I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ГРАФОВ И СЕТЕЙ С n РЕБРАМИ*)

О. Б. ЛУПАНОВ

(МОСКВА)

При многих рассмотрениях, связанных с оценками сложности управляющих систем [1], приходится использовать асимптотические оценки числа графов и сетей, обладающих теми или иными свойствами. Кроме того, этот вопрос представляет самостоятельный интерес.

Такого рода оценками занимались многие авторы [2—9]. В работах [4—6, 10] для числа неизоморфных графов (сетей) с n ребрами были получены верхние оценки вида $(Cn)^n$, в работе [5] — нижняя оценка вида $\left(D\frac{n}{\ln^2 n}\right)^n$ (здесь C, D — некоторые константы, причем константы C у разных авторов разные). Ф. Я. Ветухновским [9] построено семейство неразложимых сетей [11], содержащее примерно $\left(\frac{1}{2e}\frac{n}{\ln^2 n}\right)^n$ сетей с n ребрами. В настоящей работе будет показано, что для числа $\widetilde{G}(n)$ неизоморфных графов с n ребрами справедливо соотношение **)

$$\ln \widetilde{G}(n) = n\ln n - 2n\ln\ln n + (\ln 2 - 1)n + \gamma'(n), \tag{1}$$

где

$$\frac{2n\ln\ln n}{\ln n} \lesssim \gamma'(n) \lesssim \frac{4n\ln\ln n}{\ln n}.$$

Работа состоит из двух параграфов. В первом — основном — параграфе вводятся необходимые понятия и формула (1) доказывается для связных графов, не содержащих параллельных ребер и петель (теорема 1), и формулируются более общие результаты (теорема 2 и 3). Их доказательство приводится во втором параграфе.

После того как статья была сдана в печать, автору стало известно, что в [17] приводятся даже более сильные результаты, принадлежащие Пойя. Однако, поскольку, как отмечается в той же работе, эти результаты Пойя не опубликованы, автор считает возможным, не претендуя на приоритет, опубликование предлагаемой статьи.

§ 1

1. Напомним некоторые понятия из теории графов ***). Конечная совокупность элементов $a_1, \ldots, a_m$ и элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ называется (конечным) *графом*, если каждому α_i поставлены в соответствие два

---

*) Краткое изложение результатов статьи опубликовано в [18].

**) Запись $\alpha(n) \lesssim \beta(n)$ означает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta(n)} \leqslant 1$.

***) Ср. [11—14].

элемента α_j и α_h (быть может, совпадающие); элементы a_i называются *ребрами*, а элементы α_j *вершинами* графа. При этом допускается также граф с пустым множеством ребер и пустым множеством вершин. Вершины α_j и α_h, поставленные в соответствие ребру a_i, будем называть *концами* этого ребра. Если вершина α соответствует ребру a, то будем говорить, что α и a *инцидентны*.

Граф, в котором выделено некоторое подмножество вершин, называется *сетью*; выделенные вершины называются *полюсами* сети (в частности, граф является сетью). Две сети называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин и взаимно однозначное соответствие между множествами их ребер, такие, что

а) соответствующие ребра инцидентны соответствующим вершинам,

б) полюсы одной сети соответствуют полюсам другой сети и обратно.

Подмножество ребер и вершин графа G называется *подграфом* графа G, если оно является графом. Подграф графа G называется *цепью*, соединяющей вершины α и β, если он состоит из попарно различных вершин $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_n}$ $(n \geqslant 1)$ и ребер $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-1}}$, таких, что a_{i_s} инцидентно с вершинами α_{j_s} и $\alpha_{j_{s+1}}$ $(1 \leqslant s \leqslant n-1)$, причем $\alpha_{j_1} = \alpha$, $\alpha_{j_n} = \beta$. Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует цепь, их соединяющая. Ребро с совпадающими концами называется *петлей*. Вершина, не являющаяся концом никакого ребра, называется *изолированной*.

Каждому графу сопоставим некоторую геометрическую фигуру (геометрическая реализация графа). Выберем k различных точек в пространстве (на плоскости) и обозначим их через $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Затем точку α_j соединим с точкой α_h дугой столько раз, сколько имеется в графе ребер с концами α_j и α_h (эти дуги обозначим символами соответствующих ребер), и таким образом, чтобы дуги не проходили через другие вершины α_s и чтобы все дуги (для всех пар $\alpha_j\alpha_h$) попарно не пересекались во внутренних точках.

2. Пусть $G(n)$ — число неизоморфных связных графов с n ребрами без параллельных ребер*) и без петель.

В этом параграфе будет доказано следующее утверждение

Теорема 1. 1) $G(n) = \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\gamma(n)\right)^n$, *где*

$$\frac{2\ln\ln n}{\ln n} \leqslant \gamma(n) - 1 \leqslant \frac{4\ln\ln n}{\ln n}.$$

2) *Доля связных графов с n ребрами без петель и без параллельных ребер, число k вершин которых удовлетворяет условию***)

$$\left|k - \frac{2n}{\ln n}\right| > \frac{14n(\ln\ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{3/2}},$$

стремится к 0 *с ростом n.*

Из этой теоремы следует, что почти все графы рассматриваемого вида с n ребрами имеют приблизительно $\frac{2n}{\ln n}$ вершин и что средняя степень (т. е. среднее число ребер, исходящих из одной вершины) этого большинства графов асимптотически равна $\ln n$.

---

*) *Параллельными* называются ребра, каждое из которых инцидентно одной и той же паре различных вершин.

**) Мультипликативная константа, фигурирующая во втором утверждении теоремы, может быть заменена меньшей, но порядок правой части неравенства рассматриваемыми здесь методами не может быть понижен, так как он связан с порядком оценки функции $\gamma(n) - 1$ (см. первое утверждение теоремы).

3. Ниже будут использоваться следующие обозначения: $G'(n, k)$ (соответственно $G(n, k)$) — число неизоморфных графов (соответственно неизоморфных связных графов) с n ребрами и k вершинами без параллельных ребер и без петель,

$\Psi_1(n) = n\ln n - 2n\ln\ln n + n(2\ln 2 - 2)$,

$\Psi_2(n) = \Psi_1(n) + \frac{4n\ln\ln n}{\ln n}$,

$\Psi_3(n) = \Psi_1(n) - 5n$,

$\Psi_4(n) = n\ln n - 2n\ln\ln n + n(\ln 2 - 1)$,

$\alpha_1(n),\ \alpha_2(n), \ldots$ — функции, возникающие по ходу изложения и удовлетворяющие условию $\alpha(n) = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$,

$A_1, A_2, \ldots$ — положительные константы, возникающие по ходу изложения. $\beta_1(n) \lessdot \beta_2(n)$ (или $\beta_2(n) \gtrdot \beta_1(n)$) означает, что при достаточно больших n выполняется условие $\beta_1(n) \leqslant \beta_2(n)$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество графов. Через $N(\mathfrak{A})$ будем обозначать число (неизоморфных) элементов этого множества.

4.1. Лемма 1.

$$G(m, k) \leqslant k^2\left(\frac{e}{2}\right)^m 8^k\left(\frac{k^2}{m}\right)^{m-k}.$$

Доказательство. Как известно [12], всякий связный граф без петель и параллельных ребер с m ребрами и k вершинами может быть получен из некоторого дерева*) с k вершинами (и $k-1$ ребрами) в результате добавления $m-k+1$ ребер, инцидентных соответственно некоторым различным парам вершин (не соединенным ребром в дереве); число таких пар вершин равно

$$C_k^2 - (k-1) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

Так как число неизоморфных деревьев с $k-1$ ребрами не превосходит**) 4^{k-1}, то

$$G(m, k) \leqslant 4^k C^{m-k+1}_{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}. \tag{2}$$

Далее,

$$C^{m-k+1}_{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} < \frac{\left(\frac{k^2}{2}\right)^{m-k}}{(m-k)!}\cdot\frac{k^2}{2(m-k+1)} < k^2\left(\frac{e}{2}\right)^{m-k}\left(\frac{k^2}{m-k}\right)^{m-k} =$$
$$= k^2\left(\frac{e}{2}\right)^{m-k}\left(\frac{k^2}{m}\right)^{m-k}\left(1+\frac{k}{m-k}\right)^{m-k} < k^2\frac{e^m}{2^m}2^k\left(\frac{k^2}{m}\right)^{m-k}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует утверждение леммы.

4.2. Лемма 2. *Функция*

$$R(n, \xi) = \ln(1+\xi) - \xi + \frac{2\ln\ln n}{\ln n}(1+\xi)$$

при одновременном выполнении неравенств

$$-1 < \xi \leqslant 9 \tag{4}$$

*) То есть связного графа без петель, такого, что для любых двух вершин существует единственная цепь, их соединяющая.

**) См. [2]. Другое доказательство содержится в [15].

и

$$|\xi| > 7\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}} \tag{5}$$

удовлетворяет условию

$$R(n, \xi) < 0. \tag{6}$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(\xi) = \ln(1+\xi) - \xi + \frac{1}{20}\xi^2.$$

Тогда

$$\varphi'(\xi) = \frac{\xi(\xi-9)}{10(1+\xi)}.$$

Кроме того,

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(\xi) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -1 < \xi \leqslant 0,\ \varphi'(\xi) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 < \xi \leqslant 9.$$

Поэтому при условии (4) $\varphi(\xi) \leqslant 0$, т. е.

$$\ln(1+\xi) - \xi \leqslant -\frac{1}{20}\xi^2. \tag{7}$$

Из (7) имеем

$$R(n, \xi) \leqslant -\frac{1}{20}\xi^2 + \frac{2\ln\ln n}{\ln n}\xi + \frac{2\ln\ln n}{\ln n}.$$

Правая часть последнего неравенства имеет корни

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{40\ln\ln n}{\ln n}}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right)\right),$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{40\ln\ln n}{\ln n}}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right)\right),$$

откуда, учитывая (5), получаем (6).

Лемма 3. *Функция*

$$f(n, k) = k\sigma + (n-k)(2\ln k - \ln n),$$

где $k > 0$, σ — *некоторая константа, обладает следующими свойствами:*

1) $f(n, k) < \Psi_2(n) + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$;

2) *при* $k = \frac{2n}{\ln n}(1+\xi)$, *где* $|\xi| > 7\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}$,

$$f(n, k) < \Psi_1(n) + O\left(\frac{n}{\ln n}\right);$$

3) *при* $k > \frac{20n}{\ln n}$

$$f(n, k) < \Psi_3(n).$$

Доказательство. А. Пусть

$$k = \frac{2n}{\ln n}(1+\xi) \quad \text{и} \quad -1 < \xi \leqslant 9. \tag{8}$$

Тогда

$$f(n, k) = \frac{2n}{\ln n}(1+\xi)\sigma + \left(n - \frac{2n}{\ln n}(1+\xi)\right)(\ln n - 2\ln\ln n +$$
$$+ 2\ln 2 + 2\ln(1+\xi)) = \Psi_1(n) + \frac{4n\ln\ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right) + 2n(R_1 + R_2),$$

где

$$R_1 = \ln(1+\xi) - \xi, \qquad R_2 = \frac{2\ln\ln n}{\ln n}\xi.$$

Рассмотрим три случая:

а) Если $\xi \leqslant 0$, то $R_1 \leqslant 0$, $R_2 \leqslant 0$.

б) Если $0 < \xi \leqslant 7\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}$, то $R_1 \leqslant 0$, $R_2 = O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)^{3/2}\right) = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$.

Таким образом, в случаях а) и б)

$$f(n, k) < \Psi_2(n) + O\left(\frac{n}{\ln n}\right). \tag{9}$$

в) Если (при условии (8)) $|\xi| > 7\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}$, то на основании леммы 2

$$R_1 + R_2 + \frac{2\ln\ln n}{\ln n} \leqslant 0$$

и

$$f(n, k) < \Psi_1(n) + O\left(\frac{n}{\ln n}\right). \tag{10}$$

Б. Пусть теперь *)

$$k = \frac{n}{\ln n}\zeta, \qquad \zeta > 20. \tag{11}$$

Тогда

$$f(n, k) = \sigma\frac{n}{\ln n}\zeta + \left(n - \frac{n}{\ln n}\zeta\right)(\ln n + 2\ln\zeta - 2\ln\ln n) =$$

$$= \Psi_1(n) + \sigma\frac{n}{\ln n}\zeta + n(2 - 2\ln 2) - n\zeta + 2n\ln\zeta - \frac{2n}{\ln n}\zeta\ln\zeta + \frac{2n\ln\ln n}{\ln n}\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \Psi_1(n) - n\zeta\left(1 - \frac{2+2\ln\zeta}{\zeta} - \frac{\sigma}{\ln n} - \frac{2\ln\ln n}{\ln n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Psi_1(n) - n\zeta\left(\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\ln n} - \frac{2\ln\ln n}{\ln n}\right) < \Psi_3(n), \tag{12}$$

так как при условии (11) $\frac{2+2\ln\zeta}{\zeta} < \frac{1}{2}$.

Поскольку $\Psi_3(n) < \Psi_1(n) < \Psi_2(n)$, первое утверждение леммы следует из (9), (10) и (12), второе — из (10) и (12), третье — из (12).

Лемма доказана.

4.3. Введем обозначения:

$K_n^{(0)}$ — множество натуральных чисел k, удовлетворяющих условию

$$\left|k - \frac{2n}{\ln n}\right| > \frac{14n(\ln\ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{3/2}};$$

$K_n^{(1)}$ — множество всех натуральных чисел;

$$G^{(i)}(n) = \sum_{k \in K_n^{(i)}} G(n, k) \qquad (i = 0,\ 1).$$

Очевидно, что $G^{(1)}(n) = G(n)$.

Лемма 4.

$$G^{(i)}(n) \leqslant \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}e^{c_i\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\alpha_1(n)\right)^n \qquad (i = 0,\ 1),$$

*) Очевидно, что если $k > 0$, то для k справедливо одно из соотношений (8) и (11).

где

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 4.$$

Доказательство. Так как связный граф с n ребрами имеет не более $n+1$ вершин, то $G(n, k) = 0$ при $k > n+1$. Поэтому на основании леммы 1 имеем

$$G^{(i)}(n) = \sum_{k \in K_n^{(i)}} G(n, k) \leqslant \sum_{k \in K_n^{(i)}} k^2 \left(\frac{e}{2}\right)^n \cdot 8^k \left(\frac{k^2}{n}\right)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{e}{2}\right)^n A_1 n^3 \max_{k \in K_n^{(i)}} 8^k \left(\frac{k^2}{n}\right)^{n-k}.$$

Из последнего неравенства на основании леммы 3

$$G^{(i)}(n) \leqslant A_1 \left(\frac{e}{2}\right)^n n^3 \left(\frac{4}{e^2} \frac{n}{\ln^2 n} e^{c_i \frac{\ln \ln n}{\ln n}} \alpha_2(n)\right)^n = \left(\frac{2}{e} \frac{n}{\ln^2 n} e^{c_i \frac{\ln \ln n}{\ln n}} \alpha_1(n)\right)^n.$$

Лемма доказана.

5.1. Лемма 5.

$$G'(n, k) \geqslant \frac{\left(\frac{k(k-1)}{2} - n\right)^n}{n!\, k!}.$$

Доказательство. Каждый граф с n ребрами и k вершинами без параллельных ребер и без петель может быть задан матрицей инциденций

$$A = \| a_{ij} \|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

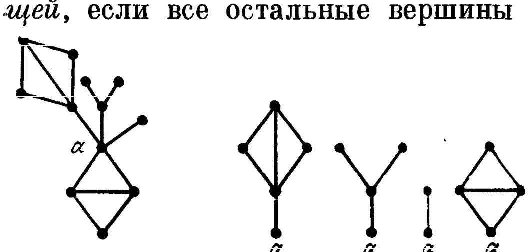
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-е ребро инцидентно } j\text{-й вершине}, \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Каждая строка матрицы A имеет две единицы; в матрице A все строки попарно различны. Во всех матрицах A (для всех рассматриваемых графов) имеется $K = C_k^2$ различных строк. Поэтому число различных матриц равно $K(K-1) \ldots (K-n+1) > (K-n)^n$. Каждый граф может задаваться не более $n!\, k!$ различными матрицами (получающимися из одной матрицы перестановками строк и столбцов). Поэтому

$$G'(n, k) \geqslant \frac{(K-n)^n}{n!\, k!} = \frac{\left(\frac{k(k-1)}{2} - n\right)^n}{n!\, k!}.$$

Лемма доказана.

5.2. Вершина α связного графа без петель называется *разделяющей*, если все остальные вершины этого графа можно разбить на два (непустых) класса K_1 и K_2 так, что для любых двух вершин β_1 и β_2, принадлежащих соответственно классам K_1 и K_2, любой путь, их соединяющий, проходит через α.



а) б)

Разделяющая вершина α однозначно определяет разбиение графа на минимальные связные подграфы, *α-компоненты*, такие, что любые два из них имеют единственную общую вершину — вершину α. Например, α-компоненты графа рисунка *а*) изображены на рисунке *б*).

Лемма 6. *Всякий связный граф G без петель содержит вершину, не являющуюся разделяющей* *).

Доказательство. Пусть β_1 — некоторая вершина графа G. Если β_1 не разделяющая, то утверждение доказано. Если же β_1 — разделяющая вершина, то рассмотрим некоторую β_1-компоненту G_1 графа G и выберем в ней некоторую вершину β_2, отличную от β_1. Если β_2 — разделяющая вершина в G_1, то продолжим процесс дальше. В силу конечности числа вершин в G на некотором n-м шаге мы придем к вершине β_{n+1}, не являющейся разделяющей в подграфе G_n. Эта вершина, очевидно, не будет разделяющей и в G.

Лемма 7. *Если существует множество $\mathfrak{A}$ (не обязательно связных) графов с n ребрами без петель и изолированных вершин, содержащих каждый не более s вершин, то существует множество $\mathfrak{B}$ связных графов с n ребрами без петель такое, что*

$$N(\mathfrak{B}) \geqslant \frac{1}{s} N(\mathfrak{A}).$$

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{A}$. Выберем (на основании леммы 6) в каждой связной компоненте одну вершину, не являющуюся разделяющей, и отождествим эти вершины; получится связный граф G'. Рассмотрим множество $\mathfrak{B}$ таких графов G'. Каждый граф G' имеет не более s вершин. Поэтому из него можно получать графы G из $\mathfrak{A}$, выбирая разделяющую вершину, не более чем s способами. Так как графы из $\mathfrak{B}$ порождают таким образом все графы из $\mathfrak{A}$, то

$$N(\mathfrak{B})\, s \geqslant N(\mathfrak{A}).$$

Тем самым лемма доказана.

5.3. Лемма 8.

$$G(n) \geqslant \left(\frac{2}{e} \frac{n}{\ln^2 n} e^{\frac{2 \ln \ln n}{\ln n}} \alpha_3(n) \right)^n .$$

Доказательство. Каждый граф с n ребрами имеет не более $2n$ вершин. На основании леммы 7 для каждого k существует не менее $\frac{1}{2n} G'(n, k)$ неизоморфных связных графов без петель и без параллельных ребер и, следовательно,

$$G(n) \geqslant \frac{1}{2n} G'(n, k). \tag{13}$$

Из (13) и леммы 5, применяя формулу Стирлинга, имеем

$$\ln G(n) \geqslant n \ln \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} - n \right) - n \ln n + n - k \ln k + k + O(\ln n).$$

Положим

$$k = \left[\frac{2n}{\ln n} \right] .$$

Тогда

$$k = \frac{2n}{\ln n} \left(1 + O\left(\frac{\ln n}{n} \right) \right), \qquad \ln k = \ln n - \ln \ln n + \ln 2 + O\left(\frac{\ln n}{n} \right),$$

$$k \ln k = 2n - \frac{2n \ln \ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n} \right),$$

$$\ln \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} - n \right) = 2 \ln k - \ln 2 + O\left(\frac{\ln^2 n}{n} \right)$$

*) Ср. [16].

и

$$\ln G(n) \geqslant n \ln n - 2n \ln \ln n + n(\ln 2 - 1) + \frac{2n \ln \ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Лемма доказана.

6. Доказательство теоремы 1. Первое утверждение непосредственно следует из леммы 4 при $i=1$ и леммы 8, второе—из леммы 4 при $i=0$ и леммы 8.

7. Сформулируем теперь два более общих предложения (доказательство их содержится во втором параграфе).

Пусть $\mathfrak{G}$—множество всех графов без изолированных вершин, $\mathfrak{G}^1$, $\mathfrak{G}^2$, $\mathfrak{G}^3$—подмножества этого множества, состоящие соответственно из связных графов, графов без параллельных ребер, графов без петель. Введем обозначения:

$$\mathfrak{G}_0^i = \mathfrak{G}^i, \quad \mathfrak{G}_1^i = \mathfrak{G} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\mathfrak{G}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3} = \mathfrak{G}_{\delta_1}^1 \cap \mathfrak{G}_{\delta_2}^2 \cap \mathfrak{G}_{\delta_3}^3 \qquad (\delta_i = 0, 1 \text{ при } i = 1, 2, 3).$$

Например, $\mathfrak{G}_{1,1,1} = \mathfrak{G}$, а $\mathfrak{G}_{0,1,0}$ есть множество всех связных графов без петель.

Пусть $\mathfrak{G}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n)$ — множество графов из $\mathfrak{G}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$, имеющих n ребер, и $G_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n)$ — число (неизоморфных) графов в $\mathfrak{G}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n)$.

Заметим, что

$$G_{0,0,0}(n) = G(n). \tag{14}$$

Аналогичные обозначения вводятся для сетей (в них вместо $\mathfrak{G}$ и G фигурируют соответственно $\mathfrak{S}$ и S).

Теорема 2. 1)

$$G_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n) = \left(\frac{2}{e} \frac{n}{\ln^2 n} \gamma_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n)\right)^n,$$

где

$$\frac{2 \ln \ln n}{\ln n} \leqslant \gamma_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n) - 1 \leqslant \frac{4 \ln \ln n}{\ln n}.$$

2) *Доля графов из* $\mathfrak{G}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$, *имеющих* n *ребер и* k *вершин, где*)*

$$\left| k - \frac{2n}{\ln n} \right| > \frac{18n (\ln \ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{3/2}},$$

стремится к 0 *с ростом* n.

Доказательство теоремы 2 опирается на *нижнюю* оценку для $G_{0,0,0}(n)$ и *верхнюю* оценку для $G_{1,1,1}(n)$.

Теорема 3. 1)

$$S_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n) = \left(\frac{2}{e} \frac{n}{\ln^2 n} \sigma_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n)\right)^n,$$

где

$$\frac{2 \ln \ln n}{\ln n} \leqslant \sigma_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n) - 1 \leqslant \frac{4 \ln \ln n}{\ln n}.$$

2) *Доля сетей из* $\mathfrak{S}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$, *имеющих* n *ребер и* k *вершин, где*)*

$$\left| k - \frac{2n}{\ln n} \right| > \frac{18n (\ln \ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{3/2}},$$

стремится к 0 *с ростом* n.

---

*) См. вторую сноску на стр. 6.

§ 2

8.1. Введем дополнительно обозначения:

$G_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n, k)$ — число неизоморфных графов из $\mathfrak{G}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$, имеющих n ребер и k вершин,

$G_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n, k, s)$ — число неизоморфных графов из $\mathfrak{G}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$, имеющих n ребер и k вершин и состоящих из s связных компонент.

Лемма 9.

$$G_{1,0,0}(n, k, s) \leqslant (k-s+1)\, G_{0,0,0}(n, k-s+1).$$

Лемма 10.

$$G_{1,0,0}(n) \leqslant (n+1)\, G_{0,0,0}(n).$$

Доказательство этих утверждений вполне аналогично доказательству леммы 7.

Лемма 11. *Если* $k \in K_n^{(0)}$ (см. стр. 9), *то*

$$G_{0,0,0}(n, k) \leqslant \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_4(n)\right)^n.$$

Эта лемма непосредственно следует из леммы 4.

Лемма 12.

$$G_{\delta_1, 1, 0}(n, k) \leqslant \sum_{m=0}^{n} G_{\delta_1, 0, 0}(m, k)\, C_n^m.$$

Доказательство. Утверждение следует из того, что:

1) каждый граф, имеющий k вершин и n ребер, может быть получен из некоторого графа G без параллельных ребер, имеющего k вершин и m ребер, $0 \leqslant m \leqslant n$, путем добавления некоторых $n-m$ ребер, параллельных некоторым ребрам из G (при этом допускается введение нескольких ребер, параллельных одному и тому же ребру);

2) число неизоморфных графов, которые могут быть получены таким способом из одного графа G, не превосходит числа сочетаний с повторениями из m элементов по $n-m$, т. е.

$$C_{n-1}^{n-m} = C_{n-1}^{m-1} \leqslant C_n^m,$$

Следствие.

$$G_{1,1,0}(n) = \sum_k G_{1,1,0}(n, k) \leqslant \sum_{m=0}^{n} C_n^m \sum_k G_{1,0,0}(m, k) = \sum_{m=0}^{n} G_{1,0,0}(m)\, C_n^m.$$

Лемма 13.

$$G_{1,1,1}(n, k) \leqslant \sum_{l=0}^{k} \sum_{p=0}^{n-k+l} G_{1,1,0}(p, l)\, C_{3n-p}^{n-p}.$$

Доказательство. Каждый граф G из $\mathfrak{G}_{1,1,1}$ с n ребрами и k вершинами может быть получен из некоторого (быть может, пустого) графа $\widetilde{G}$ из $\mathfrak{G}_{1,1,0}$ с p ребрами $(0 \leqslant p \leqslant n)$ и l вершинами $(0 \leqslant l \leqslant k)$ следующим образом: 1) к $\widetilde{G}$ добавляется $k-l$ новых вершин с петлями (однозначно); 2) в полученном графе (с k вершинами) к некоторым вершинам присоединяется $n-p-k+l$ петель; число способов присоединения этих петель равно числу N сочетаний с повторениями из k элементов по $n-p-k+l$, т. е.

$$N \leqslant C_{n-p+l-1}^{n-p-k+l}.$$

Так как $k \geqslant l$ и при $c \geqslant 0$ $C_{a+c}^{b+c} \geqslant C_a^b$ и $C_{a+c}^b \geqslant C_a^b$, то

$$N \leqslant C_{n-p+l}^{n-p-k+l} \leqslant C_{n-p+k}^{n-p} \leqslant C_{3n-p}^{n-p},$$

поскольку во всяком графе из $\mathfrak{G}$ $k \leqslant 2n$.

Лемма доказана.

Следствие.

$$G_{1,1,1}(n) = \sum_k G_{1,1,1}(n, k) \leqslant \sum_k \sum_l \sum_p G_{1,1,0}'(p, l)\, C_{3n-p}^{n-p} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k \sum_l \sum_p G_{1,1,0}(p)\, C_{3n-p}^{n-p} \leqslant A_2 n^3 \max_{0 \leqslant p \leqslant n} (G_{1,1,0}(p)\, C_{3n-p}^{n-p}).$$

8.2. Введем функцию

$$\widetilde{\Psi}_{\gamma,\delta}(m) = m \ln m - 2m \ln\ln m + \gamma m + \delta \frac{m \ln\ln m}{\ln m}.$$

Лемма 14. *Если* $m \leqslant n$, *то*

$$\widetilde{\Psi}_{\gamma,\delta}(m) + \ln (C_n^m C_{3n-m}^{n-m}) \leqslant \widetilde{\Psi}_{\gamma,\delta}(n) + O\left(\frac{n}{\ln n}\right). \tag{15}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\Phi(n, m) = \widetilde{\Psi}_{\gamma,\delta}(m) + \ln (C_n^m C_{3n-m}^{n-m}).$$

Тогда, используя формулу Стирлинга, получим

$$\Phi(n, m) = (3n - m) \ln (3n - m) + n \ln n - 2(n-m) \ln (n-m) - 2n \ln (2n) -$$
$$-2m \ln\ln m + \gamma m + \delta \frac{m \ln\ln m}{\ln m} + O(\ln n). \tag{16}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству неравенства (15).

1°. Пусть

$$m \leqslant n\left(1 - \frac{1}{\ln\ln n}\right).$$

Тогда

$$n - m \geqslant \frac{n}{\ln\ln n}, \qquad \ln \frac{3n-m}{n-m} \leqslant \ln\ln\ln n + \ln 3.$$

В этом случае из (16) имеем

$$\Phi(n, m) < m \ln (3n-m) + 2(n-m) \ln \frac{3n-m}{n-m} + n \ln \frac{n(3n-m)}{(2n)^2} + \gamma m +$$
$$+ \delta \frac{m \ln\ln m}{\ln m} + O(\ln n) \leqslant n\left(1 - \frac{1}{\ln\ln n}\right)(\ln n + \ln 3) + 2n(\ln\ln\ln n + \ln 3) +$$
$$+ n \ln \frac{3}{4} + \gamma n + \delta \frac{n \ln\ln n}{\ln n} + O(\ln n) < n \ln n - \frac{n \ln n}{\ln\ln n} + 2n \ln\ln\ln n +$$
$$+ n\left(3 \ln 3 + \ln \frac{3}{4}\right) + \gamma n + \delta \frac{n \ln\ln n}{\ln n} + O(\ln n) < \widetilde{\Psi}_{\gamma,\delta}(n),$$

так как

$$3 \ln 3 + \ln \frac{3}{4} + 2 \ln\ln\ln n - \frac{\ln n}{\ln\ln n} + O(\ln n) < 2 \ln\ln n.$$

2°. Пусть

$$m = n(1 - \xi), \quad 0 \leqslant \xi < \frac{1}{\ln\ln n}.$$

Тогда

$$\ln\left(1+\frac{\xi}{2}\right)\leqslant\frac{\xi}{2},\quad \ln m=\ln n+O\left(\frac{1}{\ln\ln n}\right),$$
$$\ln\ln m=\ln\ln n+O\left(\frac{1}{\ln n\cdot\ln\ln n}\right).$$

Поэтому из (16) имеем

$$\Phi(n,\ m)<n(2+\xi)\ln n+n(2+\xi)\ln 2+n(2+\xi)\frac{\xi}{2}+$$
$$+n\ln n-2n\xi\ln n-2n\xi\ln\xi-2n\ln n-2n\ln 2-$$
$$-2n(1-\xi)\left(\ln\ln n+O\left(\frac{1}{\ln n\cdot\ln\ln n}\right)\right)+\gamma n+\delta\frac{n\ln\ln n}{\ln n}+O(\ln n)=$$
$$=\widetilde{\Psi}_{\gamma,\delta}(n)+O\left(\frac{n}{\ln n\cdot\ln\ln n}\right)+R,$$

где

$$R=-n\xi\left(\ln n+2\ln\xi-\ln 2-1-\frac{\xi}{2}-2\ln\ln n\right). \qquad (17)$$

Если $\xi<\frac{1}{\ln^2 n}$, то $n\xi\ln n=O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$

и

$$R=-2n\xi\ln(n\xi)+n\xi\left(2\ln\ln n+1+\ln 2+\frac{\xi}{2}\right)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)=O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

так как первое слагаемое не превосходит $\frac{2}{e}$, а второе есть величина порядка $O\left(\frac{n\ln\ln n}{\ln^2 n}\right)$.

Если $\xi\geqslant\frac{1}{\ln^2 n}$, то $\ln\xi\geqslant-2\ln\ln n$ и выражение в скобках в (17 при достаточно больших n положительно, поэтому $R<0$.

Лемма доказана.

8.3. Лемма 15.

$$G_{1,1,1}(n)\leqslant\left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}e^{\frac{4\ln\ln n}{\ln n}}\alpha_5(n)\right)^n.$$

Доказательство. На основании следствий из лемм 13 и 12 и лемм 10, 4 (учитывая (14) и лемму 14) имеем

$$G_{1,1,1}(n)\leqslant A_2n^3\max_{0\leqslant p\leqslant n}(G_{1,1,0}(p)C_{3n-p}^{n-p})\leqslant$$
$$\leqslant A_2n^3\max_{0\leqslant p\leqslant n}\left(C_{3n-p}^{n-p}\sum_{m=0}^{p}G_{1,0,0}(m)C_p^m\right)\leqslant$$
$$\leqslant A_3n^4\max_{0\leqslant p\leqslant n}\max_{0\leqslant m\leqslant p}(C_{3n-p}^{n-p}C_p^mG_{1,0,0}(m))\leqslant$$
$$\leqslant A_3n^4\max_{0\leqslant m\leqslant n}(C_{3n-m}^{n-m}C_n^mG_{1,0,0}(m))\leqslant$$
$$\leqslant A_4n^5\max_{0\leqslant m\leqslant n}(C_{3n-m}^{n-m}C_n^mG_{0,0,0}(m))\leqslant$$
$$\leqslant A_4n^5\max_{0\leqslant m\leqslant n}\left(C_{3n-m}^{n-m}C_n^m\left(\frac{2}{e}\frac{m}{\ln^2 m}e^{\frac{4\ln\ln m}{\ln m}}\alpha_1(m)\right)^m\right)\leqslant$$
$$\leqslant A_4n^5\left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}e^{\frac{4\ln\ln n}{\ln n}}\alpha_6(n)\right)^n=\left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}e^{\frac{4\ln\ln n}{\ln n}}\alpha_5(n)\right)^n.$$

Лемма доказана.

8.4. Лемма 16. *Существует функция* $g(n)$, *удовлетворяющая условиям*:

1) *для всех* n

$$\ln G_{0,0,0}(n) \leqslant g(n),$$

2) $g(n) = n\ln n - 2n\ln\ln n + (\ln 2 - 1)n + \frac{5n\ln\ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$,

3) *для любых* n_1, n_2 *таких, что* $n_1 \geqslant n_2 > 1$,

$$g(n_1) + g(n_2) \leqslant g(n_1+1) + g(n_2-1).$$

Доказательство. На основании леммы 4

$$\ln G_{0,0,0}(n) \leqslant n\ln n - 2n\ln\ln n + (\ln 2 - 1)n + \frac{4n\ln\ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Поэтому

$$\ln G_{0,0,0}(n) \leqslant n\ln n - 2n\ln(4+\ln n) + (\ln 2 - 1)n + \frac{4n\ln(4+\ln n)}{4+\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

и

$$\ln G_{0,0,0}(n) < n\ln n - 2n\ln(4+\ln n) + (\ln 2 - 1)n + \frac{5n\ln(4+\ln n)}{4+\ln n},$$

и для некоторой константы A_5 неравенство

$$\ln G_{0,0,0}(n) \leqslant n\ln n - 2n\ln(4+\ln n) + (\ln 2 - 1)n + \frac{5n\ln(4+\ln n)}{4+\ln n} + A_5 \tag{18}$$

справедливо для всех n, $n \geqslant 1$. Функцию, выражаемую правой частью неравенства (18), и возьмем в качестве $g(n)$. Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2).

Далее имеем (рассматривая $g(n)$ как функцию непрерывного аргумента)

$$g'(n) = 1 + \ln n - \frac{2}{4+\ln n} - 2\ln(4+\ln n) + (\ln 2 - 1) + {}$$
$$+ 5\,\frac{1 + (4+\ln n)\ln(4+\ln n) - \ln(4+\ln n)}{(4+\ln n)^2},$$

$$g''(n) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{4+\ln n} - \frac{5\ln(4+\ln n)}{(4+\ln n)^2} + \frac{7}{(4+\ln n)^2} + \frac{10\ln(4+\ln n)}{(4+\ln n)^3} - \frac{15}{(4+\ln n)^3}\right).$$

Очевидно, что при $n \geqslant 1$

$$1 - \frac{2}{4+\ln n} - \frac{5\ln(4+\ln n)}{(4+\ln n)^2} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{5\ln 4}{16} > 0, \quad \frac{10\ln(4+\ln n)}{(4+\ln n)^3} > 0,$$

$$7 - \frac{15}{4+\ln n} \geqslant 7 - \frac{15}{4} > 0.$$

Поэтому при $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $g''(n) > 0$, откуда легко получить (3).

Лемма доказана.

Лемма 17. *Если*

$$\left|k - \frac{2n}{\ln n}\right| > 16\,\frac{n(\ln\ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{3/2}},$$

то

$$G_{1,0,0}(n,k) < \left(\frac{2}{e}\,\frac{n}{\ln^2 n}\,\alpha_7(n)\right)^n.$$

Доказательство. Рассмотрим три случая:

I. $$k \leqslant \frac{2n}{\ln n}\left(1-8\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right).$$

В этом случае

$$k-s+1 \leqslant k < \frac{2n}{\ln n}\left(1-7\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right),$$

где s — число связных компонент. Поэтому в силу леммы 11

$$G_{0,0,0}(n,\ k-s+1) \leqslant \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_4(n)\right)^n$$

и по лемме 9

$$G_{1,0,0}(n,k) = \sum_{s=1}^{k} G_{1,0,0}(n,k,s) \leqslant \sum_{s=1}^{k}(k-s+1)\,G_{0,0,0}(n,\ k-s+1) \leqslant$$
$$\leqslant k^2\left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_4(n)\right)^n \leqslant \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_8(n)\right)^n.$$

II. $$k > \frac{5n}{\ln n}.$$

Так как при отсутствии петель каждая связная компонента имеет по крайней мере две вершины, то в этом случае

$$k \geqslant 2s \tag{19}$$

и

$$k-s+1 \geqslant \frac{k}{2} > \frac{5}{2}\frac{n}{\ln n} > \frac{2n}{\ln n}\left(1+7\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right).$$

Поэтому в силу леммы 11

$$G_{0,0,0}(n,\ k-s+1) \leqslant \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_4(n)\right)^n$$

и по лемме 9 (учитывая (19))

$$G_{1,0,0}(n,k) \leqslant \sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} G_{1,0,0}(n,k,s) \leqslant \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_9(n)\right)^n.$$

III. $$\frac{2n}{\ln n}\left(1+8\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right) \leqslant k \leqslant \frac{5n}{\ln n}. \tag{20}$$

Оценим сначала функцию $G_{1,0,0}(n,k,s)$ (при условии (20)) в зависимости от s. Рассмотрим два подслучая:

1) Пусть

$$s < \frac{2n(\ln\ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{3/2}}.$$

Тогда

$$k-s+1 > \frac{2n}{\ln n}\left(1+7\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right)$$

и в силу лемм 9 и 11

$$G_{1,0,0}(n,k,s) \leqslant (k-s+1)\,G_{0,0,0}(n,\ k-s+1) \leqslant$$
$$\leqslant A_6 n\left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_4(n)\right)^n = \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_{10}(n)\right)^n. \tag{21}$$

2) Пусть теперь

$$s \geqslant \frac{2n (\ln \ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{3/2}}. \tag{22}$$

В силу (19) и (20)

$$s \leqslant \frac{5n}{2 \ln n}. \tag{23}$$

Очевидно, что

$$G_{1,0,0}(n, k, s) \leqslant \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_s=n \\ k_1+k_2+\ldots+k_s=k \\ n_i \geqslant 1}} G_{0,0,0}(n_1, k_1) \cdot G_{0,0,0}(n_2, k_2) \ldots G_{0,0,0}(n_s, k_s) \leqslant$$

$$\leqslant C_n^{s-1} \cdot 2^k \max_{n_1+n_2+\ldots+n_s=n} (G_{0,0,0}(n_1) \cdot G_{0,0,0}(n_2) \ldots G_{0,0,0}(n_s)),$$

так как $G_{0,0,0}(n_i, k_i) \leqslant G_{0,0,0}(n_i)$ и число представлений числа n в виде суммы s штук (неупорядоченных) слагаемых не превосходит C_n^{s-1}, а число представлений числа k не превосходит 2^k. В силу леммы 16 из последнего неравенства вытекает

$$G_{1,0,0}(n, k, s) \leqslant C_n^{s-1} \cdot 2^k e^{g(n-s+1)} e^{(s-1)g(1)}. \tag{24}$$

Из (22) имеем

$$-(s-1) \ln (s-1) < -\frac{s}{2} \ln \frac{s}{2} \leqslant -\frac{n (\ln \ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{1/2}} \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right)\right), \tag{25}$$

а из (23)

$$-2(n-s+1) \ln \ln (n-s+1) \leqslant -2n \ln \ln n + O\left(n \frac{\ln \ln n}{\ln n}\right). \tag{26}$$

Поэтому из (24), леммы 16, (20), (23), (25), (26) имеем

$$\ln G_{1,0,0}(n, k, s) \leqslant$$

$$\leqslant n \ln n - (s-1) \ln (s-1) - (n-s+1) \ln (n-s+1) + O(\ln n) +$$

$$+ k \ln 2 + g(n-s+1) + sg(1) <$$

$$< n \ln n - \frac{n (\ln \ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{1/2}} - 2n \ln \ln n + (\ln 2 - 1) n + O\left(n \frac{\ln \ln n}{\ln n}\right) < \Psi_4(n). \tag{27}$$

Таким образом, при условии (20) из (21) и (27) имеем

$$G_{1,0,0}(n, k) = \sum_{s=1}^{n} G_{1,0,0}(n, k, s) \leqslant \left(\frac{2}{e} \frac{n}{\ln^2 n} \alpha_{11}(n)\right)^n.$$

Лемма полностью доказана.

8.5. Лемма 18. *Если*

$$\left| k - \frac{2n}{\ln n} \right| \geqslant 18 \frac{n (\ln \ln n)^{1/2}}{(\ln n)^{3/2}}, \tag{28}$$

то

$$G_{1,1,1}(n, k) < \left(\frac{2}{e} \frac{n}{\ln^2 n} \alpha_{12}(n)\right)^n. \tag{29}$$

Доказательство. Из лемм 13 и 12 имеем

$$\left.\begin{aligned} G_{1,1,1}(n,k) &\leqslant \sum_{l=0}^{k}\sum_{p=0}^{n-k+l} G_{1,1,0}(p,l)\,C_{3n-p}^{n-p} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{l=0}^{k}\sum_{p=0}^{n-k+l} C_{3n-p}^{n-p}\sum_{m=0}^{p} G_{1,0,0}(m,l)\,C_p^m \leqslant \\ &\leqslant \sum_{l=0}^{k}\sum_{p=0}^{n-k+l}\sum_{m=0}^{p} G_{1,0,0}(m,l)\,C_{3n-m}^{n-m}C_n^m \leqslant \\ &\leqslant A_7 n^3 \max_{l\leqslant k} F(n,k,l), \\ \text{где}\qquad & \\ F(n,k,l) &= \max_{m\leqslant n-k+l} C_{3n-m}^{n-m}C_n^m G_{1,0,0}(m,l). \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Для оценки функции $G_{1,0,0}(m,l)$ рассмотрим несколько случаев.

а) $m\leqslant n\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$; l *произвольно.*

Так как

$$\ln G_{1,0,0}(m,l)\leqslant \ln G_{1,0,0}(m), \qquad (31)$$

то в силу лемм 4 и 10

$$\ln G_{1,0,0}(m,l)\leqslant n\left(1-\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)\ln n+(\ln 2-1)\,n+ \\ +\frac{4n\ln\ln n}{\ln n}+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)<\Psi_4(n)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right). \qquad (32)$$

б) $m=n(1-\varepsilon)$, $\dfrac{1}{\sqrt{\ln n}}>\varepsilon\geqslant\varphi(n)$, *где* $\varphi(n)=\dfrac{5\ln\ln n}{\ln^2 n}$; l *произвольно.*

В этом случае

$$\ln m=\ln n-\varepsilon+O(\varepsilon^2),\quad \ln\ln m=\ln\ln n+O\left(\frac{\varepsilon}{\ln n}\right)$$

и в силу (31) и лемм 4 и 10

$$\begin{aligned} \ln G_{1,0,0}(m,l)&\leqslant n(1-\varepsilon)(\ln n-\varepsilon+O(\varepsilon^2))-2n(1-\varepsilon)\left(\ln\ln n+O\left(\frac{\varepsilon}{\ln n}\right)\right)+ \\ &\quad +(\ln 2-1)\,n+\frac{4n\ln\ln n}{\ln n}+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)= \\ &=\Psi_4(n)+n\left(-\varepsilon\ln n+2\varepsilon\ln\ln n+\frac{4\ln\ln n}{\ln n}\right)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)\leqslant \\ &\leqslant \Psi_4(n)+n\varepsilon\left(-\frac{1}{5}\ln n+2\ln\ln n\right)+ \\ &\quad +O\left(\frac{n}{\ln n}\right)<\Psi_4(n)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right). \end{aligned} \qquad (33)$$

в) $$n(1-\varphi(n))<m\leqslant n;\quad k-l<n\varphi(n), \qquad (34)$$

где $\varphi(n)$ *имеет тот же смысл, что и в* б). Тогда

$$n<\frac{m}{1-\varphi(n)}<\frac{m}{1-\varphi(m)}$$

и

$$\frac{2n}{\ln n}\left(1-9\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right)<\frac{2m}{(1-\varphi(m))\ln m}\left(1-9\sqrt{\frac{\ln(\ln m-\ln(1-\varphi(m)))}{\ln m-\ln(1-\varphi(m))}}\right)< \\ <\frac{2m}{\ln m}\left(1-8\sqrt{\frac{\ln\ln m}{\ln m}}\right). \qquad (35)$$

Поэтому, если

$$k \leqslant \frac{2n}{\ln n}\left(1-9\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right),$$

то в силу (30), (35)

$$l < \frac{2m}{\ln m}\left(1-8\sqrt{\frac{\ln\ln m}{\ln m}}\right)$$

и по лемме 17

$$G_{1,0,0}(m, l) < \left(\frac{2}{e}\frac{m}{\ln^2 m}\alpha_7(m)\right)^m. \tag{36}$$

Если

$$k \geqslant \frac{2n}{\ln n}\left(1+9\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right),$$

то в силу (34)

$$l > \frac{2n}{\ln n}\left(1+9\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right) - n\varphi(n) > \frac{2n}{\ln n}\left(1+8\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right) >$$

$$> \frac{2m}{\ln m}\left(1+8\sqrt{\frac{\ln\ln m}{\ln m}}\right)$$

и по лемме 17 снова справедливо неравенство (36).

Случай

$$n(1-\varphi(n)) < m \leqslant n; \quad k-l \geqslant n\varphi(n) \tag{37}$$

невозможен, так как из второго неравенства и $m \leqslant n-k+l$ (см. (30)) вытекает $m \leqslant n(1-\varphi(n))$, что противоречит первому неравенству в (37).

Из (32), (33), (36) в силу леммы 14 имеем

$$C_{3n-m}^{n-m} C_n^m G_{1,0,0}(m, l) \leqslant \left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_{13}(n)\right)^n,$$

а из последнего неравенства и (30) вытекает (29).

Лемма полностью доказана.

Следствие. Число графов из $\mathfrak{G}_{1,1,1}$ с n ребрами, число k вершин которых удовлетворяет условию (28), не превосходит

$$\left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_{14}(n)\right)^n.$$

9. Доказательство теоремы 2. Очевидно, что если

$$\delta_1' \leqslant \delta_1'', \quad \delta_2' \leqslant \delta_2'', \quad \delta_3' \leqslant \delta_3'',$$

то

$$G_{\delta_1', \delta_2', \delta_3'}(n) \leqslant G_{\delta_1'', \delta_2'', \delta_3''}(n).$$

Поэтому первое утверждение теоремы вытекает из лемм 8 и 15 (учитывая (14)), а второе утверждение — из леммы 8 и следствия из леммы 18.

10. Наметим идею доказательства теоремы 3.

Легко видеть, что

$$G_{0,0,0}(n, k) \leqslant S_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(n, k) \leqslant 2^k G_{1,1,1}(n, k).$$

Далее, используя третье утверждение леммы 3, легко установить, что при $k \geqslant \frac{A_8 n}{\ln n}$

$$G_{1,1,1}(n, k) < \left(\frac{1}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_{15}(n)\right)^n.$$

Поэтому

$$S_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(n)=\sum_{k<\frac{A_8n}{\ln n}}S_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(n,k)+\sum_{k\geqslant\frac{A_8n}{\ln n}}S_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(n,k)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_8n}{\ln n}\cdot 2^{\frac{A_8n}{\ln n}}G_{1,1,1}(n)+2^n\left(\frac{1}{e}\frac{n}{\ln^2 n}\alpha_{15}(n)\right)^n=\left(\frac{2}{e}\frac{n}{\ln^2 n}e^{\frac{4\ln\ln n}{\ln n}}\alpha_{16}(n)\right)^n.$$

Отсюда и из леммы 8 вытекает первое утверждение теоремы 3. Второе утверждение доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Яблонский С. В., Основные понятия кибернетики. Сб. Проблемы кибернетики, вып. 2, 1959, 7–38.
[2] Polya G., Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemischen Verbindungen, Acta Math. 68, 1—2, 1937, 145—254.
[3] Riordan J., Shannon C. E., The number of two-terminal series-parallel networks, J. Math. and Phys. 21, 2, 1942, 83—93.
[4] Shannon C. E., The synthesis of two-terminal switching circuits, Bell. Syst. Techn. J. 28, 1, 1949, 59—98.
[5] Gilbert E. N., The synthesis of N-terminal switching circuits, Bell. Syst. Techn. J. 30, 3, 1951, 668—688.
[6] Поваров Г. Н., Математическая теория синтеза контактных (1, k)-полюсников, ДАН 100, 5, 1955, 909—912.
[7] Кричевский Р. Е., О реализации функций суперпозициями. Сб. Проблемы кибернетики, вып. 2, 1959, 123—138.
[8] Davis R. L., The numbers of structures of finite relations. Proc. Amer. Math. Soc. 4, 3, 1953, 486—495.
[9] Ветуховский Ф. Я., О числе неразложимых сетей и некоторых их свойствах, ДАН 123, 3, 1958, 391—394.
[10] Лупанов О. Б., О возможностях синтеза схем из произвольных элементов, Труды МИАН, т. 51, 1958, 158—173.
[11] Трахтенброт Б. А., К теории бесповторных контактных схем, Труды МИАН, т. 51, 1958, 226—269.
[12] König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.
[13] Кудрявцев Л. Д., О некоторых математических вопросах теории электрических цепей, УМН 3, 4, 1948, 80—117.
[14] Яблонский С. В., Функциональные построения в k-значной логике, Труды МИАН, т. 51, 1958, 5—142.
[15] Лупанов О. Б., Об одном методе синтеза схем, Известия ВУЗ Радиофизика, 1, 1958, 120—140.
[16] Kelly P., Merriel D., On the transpose-connectivity of graphs. Math. Mag. 32, 1, 1958, 1—3.
[17] Ford G. W., Norman R. Z., Uhlenbeck G. E., Combinatorial problems in the theory of graphs. I, II, III, IV. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, 3, 122—128, 4, 203—208, 8, 529—535, 1957, 43, 1, 163—167.
[18] Лупанов О. Б., Об асимптотических оценках числа графов с n ребрами, ДАН 126, 3, 1959, 498—500.

Поступило в редакцию 28 XI 1958.