Ludolph van Ceulen, rekenmeester. Naast het berekenen van decimalen van π heeft hij zich ook beziggehouden met het berekenen van zijden van regelmatige *n*-hoeken. En hoe. **Steven Wepster** bericht vol respect.

Van Ceulens veelhoeken en veeltermen

Inleiding

Onlangs heeft een werkgroep van Utrechtse wiskundestudenten zich beziggehouden met delen uit het boek *Vanden Circkel* van Ludolph van Ceulen. Dit boek werd in 1596 in Delft gepubliceerd. Het is beroemd geworden omdat Van Ceulen erin de verhouding tussen de diameter en omtrek van een cirkel (tegenwoordig ook wel bekend als π) berekent in twintig decimalen, een absoluut record voor die tijd. Later heeft hij het aantal decimalen zelfs nog opgevoerd tot vijfendertig. In de werkgroep (onder leiding van Jan Hogendijk en Steven Wepster) ging het echter om een ander onderwerp uit hetzelfde boek: Van Ceulens berekeningen van de zijden van regelmatige veelhoeken. Het bleken fascinerende hoofdstukken vol boeiende wiskunde, van een verrassende frisheid, en bovendien van een niveau dat haalbaar is in een bovenbouwklas. Reden genoeg dus om u erover te berichten.

Achtergrond

Ludolph van Ceulen (ook wel Ludolff van Collen of Colen) werd geboren op 18 januari 1540 te Hildesheim, Duitsland. Hij behoorde tot de groep van rekenmeesters die een eigen schooltje hadden waar je tegen betaling onderricht in rekenen en wiskunde kon krijgen. Van Ceulen had zo'n schooltje onder andere in Delft en Leiden. Hij gaf bovendien les in schermen. Beide bezigheden ziet u fraai verenigd op de titelpagina van *Vanden Circkel* (zie figuur 1).

Vanaf 1600 tot zijn dood gaf Van Ceulen samen met Symon van der Merwen les aan de Leidse ingenieursschool. Dat was een school die Prins Maurits in 1600 te Leiden had gesticht. Anders dan op de universiteit, waar de colleges in het Latijn waren, werd er hier in *goeder duytsche taele* (Nederlands) lesgegeven in *Telkonsten ende Landmeten*. Simon Stevin had het lesprogramma opgesteld en daarbij goed rekening gehouden met de noden van Maurits' leger, zoals bijvoorbeeld vestingbouwkunde. De pupillen moesten zelfs ook *belooven ende sweeren aen den Viant deeser Landen daer mede* [met het geleerde] *geenen dienst te doen*.

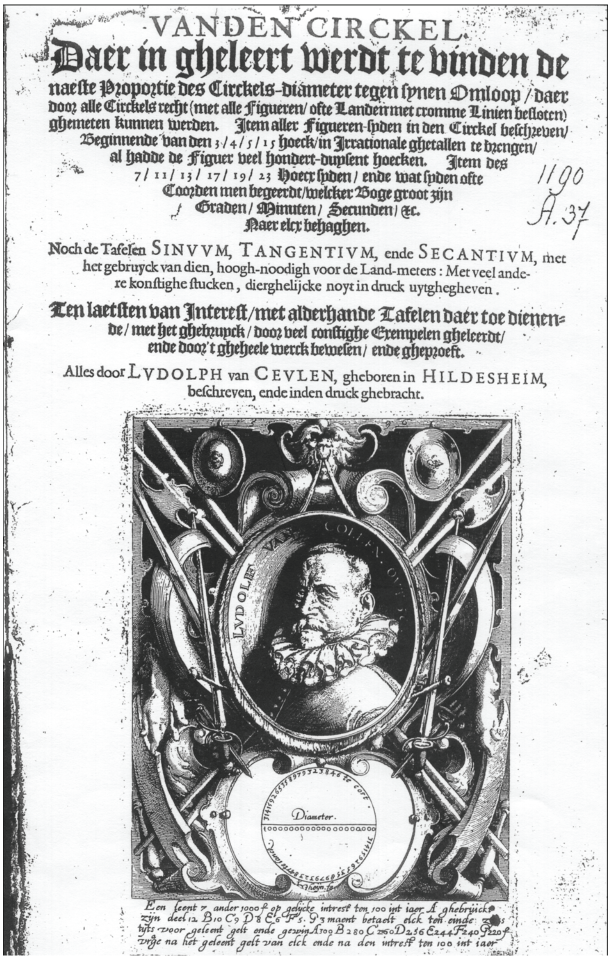
VANDEN CIRCKEL.
Daer in gheleert werdt te vinden de naeste Proportie des Circkels-diameter tegen synen Omloop / daer door alle Circkels recht (met alle Figueren / ofte Landen met cromme Linien besloten) ghemeten kunnen werden. Item aller Figueren-syden in den Circkel beschreven / Beginnende van den 3 / 4 / 5 / 15 hoeck / in Irrationale ghetallen te brengen / al hadde de Figuer veel hondert-duysent hoecken. Item des 7 / 11 / 13 / 17 / 19 / 23 Hoecx syden / ende wat syden ofte Coorden men begeerdt / welcker Boge groot zijn Graden / Minuten / Secunden / &c. Naer elcx behaghen.
Noch de Tafelen SINVVM, TANGENTIVM, ende SECANTIVM, met het gebruyck van dien, hoogh-noodigh voor de Land-meters: Met veel andere konstighe stucken, dierghelijcke noyt in druck uytghegheven.
Ten laetsten van Interest / met alderhande Tafelen daer toe dienende / met het ghebruyck / door veel constighe Exempelen gheleerdt / ende door't ghebeele werck bewesen / ende gheproeft.
Alles door LVDOLPH van CEVLEN, gheboren in HILDESHEIM, beschreven, ende inden druck ghebracht.

fig. 1 titelpagina 'Vanden Circkel'

Daarnaast had Ludolph een druk gezinsleven. Hij is twee keer getrouwd geweest en had in totaal twaalf kinderen. Hij overleed op 31 december 1610 te Leiden, waar hij werd begraven in de Pieterskerk, onder een grafsteen waarop trots zijn vijfendertig decimalen van π prijkten. Deze grafsteen is verloren geraakt, maar sinds 2000 is er een vervangende kopie in de kerk te bewonderen. Zijn weduwe heeft in 1615 een nieuwe uitgave van *Vanden Circkel* laten uitgeven, en ook zorgde zij voor de uitgave van ander, ongepubliceerd werk van haar overleden echtgenoot (*Arithmetische en Geometrische Fondamenten*), terwijl Willebrord Snellius beide boeken bewerkte en in het Latijn beschikbaar maakte (Ludolph zelf sprak, las, en schreef geen Latijn).

Vanden Circkel bevat ook sinustafels, landmeetkunde, interest-rekening, en honderd *konstighe Vraghen* die hij de lezers schenkt, *niet twijfelende / de rechte Lief-hebbers sullen lust ende behaghen daerin hebben*, bijvoorbeeld deze:

> Deelt 6 in twee deelen / Alsoo: Wanneer men der grootster Quadraet multipliceert met den cleynsten deel / dat 7 come. Antwoordt.
> $3\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{1}{4}}$ ende $2\frac{1}{2} - \sqrt{5\frac{1}{4}}$.

De uitdaging van Van Roomen

In de wiskunde van die tijd had meetkunde een veel belangrijker rol dan nu. Letterrekenen oftewel algebra was een betrekkelijk nieuw terrein; wiskundigen waren, ietwat oneerbiedig gezegd, volop bezig hun algebraïsche vaardigheden te ontwikkelen. Algebra schreef men nog niet met x en x^2 en heette ook nog niet algebra. Het heette de *regel Cos* en dat kwam zo. Italiaanse wiskundigen hadden van hun islamitische voorgangers afgekeken dat je moeilijke problemen kunt oplossen door te doen alsof het probleem al opgelost is, waarna je gaat onderzoeken welke eigenschappen die oplossing heeft. Het ding dat je wilt vinden en waarvan je dus doet alsof je het al hebt, noem je het Ding, of in het Italiaans *Cosa*. In het Duits werd dit verbasterd tot *Coss* of *Cos*, niet te verwarren met onze cosinus. Het Ding had ook een symbool, namelijk , en als je er het kwadraat van nodig had, dan schreef je . De derde macht schreef je als en de vierde macht als en zo door. Onze notatie met x en exponenten daar rechtsboven dateert van 1637 toen Descartes' *La Geometrie* verscheen. In dit artikel zullen we de moderne notatie aanhouden.

Regelmatige veelhoeken waren in Van Ceulens belangstelling gekomen door toedoen van Adriaan van Roomen, een geleerde uit Leuven (later werkte hij in Keulen). Het statusverschil tussen academiegeleerden en gewone rekenmeesters stond niet in de weg dat de twee uitvoerig met elkaar correspondeerden. Sterker nog: Van Roomen stak zijn bewondering voor Van Ceulen niet onder stoelen of banken. Eén van de problemen die de geleerde aan de rekenmeester voorlegde, was het vinden van een oplossing van de volgende vergelijking:

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21} - 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740259x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} =$$

$$\sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}\ .$$

We komen later nog op de betekenis van deze vergelijking terug; voorlopig mag het hart u erbij in de schoenen zinken. Hetzelfde zal mogelijk ook Ludolph zijn overkomen. Maar ook al doorzag hij de achtergrond van deze *sware vraghe* niet direct, toch wist hij wel een antwoord te produceren.

Van Roomen schreef een boek, *Ideae Mathematicae Pars Prima, sive Methodus Polygonorum* dat in 1593 verscheen, en hoewel Van Ceulen geen Latijn las, zal het wel tot hem doorgedrongen zijn wat Van Roomens onvoltooide onderzoeksplan was: om de zijden van regelmatige n-hoeken te berekenen voor $3 \le n \le 80$. Van Ceulen pakt de handschoen op in *Vanden Circkel*.

Terzijde: als u de zijde z van een regelmatige n-hoek in een cirkel met straal 1 wilt uitrekenen, dan gebruikt u vermoedelijk de formule

$$z = 2\sin\left(\frac{180°}{n}\right)$$

alsmede een apparaat of tabel die nauwkeurige sinuswaarden kan leveren. De beide laatste ontbeerde men nog in 1600.

Een opwarmertje

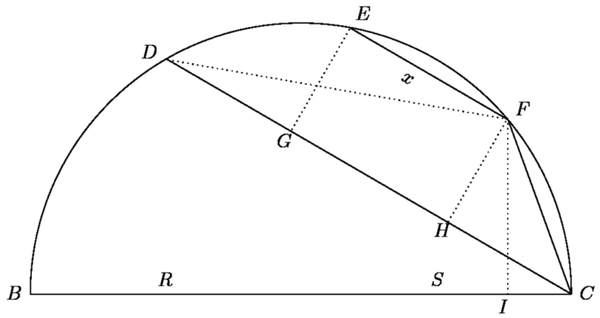

fig. 2 berekening van de zijde van een negenhoek

We bekijken nu eerst hoe Ludolph van Ceulen de zijde van een regelmatige negenhoek berekent (zie figuur 2). In de cirkel *BDEFC* met straal 1 is *DC* de zijde van een gelijkzijdige driehoek, met lengte $\sqrt{3}$ zoals u zelf kunt nagaan. De boog *DC* is door *E* en *F* in drie gelijke delen gedeeld. Daardoor zijn *DE*, *EF*, en *FC* ieder een zijde van een ingeschreven regelmatige negenhoek, zeg met lengte x. Verder zijn *G* en *H* de voetpunten van de loodlijnen op *DC* vanuit *E* respectievelijk *F*. Ten slotte is *I* het voetpunt van de loodlijn uit *F* op de diameter *BC*. Nu gaan we een potje algebra doen met de gegevens uit de figuur.

Omdat $GH = EF = x$, hebben we $HC = \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x$ en $HD = \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x$. Met de stelling van Pythagoras in driehoek *CFH* vinden we $HF^2 = FC^2 - HC^2 = \frac{3}{4}x^2 + x\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}$.

Vervolgens krijgen we in driehoek DFH dat $DF^2 = HD^2 + HF^2 = x^2 + x\sqrt{3}$.
Nu stappen we over naar driehoek BCF. Omdat F op de cirkelomtrek ligt waarvan BC een diameter is, is de hoek bij F recht. Dus is $BF^2 = BC^2 - FC^2 = 4 - x^2$. Uit de gelijkvormigheid van driehoeken BCF en FCI volgt dat

$$BC : BF = FC : FI, \text{ derhalve } FI = \frac{BF \cdot FC}{BC} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}.$$

Nu kunt u nagaan dat FI tevens de helft is van DF, bijvoorbeeld door FI te spiegelen in de diameter AB zodat u een koorde krijgt die dezelfde boog afsnijdt als DF. Er moet daarom gelden dat $(4-x^2)x^2 = x^2 + x\sqrt{3}$, oftewel (daar $x \neq 0$) $3x - x^3 = \sqrt{3}$. Deze vergelijking heeft drie reële wortels, waarvan de (absoluut gezien) kleinste de lengte van de zijde van de negenhoek is (de andere twee wortels zijn gerelateerd aan de twee nog onbekende diagonalen in die figuur).
Volgens Van Ceulen ligt de lengte van de zijde tussen 0,684040286651337466088199229364518 en hetzelfde getal met een 9 op het eind. Alle cijfers behalve de laatste zijn correct; zo veel decimalen krijgt u niet uit de GR getoverd.

Om u een indruk te geven van de originele tekst, volgt hier dezelfde afleiding in Van Ceulens eigen woorden:

> . . . bereydet een Figuer als hier neffens gheteykent. In welcke DC is een syde des 3 houcx/ ende EF een syde des 9 houcx in den Circkel gheschreven / wiens Diameter BC doet 2 / dan moet DC doen $\sqrt{3}$. Ick sette voor EF / die ghelijck is FC / ende GH $1\mathfrak{x}$ /
>
> dan is HC $\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}$ ende HD $\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\mathfrak{x}$.
>
> Door de 47ste des eersten Euclides / doen de Quadraten van HC / ende HF / t'samen so veel als het Quadraet FC: Daerom genomen het Quadraet van HC (welc doet $\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{3}{4}\mathfrak{z}} + \frac{1}{4}\mathfrak{z}$) van't Quadraet FC (als $1\mathfrak{z}$) Rest voor't Quadraet HF: te weten $\frac{3}{4}\mathfrak{z} + \sqrt{\frac{3}{4}\mathfrak{z}} - \frac{3}{4}$. Het Quadraat HD doet $\sqrt{\frac{3}{4}\mathfrak{z}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\mathfrak{z}$.
>
> Dese 2 Quadraten t'samen / doen soo veel (door't voorgaende) als het Quadraet FD. Addeert / ende uyt de summa √. Comt voor DF $\sqrt{1\mathfrak{z} + \sqrt{3\mathfrak{z}}}$. De Perpendiculaer FI is de helfte van DF. Oorsake / den Boghe DEF noch soo groot is [*nog eens zo groot*] / als den Boghe FC. Subtraheert het Quadraet van FC / van't Quadraet CB / uyt den rest √. Comt voor BF $\sqrt{4 - 1\mathfrak{z}}$. Door de 8ste des 6ste [stelling 8 uit boek 6 van de *Elementen* van Euclides: de twee driehoeken BCF en FCI zijn gelijkvormig omdat de hoeken gelijk zijn, daarom $CB : BF = CF : FI$]. Als CB 2 teghen BF / $\sqrt{4 - 1\mathfrak{z}}$: Alsoo FC $1\mathfrak{x}$ teghen FI. Facit [= dit maakt] $\sqrt{4\mathfrak{z} - 1\mathfrak{z}\mathfrak{z}}/2$ / voor FI.
>
> Dese Ghemultipliceert met 2 / comt $\sqrt{4\mathfrak{z} - 1\mathfrak{z}\mathfrak{z}}$ gelijck DF daer boven voor gevondē $\sqrt{1\mathfrak{z} + \sqrt{3\mathfrak{z}}}$. Quadreert over elcke syde / comt $4\mathfrak{z} - \mathfrak{z}\mathfrak{z}$ ghelijck $1\mathfrak{z} + \sqrt{3\mathfrak{z}}$: Dat is $3\mathfrak{z} - 1\mathfrak{z}\mathfrak{z}$ ghelijck $\sqrt{3\mathfrak{z}}$. Divideert over elcke syde met $1\mathfrak{x}$ / Comt $3\mathfrak{x}$ - $1\mathfrak{c}$ ghelijck $\sqrt{3}$. Facit [= dit maakt] $1\mathfrak{c}$/ doet meer als $\frac{684040286651337466088499229364518}{1000000000000000000000000000000000}$. / Ende soo verre voor de 8 op 't eynde 9 geset werde / soude te lanck comen voor een syde des 9 houcx / &c.

Ik vind het een werkelijk prachtig staaltje algebra toegepast in meetkunde. De twee gaan zo moeiteloos met elkaar om dat hun verhouding niets van haar prilheid toont.

De eigenschappen van de meetkundige figuur dicteren de formulemanipulaties, en de eindformule drukt weer iets uit over de figuur.

Van Ceulen gebruikt in zijn afleiding nergens dat DC de zijde van een gelijkzijdige ingeschreven driehoek is. Het verhaal verloopt dan ook precies hetzelfde voor elke lengte c van een willekeurige koorde DC, en komt dan uit op de vergelijking $3x - x^3 = c$. De (absoluut kleinste) oplossing van die vergelijking is de lengte van de koorde van $\frac{1}{3}$ van boog DC. De vergelijking is dus de algebraïsche uitdrukking die hoort bij de driedeling van een boog. Van Ceulen was zich hier terdege van bewust. Hij wist ook, zo blijkt uit zijn boek, dat $5x - 5x^3 + x^5 = c$ de uitdrukking is voor de vijfdeling, en dat er net zulke formules bestaan voor de verdeling van een boog in een ander aantal gelijke stukken.

De Franse wiskundige François Viète had op dat moment dergelijke vergelijkingen ook al gevonden, maar nog niet gepubliceerd. We vinden in zijn postuum verschenen *Ad angulares sectiones theoremata* (1615) een schema waaruit je precies de coëfficiënten kunt aflezen van de $n$degraads vergelijking die hoort bij de n-deling van een boog. En Adriaan van Roomen kende zulke vergelijkingen ook al; het onderwerp stond duidelijk in de belangstelling. Viète had bij leven trouwens ook al direct de bovenvermelde 45e-graads vergelijking van Van Roomen herkend, en alle wortels gegeven, maar daarover later meer.

Een fondament

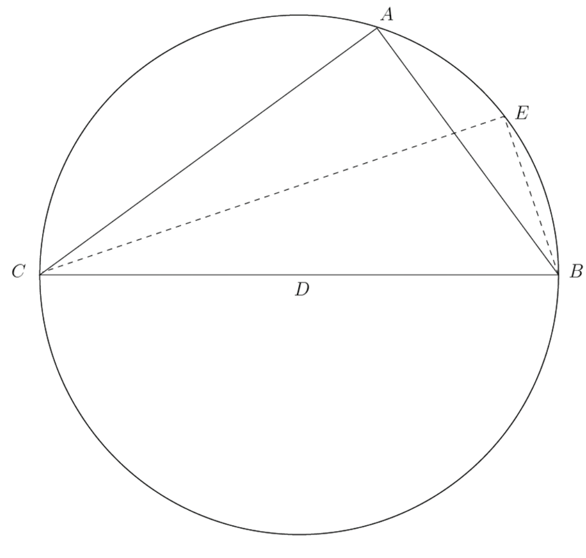

fig. 3 verband tussen een gegeven koorde, en een koorde die maar een half zo grote boog van de cirkel afsnijdt

In principe is het mogelijk op de boven geschetste weg door te gaan en de zijden van alle veelhoeken te berekenen. Voor bijvoorbeeld de zijde van de zevenhoek zou

Van Ceulen de zevendeling toepassen op de halve cirkel (met als koorde de diameter *BC*) en de juiste wortel berekenen van de bijbehorende zevende-graads veelterm. Dit zou hem de zijde van een veertienhoek opleveren, de zevenhoek is daarna een peuleschilletje (dat blijkt uit wat hieronder staat). Zo doorgaande tot en met de 79-hoek worden de graden van de veeltermen steeds hoger. Afschrikwekkend hoog, vindt Van Ceulen, want hij is op zoek gegaan naar een andere manier. Hieronder staat wat hij vond.

Eerst echter hebben we een resultaat nodig dat Ludolph belangrijk genoeg vond om er de eerste propositie in zijn boek aan te wijden, en waarnaar hij later regelmatig verwijst als zijnde ‘mijn fondament’. Het legt een verband tussen een gegeven koorde, en een koorde die maar een half zo grote boog van de cirkel afsnijdt. In figuur 3 is *D* het midden van cirkel *CAB*, *AB* is de gegeven koorde, en *E* ligt op de cirkel midden tussen *A* en *B*. Van Ceulen bewijst tamelijk omslachtig (we laten het bewijs hier weg) dat $EB^2 = CD \cdot (CB - CA)$. Dit resultaat volgt uit de stelling van de koordenvierhoek, namelijk het product van de diagonalen is de som van de producten van de overstaande zijden, maar die stelling blijkt Van Ceulen niet te kennen. Indien we weer straal 1 nemen, *CA* uitdrukken met behulp van de stelling van Pythagoras, en de wortel trekken,
dan komt er $EB = \sqrt{2 - \sqrt{4 - AB^2}}$. Dezelfde formule kunt u trouwens ook vinden uitgaande van de bekende verdubbelingsformule $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi$.
Verwissel de buitenste termen, vermenigvuldig beide zijden met 2, en druk cos uit in sin, dan krijgt u $(2\sin\phi)^2 = 2 - 2\sqrt{1 - 2\sin^2 2\phi}$ ·

Noem in de figuur $\angle EDB = 2\phi$, dan is $EB = 2\sin\phi$ en $AB = 2\sin 2\phi$ en dan is het al bijna gebeurd.
Dit is een machtig mooi resultaat, want je kunt er direct de zijden van een 2*n*-hoek mee uitrekenen als de *n*-hoek bekend is, en andersom. Bovendien kun je dat herhalen zo vaak je wilt: Ludolph herhaalt het ook werkelijk heel vaak om π te benaderen met behulp van een 64424509440-hoek. Bij de driedeling die we hierboven zagen moest er een ingewikkelde vergelijking opgelost worden, maar bij een tweedeling hoeft dat dus niet.

Het spel

Nu kunnen we gaan kijken naar de alternatieve methode die Ludolph vond, te illustreren aan de zevenhoek en *en passant* de veertienhoek. In figuur 4 is *AB* de middellijn van een cirkel met straal 1. *LM* is de zijde van een regelmatige ingeschreven veertienhoek, waarvan we de lengte aanduiden met *x*. Verder zijn *K* en *I* de voetpunten van de loodlijnen op *AB* uit *L* respectievelijk *M*. U kunt achtereenvolgens nagaan dat $AK = 1 - \frac{1}{2}x$, $KB = 1 + \frac{1}{2}x$, daarmee $KL = \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}$ (wegens gelijkvormigheid; *KL* stond ook wel bekend als de middenproportionaal tussen *AK* en *KB*), en dan met Pythagoras $AL = \sqrt{2 - x}$, $LB = \sqrt{2 + x}$.

Dit deel van het spel is algemeen geldig en eigenlijk had Van Ceulen er wel een propositie aan mogen wijden, maar dat doet hij niet. De propositie zou ongeveer zo moeten luiden: als je in een eenheidscirkel een koorde hebt, en evenwijdig aan de koorde een diameter trekt (met lengte 2), en vervolgens de uiteinden van de koorde middels rechte lijnen verbindt met de uiteinden van de diameter, dan hebben die verbindingslijnen lengte $\sqrt{2 \pm x}$, met een + voor de langere en een – voor de kortere (er zijn weliswaar vier lijnen, maar die zijn twee aan twee even lang). We hebben dit resultaat zometeen weer nodig. Nu staan er twee wegen open: linksom of rechtsom.

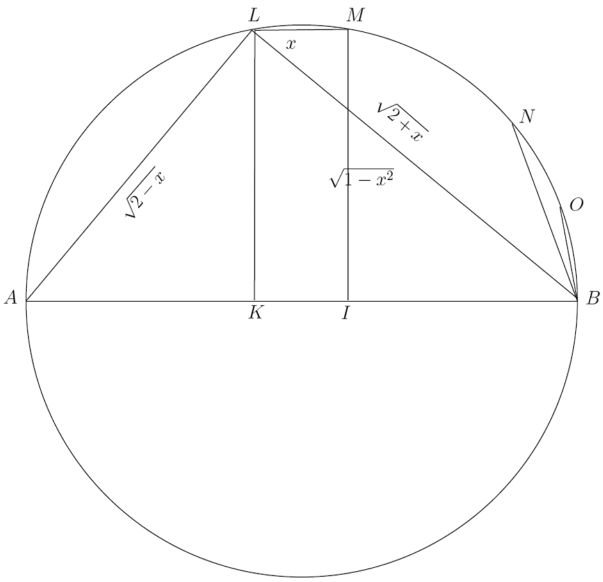

fig. 4 de alternatieve methode van Ludolph van Ceulen

Wie rechtsom gaat, laat *N* op de cirkel halverwege *M* en *B* liggen, en *O* halverwege tussen *N* en *B*. Telt u even na dat *OB* de zijde van een veertienhoek is, en *NB* de zijde van een zevenhoek. Toepassen van Van Ceulens fundamentele eerste propositie geeft $NB = \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}$·
Dan is, zoals uit het bovenstaande volgt,
$AN = \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}$·
Opnieuw de eerste propositie toepassen, geeft

$OB = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}$. Maar $OB = CD = x$,
dus hebben we de vergelijking

$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}$. De kleinste positieve oplossing daarvan is de zijde van de veertienhoek. De rekenmeester gaat liever linksom, klaarblijkelijk omdat hij dan ‘slechts’ een vergelijking van graad 6 hoeft op te lossen: boog *AL* staat over drie zijden van de veertienhoek, en de formule van de driedeling leert dan dat *x* voldoet aan $3x - x^3 = \sqrt{2 - x}$. Schijnbaar zonder moeite vindt hij dat *x* = 0,445041867912628808577805, hetgeen correct is. Linksom of rechtsom: de zijde van de zevenhoek reken je ten slotte uit met de bovenstaande formule voor *NB*, en klaar ben je.

Om te zien of u het spel begrepen hebt, kunt u zelf (eventueel met behulp van Van Ceulens tekst hieronder) nagaan dat de zijde van de tweeëntwintighoek moet voldoen aan

$3x - x^3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$ en ook aan

$5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{2 - x}$.

> Den 11 / ende 13 houck in een Circkel beschreven / hebbe ick mede op vergelijckinge gebracht / welck een sware saecke is / ende sal de selve sparen tot dat mijn Geometria ghedruckt werdt / daerinne de selve met den 7 houck / ende andere ghevonden sullen werden. De voornoemde zijn veel lichter te becomen / door den hier-tegen-gestelde Figuer [*zie figuur 5*] / daer in *DE* een syde des 22 houcx is: Daerom den Boghe *AKDE* is ses mael soo groot als *DE* / eñ den Boghe *EOB* vijf mael soo groot. Nu doet de rechte *AE* $\sqrt{2 + 1ꝝ}$/ eñ *EB* $\sqrt{2 - 1ꝝ}$. Item [*net zo*] door't voorgaende doet *KA* $\sqrt{2 - \sqrt{2 - 1ꝝ}}$ (welcke eenen Boghe ondertoghen is / drymael soo groot als *DE*). Daerom comt 3ꝝ -1ꝯ ghelijck $\sqrt{2 - \sqrt{2 - 1ꝝ}}$: ofte 5ꝝ - 5ꝯ + 1β [$\beta = x^5$] is ghelijck $\sqrt{2 - 1ꝝ}$/ Comt voor 1ꝝ (Dat is een syde des 22 houcx) 2846296765465702808 /100000000000000000000 te cort / ende 9 op't eynde te lanck. Door dese vint ghy licht voor de syde des 11 houcx 5634651136828939 / 10000000000000000 te cort / eñ een op't eynde meer soude te veel comen.

Bij de zesentwintighoek hoort u alleen $3x - x^3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}$ te vinden:

> Item in den ondersten deel des Circkels [*van figuur 5*] / is *LM* een syde des 26 houcx / daer voor mede 1ꝝ gheset / comt voor *LB* $\sqrt{2 + 1ꝝ}$/ ende voor *LA* $\sqrt{2 - 1ꝝ}$/ soo moet door't voorgaende voor *AN* (den Boghe *NPA* ondertoghen / de welcke drymael soo lanck is als den Boghe *LM*) $\sqrt{2 - \sqrt{2 + 1ꝝ}}$/ Dit is ghelijck 3ꝝ -1ꝯ. Facit 1ꝝ 2410733605106461066981 35 /1000000000000000000000000 te cort / eñ 6 op't eynde te lanck voor een syde des 26 houcx. Nu kunt ghy voor een syde des 13 houcx vinden 4786313285751155 / 10000000000000000 / hier op't eynde 6 te lanck / ende noch naerder door den 26ste hebbe ick mede ghevonden den 78.39.52 houck.

De rekenmeester speelt het spel voor alle *p*- en 2*p*-hoeken met $7 \le p \le 79$ en priem, waarna hij al een heel eind op weg is om het lijstje van drie- tot tachtighoek in te vullen. Soms is de graad van de vergelijkingen die hij moet oplossen aanzienlijk lager dan met Viètes formules, nooit hoger.

Raadsels

Steeds opnieuw verbaas ik mij erover dat Van Ceulen omstandig uitlegt hoe hij aan de vergelijkingen komt, om vervolgens plompverloren de oplossingen neer te zetten. In zijn boek geeft Van Ceulen een foutloze tabel met de zijden van de drie- tot en met de tachtighoek in veertien cijfers achter de komma. Veel van de waarden in de tabel zijn afgerond nadat hij eerst veel meer cijfers berekend had, zoals bijvoorbeeld in bovenstaande voorbeelden. Hij maakt aan al het rekenwerk voor veertien of meer decimalen geen woord vuil!

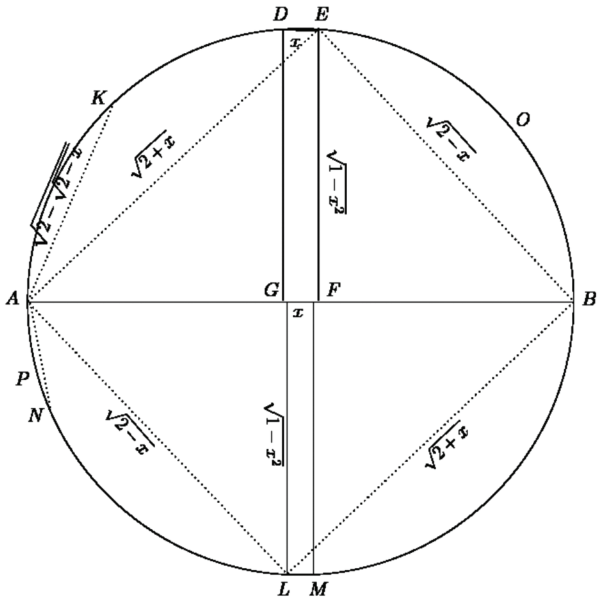

fig. 5 De 11- en de 13-hoek

Inmiddels breekt u zich waarschijnlijk het hoofd over de kwestie hoe Ludolph van Ceulen die toch niet malse vergelijkingen dan toch heeft opgelost. Welbeschouwd is bijvoorbeeld de relatief eenvoudige vergelijking $3x - x^3 = \sqrt{2 - x}$ altijd nog van graad zes, en voor zulke vergelijkingen bestaan en bestonden geen kant-en-klare oplosrecepten.

Nu is Van Ceulen er de man niet naar om de lezer moedwillig informatie te onthouden. Zelfs indien hij om commerciële redenen zijn methodes liever niet prijsgaf, dan zou hij hier nog wel nadrukkelijk de aandacht vestigen op de marktwaarde ervan. Er rest slechts één conclusie: blijkbaar vond hij het niet de moeite waard om er iets over te zeggen.

Wij kunnen intussen slechts gissen hoe hij die wortels uitrekende. Gezien de hoeveelheid werk zou je denken dat hij een efficiënte, lees snel convergerende, rekenmethode had, maar het is onbekend welke.

Conclusie

Met een paar eenvoudige stellingen en wat denkwerk is Van Ceulen tot tamelijk ingewikkelde vergelijkingen gekomen, die de lengte van de zijden van regelmatige veelhoeken beschrijven. Hij was in staat om oplossingen voor zijn vergelijkingen te berekenen met een precisie waar een moderne GR niet aan kan tippen. Dit heeft een van onze studenten ertoe gebracht om zijn rekenmachine voortaan 'zak-Ludolph' te noemen. Het proces dat we gezien hebben: van figuur naar algebra naar numerieke oplossing, heeft iets moois en ook iets wezenlijks wiskundigs. Misschien dat u of uw leerling haar schouders ophaalt over dit proces, maar in Ludolphs tijd was het echt modern. Van Ceulen laat zien dat hij met het materiaal kan spelen; hij laat zien dat het zus kan, maar ook zo. Bovendien waren wortelgetallen nog behoorlijk verdacht: 'irrationaal' werden ze toen ook al genoemd, maar de betekenis van het woord irrationaal in de wiskunde lag nog veel dichter bij 'niet goed over nagedacht' dan nu.

Het is dan ook onterecht om Ludolph van Ceulen af te schilderen als 'slechts' een rekenmeester. In menig opzicht kan hij een voorbeeld zijn voor de moderne VWO-leerling: met *Lust ende Arbeidt* is er veel te bereiken. Daarbij gaat het om algebraïsche vaardigheden, maar ook om inzicht, oog voor schoonheid en symmetrie, en rekenvaardigheid. Een historisch voorbeeld als dit kan hopelijk ook de opvatting bestrijden dat wiskunde een onbeweeglijk, star en af vak is.

U hebt nog van mij tegoed wat de betekenis is van die vergelijking van graad 45. Het antwoord zal u waarschijnlijk niet meer verbazen: de veelterm aan de linkerkant is die van de vijfenveertigdeling van een boog, de wortelvorm aan de rechterkant is de lengte van de zijde van een vijftienhoek. De kleinste positieve oplossing x is dus de lengte van de zijde van een $45 \times 15 = 675$-hoek. Volgens Van Ceulen, en ook volgens moderne opvattingen, is die oplossing $x = 0{,}0093083890713223248278 45$.

Dat was nuttig en maatschappelijk relevant om te weten. Immers, een zijde van die veelhoek is precies de koorde van 16' (boogminuten), daarom is $x = 2\sin 8'$, zodat je met driemaal toepassen van de halveringsformule de sinus van 1' krijgt. En die heb je nodig om een nauwkeurige sinustafel te maken.

Bronnen

Een originele *Vanden Circkel* is digitaal beschikbaar op de website van de bibliotheek van de Universiteit van Göttingen:
http://resolver.sub.uni-goettingen. de/purl?PPN539965979
Een transcriptie in modern leesbaar lettertype is bijna gereed; als u die wilt gebruiken dan kunt u contact opnemen met Steven Wepster: s.a.wepster@uu.nl.

Literatuur

Bierens de Haan, D. (1878). *Ludolph van Ceulen*. In Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden, Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, tweede reeks, 9, 322–369.

Bos, H.J.M. (2000). De cirkel gedeeld, de omtrek becijferd en pi gebeiteld: Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 259–262.