  за конечное время  $T$ . В момент времени  $t = T$  наблюдается неограниченный рост второй производной функции ЯМ и неограниченное убывание дилатонного поля  $\Phi \rightarrow -\infty$  в окрестности  $r = 0$ , что и означает формирование сингулярности (процесс формирования сингулярности).

Для всех рассмотренных стационарных решений было установлено, что при  $\epsilon > 0$  эволюционные решения описывают процесс рассеяния поля ЯМ по направлению к  $r \rightarrow \infty$ , а при  $\epsilon < 0$  эволюционные решения описывают процесс формирования сингулярности.

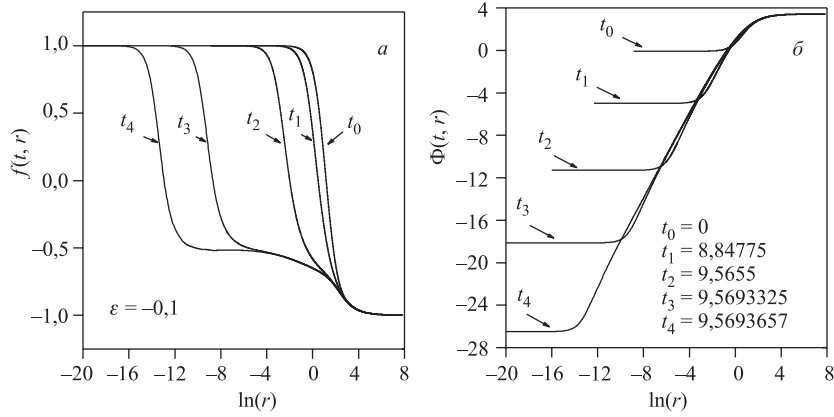


Рис. 4. Эволюция возмущенного стационарного решения с  $N = 1$  и  $\epsilon = -0,1$

Для разных стационарных решений время существования в линейном режиме увеличивается при возрастании  $N$  и при уменьшении значения параметра  $\epsilon$ .

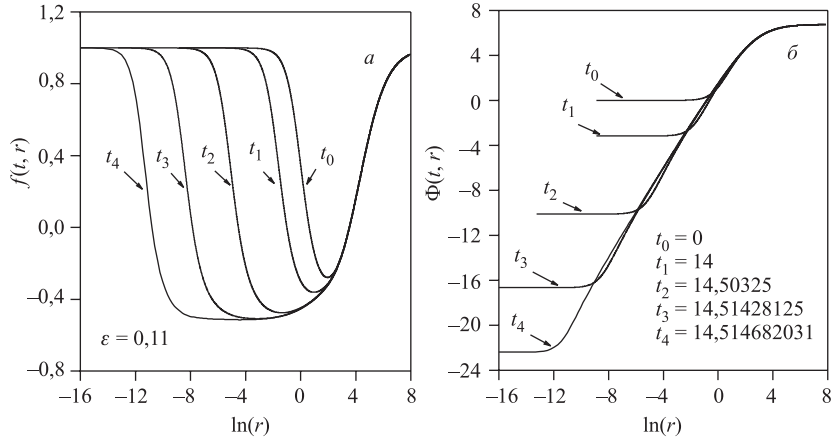


Рис. 5. Эволюция возмущенного стационарного решения с  $N = 2$  и  $\epsilon = -0,11$

В качестве примеров на рис. 5 представлена эволюция возмущенного стационарного решения с  $N = 2$  нулями функции ЯМ и параметром  $\epsilon = -0,11$  в разные моменты времени, а на рис. 6 — эволюция возмущенного стационарного решения с  $N = 3$  и параметром  $\epsilon = 0,1$ . Для эволюционных расчетов возмущенных стационарных решений с  $N = 2, 3$  параметр масштабирования

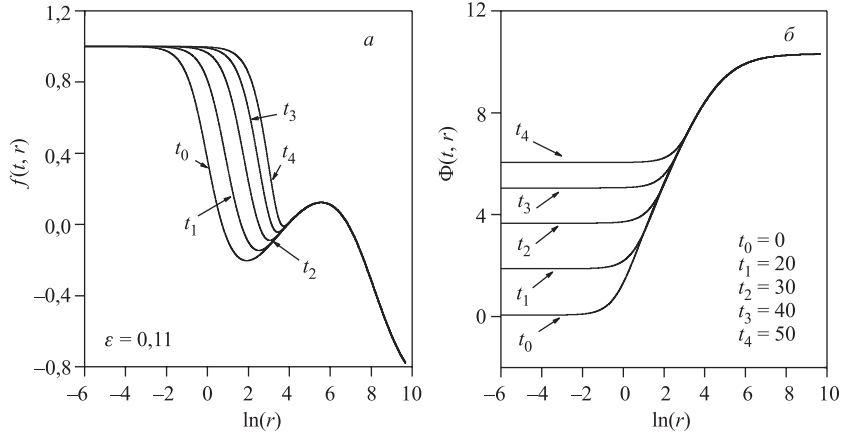


Рис. 6. Эволюция возмущенного стационарного решения с  $N = 3$  и  $\epsilon = 0, 1$

пространственной координаты был выбран  $\nu = 2$ , для решений с  $N = 4$  нулями функции ЯМ параметр  $\nu = 3$ .

**3.2. Эффективность параллельных вычислений.** Чтобы оценить, насколько быстрее удастся решить задачу при распараллеливании, вводится понятие «ускорение». Это может быть сделано разными способами. Отношение ускорения к  $p$  называется «эффективностью» [23]. Нами использовалось определение ускорения как отношения времени решения задачи на одном процессоре к времени решения той же задачи на системе из  $p$  таких же процессоров —  $T_1/T_p$ .

На рис. 7, *a* приведена зависимость отношения  $T_1/T_p$  от числа процессоров  $p$ , для расчетов на кластере с числом процессоров  $p = 2, 3, \dots, 7$ .

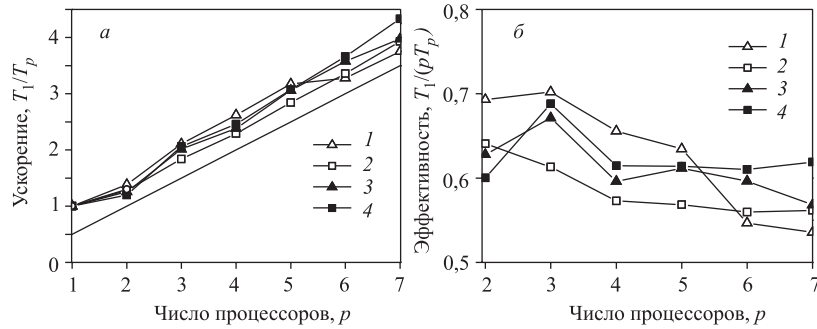


Рис. 7. Ускорение и эффективность расчетов при параллельных вычислениях

Кривые 1 и 2 соответствуют расчетам с количеством узловых точек  $n = 189991$ , для кривых 3 и 4  $n = 56000$ . Нижняя прямая, соответствующая значениям  $p/2$ , приведена для сравнения.

Для  $p = 2$  также выделено значение ускорения для метода встречной прогонки, которое несколько выше ускорения для метода разбиения, но разница не существенна.

На рис. 7, б представлены соответствующие значения эффективности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нелинейная эволюционная задача распада неустойчивых стационарных решений в системе связанных уравнений Янга–Миллса с дилатоном решалась численно. В качестве начальных условий для эволюционной задачи рассматривались стационарные решения, возмущенные собственными неустойчивыми модами, полученными в рамках линейной теории возмущений. Рассматриваемые стационарные решения образуют счетное множество и их можно параметризовать числом нулей  $N$  функции Янга–Миллса. Одним из свойств этих стационарных решений является быстрое смещение эффективной асимптотической области к большим значениям  $r$  с увеличением номера  $N$ , что потребовало разработки адаптивного алгоритма для эволюционной задачи. Для ускорения вычислений и редукции используемых массивов данных мы использовали квазиравномерные сетки по пространственной переменной, экспоненциально сгущающиеся к центру симметрии  $r = 0$ , а также вводили степенное масштабирование по радиальной координате. Тем не менее, эффективное время расчетов оказывалось недопустимо большим (до нескольких суток работы с использованием одного процессора), что привело к необходимости использования параллельных вычислений с использованием нескольких процессоров. Для решения трехдиагональных систем нами использовалась параллельная реализация метода встречных прогонок, эффективного для расчетов на двух процессорах, и метод разбиения системы, позволяющий проводить параллельные расчеты для произвольного числа процессоров. Параллельные вычисления проводились на кластере с использованием  $p$  процессоров от 1 до 7. Проведенные численные эксперименты показали, что ускорение расчетов порядка  $p/2$ . Расчеты, проведенные с использованием двух параллельных алгоритмов решения трехдиагональных систем, показали эффективность применения технологии MPI.

**Благодарности.** Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Е. П. Жидкова и Т. Л. Бояджиева за полезные обсуждения работы, Т. Ф. Сапожникову и А. П. Сапожникову за помощь при освоении и внедрении технологии MPI.



Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: гранты № 02-01-00606, № 04-01-00490; РФФИ–БРФФИ № 04-01-81011).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Bizon P., Tabor Z.* On blowup for Yang–Mills fields // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 121701.
2. *Самарский А. А. и др.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
3. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
4. *Choptuik M. W.* Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 70. No. 1. P. 9–12.
5. *Gundlach C.* Echoing and scaling in Einstein–Yang–Mills critical collapse // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 55. P. 6002–6013; *Gundlach C.* Critical phenomena in gravitational collapse (Physics Reports) // *Phys. Rept.* 2003. V. 376. P. 339–405.
6. *Choptuik M. W., Chmaj T., Bizon P.* Critical Behaviour in Gravitational Collapse of a Yang–Mills Field // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 77. Is. 3. P. 424–427.
7. *Bizon P.* Formation of Singularities in Yang–Mills Equations // *Acta Phys. Polon. B.* 2002. V. 33. P. 1893–1922.
8. *Klainerman S.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. V. 29. Birkhäuser, 1997.
9. *Donets E. E., Streltsova O. I., Boyadjiev T. L.* Self-similarity and singularity formation in a coupled system of Yang–Mills-dilaton Evolution equations // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. No. 12. P. 125010(9); Вестник РУДН, сер. Прикладная математика. 2003. Т. 2. С. 13–25.
10. *Lavrelashvili G., Maison D.* Static spherically symmetric solutions of a Yang–Mills field coupled to a dilaton // *Phys. Lett. B.* 1992. V. 295. P. 67–72.
11. *Streltsova O. I. et al.* Unstable even-parity eigenmodes of the regular static SU(2) Yang–Mills-dilaton solutions, e-print: gr-qc/0408060, 2004.
12. *Thomas L. H.* Elliptic Problems in Linear Difference Equations over a Network. Watson Sci. Comput. Lab. Rept., Columbia University, N.Y., 1949.
13. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 592 с.

14. *Hockney R. W.* A Fast Direct Solution of Poissons Equation using Fourier Analysis // J. ACM. V. 12, No. 1. 1965. P. 95–113.
15. *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991, 367 с.
16. *Wang H. H.* A Parallel Method for Tridiagonal Equations // ACM Trans. Math. Software. 1981. V. 7, No. 2. P. 170–183.
17. *Walshaw C. H.* Diagonal Dominance in the Parallel Partition Method for Tridiagonal Systems // SIAM J. Matrix. Anal. Appl., 1995. V. 16, No. 4. P. 1086–1099.
18. *Yalamov P., Pavlov V.* On the Stability of a Partitioning Algorithm for Tridiagonal Systems// SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 1999. V. 20. No. 1. P. 159–181.
19. *Austin T. M., Berndt M., Moulton J. D.* A Memory Efficient Parallel Tridiagonal Solver. Preprint LA-VR-03-4149, 2004, 13 p.
20. *Calogero F.* A novel approach to elementary scattering theory // Nuovo Cimento. 1963. V. 27. P. 261–302; *Calogero F.* A variational principle for scattering phase shifts// Nuovo Cimento. 1963. V. 27. P. 947–951; *Calogero F.* The scattering of a Dirac particle on a central scalar potential // Nuovo Cimento. 1963. V. 27. P. 1007–1016.
21. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
22. *Glassey R. and Schaeffer J.* Convergence of a second-order scheme for semilinear hyperbolic equations in  $2 + 1$  dimensions // J. Math. of Comp. 1991. V. 56, No. 193. P. 87–106.
23. *Воеводин В. В., Воеводин Вл. В.* Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002, 608 с.

Получено 24 ноября 2004 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 15.02.2005.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,86. Тираж 310 экз. Заказ № 54789.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)