Câteva probleme privind triplete pitagoreice

Mircea CRÂŞMĂREANU[1]

Subiectul "triplete pitagoreice" are o istorie bogată, fiindu-i dedicate zeci de articole (a se vedea în acest sens capitolul IV din [**2**], unde la pagina 189 sunt citate şi câteva tabele cu astfel de triplete).

Definiţie. *Tripletul de numere naturale nenule* (x, y, z) *cu* $\max(x, y) < z$ *se numeşte pitagoreic dacă* $x^2 + y^2 = z^2$.

Se ştie că forma generală a unui triplet pitagoreic ([**1**], [**2**, ex.5.8, p.125-127]) este:

$$x = \alpha^2 - \beta^2,\ y = 2\alpha\beta,\ z = \alpha^2 + \beta^2, \tag{1}$$

cu α, β numere naturale nenule şi prime între ele, adică $(\alpha, \beta) = 1$.

În cele ce urmează prezentăm câteva generalizări ale unor rezultate referitoare la triplete pitagoreice, rezultate aflate în bibliografia română.

1. $60 \mid xyz$.

Demonstraţie. Avem $xyz = 2\alpha\beta\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = 2\alpha\beta\left(\alpha^4 - \beta^4\right)$.

(i) Divizibilitatea cu 3 (5). Dacă α sau β este multiplu de 3 (5) am terminat. Dacă nu, conform teoremei lui Fermat, avem $\alpha^2 \equiv \beta^2 \equiv 1 \pmod 3$ $\left(\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv 1 \pmod 5\right)$ de unde rezultă divizibilitatea cu 3 şi 5.

(ii) Divizibilitatea cu 4. Deoarece $(\alpha, \beta) = 1$ cel mult unul dintre α şi β poate fi par.

(ii_1) $\alpha = 2k,\ \beta = 2l + 1 \Rightarrow xyz = 4k(2l + 1)\left(4k^2 - 4l^2 - 4l - 1\right) \times$
$\times \left(4k^2 + 4l^2 + 4l + 1\right)$

(ii_2) $\alpha = 2k + 1,\ \beta = 2l + 1 \Rightarrow xyz = 16(2k + 1)(2l + 1)\left(k^2 + k - l^2 - l\right) \times$
$\times \left(2k^2 + 2k + 2l^2 + 2l + 1\right)$.

În concluzie avem şi divizibilitatea cu 4.

Observaţie. Divizibilitatea cu 4 constituie *Problema C:827*, G.M.-10/1988, autor **Augustin Stan**, iar divizibilitatea cu 5 *Problema E:6303*, G.M.-8/1978, fără autor. În [**2**] la pagina 171 este citat **P. Lenthéric** ca fiind autor al acestui rezultat, în jurul anului 1830!

2. *z şi orice putere a sa este suma a două pătrate diferite.*

Demonstraţie. Pentru z avem concluzia datorită relaţiei (1) cu $(\alpha, \beta) = 1$. Pentru puterile lui z aplicăm *Problema E:5888**, G.M.-5/1977, autor **Ştefan Kleitsch** (pentru rezolvare a se vedea G.M.-10/1977, p.405-406):

Dacă un număr natural este suma a k pătrate diferite atunci orice putere a sa este suma a k pătrate diferite.

3. *Se cer lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic aşa încât produsul lor să fie de p ori perimetrul, cu p un număr prim dat.*

[1] Lector dr., Facultatea de matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

Demonstraţie. Din $xy = p(x+y+z)$ rezultă $2\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right) = p\left(2\alpha^2+2\alpha\beta\right)$ adică $\beta(\alpha-\beta) = p$. Cum p este număr prim rezultă că avem soluţiile $(\beta, \alpha-\beta) = (1,p), (p,1)$ deci $(\alpha,\beta) = (p+1,1), (p+1,p)$. În concluzie avem:
(i) $x = (p+1)^2 - 1^2 = p(p+2)$, $y = 2(p+1)$,
(ii) $x = (p+1)^2 - p^2 = 2p+1$, $y = 2p(p+1)$.

Observaţie. Pentru $p = 2$ se obţine *Problema OG:111*, G.M.-1/1991, autor **Valer Pop**.

4. (G.M.-5/1979, *Problema O:35*, **Bucur B. Ionescu**) *Există triplete pitagoreice cu x, y, z numere prime?*
Soluţie. Din $y = 2\alpha\beta$ rezultă singura posibilitate $\alpha = \beta = 1$ dar atunci $x = \alpha^2 - \beta^2 = 0$, imposibil. Deci răspunsul este negativ.

5. (G.M.12/1979, *Problema E:6736**, **I. Joldiş**) $x+y+z \mid xy$.
Demonstraţie. $x+y+z = 2\alpha(\alpha+\beta)$, iar $xy = 2\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)$.

6. (*Problema 7.8*, [**3**, p.190 + p.199]) $x^2 - xy + y^2$ *este suma a două pătrate.*
Demonstraţie. $x^2-xy+y^2 = \left(\alpha^2-\beta^2\right)^2 - 2\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right) + 4\alpha^2\beta^2 = \beta^2(\alpha+\beta)^2 + {}$ $+\alpha^2(\alpha-\beta)^2$.

7. *Dacă p şi q sunt numere naturale nenule şi prime între ele, să se rezolve ecuaţia diofantică $p^2x^2 + q^2y^2 = 2p^2q^2z^2$.*
Soluţie. Considerând $x = qu$ şi $y = pv$ obţinem $u^2 + v^2 = 2z^2$ de unde rezultă $z^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$ şi deci $\frac{u-v}{2} = 2\alpha\beta$, $\frac{u+v}{2} = \alpha^2 - \beta^2$, $z = \alpha^2 + \beta^2$. În concluzie:

$$x = q\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2\right), \; y = p\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2\right), \; z = \alpha^2 + \beta^2$$

cu $(\alpha, \beta) = 1$.

Observaţie. Pentru $p = 2$, $q = 3$ se obţine *Problema 5.9* din [**3**, p.119].

Bibliografie

1. **V. Claudian** - *Analiză diofantică,* G.M.-1/1970, 1-9.
2. **L. E. Dickson** - *History of the theory of numbers, vol. II - Diophantine Analysis,* Chelsea, N. Y., 1952.
3. **P. Radovici-Mărculescu** - *Probleme de teoria elementară a numerelor,* Ed. Tehnică, Seria "Culegeri de probleme de matematică şi fizică", Bucureşti, 1986.