

P1-2004-40

Т. П. Топурия, М. Д. Шафранов

ВОПРОСЫ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ
ДЛЯ СИСТЕМ ПРОВОДНИКИ-ДИЭЛЕКТРИКИ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАРЯДОВ

Топурия Т. П., Шафранов М. Д.

P1-2004-40

Вопросы точности решения краевых задач электростатики для систем проводники–диэлектрики с применением вспомогательных зарядов

Проведен анализ влияния вспомогательных зарядов на точность решения краевых задач электростатики для систем проводники–диэлектрики в зависимости от числа зарядов и конфигурации их размещения. В качестве физической модели взят протяженный круглый диэлектрик в электрическом поле плоского конденсатора.

Работа выполнена в Лаборатории физики частиц ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2004

Перевод авторов

Topuriya T. P., Shafranov M. D.

P1-2004-40

Accuracy Solution of Boundary Problems in Electrostatics for Systems «Conductors–Dielectrics» by Means of Auxiliary Charges

The analysis has been carried out on checking the influence of auxiliary charges on solution accuracy of boundary problems of electrostatics for systems «conductors–dielectrics». This accuracy depends on the number of charges and configuration of their allocation. The extended round dielectric in the electric field of a parallel-plate capacitor was taken as a physical model.

The investigation has been performed at the Laboratory of Particle Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2004

ВВЕДЕНИЕ

В работе проанализирована зависимость точности решения краевых задач электростатики для систем проводники–диэлектрики от выбора модели и числа вспомогательных зарядов. Рассматриваемый метод заключается в численном решении граничных задач с использованием вспомогательных зарядов проводников и вспомогательных зарядов диэлектрика, размещаемых определенным образом. Каждому вспомогательному заряду проводников и диэлектриков сопоставляются контрольные точки на их поверхностях. Величины зарядов находятся из решения системы линейных уравнений, которые составляются с учетом выполнения граничных условий в контрольных точках на поверхностях проводников и диэлектриков.

Метод применялся для численного моделирования электрических полей некоторых газовых координатных детекторов, включающих диэлектрические структуры. Результаты представлены в наших работах [1–3]. В них дано описание метода решения конкретных задач с кратким обоснованием выбора систем уравнений. В [1] показано влияние диэлектрической рамки на краевые эффекты в многопроволочных пропорциональных камерах. Следствия размещения диэлектрической пластины в объеме многопроволочных пропорциональных камер рассмотрены в [2]. В [3] даны некоторые распределения электрических полей и потенциалов в многопроволочном детекторе ZEPLIN III. Он предназначен для экспериментов по поиску корпускулярной темной материи, в нем регистрация сигналов осуществляется фотоумножителями, просматривающими газовый объем детектора через объем жидкого ксенона, в котором находятся два ряда сеточных электродов. Электроды формируют электрическое поле, вытягивающее электроны в газовый объем, в котором должен возникать сигнал электролюминесценции [4]. Метод был предложен и рассмотрен в [5].

Для проводников граничным условием являются их потенциалы. В этом случае считается, что кроме объектов, для которых ищется решение, в их окрестности нет других проводников и диэлектриков, или они находятся на таком удалении, что их влиянием можно пренебречь. Тем самым предполагается, что потенциал на больших расстояниях от объектов решения задачи равен нулю.

Метод решения краевых задач электростатики основан на принципе суперпозиции и теореме единственности электростатики. Эта теорема утвер-

ждает: если каким-либо способом краевая задача электростатики решена, то полученное решение есть единственное и верное [6]. Таким образом, найденное решение краевой задачи является единственным и верным для принятой при решении конфигурации зарядов. При этом возникает естественный вопрос, насколько полученное решение соответствует реальному объекту. Современная вычислительная техника позволяет проводить вычисления с очень высокой точностью, но это еще не означает, что точность вычисления соответствует точности решения задачи, которая показывает, насколько те или иные полученные величины отличаются от их истинных значений. Для точных количественных решений в конкретном случае необходимо знание величины диэлектрической проницаемости диэлектрика. С другой стороны, на практике измерения электрических величин ограничиваются возможностями современных измерительных приборов. Для большинства задач измерения с точностью 0,1–1 % вполне достаточны, поэтому требовать точности решения (именно точности решения, а не точности вычислений), превышающей точность измерений, по-видимому, не всегда имеет смысл.

В зависимости от формы поверхностей проводников могут использоваться точечные, линейные и кольцевые вспомогательные заряды. Классический пример применения точечного вспомогательного заряда — нахождение напряженности электрического поля, создаваемого поверхностными зарядами проводящей сферы радиуса R с полным зарядом Q . Вне равномерно заряженной сферы напряженность поля такая же, как если бы весь ее заряд Q являлся точечным и был сосредоточен в ее центре.

Другим примером использования вспомогательных зарядов служит расчет электрических полей и потенциалов, создаваемых системой сетки из проволочек, размещенных между двумя пластинами конденсатора [7]. Такая система с применением линейных зарядов есть математическая модель многопроволочной пропорциональной камеры (МПК). На основе этого исследования были выполнены расчеты полей МПК и некоторых других ее свойств [8], которые приведены в [9]. Работа [10] является примером использования кольцевых зарядов для расчета приборов электронной оптики. Сложность решения задачи с кольцевыми зарядами заключается в необходимости применения разложения в ряд Фурье для каждого кольцевого элемента.

Потребности практики привели к разработке методов решения краевых задач с проводниками для целей электронной оптики. В решении задач электронной оптики используются методы конечных разностей, конечных элементов и интегральных уравнений [11]. Метод конечных элементов является основой систем программ Maxwell-3D [12]. Эта лицензионная программа совместно с программой Garfield [13] широко используется для определения электрических характеристик и моделирования многих процессов в координатных детекторах, применяемых для исследований в физике высоких энергий и элементарных частиц на крупнейших ускорителях Европы и Америки.

Посмотрим, как с использованием вспомогательных зарядов решается задача «диэлектрик в электростатическом поле проводников» и чем определяется точность решения поставленной задачи. Граничные условия для проводников удовлетворяются вспомогательными зарядами, размещаемыми вместо проводников в объеме, который они занимали. Они размещаются вблизи поверхностей, в точности соответствующих поверхностям проводников.

Граничные условия для диэлектриков удовлетворяются вспомогательными зарядами, размещаемыми вместо диэлектриков в объеме и вне объема, который они занимали. Они размещаются вблизи поверхностей, в точности соответствующих поверхностям диэлектриков.

Для двух однородных диэлектриков граничные условия представляются в виде соотношений между нормальными и тангенциальными компонентами поля \mathbf{E} : $\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$ и $E_{t1} = E_{t2}$ [14]. Условию для тангенциальных компонентов поля $E_{t1} = E_{t2}$ эквивалентно соотношение в виде граничных условий на поверхности диэлектрика для потенциала $\varphi_1 = \varphi_2$. На границе двух диэлектриков электрическое поле и его нормальные компоненты претерпевают скачок. Величина скачка определяется отношением величин диэлектрических проницаемостей $E_{n1} = (\varepsilon_2/\varepsilon_1)E_{n2}$. При этом силовая линия полного электрического поля испытывает излом, а в силу связи между электрическим полем и потенциалом это же происходит с эквипотенциалью.

Для иллюстрации метода проводится сравнение с результатами чисто аналитического безмодельного решения. Объектом для сравнения является бесконечно длинный круглый стержень диэлектрика в однородном электрическом поле [14].

Для исследователя, как правило, основной интерес представляют распределения электрических полей и потенциалов вне диэлектриков. Распределения внутри диэлектриков имеют вспомогательный иллюстративный характер.

Далее рассматриваются два варианта решения краевых задач. В первом варианте находятся решения при независимом использовании только внутренних и только внешних зарядов диэлектрика. Во втором варианте при решении используются внутренние и внешние заряды диэлектрика совместно.

1. ВАРИАНТ 1

В первом варианте решается задача при независимом использовании вместо диэлектрика вспомогательных внутренних и внешних зарядов, относящихся к диэлектрику. Внутренние вспомогательные заряды диэлектрика вместе со вспомогательными зарядами проводника применяются только для определения полей и потенциалов вне диэлектрика. Внешние заряды диэлектрика

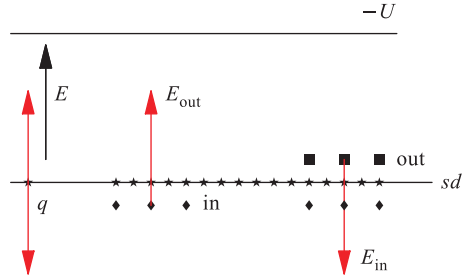


Рис. 1. Пластина диэлектрика в электрическом поле E , образованном сторонними зарядами пластины конденсатора с потенциалом $-U$. Индуцированный связанный заряд q находится на поверхности диэлектрика sd . Внутренние (in) и внешние (out) вспомогательные заряды образуют электрические поля вне и внутри диэлектрика. Направления электрических полей обозначены стрелками

и вспомогательные заряды проводника используются для определения электрических характеристик только внутри диэлектрика.

Поясним метод выбора системы уравнений для этого случая. Для простоты рассмотрим плоский источник сторонних зарядов и параллельную ему плоскую поверхность диэлектрика. На рис. 1 показана часть пластины конденсатора, источника сторонних зарядов, а также часть диэлектрика, находящегося на некотором расстоянии от пластины, ограниченной плоскостью sd . Стрелкой, обозначенной E , показано направление поля, создаваемого зарядами пластины конденсатора. Поскольку мы рассматриваем плоский элемент, то в этом случае $E_n = E$. В соответствии с направлением вектора электрического поля на ближайшей к электроду поверхности диэлектрика с отрицательным потенциалом индуцируются связанные положительные заряды.

Пусть на бесконечно малой поверхности диэлектрика $d\sigma$ величина суммарного связанного заряда равна q . Направления поля данного индуцированного заряда на рис. 1 обозначены стрелками, исходящими из точки поверхности диэлектрика, где находится заряд q . Связанные заряды диэлектрика вместе со сторонними зарядами электродов создают электрическое поле внутри диэлектрика $E_{in} = E - E(q)$ и вне диэлектрика $E_{out} = E + E(q)$. В соответствии с законами электростатики диэлектриков эти два соотношения связаны уравнением $E_{out} = \varepsilon E_{in}$, или

$$E + E(q) = \varepsilon(E - E(q)). \quad (1.1)$$

Посмотрим, к каким соотношениям на поверхности, ограничивающей диэлектрик, приводит использование внутренних зарядов. Направление элек-

трического поля, создаваемого одним из положительных внутренних зарядов (in) под поверхностью sd , показано стрелкой E_{out} (см. рис. 1). Направление этого поля совпадает с направлением поля конденсатора, в результате мы получаем $E_{out} = E + E(i)$. Тогда в соответствии с законами электростатики на поверхности диэлектрика с внутренней стороны величина поля определяется выражением $E_{in} = E - E(i)$. Используя связь между полями на границе вакуум–диэлектрик, имеем окончательное выражение, аналогичное уравнению (1.1): $E + E(i) = \varepsilon(E - E(i))$.

Обратимся к применению внешних зарядов. С учетом направления электрического поля внешнего заряда (out) на поверхности диэлектрика (см. рис. 1) создается поле $E_{out} = E - E(o)$. В этом случае требование законов электростатики приводит к соотношению $E_{out} = E + E(o)$. Таким образом, мы видим идентичность соотношений для внешних и внутренних зарядов, следовательно, и в этом случае соотношение принимает вид $E + E(o) = \varepsilon(E - E(o))$.

В качестве физической модели нами рассматривается диэлектрический стержень с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$, который расположен с вакуумным (газовым) зазором в объеме плоского конденсатора. Выбор такой формы диэлектрика обусловлен простотой перестройки программ решения задачи и вычисления и возможностью сравнения результатов с теоретическими предсказаниями.

Диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится стержень $\varepsilon = 1$. Его диаметр равен 10 мм. Расстояние между пластинами конденсатора 20 мм, их ширина 120 мм. Выбор расстояний, сравнимых с диаметром стержня, позволяет успешнее проследить зависимость точности решения задачи от различных параметров: числа вспомогательных зарядов, их взаимного расположения. Длина стержня и пластин составляет 500 мм. Такие величины длины позволяют рассматривать решение в двумерном случае.

Разместим вспомогательные линейные заряды «вне электродов», а также «внутри или вне диэлектрика» (см. рис. 2). Кавычки обозначают некоторую условность, поскольку в математической модели в явном виде отсутствуют и конденсатор, и диэлектрик. Математической моделью является

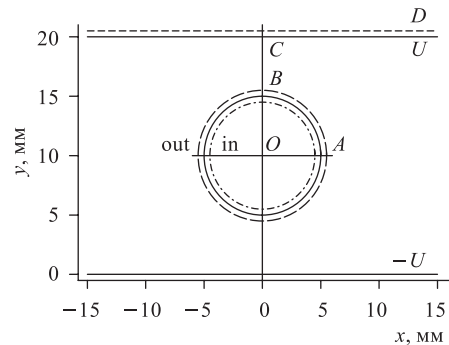


Рис. 2. Схема расположения в поле конденсатора круглого диэлектрического стержня. Его поверхность обозначена сплошной линией. Пунктирные линии — места расположения вспомогательных зарядов

совокупность всех линейных зарядов вместе с системой уравнений, которая обеспечивает связь величин всех зарядов с граничными условиями, задаваемыми потенциалом на поверхностях, соответствующих поверхностям электродов, а также выполнение граничных условий в контрольных точках на поверхности, соответствующей поверхности диэлектрика:

$$U_i = U_{i0}, \quad (1.2)$$

$$E_{n1} = \varepsilon E_{n2}, \quad (1.3)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (1.4)$$

Для рассматриваемого метода с отдельным использованием внешних и внутренних зарядов при решении задачи не учитывается условие непрерывности потенциала на границе диэлектрика (1.4). Следствия этого будут показаны ниже.

1.1. В большинстве случаев в результате решения с помощью найденных зарядов необходимо получить распределение электрических полей и потенциалов вне диэлектриков. Для вычисления параметров электрического поля вне диэлектрика достаточно знать величины вспомогательных линейных внутренних зарядов, относящихся к диэлектрику, и зарядов, относящихся к конденсатору. (В дальнейшем для сокращения описания слово «относящиеся» будет опущено, но в выражениях «вспомогательные заряды диэлектрика» и «вспомогательные заряды конденсатора» всегда будет подразумеваться.) Условно решение с применением внутренних вспомогательных зарядов диэлектрика и зарядов конденсатора будем рассматривать как решение задачи № 1.

В конкретном варианте число вспомогательных зарядов каждой из пластин конденсатора равно 400. Расстояние между соседними зарядами равно 0,3 мм, а между поверхностью с зарядами и поверхностью пластины конденсатора — 0,6 мм.

Эквипотенциальной поверхностью в непосредственной близости от поверхности с зарядами является волнообразная поверхность, несущая на себе особенности, связанные с дискретностью зарядов. Более сильно дискретность зарядов влияет на получаемые распределения электрического поля по поверхности, которую занимал проводник. Если для потенциального распределения особенности отсутствуют, то они могут проявиться в распределении поля. Это связано с различной зависимостью потенциала и поля от расстояния между зарядом и контрольной точкой. Так, для точечного заряда потенциал $U \sim 1/r$, а величина электрического поля $E \sim 1/r^2$. Для расстояния между поверхностью с зарядами и поверхностью проводника d и расстояния между соседними зарядами a желательно выполнять условие: $d > 1,4a$ [15].

По периметру диэлектрика первоначально взято $n = 200$ зарядов на расстоянии между ними $ds = 2\pi R_0/n$, где R_0 — радиус стержня. Рас-

стояние между каждой из поверхностей с зарядами и поверхностью диэлектрика

$$dr = 2ds. \quad (1.5)$$

Отсюда $ds \approx 0,157$ мм, а $dr \approx 0,314$ мм. Отношение $dr/D = 0,0628$, где D — расстояние между поверхностью диэлектрика и внутренней поверхностью конденсатора вдоль оси ординат. Для поверхностей с зарядами их радиус определяется соотношением $R = R_0 \pm dr$. Заряды размещаются на тех же радиусах, что и соответствующие им контрольные точки. Следовательно, расстояние между соответствующими зарядами $dR = 4\pi R_0/n$.

При моделировании потенциал верхней пластины конденсатора равнялся 500 В, а потенциал нижней пластины составлял -500 В. На цилиндрической поверхности диэлектрика, обращенной к верхнему электроду конденсатора, находящемуся под положительным потенциалом, возникают связанные отрицательные заряды. На поверхности, обращенной к нижнему электроду, появляются связанные положительные заряды. Следствием симметричного расположения диэлектрического стержня (см. рис. 2) является равенство соответствующих зарядов нижней и верхней поверхности по абсолютной величине. Заряды поверхностей конденсатора и диэлектрика при положительных значениях оси ординат равны соответствующим зарядам для отрицательных значений этой оси.

Для каждой из контрольных точек верхней пластины конденсатора составляются уравнения типа

$$\sum_i U_i + \sum_k U_k + \sum_d U_d = U_{01}. \quad (1.6)$$

В подобном уравнении U_i — потенциал, создаваемый зарядом с номером i , относящимся к одной из пластин конденсатора, U_k — потенциал от заряда k второй пластины, U_d — потенциал заряда d диэлектрика.

Уравнения типа

$$\sum_i U_i^* + \sum_k U_k^* + \sum_d U_d^* = U_{02} \quad (1.7)$$

относятся ко второй пластине конденсатора. Потенциалы U_{01} и U_{02} в (1.6) и (1.7) — граничные условия для конденсатора. Уравнения

$$\sum_i E_{ni} + \sum_k E_{nk} + \sum_d E_{nd} = \varepsilon \left(\sum_i E_{ni} + \sum_k E_{nk} - \sum_d E_{nd} \right) \quad (1.8)$$

являются следствием граничных условий на поверхности диэлектрика (1.2) и (1.3).

Количество уравнений (1.6)–(1.8) равно числу вспомогательных зарядов и контрольных точек первой, второй пластины конденсатора и стержню

диэлектрика, т.е. 400, 400 и 200 соответственно для рассматриваемого случая.

Для вычисления параметров электрического поля внутри диэлектрика (решение задачи №2) необходимо знать величины вспомогательных линейных внешних зарядов, относящихся к диэлектрику, и зарядов, относящихся к конденсатору. Для их нахождения применяется та же система уравнений (1.6)–(1.8), но вместо внутренних зарядов диэлектрика для решения необходимо использовать внешние заряды.

В результате решения систем уравнений с внутренними и внешними зарядами при заданном пространственном расположении линейных вспомогательных зарядов мы знаем их величины. На этом основании имеется возможность по соответствующим формулам электростатики рассчитать величины потенциалов и полей в любой точке вне и внутри диэлектрика.

Что мы имеем и что можно ожидать в результате решения задачи по рассматриваемому варианту?

Во-первых, в системе уравнений (1.6)–(1.8) отсутствует связь между потенциалами на поверхности диэлектрика, вычисляемыми с внешними и внутренними зарядами диэлектрика. Она определяется уравнением (1.4).

Во-вторых, внешние и внутренние заряды диэлектрика находятся на разных поверхностях. Поэтому существует разница между расстоянием «заряды конденсатора — внутренние заряды диэлектрика» и расстоянием «заряды конденсатора — внешние заряды диэлектрика».

Эти два фактора приведут при решении уравнений с использованием только внешних или только внутренних зарядов диэлектрика к разнице между величинами вспомогательных зарядов конденсатора, относящихся к тем же самым контрольным точкам, и, как следствие, несогласованности решения для определения характеристик полей вне и внутри диэлектрика. Определение величины этой несогласованности и является целью анализа решений первого варианта.

В целях сокращения графического материала результаты решения задач №1 и 2 иногда представляются совместно простым объединением, которое позволяет лучше понять метод и оценить полученные результаты. Такое объединение решений показано на рис. 3, представляющем распределения вспомогательных зарядов конденсатора для части CD на рис. 2. Использовались внешние и внутренние заряды диэлектрика. Между этими кривыми находятся две другие, совпадающие между собой. Одна из них представляет распределение полусуммы соответствующих зарядов. О второй кривой несколько позже. Максимум при $n = 1$ и последующий спад к $n = 60$ обусловлен присутствием диэлектрика. Дальнейший рост величин зарядов с увеличением номера заряда n связан с необходимостью обеспечения эквипотенциальности пластины конденсатора при ее ограниченности по размеру. Потенциал в точке $n = 60$ определяется зарядом в этой точке, зарядами слева от нее (их всего 260), а

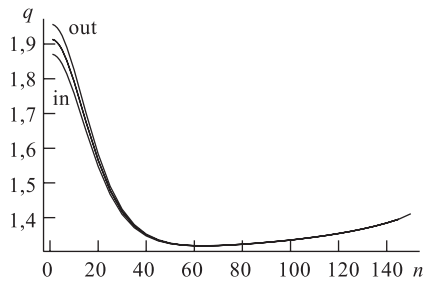


Рис. 3. Распределение вспомогательных зарядов вдоль пластины конденсатора, а также распределение их полусуммы. Приведены результаты с использованием по 200 внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов диэлектрика

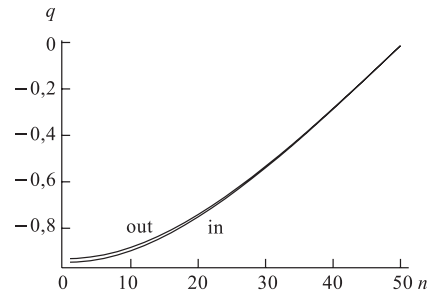


Рис. 4. Распределение внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов вдоль поверхности диэлектрического стержня в диапазоне углов $\pi/2-0$

также зарядами с $n > 60$ (всего 140). Уменьшение числа зарядов с $n > 60$ для выполнения эквипотенциальности проводника компенсируется увеличением величин зарядов.

Рис. 4 представляет половину распределения внешних и внутренних вспомогательных зарядов части диэлектрика, обращенной к положительно заряженной пластине конденсатора. В случае $n = 1$ для распределений рис. 3 отношение разности зарядов к среднему составляет 4,5 %, для распределений рис. 4 это отношение равно 1,7 %.

Найденные в решении задачи величины зарядов позволяют получить распределения электрических полей. В качестве примера на рис. 5–7 приведены распределения характеристик электрических полей по 1/4 части периметра поверхности диэлектрика (сектор AOB на рис. 2). Показаны тангенциальные составляющие, нормальные компоненты и суммарные значения полей, полученные после решения с применением внешних и внутренних вспомогательных зарядов диэлектрика.

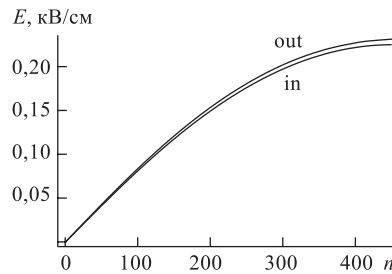


Рис. 5. Распределение тангенциальных компонентов электрического поля вдоль 1/4 поверхности диэлектрического стержня для внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов диэлектрика

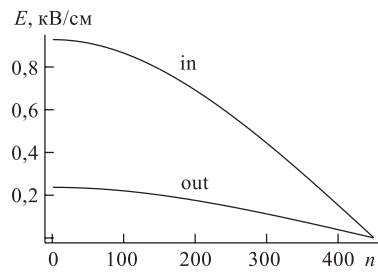


Рис. 6. Распределение нормальных компонентов электрического поля вдоль 1/4 поверхности диэлектрического стержня для внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов диэлектрика

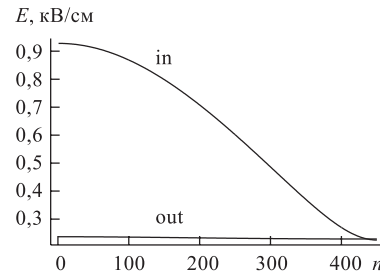


Рис. 7. Распределение электрического поля вдоль 1/4 поверхности диэлектрического стержня для внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов диэлектрика

Тангенциальные компоненты со значением $E_{in} = E_{out} = 0$ по мере роста n возрастают и расходятся по величине (см. рис. 5). Это расхождение для угла, равного 90° , составляет 2,2%. Нормальные компоненты (см. рис. 6) на границе диэлектрика в соответствии с теорией испытывают скачок, в случае точного решения определяемый величиной диэлектрической проницаемости $E_{in}/E_{out} = \varepsilon$. В нашем случае данное отношение постоянно для всех значений n и равно 3,92. Тем самым отличие от принятого значения $\varepsilon = 4$ составляет 2%.

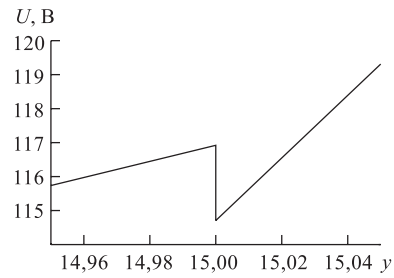
Расхождения связаны с тем, что при решении использовались отдельно внешние и внутренние заряды диэлектрика и соответствующие им два набора зарядов конденсатора.

Рис. 7 представляет распределение полного электрического поля по периметру диэлектрика. Обращает на себя внимание поведение поля при решении с применением внешних зарядов диэлектрика: на глаз величина поля постоянна и не зависит от n . В действительности с ростом n величина поля медленно уменьшается от 0,23268 до 0,22877 кВ/см.

Распределение потенциала вне и внутри диэлектрика вблизи его границы вдоль оси $x = 0$ показано на рис. 8. Скачок потенциала при переходе через границу диэлектрик–вакуум является следствием невыполнения граничного условия по равенству потенциалов $\varphi_1 = \varphi_2$. Величина скачка составляет 2% по отношению к значению потенциала на границе с внешней стороны поверхности диэлектрика.

Для демонстрации методов решения задачи нами использован круглый диэлектрический стержень, ограниченный по размеру. Диэлектрик находится в поле, образованном зарядами пластин конденсатора. В этом случае результаты рассматриваемого метода решения задачи качественно можно

Рис. 8. Распределение потенциала вне и внутри диэлектрика вблизи его границы вдоль оси $x = 0$. Скачок потенциала при переходе через границу диэлектрик–вакуум является следствием невыполнения граничного условия по равенству потенциалов. Величина скачка составляет 2 %



сравнить с точным решением для бесконечно длинного стержня диэлектрика эллиптического (круглого) сечения [14]. Точные результаты данного случая: $dV/dy = \text{const}$, $dE/dx = 0$. Это означает, что силовые линии внутри диэлектрического стержня параллельны оси ординат, а эквипотенциали параллельны оси абсцисс, т. е. электрическое поле постоянно в любой точке диэлектрика. Карта силовых линий поля и эквипотенциали показана на рис. 9. Линии поля и эквипотенциали в объеме диэлектрика практически параллельны осям $x = 0$ и $y = 0$.

Следствием раздельного использования внешних и внутренних зарядов диэлектрика является отличие величины скачка электрического поля на границе с диэлектриком от теоретического значения, определяемого выражением $E_{n1}/E_{n2} = \varepsilon$. Второе следствие — разрыв потенциала. Анализ изложенных выше результатов позволяет сделать следующее заключение: в

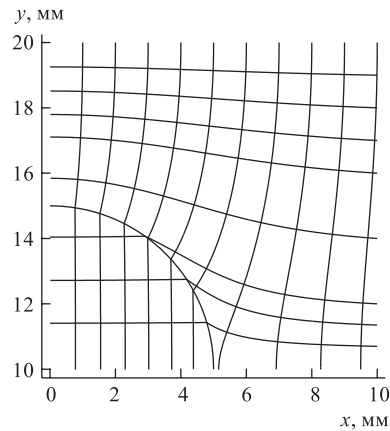


Рис. 9. Карта силовых линий электрического поля и эквипотенциали внутри и вне диэлектрического стержня. Показана часть распределения для положительных значений осей абсцисс и ординат

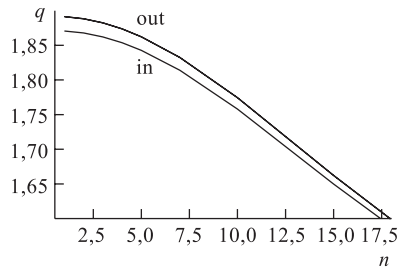


Рис. 10. Распределение внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов вдоль части пластины конденсатора. Приведены результаты решения с использованием по 800 внутренних и внешних вспомогательных зарядов диэлектрика

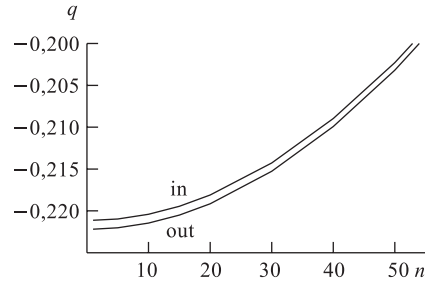


Рис. 11. Распределение внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов вдоль поверхности диэлектрического стержня

рассмотренном варианте получено приближенное решение с точностью на уровне 2 %.

1.2. Посмотрим, как величина разрыва потенциала, отношение E_{n1}/E_{n2} и другие характеристики зависят от числа вспомогательных зарядов диэлектрика и расстояния между соответствующими вспомогательными зарядами до данной контрольной точки.

По периметру диэлектрика первоначально взято $n = 200$ зарядов на расстоянии между ними $ds = 2\pi R_0/n$, где R_0 — радиус стержня. Расстояние между каждой из поверхностей с зарядами и поверхностью диэлектрика $dr = 2ds$ (1.5). Оставаясь в рамках тех же соотношений между расположением зарядов и контрольных точек, увеличим их число до $n = 800$. Плотность зарядов увеличилась в четыре раза с таким же уменьшением расстояния заряд — контрольная точка. Число вспомогательных зарядов конденсатора нами оставлено без изменений.

После решения системы уравнений (1.6)–(1.8) для $n = 800$ — нахождения всех вспомогательных зарядов и выполнения необходимых расчетов — рассмотрим результаты, как это сделано выше для $n = 200$. Первоначально проанализируем поведение электрического поля вне диэлектрика в зависимости от числа его вспомогательных зарядов.

На рис. 10 показаны части распределения вспомогательных зарядов конденсатора с использованием при решении внешних (верхняя кривая) и внутренних зарядов диэлектрика. Рис. 11 представляет часть распределения вспомогательных зарядов диэлектрика. Если в случае 200 вспомогательных зарядов диэлектрика отношение разности зарядов конденсатора к среднему составляло 4,5 %, то для 800 зарядов оно равно 1,1 %. Для распределений заря-

дов диэлектрика (рис. 11) это отношение равно 0,48 % (ранее оно равнялось 1,7 %). Изменилась величина скачка потенциала (см. рис. 12), ранее он составлял 2 %, теперь — 0,46 %. Мы видим, что отношения соответствующих величин примерно равны четырем. Во столько же раз увеличено число зарядов и сокращено расстояние между зарядом и его контрольной точкой.

Рис. 13 представляет объединенные распределения нормальных компонентов электрического поля вдоль оси ординат для $n = 200$ и 800 , полученные с внешними зарядами диэлектрика для распределений внутри него и его внутренними зарядами для распределений вне диэлектрика. Конечно, расчет выполнен с соответствующими зарядами конденсатора. Распределения в случае использования внутренних зарядов полностью идентичны, хотя заряды диэлектрика для $n = 200$ и $n = 800$ отличаются в 4 раза. На рис. 14 показана часть этого распределения, относящаяся к диэлектрику. Ранее отношение нормального компонента электрического поля вне диэлектрика к компоненту внутри $E_{n1}/E_{n2} = \varepsilon$ равнялось 3,92. Для случая, когда $n = 800$, это отношение $E_{n1}/E_{n2} = 3,98$. Разница по сравнению с заданным значением величины диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 4$ составляет 2 % и 0,5 % соответственно.

Распределение нормальных компонентов поля для случаев $n = 200$ и 800 вдоль линии, проходящей через радиус OA (рис. 2), представлено на рис. 15. В силу симметричного размещения диэлектрического стержня внутри конденсатора нормальные компоненты поля строго равны полному электрическому

Рис. 13. Объединенные распределения нормальных компонентов электрического поля вдоль оси ординат для $n = 200$ и $n = 800$. Использовались внешние заряды диэлектрика для распределений внутри него и внутренние заряды для распределений вне диэлектрика. Вне диэлектрика распределения идентичны. Утолщение кривой внутри диэлектрика связано с разностью распределений около 1 %

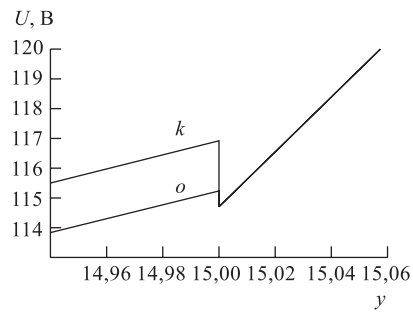
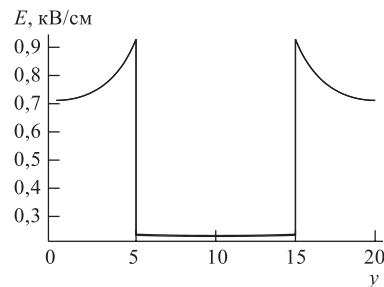


Рис. 12. Распределение потенциала вне и внутри диэлектрика вблизи его границы вдоль оси $x = 0$ для случая 200 зарядов (k) и 800 зарядов (o). Величина скачка составляет 2 и 0,46 % соответственно



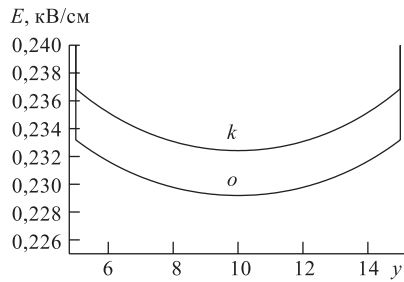


Рис. 14. Фрагмент рис. 13, распределение поля внутри диэлектрика: k — 200 зарядов; o — 800 вспомогательных зарядов

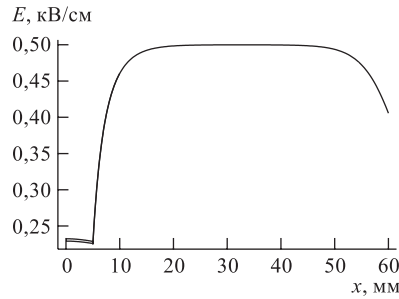


Рис. 15. Распределение нормальных компонент поля для случаев $n = 200$ и 800 в медианной плоскости вдоль линии $x = 0$, проходящей через радиус OA рис. 2

полю вдоль этой линии. Внутри диэлектрика величина поля медленно уменьшается, разница между центром и поверхностью составляет 1,5%. Вне диэлектрика величина поля быстро растет, а незначительная разница на уровне $5 \cdot 10^{-3}$ кВ/см в величине поля для этих двух случаев исчезает при $x = 5,2$ мм. Начиная с $x = 15$ мм, значение поля выходит на плато, с 50 мм начинается спад, связанный с влиянием зарядов края пластины конденсатора ($x = 60$ мм). Максимальное значение поля приходится на координату $x = 30$ мм и, соответственно, равно 0,49994 кВ/см. При отсутствии диэлектрика величина поля на участке 0–40 мм должна быть равной 0,5 кВ/см. Часть этого распределения в области границы диэлектрика показана на рис. 16. На поверхности диэлектрика поле целиком определяется тангенциальной составляющей, а нормальный компонент равен 0 (см. рис. 5). Следовательно, не должно быть разрыва поля на границе диэлектрик–вакуум при точном решении задачи. Расчет поля внутри и вне диэлектрика проводится в варианте с использованием внешних и внутренних вспомогательных зарядов диэлектрика отдельно, что и объяс-

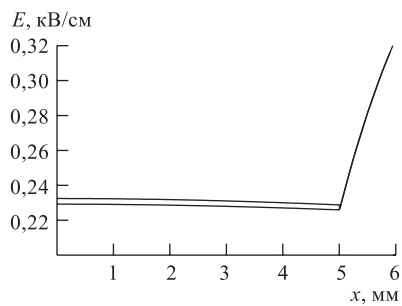


Рис. 16. Фрагмент распределения нормальных компонент поля в области границы диэлектрика. Расчет поля внутри и вне диэлектрика проводится с использованием внешних и внутренних вспомогательных зарядов диэлектрика отдельно. Это ведет к разрыву, который составляет 1,67 и 0,40% для $n = 200$ и 800 соответственно

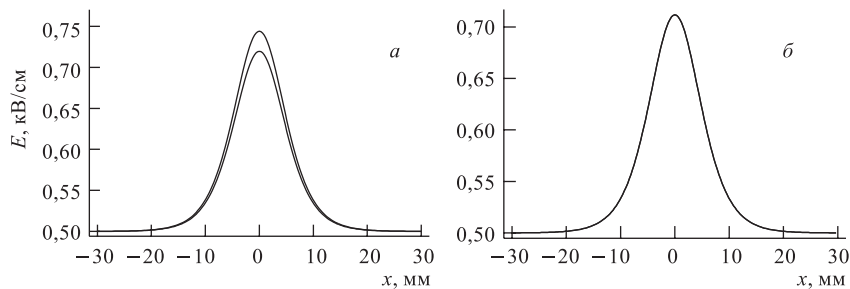


Рис. 17. Распределения нормальных компонентов напряженности электрического поля по внутренней поверхности пластин конденсатора: *a* — распределение нормальных компонентов с внешними зарядами диэлектрика для $n = 200$ (верхняя кривая) и 800 (нижняя кривая); *б* — распределение для внутренних зарядов диэлектрика. Отличие распределения *б* от распределений *a* — тождественное равенство поверхностных плотностей зарядов

няет разрыв. Он составляет 1,67 и 0,40 % для $n = 200$ и 800 соответственно (отношение равно 4,2).

Согласно законам электростатики напряженность электрического поля непосредственно на поверхности заряженного тела связана простым соотношением с локальной плотностью заряда поверхности: $E_n = \sigma/\varepsilon_0$. Здесь E_n — проекция вектора \mathbf{E} на внешнюю по отношению к поверхности нормаль n , σ — локальная поверхностная плотность заряда, ε_0 — электрическая постоянная.

Таким образом, представленные на рис. 17 распределения нормальных компонентов напряженности электрического поля по внутренней поверхности пластин конденсатора, а также распределения по поверхности диэлектрика на рис. 18 и 19 отражают распределения локальных плотностей сторонних зарядов и локальных плотностей связанных зарядов на этих поверхностях.

На рис. 17, *a* отражено распределение нормальных компонентов при использовании внешних зарядов диэлектрика для обоих случаев $n = 200$ и 800 . Рис. 17, *б* представляет распределение для внутренних зарядов диэлектрика. Отличие этого распределения от распределений рис. 17, *a* состоит в тождественном равенстве поверхностных плотностей зарядов, несмотря на существенную разницу в числе вспомогательных зарядов диэлектрика.

Обратимся к рис. 18, на котором показаны распределения нормальных компонентов поля по поверхности диэлектрика в диапазоне углов $-\pi/2 \div \pi/2$ для $n = 800$. Верхняя кривая получена при использовании только зарядов конденсатора. Отрицательные значения компонентов $E_n(q)$ на нижней кривой соответствуют только внешним зарядам диэлектрика. Они противо-

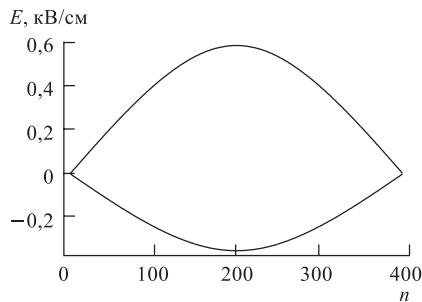


Рис. 18. Распределения нормальных компонентов поля по поверхности диэлектрика в диапазоне углов $-\pi/2 - \pi/2$ для $n = 800$. Верхняя кривая отражает использование только зарядов конденсатора, нижняя кривая соответствует одним внешним зарядам диэлектрика

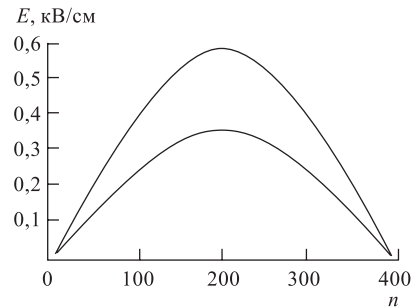


Рис. 19. Распределения нормальных компонентов поля по поверхности диэлектрика в диапазоне углов $-\pi/2 - \pi/2$ для $n = 800$. Верхняя кривая отражает использование зарядов конденсатора, нижняя кривая соответствует одним внутренним зарядам диэлектрика

положны по направлению нормальным компонентам поля E_n , создаваемого вспомогательными зарядами конденсатора. Сумма этих распределений представляет распределение нормальных составляющих поля на поверхности диэлектрика с внутренней стороны поверхности диэлектрика $E_n - E_n(q)$. Подобные распределения для случая применения внутренних зарядов показаны на рис. 19. Сумма распределений для внутренних зарядов конденсатора и зарядов диэлектрика представляет распределение нормальных составляющих поля на поверхности диэлектрика с его внешней стороны $E_n + E_n(q)$.

Как отмечалось выше, при решении задачи мы выбрали величину диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 4$. В соотношении (1.1) E — нормальный компонент поля, создаваемого сторонними зарядами в произвольно выбранной точке поверхности диэлектрика, $E(q)$ — нормальный компонент поля, создаваемого связанными зарядами диэлектрика в той же точке диэлектрика. Преобразуем соотношение (1.1) в другую форму: $(E + E(q))/(E - E(q)) = \varepsilon$. В качестве произвольной точки выберем точку на поверхности диэлектрика, например, под углом $-\pi/4$. Для нее $E = 0,396546$ и $E(q) = 0,237927$ для случая решения с внешними зарядами диэлектрика. В результате выполнения арифметических операций получаем $(E + E(q))/(E - E(q)) = 3,99998$. Для случая внутренних зарядов диэлектрика проверку точности решений сделаем в симметричной точке (угол равен $\pi/4$). Для нее $E = 0,394989$ и $E(q) = 0,236997$. Из (1.1) следует: $E(q)/E = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 1)$, т.е. $E(q)/E = 0,6$. Результат арифметических действий — 0,600009. Из этих результатов вытекает точность наших вычислений.

Точность решения задачи для числа вспомогательных зарядов диэлектрика $n = 800$ из отношения разницы между нормальными компонентами поля к нормальному компоненту можно оценить на уровне 0,4 %.

1.3. Посмотрим, к каким следствиям приведет увеличение расстояния между пластинами конденсатора в 2,5 раза. В целях сохранения той же степени однородности поля увеличим и ширину пластин в 2,5 раза. По периметру диэлектрика, как и ранее, взято $n = 200$ зарядов на расстоянии между ними $ds = 2\pi R_0/n$, где R_0 — радиус стержня. Расстояние между каждой из поверхностей с зарядами и поверхностью диэлектрика $dr = 2ds$. Разность потенциалов остается прежней, т.е. она равна 1000 В, поэтому величины сторонних и связанных зарядов уменьшаются. Отношение dr/D можно рассматривать как относительное расстояние между поверхностью диэлектрика и поверхностью размещения вспомогательных зарядов.

Здесь D — расстояние между поверхностью диэлектрика и обкладкой конденсатора вдоль оси ординат (вдоль линии кратчайшего расстояния между поверхностью диэлектрика и ближайшего заряженного проводника). В результате увеличения расстояния D между диэлектриком и конденсатором в 4 раза уменьшилось отношение dr/D . Для $n = 200$ и 800 оно равно 0,0628 и 0,0157 соответственно. Распределение вспомогательных зарядов конденсатора показано на рис. 20. Отношение разности между внутренними и внешними зарядами к их среднему значению составляет 0,718 %, ранее (см. рис. 3) оно равнялось 4,48 %.

Рис. 21 представляет распределение внешних и внутренних зарядов для диэлектрического стержня в диапазоне углов $\pi/2-0$. Для точки с номером $n = 1$ при среднем значении заряда $Q = 0,32645$ отклонение распределений для внешних и внутренних зарядов от среднего составляет 0,0632 %. Отклонение данных распределений, представленных на рис. 4, от среднего составляло 0,843 %.

На рис. 22 отражено распределение напряженности электрического поля вдоль оси ординат. Обращает на себя внимание распределение внутри диэлектрика. Для неограниченного по длине диэлектрического стержня электрическое поле внутри диэлектрического стержня постоянно [14]. В нашем случае внутри диэлектрика разница между величиной поля на поверхности и в центре равна 0,046 %. Отношение нормальных компонентов поля на гра-

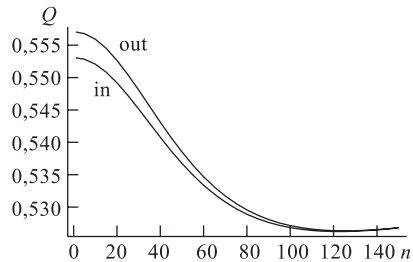


Рис. 20. Распределение вспомогательных зарядов вдоль пластины конденсатора. Представлены результаты использования по 200 внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов диэлектрика

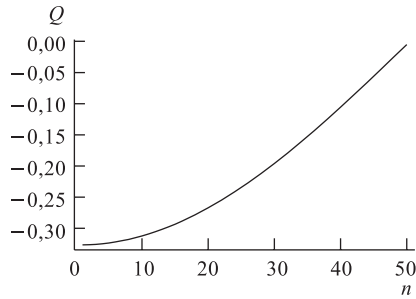


Рис. 21. Распределение внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов вдоль поверхности диэлектрического стержня в диапазоне углов $\pi/2-0$, число вспомогательных зарядов диэлектрика — по 200 внешних и внутренних. Отклонение распределений этих зарядов от среднего составляет 0,0632 %

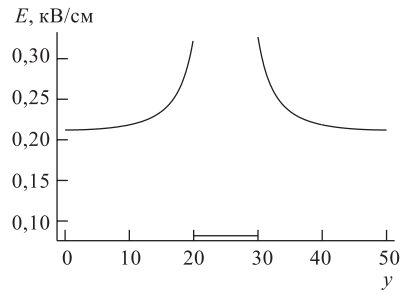


Рис. 22. Распределение напряженности электрического поля вдоль оси ординат. Отношение нормальных компонентов поля на границе раздела составляет величину 3,989. Отклонение от заданного значения $\varepsilon = 4$ равно 0,275 %

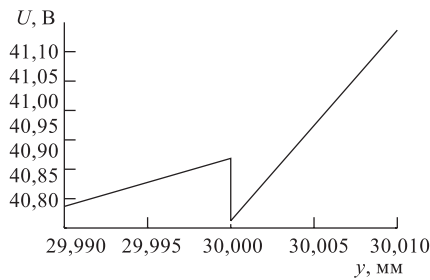


Рис. 23. Распределение потенциала вне и внутри диэлектрика вблизи его границы вдоль оси $x = 0$. Скачок потенциала при переходе через границу диэлектрик–вакуум составляет 0,24 %

нице раздела составляет величину 3,989. Отклонение от заданного значения $\varepsilon = 4$ равно 0,011, или 0,275 %.

Распределение потенциала вне и внутри диэлектрика вблизи его границы вдоль оси $x = 0$ показано на рис. 23. Скачок потенциала при переходе через границу диэлектрик–вакуум составляет 0,24 %. Отличие от скачка распределения на рис. 8, равного 1,7 %, существенно.

Увеличим вдвое число вспомогательных зарядов диэлектрика без изменения взаимного расположения системы диэлектрик–конденсатор. На

рис. 24 приведены распределения нормального компонента электрического поля вдоль пластины конденсатора для $n = 200$ и 400.

Поверхностная плотность зарядов конденсатора (рис. 24, а) в максимуме при расчетах с внешними зарядами диэлектрика по сравнению со случаем $n = 200$ уменьшилась на 0,38 %. Распределения компонентов поля с использованием внутренних зарядов для $n = 200$ и 400 полностью совпадают между собой (рис. 24, б). Увеличение вспомогательных зарядов в два раза не привело

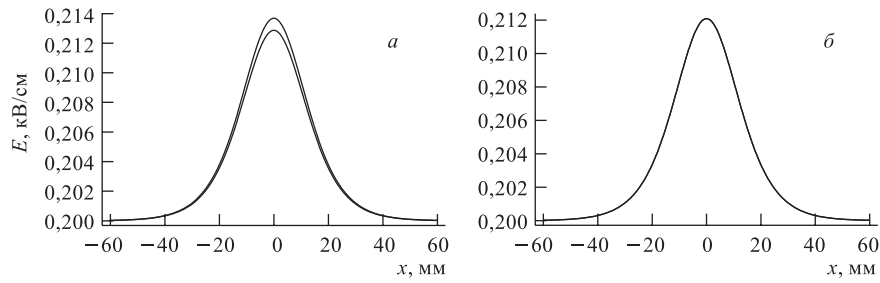


Рис. 24. Распределение нормального компонента электрического поля конденсатора: *a* — с внешними зарядами диэлектрика для $n = 200$ (верхняя кривая) и $n = 400$ (нижняя кривая); *б* — с внутренними зарядами для $n = 200$ и 400 (полностью совпадают между собой)

к изменениям в этих распределениях, как и ранее (см. рис. 17, *б*). Распределение, представленное на рис. 24, *б*, по сравнению с подобным распределением на рис. 17, *б* стало почти в 2 раза шире. Уширение связано с уменьшением разницы в расстояниях между точками поверхности диэлектрика и поверхностью конденсатора. Ранее длины отрезков *AC* и *BC* (рис. 2) отличались в два раза, теперь они отличаются только в 1,25 раза.

Изменение поверхностной плотности зарядов иллюстрирует рис. 25, на котором представлен фрагмент распределения поля на поверхности диэлектрического стержня. Изменение при $n = 400$ по сравнению со случаем $n = 200$ составляет 0,13 %.

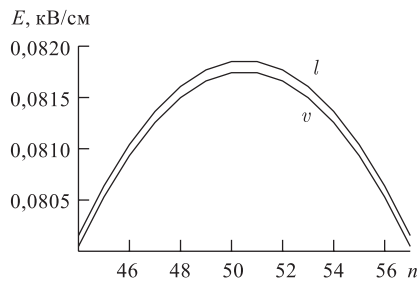


Рис. 25. Фрагмент распределения нормального компонента электрического поля вдоль поверхности диэлектрика с его внешними зарядами для $n = 200$ (*l*) и $n = 400$ (*v*)

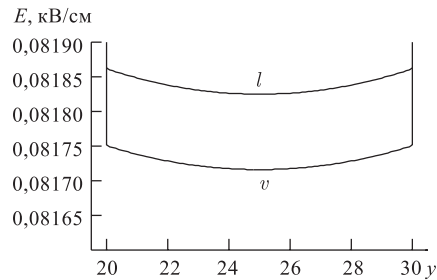


Рис. 26. Распределение поля в объеме диэлектрика вдоль оси ординат для случая $n = 400$ (*v*). Случай $n = 200$ представлен кривой (*l*). Различие составляет 0,13 %

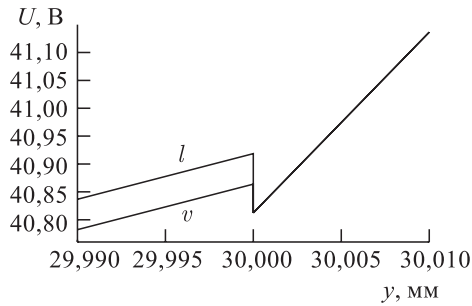


Рис. 27. Распределение потенциала вне и внутри диэлектрика вблизи его границы вдоль оси $x = 0$ для случаев 200 зарядов (l) и 400 зарядов (v). Величина скачка составляет 0,26 и 0,126 % соответственно. Вне диэлектрика для этих двух случаев распределения тождественны

На рис. 26 показано распределение электрического поля в объеме диэлектрика вдоль оси ординат для случая $n = 400$. Там же для сравнения показано распределение для случая, когда число вспомогательных зарядов в два раза меньше, $n = 200$. Различия составляет 0,13 %. О поведении потенциала и величине разрыва на поверхности диэлектрика можно судить по рис. 27. Разрыв уменьшился вдвое и составляет 0,126 %. Вне диэлектрика для этих двух случаев распределения тождественны.

Если для случая $n = 200$ отношение нормальных компонентов поля на границе раздела $E_{in}/E_{out} = 3,989$, то для $n = 400$ $E_{in}/E_{out} = 3,9946$. Отклонение от заданного значения $\varepsilon = 4$ в первом случае равно 0,011, или 0,275 %, во втором — 0,0054, или 0,135 %.

1.4. Проведем теперь количественное сравнение полученных результатов с результатами чисто аналитического безмодельного решения (идеальный случай). Таким объектом для сравнения, как говорилось ранее, является бесконечно длинный стержень диэлектрика круглого сечения в однородном пространственно неограниченном электрическом поле [14]. Для этого случая в указанной работе приведена простая формула: $E_d = E_s \frac{2\varepsilon_s}{\varepsilon + \varepsilon_s}$, в которой E_d — напряженность поля в объеме диэлектрического стержня, E_s — напряженность однородного поля вне диэлектрического стержня, ε_s и ε — диэлектрические проницаемости внешней среды и стержня соответственно. Для нашего случая диэлектрических проницаемостей формула принимает следующий вид:

$$E_d = 2E_s/5. \quad (1.9)$$

Мы рассмотрели два варианта расстояний между обкладками конденсатора (2 и 5 см) при одинаковой разности потенциалов между ними, равной 1000 В. Следовательно, для этих двух вариантов при отсутствии диэлектрического стержня величины 0,5 и 0,2 кВ/см представляют значения однородных полей. Для неограниченного по длине диэлектрического стержня, неограниченных по размеру пластин конденсатора и зазору между пластинами мы имеем в соответствии с выражением (1.9) следующие величины

полей внутри диэлектрика: $E_{d1} = 2 \times 0,5/5 = 0,2$ кВ/см и $E_{d2} = 2 \times 0,2/5 = 0,08$ кВ/см. Вычисления для центра диэлектрика дали такие результаты: $E_{d1} = 0,2292$ кВ/см и $E_{d2} = 0,0817$ кВ/см. Отличие от идеального случая составляет 15 и 2,1%. Такое изменение связано только с увеличением зазора конденсатора с 2 до 5 см. Этот факт является свидетельством правильности рассматриваемого метода решения и вместе с тем приближенности.

1.5. Совокупность всех полученных данных варианта 1, в том числе представленных графически, позволяет сделать следующий вывод. Предложенный метод дает возможность найти решение с определенной точностью. Результат решения задачи с использованием внешних зарядов позволяет получить характеристики поля и потенциала внутри диэлектрика. Точность определяется расстоянием между вспомогательными зарядами ds на поверхности их размещения, расстоянием dr между поверхностью контрольных точек и поверхностью зарядов, величиной кратчайшего расстояния D между поверхностью диэлектрика и поверхностью проводника, точнее, отношением dr/D . Увеличение числа вспомогательных зарядов в k раз в соответствии с выбранной геометрией их размещения $dr = 2ds$ (1.5) ведет к такому же уменьшению отношения dr/D . Примерно во столько раз увеличивается и точность решения задачи. Иллюстрацией этого служат изменения в разрыве потенциала, изменения в отношении нормальных компонентов поля на границе раздела E_{in}/E_{out} , представленные выше.

2. ВАРИАНТ 2

На рис. 4 показаны распределения величин внешних и внутренних вспомогательных зарядов диэлектрика вдоль одной четверти поверхности. Между этими кривыми находится распределение полусуммы соответствующих зарядов. Отклонение от среднего значения величин внешних и внутренних зарядов при $n = 1$ составляет 2,24%. Данное обстоятельство позволит определять характеристики электрического поля и потенциалов вне и внутри диэлектрика после решения системы уравнений не с раздельным, а с одновременным использованием внешних и внутренних зарядов диэлектрика. При этом появляется возможность включить дополнительные уравнения, определяющие связь между потенциалами на поверхности диэлектрика, вычисляемыми с внешними и внутренними зарядами диэлектрика в соответствии с граничными условиями для потенциала на поверхности диэлектрика (1.4). Небольшое (около 2%) отклонение вспомогательных внешних и внутренних зарядов диэлектрика от их среднего значения позволяет использовать при составлении уравнений и расчетов их полусуммы.

Для этого в уравнениях (1.6) и (1.7) вместо членов $\sum_d U_d$ и $\sum_d U_d^*$, определяющих вклад вспомогательных зарядов диэлектриков в потенциалы обкладок конденсатора, включим их полусуммы $1/2(\sum_d U_d^i + \sum_d U_d^o)$ и $1/2(\sum_d U_d^{*i} + \sum_d U_d^{*o})$. В результате получим систему:

$$\sum_i U_i + \sum_k U_k + 1/2(\sum_d U_d^i + \sum_d U_d^o) = U_{01}, \quad (2.1)$$

$$\sum_i U_i^* + \sum_k U_k^* + 1/2(\sum_d U_d^{*i} + \sum_d U_d^{*o}) = U_{02}, \quad (2.2)$$

$$\sum_i E_{ni} + \sum_k E_{nk} + \sum_d E_{nd}^o = \varepsilon (\sum_i E_{ni} + \sum_k E_{nk} - \sum_d E_{nd}^i). \quad (2.3)$$

Число неизвестных вспомогательных зарядов двух пластин конденсатора равно 2×400 , зарядов диэлектрика 2×200 , т.е. всего 1200 неизвестных, а общее число уравнений (2.1)–(2.3) равно 1000. В первом варианте не рассматривалось выполнение граничного условия непрерывности потенциала $\varphi_1 = \varphi_2$ на границе диэлектрика. Выполнение этого граничного условия непрерывности потенциала в контрольных точках на поверхности диэлектрика удовлетворяет следующему уравнению:

$$\sum_i U_i + \sum_k U_k + \sum_d U_d^i = \sum_i U_i + \sum_k U_k + \sum_d U_d^o.$$

Здесь $\sum_i U_i$, $\sum_k U_k$ — потенциалы, создаваемые вспомогательными зарядами конденсатора, они входят в обе части уравнения, их можно сократить. Сократив одинаковые члены левой и правой части этого равенства, имеем

$$\sum_d U_d^i = \sum_d U_d^o, \quad (2.4)$$

в которое входят только потенциалы, создаваемые вспомогательными зарядами диэлектрика.

Таким образом, получена полностью определенная система алгебраических уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных. Теперь вместо двух наборов зарядов конденсатора, обязанных отдельному использованию внешних и внутренних зарядов диэлектрика, мы имеем только по одному набору для каждой пластины.

В соответствии с использованием для определения вспомогательных зарядов одной из пластин конденсатора полусуммы потенциалов, создаваемых зарядами диэлектрика, $1/2(\sum_d U_d^i + \sum_d U_d^o)$ и полусуммы для второй

$1/2(\sum_d U_d^{*i} + \sum_d U_d^{*0})$ распределение зарядов варианта 2 должно с высокой степенью точности совпадать с распределением полусуммы зарядов конденсатора варианта 1. Обратимся к рис. 3, на котором показаны распределения зарядов конденсатора варианта 2 и их полусуммы для варианта 1 одновременно. Максимальное отличие в распределении зарядов варианта 2 и полусуммы зарядов варианта 1 не превышает 0,02 %.

Следствием только одного набора вспомогательных зарядов для каждой из пластин конденсатора является уменьшение разницы между внешними и внутренними зарядами диэлектрика. Это положение иллюстрирует рис. 28, на котором для сравнения показан и фрагмент распределения рис. 4.

2.1. Для выяснения зависимости разности между величинами внешних и внутренних зарядов от числа вспомогательных, определяющего расстояния между зарядами и контрольными точками, решены системы уравнений (2.1)–(2.4) и проведены соответствующие вычисления для 200, 400 и 800 вспомогательных зарядов диэлектрика. При этом число вспомогательных зарядов конденсатора оставалось без изменений. Максимальная разница в величинах внешних и внутренних зарядов диэлектрика для $n = 200$ и $n = 400$ составляет 0,4 и 0,1 % соответственно. Для случая 800 вспомогательных зарядов различие не превышает 0,025 %.

Скачок напряженности электрического поля для всех трех случаев в контрольных точках строго соответствует граничным условиям $E_{n1}/E_{n2} = 4$. Результаты расчетов поля $E_n(y)$ при $x = 0$ подобны результату, приведенному на рис. 13. В связи с этим целесообразнее ограничиться сравнением полученных данных и представленных графически. Наибольший интерес для выяснения зависимости точности решения от числа вспомогательных зарядов представляют распределения напряженности поля вдоль оси $x = 0$. Поэтому ограничимся рассмотрением данных распределений. На рис. 29 показаны распределения поля внутри диэлектрика вдоль оси ординат для 200, 400 и 800 зарядов диэлектрика, они обозначены индексами j, m, n . Расчет выполнен для геометрии размещения зарядов $ds = 2\pi R_0/n$, где R_0 — радиус стержня $dr = 2ds$. Геометрии размещения 800 зарядов $dr = 1,5ds$ соответ-

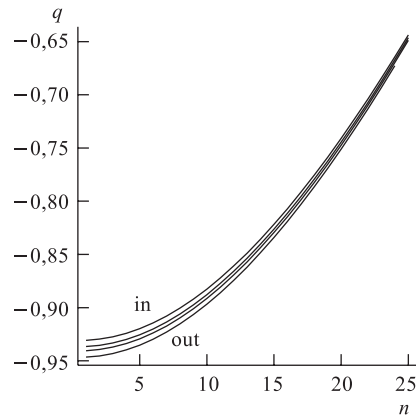


Рис. 28. Фрагмент распределения внутренних (in) и внешних (out) вспомогательных зарядов вдоль поверхности диэлектрического стержня в диапазоне углов $\pi/2 - \pi/4$ ($n = 200$). Верхняя и нижняя кривые соответствуют варианту 1

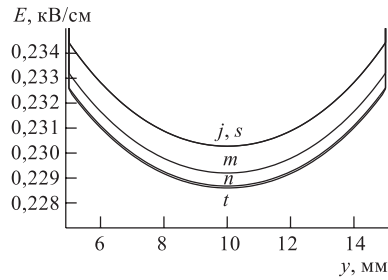


Рис. 29. Распределения поля внутри диэлектрика вдоль оси ординат для 200, 400 и 800 зарядов диэлектрика (индексы j, m, n). Геометрия размещения зарядов $dr = 2ds$. Для 800 зарядов с $dr = 1,5ds$ и $dr = 8ds$ соответствуют кривые t и s

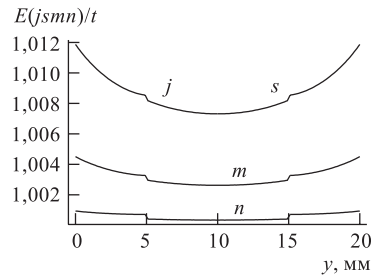


Рис. 30. Распределения j, s, m и n по отношению к распределению t вдоль оси ординат между пластинами конденсатора

ствует кривая t . Индексу s — распределение для 800 зарядов с геометрией $dr = 8ds$.

Следовательно, заряды распределений j и s находятся на одинаковых поверхностях внутри и вне диэлектрика. На рис. 30 показаны отношения распределений j, s, m и n к распределению t . Из рисунка видно, что поле вне диэлектрика зависит от числа вспомогательных зарядов диэлектрика. Этим самым вариант 2 отличен от варианта 1.

3. СРАВНЕНИЕ ВАРИАНТОВ. ВЫВОДЫ

В случае применения только внутренних зарядов диэлектрика в первом варианте характеристики поля и потенциала вне диэлектрика получаются с точностью на уровне $10^{-4}\%$. Свидетельством этому являются численные данные, представленные графически на рис. 12, 17, б, 24, б, и 27. Начиная с некоторого числа зарядов диэлектрика $n \geq n_0$, точность решения задачи не зависит от числа используемых зарядов. Число n_0 определяется конфигурацией диэлектрика. Но характеристики полей и потенциалов внутри диэлектрика существенно зависят от числа вспомогательных зарядов диэлектрика. Их удвоение во столько же раз увеличивает точность решения.

Во втором варианте точность решения задачи вне и внутри диэлектрика зависит от числа вспомогательных зарядов диэлектрика (рис. 30). Как и в случае использования внешних зарядов диэлектрика, удвоение вспомогательных зарядов диэлектрика во столько же раз увеличивает точность решения задачи.

Вместе с тем точность расчетов полей и потенциалов внутри диэлектрика во втором варианте выше точности расчетов в первом варианте при одинако-

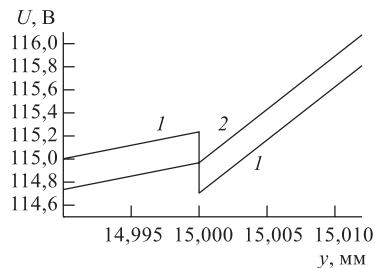


Рис. 31. Распределения напряжения в районе поверхности диэлектрика при использовании по 800 внешних и внутренних зарядов диэлектрика. Показаны зависимости для вариантов 1 и 2

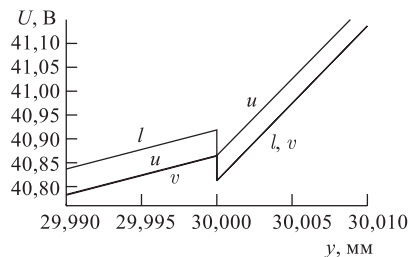


Рис. 32. Распределения напряжения в районе поверхности диэлектрика: показаны зависимости для варианта 1 (l , v) и варианта 2 (u). Использовалось по 400 внешних и внутренних зарядов диэлектрика (v , u) и по 200 зарядов (l)

вом числе вспомогательных зарядов диэлектрика. Иллюстрацией этого служат рис. 31 и 32. На них представлены зависимости напряжения вдоль оси ординат для обоих вариантов внутри и вне диэлектрика в районе поверхности диэлектрика.

Рис. 31 представляет зависимость напряжения для вариантов 1 и 2 при использовании по 800 внешних и внутренних зарядов диэлектрика. Величина зазора между пластинами конденсатора 20 мм. На рис. 32 показана зависимость для случая величины зазора между пластинами конденсатора 50 мм. На рисунках потенциал на границе диэлектрика в случае второго варианта является непрерывным вследствие использования при решении задачи уравнения непрерывности (2.4).

Назовем условно решение с применением внутренних зарядов диэлектрика «точным», поскольку для этого есть достаточные основания. Из сравнения распределений вариантов 1 и 2 на данных рисунках для внутренних зарядов следует, что точность вычисления потенциалов равна 0,96 и 0,13 % для рис. 31 и 32 соответственно.

В качестве примера использования точечных вспомогательных зарядов на рис. 33 показана карта силовых линий электрического поля и линий потенциала внутри и вне диэлектрического шара в поле плоского конденсатора. Рисунок является примером решения задачи не на плоскости, а в пространстве. Для решения применялся второй вариант.

При рассмотрении в качестве основной задачи нахождения распределений полей и потенциалов вне диэлектрика решение по варианту 1 предпочтительней. При смешанном решении, как это выполнено для детектора ZEPLIN III [3], в котором жидкий ксенон ($\epsilon = 1,93$) занимает больший объем, чем газовая фаза, предпочтителен вариант 2.

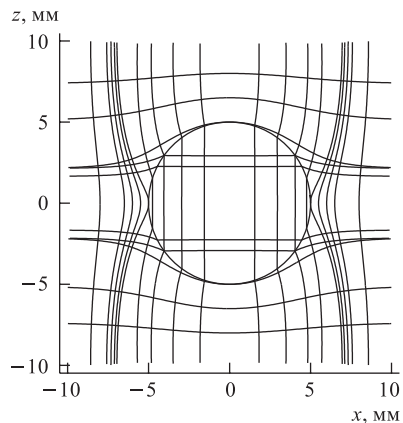


Рис. 33. Карта силовых линий электрического поля и линий потенциала внутри и вне диэлектрического шара в поле плоского конденсатора

Для построения линий поля и эквипотенциалей применялся простой и наглядный способ [15]. Силовые линии электрического поля представляют собой кривые линии, касательные к которым в любой точке совпадают по направлению с направлением поля. На этом основании и строились линии поля: заменой участка силовой линии отрезком касательной. Касательная линия к линии поля и касательная линия к эквипотенциалу взаимно перпендикулярны. Данное свойство позволяет для построения эквипотенциалей применить тот же метод. Для построения касательной к эквипотенциалу в зависимости от направления вектор поля поворачивался на угол $\pm 90^\circ$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Топурия Т. П., Шафранов М. Д. // Краткие сообщ. ОИЯИ. № 5, 6 [97]–99. С. 42.
2. Шафранов М. Д., Топурия Т. П. Сообщение ОИЯИ P13-99-318. Дубна, 1999.
3. Шафранов М. Д., Топурия Т. П. // Письма в ЭЧАЯ. 2002. №6 [115]. С. 51.
4. Howard A.S. et al. Measurements with a two-phase xenon a dark matter detector // York 2000. The identification of dark matter / Eds. N. J. Spooner, V. Kudryavtsev. Singapore, 2001. P. 457–462.
5. Шафранов М. Д. Сообщение ОИЯИ P11-99-148. Дубна, 1999.
6. Панофский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М., 1963. С. 52.
7. Morse P., Feshbach H. Methods of theoretical physics. N. Y.: McGraw Hill, 1953.
8. Erskine G. A. // Nucl. Instr. Meth. 1972. V. 105. P. 565.
9. Sauli F. Principles of operation of multiwire proportional and drift chambers. CERN Report 77-09. 1977.
10. Kasper E., Scherie W. // Optik. 1982. V. 60, №4. P. 339.
11. Hawkes P. W., Kasper E. Principles of Electron Optics. V. 1: Basic Geometrical Optics. London: Academic Press, 1989.

12. MAXWELL/HFSS, Ansoft Corporation. Pitsburg, PA.
13. *Veenhof R.* // Nucl. Instr. Meth. A. 1998. V. 419. P. 726;
<http://consult.cern.ch/writeup/garfield/examples/.../reprt.htm>
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1992. С. 57–70.
15. *Шафранов М. Д.* Сообщение ОИЯИ Р13-96-355. Дубна, 1996.

Получено 31 марта 2004 г.

Редактор *О. Г. Андреева*
Макет *Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 29.06.2004.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,69. Уч.-изд. л. 2,33. Тираж 365 экз. Заказ № 54500.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/