

1 群 (信号・システム) - 5 編 (信号理論)

5 章 ウィナーフィルタ

(執筆者：西山 清)[2011 年 2 月受領]

概要

ウィナーフィルタは 1940 年代に N. Wiener* によって発表された定常な時系列のフィルタリング理論である。ウィナーフィルタは信号と雑音を確率過程として扱った最初のフィルタである。

最近では、高速フーリエ変換 (FFT) の普及と共に、ウィナーフィルタは音声強調や画像の雑音除去、ボケ復元、手ぶれ修正などに広く用いられるようになった。

【本章の構成】

本章では、5-1 節で次元ウィナーフィルタを導出する。また、代表的な応用例として音声信号の雑音低減を示す。5-2 節では二次元ウィナーフィルタを導出し、様々な実装法を説明する。

* Norbert Wiener は 1894 年にアメリカのコロンビアで生まれ、1912 年ハーバード大学より博士号を授与された後、ゲッティンゲン大学、ハーバード大学を経て、MIT 教授。ブラウン運動の数学モデルであるウィナー過程は有名であり、伊藤の確率微分方程式の基礎となっている。また、動物と機械における通信と制御という新しい学問分野であるサイバネティックスの提唱者としても有名である。

1 群 - 5 編 - 5 章

5-1 一次元ウィナーフィルタ

(執筆者：島村徹也)[2008年3月受領]

ウィナーフィルタは平均二乗誤差を最小化する意味で最適なフィルタであり、次のように導出される。

あるフィルタ $h(n)$ を用いて、雑音混入信号 $x(n)$ から雑音成分を除去し、元の信号 $s(n)$ を得る場合を考えよう。このとき、周波数領域では

$$S(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (5.1)$$

のような処理を行えばよい。ここで時間領域との関係を明確にしておけば、 $H(\omega)$ はフィルタの周波数特性で

$$H(\omega) = F[h(n)] \quad (5.2)$$

である。ここで、 F はフーリエ変換を表す。また、 $X(\omega)$ は $x(n)$ のフーリエ変換で、

$$X(\omega) = F[x(n)] \quad (5.3)$$

で与えられ、 $S(\omega)$ は $s(n)$ のフーリエ変換で、

$$S(\omega) = F[s(n)] \quad (5.4)$$

で与えられる。しかし、式 (5.1) で得られる信号成分 $S(\omega)$ はあくまで理想状態においてのみ得られるわけであり、通常はその推定値 $\hat{S}(\omega)$ を想定し、

$$\begin{aligned} E(\omega) &= S(\omega) - \hat{S}(\omega) \\ &= S(\omega) - H(\omega)X(\omega) \end{aligned} \quad (5.5)$$

のような誤差の平均二乗値、すなわち

$$E[|E(\omega)|^2] = E[|S(\omega) - H(\omega)X(\omega)|^2] \quad (5.6)$$

を最小化することを考えるのが自然である。ここで $E[\cdot]$ は期待値を意味している。式 (5.6) をフィルタ特性 $H(\omega)$ で微分すれば

$$\frac{\partial E[|E(\omega)|^2]}{\partial H(\omega)} = 2H(\omega)P_{XX}(\omega) - 2P_{XS}(\omega) \quad (5.7)$$

となる。ここで $P_{XX}(\omega)$ 、 $P_{XS}(\omega)$ はそれぞれ

$$P_{XX}(\omega) = E[|X(\omega)|^2] \quad (5.8)$$

$$P_{XS}(\omega) = E[X(\omega)S^*(\omega)] \quad (5.9)$$

で与えられる。 $*$ は複素共役を意味する。すなわち $P_{XX}(\omega)$ は雑音混入信号のパワースペクト

ルであり、 $P_X S(\omega)$ は雑音混入信号と元の雑音を含まない信号との相互パワースペクトルである。式 (5・7) を 0 とおくと、式 (5・6) は $H(\omega)$ に関して最小化されるので、式 (5・7) より

$$2H(\omega)P_{XX}(\omega) - 2P_{XS}(\omega) = 0 \quad (5\cdot10)$$

が得られ、すなわち

$$H(\omega) = \frac{P_{XS}(\omega)}{P_{XX}(\omega)} \quad (5\cdot11)$$

となる。このように平均二乗誤差を最小化するように導出される式 (5・11) のフィルタは、ウィナーフィルタと呼ばれる。

さて、ここで雑音混入信号成分 $X(\omega)$ と信号成分 $S(\omega)$ との関係を考えてみると、雑音成分

$$W(\omega) = F[w(n)] \quad (5\cdot12)$$

が $S(\omega)$ と無相関であるとき、 $X(\omega)$ のパワースペクトルは

$$P_{XX}(\omega) = P_{SS}(\omega) + P_{WW}(\omega) \quad (5\cdot13)$$

と表せる。また $X(\omega)$ と $S(\omega)$ の相互パワースペクトルは

$$\begin{aligned} P_{XS} &= E[(S(\omega) + W(\omega))S^*(\omega)] \\ &= E[|S(\omega)|^2] \\ &= P_{SS}(\omega) \end{aligned} \quad (5\cdot14)$$

となり、 $S(\omega)$ のパワースペクトルと等しくなる。これらの式 (5・13)、(5・14) を式 (5・11) に代入すれば、ウィナーフィルタは結局

$$H(\omega) = \frac{P_{SS}(\omega)}{P_{SS}(\omega) + P_{WW}(\omega)} \quad (5\cdot15)$$

となり、信号のパワースペクトルと雑音のパワースペクトルのみによって表されることになる。この式 (5・15) が雑音低減のためのウィナーフィルタの設計にしばしば用いられる²⁾。

[ウィナーフィルタ利用の実際]

式 (5・15) のウィナーフィルタを設計するためには、期待値処理すなわち集合平均を含む真のパワースペクトルが二つ必要である。しかし実際には、これらの真のスペクトルが得られることはまれであるために、何らかの推定値に置き換えられることを余儀なくされる。その代表的な置き換え方に時間平均への置き換えがある。すなわち、与えられる信号にエルゴード性を仮定するわけである。このとき、信号のパワースペクトルの推定値は、

$$\hat{P}_{SS}(\omega) = \overline{|S(\omega)|^2} \quad (5\cdot16)$$

のように表せる。ここでバー (—) は時間平均を表している。同様にして、雑音のパワースペクトルの推定値は

$$\hat{P}_{WW}(\omega) = \overline{|W(\omega)|^2} \quad (5.17)$$

と表せる．式 (5.16)(5.17) を用いれば，式 (5.15) のウィナーフィルタは

$$H(\omega) = \frac{\overline{|S(\omega)|^2}}{|S(\omega)|^2 + \overline{|W(\omega)|^2}} \quad (5.18)$$

に置き換えられる．

しかし，まだ問題がある．それは式 (5.18) に含まれる信号のパワースペクトルの推定値 $\overline{|S(\omega)|^2}$ である．なぜなら，原理的に，雑音混入信号のみから信号のパワースペクトルは求められないからである．しかし，付加雑音の無相関性を仮定すると，近似的に

$$\overline{|S(\omega)|^2} \approx \overline{|X(\omega)|^2} \quad (5.19)$$

とすることができる場合がある³⁾．これは，音声処理でよく利用される手法で，すなわち，複数の分析フレームにわたり音声信号にあまり特性変化がなければ，それらにおいて得られるパワースペクトルを平均化することにより，音声信号のパワースペクトルが求められるという手法である．しかし，音声信号の特性変化が激しい場合，このような推定法は問題視される．

音声処理を具体的例にあげると，信号のパワースペクトルを求めるために，スペクトル引き算の原理¹⁾を利用する方法がある．具体的には次のように $\overline{|S(\omega)|^2}$ を求めるのである²⁾．

$$\overline{|S(\omega)|^2} = \overline{|X(\omega)|^2} - \overline{|W(\omega)|^2} \quad (5.20)$$

音声信号の場合，無音区間を利用すれば $\overline{|W(\omega)|^2}$ は求められる．また分析フレームよりも長い時間，音声定常であると仮定すれば， $\overline{|X(\omega)|^2}$ も求められる．したがって式 (5.20) は算出できるわけである．このとき，式 (5.18) は

$$H(\omega) = \frac{\overline{|X(\omega)|^2} - \overline{|W(\omega)|^2}}{\overline{|X(\omega)|^2}} \quad (5.21)$$

となる．このようなフィルタリング方式が，スペクトル引き算 (Spectral Subtraction: SS) の原理を利用した SS 型ウィナーフィルタである．

図 5.1 に，実際の音声信号にウィナーフィルタを適用した処理結果を示しておく．上図が元の音声波形 (雑音なし) で，ある女性話者によって得られた短文の一部で，3.4kHz で帯域制限され，10kHz でサンプリングされたものである．中央図が，この音声データに白色雑音 (同じく，3.4kHz で帯域制限され，10kHz でサンプリングされたもの) が雑音混入音声波形を表している．下図が，中央図の雑音混入音声波形に，51.2ms のフレーム長で分析フレームを 1/2 オーバーラップさせながら SS 型ウィナーフィルタを施した音声波形を示している．ここでは，切り出した分析フレームごとにウィナーフィルタリングを行っている．すなわち，フレーム長の雑音混入音声信号をフーリエ変換し， $X(\omega)$ を求め，式 (5.1) に基づきフィルタ特性 $H(\omega)$ とかけ合わせ，信号成分 $S(\omega)$ を求め，それを逆フーリエ変換して時間信号を得ている．また，フィルタ設計は式 (5.21) に基づくものであるが，簡単のためにここでは時間

平均をとらず，

$$H(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2 - |W(\omega)|^2}{|X(\omega)|^2} \quad (5.22)$$

のようにフィルタ設計している．しかし，この場合，式 (5.22) の右辺の分子において

$$|X(\omega)|^2 < |W(\omega)|^2 \quad (5.23)$$

となり，フィルタ特性が

$$0 \leq H(\omega) \leq 1 \quad (5.24)$$

を満足しなくなることが考えられるので，式 (5.22) の $H(\omega)$ から

$$H_R(\omega) = \frac{H(\omega) + |H(\omega)|}{2} \quad (5.25)$$

を算出し，ある周波数で式 (5.23) が成立する場合には，その振幅を 0 とすることで対処している．

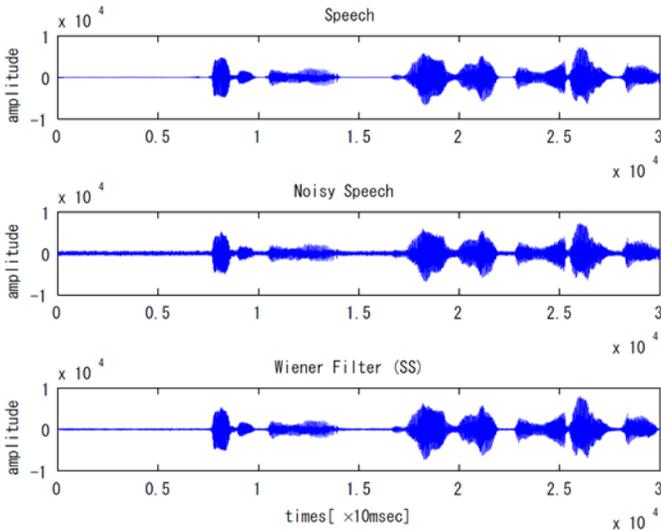


図 5.1 SS 型ウィナーフィルタによる雑音低減

図 5.1 での中央図を下図と比べれば，明らかに SS 型ウィナーフィルタにより，雑音成分が低減されているのが見て取れる．

参考文献

- 1) S.F. Boll, "Suppression of Acoustic Noise in Speech Using Spectral Subtraction," IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol.ASSP-27, no.7, pp.113-120, 1979.
- 2) S.V. Vaseghi, "Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction," Second Edition, Wiley, 2000.
- 3) J.S. Lim and A.V. Oppenheim, "Enhancement and bandwidth compression of noisy speech," Proc. IEEE, vol.67, no.12, pp.1586-1604, 1979.

1 群 - 5 編 - 5 章

5-2 二次元ウィナーフィルタ

(執筆者: 山根延元)[2009年7月受領]

二次元ウィナーフィルタ¹⁾(WF)はボケや雑音などにより劣化した画像の復元や欠落した画素の情報を補間するために広く用いられる。対象となる画像はエッジや平坦部分などをもつため、その統計的性質は空間的に著しく変化する。このような画像のWFの実現にあたっては、統計モデルを精密に推定する必要がある。本節においては、画像のWFのいくつかの実現法とその推定に用いられる統計モデルについて紹介する。

近年進展の著しいベイズ統計に基づく最適フィルタは、WFと深く関連しているため、この方法も本節で触れる。なお、本節を通して、簡単のため画像は零平均であると仮定する。

5-2-1 画像のウィナーフィルタ

画像を画素数 N だけの次元数をもつベクトルとして示す。原画像 x の観測画像を y とすると y の観測モデルは次式のように与えられる。

$$y = Bx + n \quad (5.26)$$

ただし、 B はボケの作用を表す行列、 n は雑音画像を示し、 n は x と無相関であると仮定する。ウィナーフィルタ(WF)は x と次式により与えられる線形推定 \hat{x}

$$\hat{x} = Ay \quad (5.27)$$

の間の平均二乗誤差 $E[\|x - \hat{x}\|^2]$ を最小とするフィルタである。ただし、 $E[(\cdot)]$ は (\cdot) の期待値、 $\|(\cdot)\|$ は (\cdot) のノルムを示す。上式の係数行列 A は次式により与えられる²⁾。

$$A = RB^T(BRB^T + Q)^{-1} \quad (5.28)$$

ただし、 $(\cdot)^T$ は (\cdot) の転置、 $(\cdot)^{-1}$ は (\cdot) の逆行列をそれぞれ示し、 R 及び Q はそれぞれ次式で示す原画像及び雑音画像の自己共分散行列である。

$$R = E[xx^T] \quad (5.29)$$

$$Q = E[nn^T] \quad (5.30)$$

本節では簡単のため、ボケの作用の行列 B と雑音画像の自己共分散行列 Q は既知であり、更に逆行列はすべて存在すると仮定する。このとき式(5.28)のWFは原画像の自己共分散行列 R に関する事前情報を必要とする。この R を推定する問題がWFの実現における重要な課題となっている。

以下、いくつかのケースにおけるWFについて記述する。

(1) 弱定常過程のWF

原画像 x 及び雑音画像 n が共に弱定常過程から出現したものである場合、計算の容易さからWFは周波数領域において施されることが多い。周波数領域への変換は主に二次元離散フーリエ変換(2-D DFT)が用いられるが、二次元離散コサイン変換(2-D DCT)を用いる

場合もある。

2-D DFT を用いる場合、 B を空間不変な循環畳込みと考える。また x と n を X 軸及び Y 軸共に周期的な弱定常過程と仮定する。2-D DFT を行列 U 、 U の共役転置を U^H により示せば、 U^H は U の逆行列となり $U^H U = U U^H = I$ である。ただし、 I は単位行列を示す。このとき式 (5・27)、(5・28) の 2-D DFT はそれぞれ次式となる³⁾。

$$\hat{X} = \Omega Y \quad (5 \cdot 31)$$

$$\Omega = U A U^H = \Lambda D^H (D \Lambda D^H + \Gamma)^{-1} \quad (5 \cdot 32)$$

ただし、ベクトル a の 2-D DFT を $A = U a$ によって示している。また $D = U B U^H$ 、 $\Lambda = U R U^H$ 及び $\Gamma = U Q U^H$ は、それぞれ対角行列となる。したがって、 Ω は対角行列となり、WF 係数 $\omega_{\text{DFT}}(k)$ は次式となる。

$$\omega_{\text{DFT}}(k) = \frac{\lambda(k) d^H(k)}{\lambda(k) |d(k)|^2 + \gamma(k)} \quad ; k = 1, 2, \dots, N \quad (5 \cdot 33)$$

ただし、 $|d(k)|^2$ 、 $\lambda(k)$ 及び $\gamma(k)$ はそれぞれ D^2 、 Λ 及び Γ の k 番目の対角要素である離散スペクトル密度を示す。復元画像は $\hat{x} = U^H \hat{X}$ により与えられる。

もしボケの作用 B のインパルス応答が X 軸及び Y 軸に対して対称性をもつならば、2-D DFT の代わりに 2-D DCT を用いることができる、

(2) 2-D DWT を用いる WF

二次元離散ウェーブレット変換 (2-D DWT) は主に雑音除去に用いられるので、簡単のため白色雑音除去の場合を示す。一般に、2-D DWT は画像を近似的に無相関化することが知られている。2-D DWT を用いる WF はこの性質を利用し、式 (5・33) における弱定常過程の場合の WF と同様に、次式の WF 係数を 2-D DWT の変換域において施す。

$$\omega_{\text{DWT}}(k) = \frac{\beta(k)}{\beta(k) + \sigma^2} \quad ; k = 1, 2, \dots, N \quad (5 \cdot 34)$$

ただし、 $\beta(k)$ は原画像の 2-D DWT スペクトル密度、 σ^2 は雑音電力をそれぞれ示す。

(3) FIR-WF

画像の統計的性質として、その自己相関が画素間の距離が離れるに従って小さくなることが知られている⁴⁾。そこで原画像 x の中の一つの注目画素 x の推定に、その近傍の領域 S (サポート領域) 内の信号ベクトル y_S のみを用いるのが有限インパルス応答 WF (FIR-WF) である。FIR-WF は無限インパルス応答による WF に比べ、フィルタ係数を局所的に変化させる適応的 WF を実現するとき有利である。 x の推定 \hat{x} は次式で与えられる。

$$\hat{x} = a^T y_S \quad (5 \cdot 35)$$

ただし、 a はフィルタ係数ベクトルを示す。平均二乗誤差 $E[(x - \hat{x})^2]$ を最小とする a は次式で与えられる⁵⁾。

$$a = C^{-1} c \quad (5 \cdot 36)$$

ただし C 及び c はそれぞれ y_S の自己共分散行列、及び y_S と x の相互共分散ベクトルを示し、次式で与えられる。

$$C = E[y_S y_S^T] \quad (5.37)$$

$$c = E[y_S x] \quad (5.38)$$

実際は式 (5.36) の a をそのまま用いると画像の直流成分が保存されないことがある。このような場合、WF 係数の総和が 1 という拘束条件をおいて得られる次式の係数を用いればよい。

$$a = C^{-1}c + \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}}(1 - \mathbf{1}^T C^{-1}c) \quad (5.39)$$

ただし、 $\mathbf{1}$ は要素がすべて 1 のベクトルを示す。

(4) 縦続型 WF

縦続型 WF はボケ像修正と雑音除去をそれぞれ別々の WF によって行うものである⁶⁾。まず式 (5.28) の WF によるボケ像修正について考える。式 (5.28) において雑音が 0 すなわち Q が零行列であると仮定し、更にボケの作用素 B が空間不変かつ可逆と仮定した場合、WF は B の逆フィルタである空間不変フィルタとなる。しかし、実際は雑音が存在し B は非可逆か極度に非適切問題になるため、直接逆フィルタを求めると雑音の振幅を大幅に増幅してしまう。そこで縦続型 WF においては、まず 1 段目に弱定常 WF を用い、大まかにボケ修正した補正画像を得る。次に 2 段目に局所適応型 WF を用い、補正画像の雑音除去を含んだ精細な復元を行う。

1 段目の弱定常 WF としてはあらかじめ学習しておいた汎化定常 WF を用いる方法のほか、次式の Tichonov の正則化逆フィルタ²⁾で代用することもある。

$$\tilde{\omega}_{\text{DFT}}(k) = \frac{d^H(k)}{|d(k)|^2 + \epsilon^2} \quad ; k = 1, 2, \dots, N \quad (5.40)$$

ただし ϵ^2 は正則化定数を示す。上式のフィルタは式 (5.33) の WF において $\lambda(k)$ 及び $\gamma(k)$ が未知のとき、これらを一定値とおいた近似となっている。

(5) ガウス過程の WF

一般に、非線形フィルタを含む大域的最適フィルタは、次式により与えられる最小平均二乗誤差 (MMSE) フィルタである⁵⁾。

$$\hat{x} = E[x|y] \quad (5.41)$$

ただし、 $E[x|y]$ は y が与えられたもとの x の条件付期待値を示す。原画像 x 及び雑音画像 n が共にガウス過程からの出現であるとき、上式の MMSE フィルタは WF に帰着する⁵⁾。

5-2-2 WF のための画像の統計モデル推定

以下、簡単のため雑音除去の場合を示す。ボケ像修正の場合は 5-2-1(4) で述べた縦続型 WF を用いればよい。

以下では、WF の推定に用いられるいくつかの統計モデルとその推定法について述べる。

(1) 経験的 WF

多ステップの推定を行うことで推定精度の向上を図る方法に経験的 WF⁷⁾と呼ばれる方法がある。2 ステップの場合、1 ステップ目では 2-D DWT や 2-D DCT の変換域において画像の電力が局在することを利用して、しきい処理により雑音を除去する。2 ステップ目では 1 ステップ目で得られた原画像の推定画像から WF を推定し画像を復元する。

(a) 2-D DWT を用いる方法

画像の 2-D DWT スペクトル密度が空間及び周波数領域において局在することを利用して、以下の方法により式 (5.34) の $\beta(k)$ を推定する。この方法は 2 種類のウェーブレット変換基底を用いる。まず第一の基底行列 W_1 による観測画像の 2-D DWT に対し、しきい処理を行って原画像の 2-D DWT X の推定 \hat{X}_1 を得る。次に、第二の基底行列 W_2 による X の推定 $\hat{X}_2 = W_2 W_1^T \hat{X}_1$ を求めて、式 (5.34) の $\beta(k)$ の推定値 $\hat{X}_2(k)$ を得る。ただし、 $\hat{X}_2(k)$ は \hat{X}_2 の k 番目の成分を示す。最後に W_2 による観測画像の 2-D DWT 係数に対し、この $\beta(k)$ の推定値による式 (5.34) の WF を施す⁷⁾。

(b) 2-D DCT を用いる方法

この方法は 2-D DCT が画像の局所ブロックに対する固有変換を近似することを利用し、観測画像における局所ブロックの 2-D DCT 係数にしきい処理と逆変換を行って原画像を推定する。その際、ブロックひずみの発生を防ぐため、まずブロックを画素ごとにスライディングしながら推定を行い、各画素ごとにブロックサイズ個の推定値を得る。次にこれらの推定値にブロックの信号電力に反比例する重み付け平均を行い、各画素を復元する⁸⁾。以下、ブロックを画素ごとにスライディングしながら推定を行う方法をオーバーコンプリート推定と呼ぶ。

2 ステップの経験的 WF では、まず 1 ステップ目のオーバーコンプリート推定により原画像の推定画像を求める。次に、この推定画像から原画像の 2-D DCT スペクトルを推定し、WF を推定する。最後に 2 ステップ目のオーバーコンプリート推定において、しきい処理の代わりに 1 ステップ目で求めた WF を施す⁸⁾。

(2) ベイズリスク推定

ベイズ推定は未知の画像 x がそれ自身の事前分布 $f(x)$ からの出現であるとして取り扱う。この事前分布は観測画像 y と共に、ベイズ推定に用いられる事後分布 $f(x|y)$ を与える。 x の推定 $\hat{x}(y)$ の尺度をロス関数と呼び、 $L[x, \hat{x}(y)]$ と示す。 $L[x, \hat{x}(y)]$ としては次式の二次関数が代表的である。

$$L[x, \hat{x}(y)] = \|x - \hat{x}(y)\|^2 \quad (5.42)$$

画像 x が与えられたとき、 x のもとでの $L[x, \hat{x}(y)]$ の条件付期待値 $E[L[x, \hat{x}(y)]|x]$ をリスクと呼ぶ。このリスクを事前分布 $f(x)$ の上で平均した $EE[L[x, \hat{x}(y)]|x]$ をベイズリスクと呼ぶ。ベイズリスクを最小とする推定がベイズリスク推定である。ベイズリスクをベイズの定理により $EE[L[x, \hat{x}(y)]|y]$ と書き直す。すると $f(y)$ が非負であるため、ベイズリスク推定は事後分布 $f(x|y)$ に関するロス関数の条件付期待値 $E[L[x, \hat{x}(y)]|y]$ を最小とすることで得られる。この結果を 2 次ロス関数の場合に適用すると、 $\hat{x}(y) = E[x|y]$ となりベイズリスク推定は MMSE 推定に帰着する⁵⁾。したがって、ガウス過程における WF は MMSE 推定であると同

時にベイズリスク推定でもある。

一般的な画像の最適フィルタ問題においては、事前分布 $f(x)$ の推定法が重要となり数多くの方法が提案されている⁹⁾。

(3) ガウス定常混合モデル推定

画像の局所信号にガウス混合モデル (GMM) を当てはめる。このとき、局所信号はその領域が小さくなるにつれて定常過程に近づくことが知られているため⁴⁾、要素過程を定常過程と仮定するとモデル化の能率が高くなる。画像の局所信号ベクトル x_L の定常 GMM は次式のように表される。

$$f(x_L) = \sum_{i=1}^M P(s_i) N(x_L | \mathbf{0}, R_i) \quad (5 \cdot 43)$$

ただし $f(\cdot)$ は確率密度関数、 M はモデルサイズ、 $P(s)$ は s 番目の要素過程の出現確率を示し、混合比と呼ばれる。また $N(\cdot | \mu, R)$ は平均ベクトルが μ で自己共分散行列が R のガウス密度関数の (\cdot) における値を示す。

GMM のもとでの平均二乗誤差は次式により与えられる。

$$E[\|x - \hat{x}\|^2] = N \sum_{i=1}^M E[(x - \hat{x})^2 | s_i] P(s_i) \quad (5 \cdot 44)$$

上式における $E[(x - \hat{x})^2 | s_i]$ を最小とする WF は、各要素過程ごとの FIR-WF として求めることができる。GMM の推定法として、以下に述べる画像ごとにオンラインで行う方法¹⁰⁾とあらかじめ汎化モデルをオフラインで推定しておく方法¹¹⁾の二つの方法がある。これらの WF は局所適応型 WF となる。

(a) オンラインの方法

DWT の局所係数ベクトルを特徴ベクトルとしてモデル化する方法が一般的である。その統計量として、観測画像の局所 DWT 係数ベクトルの自己共分散行列 Λ_L を観測画像における標本平均として推定する。また原画像の局所 DWT 係数ベクトルの自己共分散行列 Λ_{LO} は、 Λ_L から既知の雑音の自己共分散行列 Γ_L を減算して推定する。この方法の GMM は特徴ベクトルの平均電力 $[z_i : i = 1, 2, \dots, M]$ をパラメータとし、 i 番目の要素分布の自己共分散行列を $z_i \Lambda_{LO} + \Gamma_L$ のように推定するもので、ガウススケール混合モデル (GSM) と呼ばれる¹⁰⁾。

(b) オフラインの方法

汎化 GMM は多種多様な原画像を用いて学習する。この学習は期待値最大化 (EM) アルゴリズム¹²⁾を用いて行う。推定すべきパラメータは $[P(s_i), R_i : i = 1, 2, \dots, M]$ であって、平均ベクトルは零ベクトルとすることに注意する。この汎化 GMM の学習にあたっては、より低雑音で鮮明な画像をトレーニングに用いるほどより良いモデルとなる。5-2-1(5) で述べたように、雑音画像もガウス過程からの出現である場合、この方法の WF は MMSE 推定となる。また雑音画像がガウス過程からの出現ではない場合も、その GMM を学習し原画モデルとの積モデルを構成すれば、得られる WF は MMSE 推定となる。

参考文献

- 1) A. Jain, "Fundamentals of Digital Image Processing. Englewood Cliffs," NJ: Prentice-Hall, 1989.

- 2) 小川英光, “信号と画像の復元〔II〕-古典的最適復元フィルタ-,” 電子情報通信学会誌, vol.71, no.6, pp.593-601, June 1988.
- 3) Richard A. Haddad, “Thomas W. Parsons, Digital Signal Processing,” NY: Computer Science Press, 1991.
- 4) P.A. Maragos, R.W. Shafer and R.M. Mersereau, “Two-Dimensional Linear Prediction and Its Application to Adaptive Predictive Coding of Images,” IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Processing, vol. ASSP-32, no.6, pp.1213-1228, Dec. 1988.
- 5) Louis L. Scharf, “Statistical Signal Processing,” MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- 6) R. Neelamani, H. Choi, and R.G. Baraniuk, “ForWaRD: Fourier wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned systems,” IEEE Trans. Signal Process., vol.52, no.2, pp.418-433, Feb. 2004.
- 7) S. Ghael, A. Sayeed, R. Baraniuk, “Improved wavelet denoising via empirical wiener filtering,” Proceedings of SPIE, San Diego, July 1997.
- 8) Foi, A., V. Katkovnik, and K. Egiazarian, “Pointwise Shape-Adaptive DCT for High-Quality Denoising and Deblocking of Grayscale and Color Images,” IEEE Trans. Image Process., vol.16, no.5, pp.1395-1411, May 2007.
- 9) Jose M. Bioucas-Dias, “Bayesian Wavelet-Based Image Deconvolution: A GEM Algorithm Exploiting a Class of Heavy-Tailed Priors,” IEEE Trans. Image Process., vol.15, no.4, April 2006.
- 10) Javier Portilla, Vasily Strela, Martin J. Wainwright, and Eero P. Simoncelli, “Image Denoising Using Scale Mixtures of Gaussians in the Wavelet Domain,” IEEE Trans. Image Process, vol.12, no.11, Nov. 2003.
- 11) Yamane et. al., “Image Restoration Using a Universal GMM Learning and Adaptive Wiener Filter,” IEICE Trans. A, vol.92-A, no.10, Oct. 2009.
- 12) A. Dempster, N. Laird and D. Rubin, “Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm,” J. Roy. Statist. Soc. B, vol.39, pp.1-38, 1977.