Die Schwerpunkte des Dreiecks

Franz Embacher

Fakultät für Physik der Universität Wien
Boltzmanngasse 5, A-1090 Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
Web: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Mathematische Semesterberichte (2008) 55: 131 – 148

Original-Publikation bei Springerlink:
http://dx.doi.org/10.1007/s00591-008-0040-8

Zusammenfassung:

Ausgehend von der Frage, was „der Schwerpunkt" eines Dreiecks eigentlich ist, erschließen sich einige interessante, bislang wenig beachtete Anwendungen analytischer Methoden auf die Dreiecksgeometrie, insbesondere im Rahmen eines Unterrichts mit hohem Eigentätigkeitsanteil der SchülerInnen.

Über eine Präzision von Begriffen (Dreieck, Schwerpunkt) und unter Anleihe des physikalischen Konzepts des Massenmittelpunkts führt der Weg zur Idee des Schwerpunkts der Dreiecks*linie* (dem so genannten Spieker-Punkt), auf dessen Lagebestimmung und – mit der Entdeckung einer zweiten „merkwürdigen Geraden" (neben der bekannten Eulerschen) – auf einen überraschenden Zusammenhang mit der Lage des Inkreismittelpunkts. Über den Begriff des gewichteten Mittels werden Bezüge zur beschreibenden Statistik benötigt oder entwickelt. Eine darüber hinaus führende natürliche Verallgemeinerung des Schwerpunktbegriffs führt zum Konzept der baryzentrischen Koordinaten.

1 Einleitung

Das Kennenlernen der wichtigsten merkwürdigen[1] Punkte des Dreiecks (Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt) bildet einen zentralen Bestandteil des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe 1. Von der Beobachtung, dass die drei Höhenlinien eines Dreiecks einander in *einem* Punkt schneiden, bis zur Eulerschen Geraden, auf der stets die Punkte H, U und S liegen, steht in stoffdidaktischer Hinsicht eine Reihe von Einstiegspunkten in die überraschenden und faszinierenden Zusammenhänge der Dreiecksgeometrie zur Verfügung. Dieser Teil der Mathematik besitzt für SchülerInnen durchaus seinen Reiz.[2]

Mit den Methoden der analytischen Geometrie und der Winkelfunktionen wird in der Sekundarstufe 2 ein mächtiger Kalkül bereitgestellt, der ein tieferes Verständnis geometrischer Zusammenhänge erlaubt. Jedoch werden die „klassischen" Themen selten wieder aufgegriffen. Zwar wird für numerisch gegebene Dreiecke die Lage von Punkten wie H, U, I und S

[1] Diese Bezeichnung entstand im frühen 19. Jahrhundert und hatte zunächst die wortwörtliche Bedeutung „des Merkens würdig", vgl. Baptist [1], S. 33.
[2] Sie sind damit in prominenter Gesellschaft. So war die Existenz des Höhenschnittpunkts das entscheidende Kindheitserlebnis einiger Mathematiker, und Albert Einstein staunte als Kind über den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Innenwinkelhalbierenden (vgl. Baptist [1], S. 22).

berechnet, doch im Allgemeinen findet weder eine nachträgliche (rechnerische) Begründung der in der Sekundarstufe 1 behandelten Zusammenhänge noch eine weiterführende theoretische Durchdringung statt. Einer der Gründe dafür ist in der Mathematik selbst zu finden: Obwohl für die Lage der vier genannten merkwürdigen Punkte des Dreiecks analytische Ausdrücke existieren, mit deren Hilfe beispielsweise gezeigt werden kann, dass H, U und S stets auf einer Geraden liegen, sind insbesondere jene für den Höhenschnittpunkt und den Umkreismittelpunkt (sie sind im Anhang 1 wiedergegeben) unhandlich, und ihre Herleitung ist nicht leicht. Ein Blick auf diese Formeln zeigt, dass sie nicht wirklich zur Begründung bekannter und zur Entdeckung neuer Sachverhalte einladen. Einfachere Formeln ergeben sich für die Lage des Schwerpunkts und des Inkreismittelpunkts. Während von ersterer im Rahmen der analytischen Geometrie üblicherweise ausgiebig Gebrauch gemacht wird, stellt letztere – siehe Formel (6) unten – eine vielfach vernachlässigte Chance dar.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, dass sich – ausgehend von der Frage, was der Schwerpunkt des Dreiecks eigentlich ist – noch eine weitere, analytisch leicht fassbare Größe ergibt, die die klassische Dreiecksgeometrie ergänzen und auch im Rahmen der analytischen Geometrie zu einem interessantem Thema machen kann. Weiters wird durch den hier aufgezeigten Zugang eine Verbindung zu einem Thema der beschreibenden Statistik, nämlich zum Begriff des gewichteten Mittels, und zu dem – der Physik entlehnten – Konzept des Massenmittelpunkts hergestellt.

In den folgenden fünf Abschnitten wird zunächst eine konkrete Argumentationslinie vorgestellt, die über eine Präzisierung des Schwerpunktbegriffs zu einigen wenig bekannten Sachverhalten der Dreiecksgeometrie und nach einer weiteren Verallgemeinerung zum Konzept der baryzentrischen Koordinaten führt. Die darin auftretenden Aussagen, Argumentationen und Berechnungen sollten (in der gesamten hier verfolgten Linie oder in Teilen davon) im Prinzip SchülerInnen der Sekundarstufe 2 zugänglich sein. Einige Seitenthemen, die entweder notwendige Voraussetzungen oder verwandte Fragestellungen betreffen, sind in eine Reihe von Anhängen ausgelagert, um die zentrale Argumentationskette so klar wie möglich zu halten. An einem kritischen Punkt der Argumentation, wie sie hier vorgestellt wird, kommt der *dynamischen Geometrie*, einem technologischen Werkzeug, das das eigenständige Formulieren vermuteter Zusammenhänge durch SchülerInnen unterstützt, eine wichtige Rolle zu.

Im Anschluss daran wird die besondere Eignung der behandelten Themen für die Sekundarstufe 2 didaktisch begründet. Abschließend wird auf einen im WWW zur Verfügung gestellten Lernpfad zum behandelten Thema hingewiesen.

2 Was ist der Schwerpunkt des Dreiecks?

Bekanntlich ist der „Schwerpunkt des Dreiecks“ jener Punkt, dessen Lage in der Sprache der analytischen Geometrie durch die Formel[3]

$$S = \frac{1}{3}\left(A + B + C\right) \tag{1}$$

ausgedrückt wird. Welche Bedeutung hat er? Algebraisch betrachtet, sind seine Koordinaten die arithmetischen Mittelwerte der Koordinaten der drei Eckpunkte. Geometrisch gedeutet ist er der gemeinsame Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden (d.h. der Geraden durch einen Eckpunkt und den gegenüberliegenden Seitenhalbierungspunkt). Beide Deutungen sind aus dem Unterricht in der Sekundarstufe 1 bekannt. Physikalisch gedeutet, handelt es sich dabei um den Massenmittelpunkt eines Systems, das aus *drei Massenpunkten gleicher Masse*

[3] In der verwendeten Schreibweise wird zwischen Punkten und Ortsvektoren nicht unterschieden.

besteht, die sich an den Orten A, B und C befinden. Der durch (1) definierte Punkt könnte daher etwas genauer als „Schwerpunkt der Eckpunkte des Dreiecks“ (oder kurz *Schwerpunkt des Eckensystems*) bezeichnet werden. (Eine Argumentation zur Begründung dieser physikalischen Deutung wird weiter unter nachgeliefert).

Diese Präzisierung wirft sofort eine weitere Frage auf. Wo liegt der Schwerpunkt der *Dreiecksfläche*? Physikalisch formuliert: Wo liegt der Massenmittelpunkt einer Dreiecksfläche, in der die Masse homogen verteilt ist? Die Antwort: Er ist mit Punkt (1) identisch. Zwei Argumente zur Begründung dieser Identität sind im Anhang 2 wiedergegeben. Sie wird bisweilen dazu benutzt, um die Seitenhalbierenden physikalisch als Schwerlinien, d.h. als jene Linien zu interpretieren, auf denen eine Dreiecksfläche *balanciert* werden kann (bzw. um zu argumentieren, dass sich eine Schwerlinie *lotrecht* ausrichtet, wenn die Dreiecksfläche im entsprechenden Eckpunkt aufgehängt wird).

Die Unterscheidung zwischen dem Schwerpunkt des Eckensystems und dem Schwerpunkt der Dreiecksfläche ist nicht bloß akademisch, denn eine analoge Gleichheit gilt für höhere n-Ecke *nicht*! Bereits für das Viereck ist der Schwerpunkt des Eckensystems im allgemeinen Fall nicht mit dem Schwerpunkt der Vierecksfläche identisch. Eine einfache Begründung dafür wird im Anhang 3 gegeben (vgl. auch Seebach [2]).

Hinter diesen beiden Zugängen zum Schwerpunktsbegriff stehen zwei unterschiedliche Deutungen, was „ein Dreieck“ eigentlich ist: Im ersten Fall wird es als „Menge dreier Punkte“, im zweiten als „Menge aller Punkte der Dreiecksfläche“ gedeutet. Darüber hinaus gibt es aber – unabhängig von jeder formalen Definition des Dreiecksbegriffs – noch eine weitere Auffassung, die nicht von der Hand zu weisen ist: das Dreieck als Menge aller Punkte auf der *Dreieckslinie*, d.h. als Vereinigung der drei Strecken, die es begrenzen. Schließlich ist es diese Linie, die in Skizzen und Konstruktionen *gezeichnet* wird, um ein Dreieck darzustellen. Damit ergibt sich die Frage, die hier abgehandelt werden soll: Wo liegt der Schwerpunkt der Dreieckslinie?

3 Der Schwerpunkt der Dreieckslinie (Spieker-Punkt)

Physikalisch ausgedrückt ist der Schwerpunkt der Dreieckslinie der Massenmittelpunkt eines *Drahtmodells* des Dreiecks, d.h. eines Systems, das aus den das Dreieck begrenzenden Seitenlinien besteht, wobei jede Seite die *gleiche Masse pro Längeneinheit* trägt. Bildlich können wir uns ein solches System als aus drei (homogenen, sehr dünnen, aber überall *gleich* dünnen) Stäben aufgebaut denken.

Interessanterweise ist der Schwerpunkt der Dreieckslinie im allgemeinen Fall *nicht* mit Punkt (1) identisch! In der Literatur wird er als *Spieker-Punkt* bezeichnet.[4] Im mathematikdidaktischen Zusammenhang wird er von Seebach [2] diskutiert[5] (siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Spieker-Punkt/). Wir verwenden für ihn im Folgenden das Symbol S'. Der Grund dafür, dass er im allgemeinen Fall nicht mit dem Schwerpunkt S des Eckensystems übereinstimmt, ist leicht einzusehen, wenn als extremer Spezialfall ein Dreieck mit zwei langen und einer (sehr) kurzen Seite betrachtet wird (Abbildung 1): Der Schwerpunkt S des Eckensystems teilt, wie aus dem Unterricht in der Sekundarstufe 1 bekannt, die Schwerlinien im Verhältnis $2:1$, wird also näher bei der kurzen Seite liegen als beim gegenüberliegenden Eckpunkt. Die kurze Seite wird in einem Drahtmodell allerdings nur eine (sehr) kleine

[4] Theodor Spieker (1823 – 1913) war Gymnasiallehrer in Potsdam. Er gehörte jener Generation von Lehrern an, die im 19. Jahrhundert die Elementargeometrie pflegten und weiterentwickelten.

[5] In Lambert und Peters [3], Seebach [2] und Shilgalis and Benson [4] wird seine Verallgemeinerung für höhere n-Ecke betrachtet – ein interessantes Thema, das wir hier aber nicht weiter verfolgen.

Masse beitragen. Daraus folgt, dass S' ungefähr in der Mitte zwischen der kurzen Seite und dem gegenüberliegenden Eckpunkt liegt.

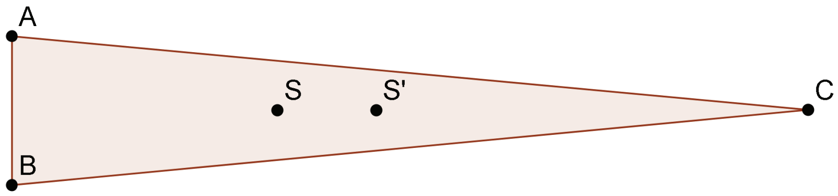

Abbildung 1

Nachdem sichergestellt ist, dass S' und S im allgemeinen Fall nicht zusammenfallen, stellt sich – gewissermaßen aus einem innermathematischen Interesse heraus – die Frage nach einer genaueren Bestimmung der Lage von S'. Wird dieses Interesse im Unterricht der Sekundarstufe 2 durch eine entsprechende *Motivation* der SchülerInnen getragen, so kann nun zum Einsatz analytischer Methoden übergegangen werden.

Dazu ist es zunächst hilfreich, wenn den SchülerInnen ein zumindest intuitiver Begriff des *gewichteten Mittels* zur Verfügung steht. Insbesondere sollten sie in der Lage sein, ihn auf die *Berechnung des Massenmittelpunkts* zu übertragen. So sollte beispielsweise bekannt sein (oder erkannt werden), dass für ein System von drei Massenpunkten an den Orten A, B und C, denen Massen im Verhältnis $3:5:4$ zugeordnet werden, der Ausdruck

$$\frac{1}{12}\left(3A+5B+4C\right)$$

gerade die Lage des Massenmittelpunkts ergibt. Die Koeffizienten bilden untereinander die gleichen Verhältnissen wie die Massen – daher auch die Bezeichnung *gewichtetes* Mittel. Wird $A=B=C$ gesetzt, so muss sich als Massenmittelpunkt eben dieser Punkt ergeben, was de facto der Normierung der Gewichte $\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{4}{12}=1$ entspricht. Die *Gewichte* können durchaus im wörtlichen Sinn als (in ihrer Summe auf 1 normierte) *Massen* verstanden werden. (Um diesen Aspekt zu untermauern, sind entsprechende von den SchülerInnen durchgeführte physikalische Experimente denkbar). Allgemein ist die Formel zur Berechnung der Lage des Massenmittelpunkts eines 3-Punkte-Systems mit Massen m_A, m_B und m_C durch

$$\frac{m_A\ A+m_B\ B+m_C\ C}{m_A+m_B+m_C} \tag{2}$$

gegeben. Wieweit ein Verständnis für Formel (2) bei der Behandlung des Schwerpunktthemas in der Dreiecksgeometrie als Vorkenntnis bereits zur Verfügung steht oder erst im Rahmen desselben entwickelt werden muss, mag von Fall zu Fall anders liegen.

Neben Formel (2) ist zur Berechnung der genauen Lage von S' in einem beliebigen Dreieck noch eine weitere Voraussetzung nötig, nämlich die (intuitiv einleuchtende) Regel:

> Wird in einem System aus Massenpunkten die Masse eines *Teilsystems* in dessen Massenmittelpunkt konzentriert, so ändert sich der Massenmittelpunkt des *Gesamtsystems* dadurch nicht. [6] (3)

Genau genommen drückt sie einen sehr weitreichenden maßtheoretischen Sachverhalt aus. Im Anhang 4 wird ein Plausibilitätsbeweis für sie gegeben. Inwieweit eine solche formale Begründung dieser Regel im Unterricht überhaupt thematisiert werden soll, kann nur im konkreten Fall entschieden werden. Unter Umständen wird sie von den SchülerInnen als hinreichend plausibel empfunden (vielleicht auch unter dem Eindruck des Schwerpunktsbegriffs aus dem Physikunterricht), so dass eine eigene Begründung entfallen (oder in Rahmen des Statistikunterrichts behandelt werden) kann. Gemeinsam stellen Formel (2) und Regel (3) ein mächtiges Werkzeug zur Berechnungen von Massenmittelpunkten dar.

Steht die Regel (3) zur Verfügung, so kann eine Motivierung von Formel (2) gegebenenfalls durch eine „physikalische" Argumentation, d.h. in Bezug auf das Verhalten von Körpern unter der Einwirkung der Schwerkraft in zwei Schritten gegeben werden:

- Zunächst wird die Lage des Massenmittelpunkts eines 2-Punkte-Systems mit Massen m_A und m_B mit Hilfe des Hebelgesetzes (gegebenenfalls untermauert durch ein physikalisches Experiment) zu $S_{AB} = \dfrac{m_A\ A + m_B\ B}{m_A + m_B}$ bestimmt.[7]
- In einem 3-Punkte-System mit Massen m_A, m_B und m_C werden die ersten beiden Massen in ihren Massenmittelpunkt x_{AB} konzentriert, was gemäß Regel (3) zum Massenmittelpunkt $\dfrac{(m_A + m_B)\ S_{AB} + m_C\ C}{(m_A + m_B) + m_C}$ des Gesamtsystems führt. Das ist aber gerade (2).

Für den Fall $m_A = m_B = m_C$ wäre damit auch die versprochene Argumentation nachgeliefert, dass der Massenmittelpunkt des Eckensystems tatsächlich durch Formel (1) gegeben ist. Bei dieser Argumentation muss allerdings darauf geachtet werden, nicht in einen Zirkelschluss zu geraten, denn die Begründung von Regel (3) in Anhang 4 *benutzt* die (auf eine beliebige Zahl von Massenpunkten verallgemeinerte) Formel (2). Eine alternative, von dieser Zirkularität befreite Herleitung von (2) muss – analog zum ersten Argument in Anhang 2 – mit dem Begriff des *Drehmoments* arbeiten, sofern dieser zur Verfügung steht. In jedem Fall ergibt sich hier eine interessante Berührung von Geometrie-, Stochastik- und Physikunterricht, der wir aber im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter nachgehen.

Die Lage von S' in einem beliebigen Dreieck zu berechnen, ist nun eine kleine Übung im Bilden des gewichteten Mittels. Wir wenden Regel (3) an: Die Masse jedes der drei Stäbe, die gemeinsam die Dreieckslinie bilden, ist proportional zu seiner Länge. Die Längen der Dreiecksseiten werden mit a, b und c bezeichnet (wobei, wie üblich, die Seite a dem Punkt A gegenüberliegt usw.). Der Schwerpunkt jeder dieser Strecken liegt genau in ihrem Halbierungspunkt. Nach Regel (3) kann die Massenbelegung jeder Dreiecksseite *in deren Halbierungspunkt konzentriert* werden. Der Schwerpunkt S' der Dreieckslinie ist daher ein

[6] So ist beispielsweise der Massenmittelpunkt des aus Erde und Mond bestehenden Systems gleich dem Massenmittelpunkt jenes (hypothetischen) Systems, das aus nur *zwei* Massenpunkten besteht: dem Mittelpunkt der Erde (mit Erdmasse) und dem Mittelpunkt des Mondes (mit Mondmasse).

[7] Diese Formel drückt den Merksatz „Der Massenmittelpunkt (zweier Punktmassen) teilt den Abstand zwischen den beiden Punkten im umgekehrten Verhältnis der beiden Massen" aus.

gewichtetes Mittel der drei Seitenhalbierungspunkte, wobei die Gewichte proportional zu den Massen, d.h. zu den Seitenlängen sind. Damit ergibt sich[8]

$$S' = \frac{1}{u}\left(c\,\frac{A+B}{2} + a\,\frac{B+C}{2} + b\,\frac{C+A}{2} \right), \tag{4}$$

wobei $u = a+b+c$ der Umfang des Dreiecks ist. Dieser Ausdruck kann in

$$S' = \frac{b+c}{2u}\,A + \frac{c+a}{2u}\,B + \frac{a+b}{2u}\,C \tag{5}$$

umgeformt werden, womit eine einigermaßen handliche Formel zur Verfügung steht: Sind die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks gegeben, so können jene von S' sofort berechnet werden.[9] Wir fassen dieses Ergebnis nicht als Endresultat, sondern als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen auf.

Wiederholen wir die eingangs gestellte Frage: Wo liegt der Schwerpunkt der Dreieckslinie? Mit Hilfe der Formel (5) kann sein Ort zwar in jedem Einzelfall berechnet werden, aber lässt sich aus ihr auch eine allgemeine Charakterisierung ableiten? Die Frage nach dem „wo" lässt sich für SchülerInnen, die andere charakteristische Punkte des Dreiecks kennen, vor allem auf diese beziehen: Steht der Ort von S' in irgendeiner interessanten Beziehung zu H, U, I und S?

An dieser Stelle ist es zunächst günstig, sich über die Lage von S' in Einzelfällen zu orientieren, um zu einer Vermutung zu gelangen. Hier kommt die *dynamische Geometrie* als technologisches Werkzeug ins Spiel. Sie stellt, insbesondere wenn sie – wie etwa das Programm *GeoGebra* [10] – Streckenlängen und Ortsvektoren als (berechenbare und kombinierbare) dynamische Objekte besitzt, ein ideales Hilfsmittel für geometrische Untersuchungen wie die hier aufgeworfene dar. Die Punkte H, U, I können wie üblich (mit den Software-Analogien von Zirkel und Lineal) konstruiert werden, während S und S' am bequemsten mit Hilfe der Formeln (1) und (5) eingegeben werden. Werden die – auf der Zeichenfläche zunächst beliebig gewählten – Eckpunkte durch Mausziehen geändert, so werden alle von ihnen abhängigen Punkte dynamisch mitverändert.[11]

Typischerweise ergibt sich eine Anordnung wie die in Abbildung 2 (unter Weglassung aller Hilfslinien) gezeigte.

[8] Die drei Massen können in der Form $m_a = am$, $m_b = bm$ und $m_c = cm$ angesetzt werden, wobei m eine beliebige (nichtverschwindende) Referenzmasse ist, die sich bei der Berechnung des Massenmittelpunkts wieder herauskürzt.

[9] Die Seitenlinien ergeben sich mit $a = |C - B|$ usw. als Beträge der Verbindungsvektoren der Eckpunkte.

[10] Diese kostenlose Software kann von http://www.geogebra.org/ bezogen werden.

[11] Daraus leitet sich der Name *dynamische* Geometrie her.

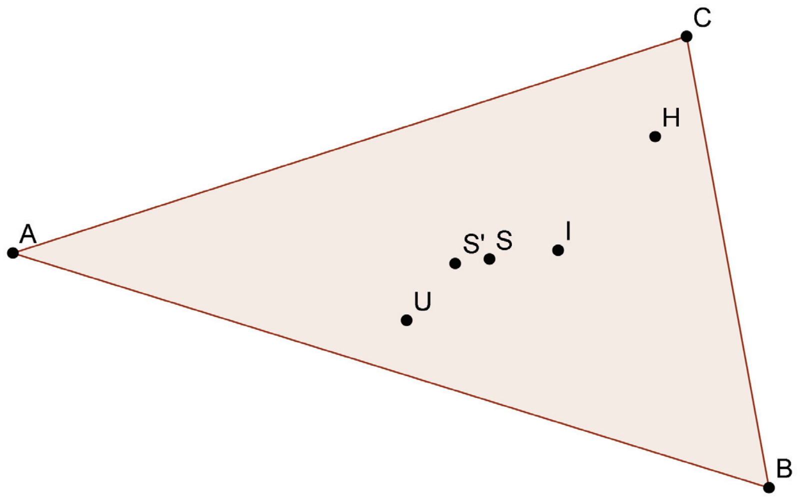

Abbildung 2

Dynamisches Verändern der Eckpunkte sollte rasch zu einer Vermutung führen: Die Punkte S', S und I (d.h. die beiden „Schwerpunkte“ und der Inkreismittelpunkt) scheinen immer auf einer Geraden zu liegen, während keine erkennbare Beziehung zu H und U (und damit zur Eulerschen Geraden) besteht. Diese Vermutung kann von SchülerInnen durchaus selbst gefunden werden. Ist sie tatsächlich richtig, d.h. lässt sie sich *beweisen*?

4 Eine weitere merkwürdige Gerade

Tatsächlich gibt es – neben der Eulerschen Geraden – im Dreieck eine weitere „merkwürdige Gerade“, auf der stets S', S und I liegen. Analytisch ist das relativ einfach einzusehen: Die Lage des Inkreismittelpunkts kann durch die einfache Formel

$$I = \frac{1}{u}\left(a\,A + b\,B + c\,C\right) \tag{6}$$

ausgedrückt werden. Ihre Herleitung ist im Anhang 5 wiedergegeben. Wird sie im Unterricht, wie im Folgenden beschrieben, bei der Aufklärung der Lage des Punktes S' benutzt, so empfiehlt es sich, ihre Herleitung zwar im Rahmen der analytischen Geometrie, aber entweder *vor* Behandlung des Schwerpunktthemas oder zumindest logisch abgetrennt von diesem – im Rahmen einer eigenständigen Aufgabenstellung – zu behandeln.

Wird nun (5) zu

$$S' = \frac{1}{2}\left(A + B + C\right) - \frac{1}{2u}\left(a\,A + b\,B + c\,C\right) \tag{7}$$

umgeformt, so ergibt sich mit (1) und (6) unmittelbar

$$S' = \frac{3}{2}\,S - \frac{1}{2}\,I\,. \tag{8}$$

Wird auf beiden Seiten S subtrahiert, so nimmt diese Aussage die Form

$$S'-S=\frac{1}{2}\left(S-I\right) \qquad (9)$$

an. Als Gleichung zwischen Verbindungsvektoren interpretiert, bestätigt diese Beziehung unsere Vermutung:

S', S und I liegen stets auf einer Geraden. (10)

Die Beziehung (9) gibt auch Aufschluss über das *Teilungsverhältnis* der drei Punkte:

S' kann gefunden werden, indem die Strecke IS über S hinaus um die Hälfte verlängert wird. (11)

Damit ist, neben H, U und S, ein weiteres Tripel von „natürlich" definierten Punkten im Dreieck gefunden, die immer auf einer Geraden liegen.[12] Siehe Seebach [2] für eine elementargeometrische Herleitung dieses Sachverhalts.

Da die Argumentation, die zu diesem Ergebnis führt, in rechentechnischer Hinsicht sehr einfach ist, kann sie bei entsprechender Motivation durchaus von SchülerInnen gefunden bzw. nachvollzogen werden. Neben dem Ausdruck (5) für S' muss dafür lediglich die Formel (6) für den Inkreismittelpunkt bekannt sein.

Der hier aufgeworfene Sachverhalt besticht vor allem dadurch, dass er einen Zusammenhang aufdeckt, der nicht auf den ersten Blick zu erschließen ist, und dass seine analytische Behandlung, wie vorgeführt, relativ einfach ist und mit einem geringen formalen Vorwissen auskommt. In mancher Hinsicht eignet er sich besser zur Anwendung analytischer Techniken auf die „klassische" Dreiecksgeometrie (und möglicherweise generell zur Weckung eines geometrischen Interesses) als die allseits bekannte Eulersche Gerade. Dies rührt daher, dass, wie bereits erwähnt, die allgemeinen Ausdrücke für den Höhenschnittpunkt und den Umkreismittelpunkt (siehe Anhang 1) wesentlich komplizierter sind als (1), (5) und (6).

5 Schwerpunkte als gewichtete Mittel

Ist die Frage nach den „Schwerpunkten" des Dreiecks einmal gestellt, und wurde – bei der Herleitung von (5) – der Begriff des gewichteten Mittels verwendet, so eröffnet sich nun eine Erweiterung der Sichtweise, die – je nach den Umständen – in den Unterricht einbezogen werden kann: Auch *andere* charakteristische Punkte des Dreiecks können als „Schwerpunkte" gedeutet werden, zwar mit unterschiedlichen „Massenbelegungen", aber auf „natürliche" Weise definiert. Ist, ganz allgemein, ein System von drei Massenpunkten gegeben, die sich an den Orten A, B und C befinden, und sind ihre Massen durch m_A, m_B und m_C gegeben, so ist der Massenmittelpunkt dieses Systems durch (2) gegeben. Anders angeschrieben, lautet (2)

$$\frac{m_A}{m}A+\frac{m_B}{m}B+\frac{m_C}{m}C\,, \qquad (12)$$

[12] Auf der gleichen Geraden liegt stets ein weiterer merkwürdiger Punkt, der so genannte *Nagel-Punkt* (siehe Baptist [1], S. 71, und http://de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Punkt). Eine weitere Eigenschaft des Punktes S' sei hier nur am Rande erwähnt: Er ist Mittelpunkt eines Kreises, der die drei Ankreise rechtwinkelig schneidet.

wobei $m = m_A + m_B + m_C$ die Gesamtmasse ist. Dass die Verhältnisse der Einzelmassen zur Gesamtmasse als *Gewichte* einer Mittelwertbildung auftreten, ist nun für das Folgende entscheidend. Werden diese Gewichte als $q_A = m_A / m$, $q_B = m_B / m$ und $q_C = m_C / m$ abgekürzt, so nimmt (12) die Form

$$q_A\, A + q_B\, B + q_C\, C \tag{13}$$

an. Die wichtigste Eigenschaft der Gewichte ist, dass ihre Summe 1 ist. Der Massenpunkt am Ort A trägt zum gewichteten Mittel (13) „den Anteil“ q_A bei, jener am Ort B „den Anteil“ q_B und jener am Ort C „den Anteil“ q_C. Je kleiner eine Masse im Verhältnis zu den anderen ist, umso weniger trägt sie zur Lage des Massenmittelpunkts bei. Weiters ist klar, dass es auf die konkreten Massen nicht ankommt, sondern nur auf ihre Verhältnisse.[13]

Vor diesem Hintergrund lassen sich nun weitere „Schwerpunkte“ ausmachen:

- Wiederholen wir zunächst den bekannten – einfachsten – Fall: Der herkömmliche Schwerpunkt S des Dreiecks kann, wie bereits besprochen, gedeutet werden als Massenmittelpunkt eines aus den Eckpunkten bestehenden Systems aus drei Massenpunkten, wobei alle drei Massen gleich sind. Das entspricht den Gewichten $q_A = q_B = q_C = \frac{1}{3}$, in Übereinstimmung mit Formel (1). Da alle drei Massenpunkte gleich viel zum Massenmittelpunkt betragen, trägt jeder genau *ein Drittel* bei, was die Zahlenwerte der q's erklärt.

- Aus der Formel (6) für den Inkreismittelpunkt I ergibt sich durch Ablesen der Koeffizienten:

  Der Inkreismittelpunkt kann gedeutet werden als der Massenmittelpunkt eines aus den drei Eckpunkten bestehenden Systems, wobei jeder Eckpunkt eine Masse trägt, die proportional zur Länge der gegenüberliegenden Seite ist. (14)

  Die Gewichte sind $q_A = \dfrac{a}{u}$, $q_B = \dfrac{b}{u}$ und $q_C = \dfrac{c}{u}$.

- Für den Schwerpunkt S' der Dreieckslinie, Ausgangspunkt unserer Betrachtungen, wurden die beiden Ausdrücke (4) und (5) angegeben. Sie können in unterschiedlicher Weise gedeutet werden:

  - Ausdruck (4) kann gelesen werden als Massenmittelpunkt eines Systems von drei Massenpunkte an den Orten $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(B+C)$ und $\frac{1}{2}(C+A)$. Es sind dies genau die drei Halbierungspunkte der Seiten des gegebenen Dreiecks. Die Koeffizienten (Gewichte) sind proportional zu den entsprechenden Seitenlängen. Diese Charakterisierung von S' entspricht genau der Argumentation, die zu (4) geführt hat. Da nun aber das aus den Halbierungspunkten bestehende Dreieck im Vergleich zum gegebenen um genau den Faktor $\frac{1}{2}$ verkleinert ist, weist es die gleichen Längenproportionen auf: Beispielsweise ist die Seite AB doppelt so lang wie jene Seite des verkleinerten Dreiecks,

[13] Werden alle drei Massen m_A, m_B und m_C mit einem gemeinsamen (nichtverschwindenden) Faktor multipliziert, so kürzt sich dieser beim Bilden des gewichteten Mittels (12) bzw. (13) wieder heraus.

die dem Punkt $\frac{1}{2}(A+B)$ gegenüber liegt.[14] Zusammen mit der zuvor angegebenen Deutung (14) des Inkreismittelpunkts ergibt sich daher (vgl. auch Seebach [2]):

> Der Schwerpunkt S' der Dreieckslinie ist gleich dem Inkreismittelpunkt des aus den Seitenhalbierungspunkten $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(B+C)$ und $\frac{1}{2}(C+A)$ bestehenden Dreiecks. (15)

Damit ist uns als Nebenprodukt eine einfache elementare Konstruktionsvorschrift (mit Zirkel und Lineal) für S' in den Schoß gefallen!

- Formel (5) schließlich kann so gedeutet werden:

> S' ist der Massenmittelpunkt eines aus den drei Eckpunkten bestehenden Systems, wobei jeder Eckpunkt eine Masse trägt, die proportional zur Summe der Längen der anliegenden Seiten ist. (16)

- Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt sind in spitzwinkeligen Dreiecke ebenfalls als Massenmittelpunkte zu deuten, allerdings mit erheblich komplizierteren Ausdrücken für die Gewichte – siehe die entsprechenden Formeln (A1.1) und (A1.3) im Anhang 1. Für stumpfwinkelige Dreiecke sind nicht alle Gewichte positiv – in diesem Fall liegen H und U außerhalb der Dreiecksfläche. Sie können zwar in der Form (13) geschrieben, allerdings nicht als Massenmittelpunkte mit positiven Massen gedeutet werden.

- Selbstverständlich kann der Spieß umgedreht werden, indem Gewichte (Massenverhältnisse) *vorgegeben* und die entsprechenden Punkte betrachtet werden. Beispielsweise kann jedem Eckpunkt eine Masse zugeordnet werden, die
  - proportional zum Quadrat der gegenüberliegenden Seite oder
  - proportional zur Summe der Quadrate der anliegenden Seiten

  ist. Dass die durch diese beiden (einigermaßen „natürlichen“) Vorschriften festgelegten Punkte auf einer Geraden mit S liegen, kann mit einer ganz ähnlichen Argumentation wie jener, die zu (9) geführt hat, gezeigt werden.

Deutungen dieser Art erschließen einen neuen, reizvollen Aspekt der Dreiecksgeometrie, der im Schulunterricht bisher fast gänzlich vernachlässigt wurde.

6 Baryzentrische Koordinaten

Über die Deutung einzelner Punkte der Dreiecksfläche als Massenmittelpunkte hinausführend, bietet sich nun eine letzte Verallgemeinerungsidee an: *Jeder* Punkt innerhalb der Dreiecksfläche kann als gewichtetes Mittel vom Typ (13) mit positiven Gewichten geschrieben werden. Wird die Forderung nach der Positivität der Gewichte fallen gelassen, so kann *jeder Punkt der Ebene* in der Form (13) geschrieben werden (sofern es sich um ein echtes Dreieck mit Fläche $\neq 0$ handelt), wobei nun allerdings die Zahlen q_A, q_B und q_C nicht notwendigerweise alle positiv sind. Ist eines der Gewichte negativ, so liegt der durch (13) beschriebene

---

[14] Beweis: $\left|\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}(B+C)\right|=\left|\frac{1}{2}(A-B)\right|=\frac{1}{2}\left|AB\right|=\frac{c}{2}$.

Punkt außerhalb der Dreiecksfläche. Ist eines der Gewichte gleich 0, so liegt der entsprechende Punkt auf einer Dreiecksseite (oder auf deren gerader Verlängerung).

Dadurch kann ein vollständig auf ein gegebenes Dreieck bezogenes System zur Angabe der Lage von Punkten definiert werden, die so genannten *baryzentrischen Koordinaten*[15]. In der Regel wird auf die Normierungsbedingung $q_A + q_B + q_C = 1$ verzichtet. Mit dieser Konvention sind die baryzentrischen Koordinaten mehrdeutig, also im strengen Sinn gar keine „Koordinaten“, aber zumindest wird durch jedes Tripel $(x_A, x_B, x_C) \neq (0,0,0)$ eindeutig ein Punkt

$$\frac{x_A\, A + x_B\, B + x_C\, C}{x_A + x_B + x_C} \tag{17}$$

der Ebene festgelegt. Lediglich die Umkehrung ist nicht eindeutig: Alle Vielfachen $(\lambda x_A, \lambda x_B, \lambda x_C)$ für $\lambda \neq 0$ führen zum gleichen Punkt (17). Baryzentrische Koordinaten werden oft durch ihre Verhältnisse in der Form $x_A : x_B : x_C$ angegeben. So wird beispielsweise die Lage von S durch die baryzentrischen Koordinatenverhältnisse $1:1:1$, jene von S' durch die Verhältnisse $(b+c):(c+a):(a+b)$ und jene des Inkreismittelpunkts I durch $a:b:c$ beschrieben. Die entsprechenden Verhältnisse für den Höhenschnittpunkt und den Umkreismittelpunkt können aus den in Anhang 1 wiedergegebenen Ausdrücken abgelesen werden.

Somit wurde aus der Frage, was „der Schwerpunkt eines Dreiecks“ eigentlich ist, über die Entdeckung eines weiteren merkwürdigen Punktes und einer zweiten merkwürdigen Geraden im Dreieck eine neue Sichtweise auf die Dreiecksgeometrie entwickelt und schließlich eine Methode, die Lage von Punkten der Ebene in Bezug auf ein gegebenes Dreieck anzugeben, erzielt. Mit dem Konzept der baryzentrischen Koordinaten wurde ein Abstraktionsniveau erreicht, das alles zuvor Gesagte als (mehr oder weniger triviale) Spezialfälle beinhaltet, und das bereits den Horizont der Sekundarstufe 2 erreicht.

Wir beschließen an dieser Stelle die hier vorzustellende Argumentationslinie. Welche ihrer Teile sich für den Unterricht eignen, d.h. wo Ziel und Endpunkt anzusetzen sind, wird vom konkreten Einzelfall abhängen.

7 Didaktischer Hintergrund

Die Behandlung der oben skizzierten mathematischen Themen – ausgehend von der Frage nach dem Schwerpunkt der Dreieckslinie – besitzt den Vorzug, eine Reihe wesentlicher Arbeitsweisen und Antriebskräfte der Mathematik zu illustrieren:

- Die Motivation, die Frage nach dem Schwerpunkt der Dreieckslinie überhaupt zu stellen, führt über eine *Begriffsklärung* und illustriert somit eine der wesentlichen kognitiven Voraussetzungen der Mathematik.

- Ein einfaches Argument, das auf der Betrachtung eines extremen *Spezialfalls* (Dreieck mit zwei langen und einer kurzen Seite) beruht, zeigt, dass der Schwerpunkt der Dreieckslinie im allgemeinen Fall nicht mit dem der Dreiecksfläche übereinstimmt. Die Betrachtung von Spezialfällen zählt zu den mathematischen Standardverfahren, um Vermutungen zu widerlegen.

[15] Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Baryzentrische_Koordinaten. Sie wurden 1827 von August Ferdinand Möbius eingeführt. Ihr Name leitet sich vom altgriechischen *barus* (schwer) her.

- Ein geschlossener (nicht allzu komplizierter) Ausdruck für den Schwerpunkt der Dreieckslinie – Formel (5) – erschließt sich durch die Anwendung eines der beschreibenden Statistik entlehnten Arguments und elementarer Techniken der analytischen Geometrie. Die zu (5) führenden Argumente beinhalten damit drei wesentliche Arbeitsweisen der Mathematik:

  - die *Entlehnung* von Methoden aus anderen Teilgebieten,
  - die *analytische* (exakte) Berechnung und
  - als Ziel nicht ein numerisches Resultat im Sinne einer traditionellen Dreiecksaufgabe, sondern ein *allgemeingültiger* Ausdruck (eine Formel).

- Weiteres *Experimentieren* (vorzugsweise mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware) kann neue Fragestellungen und – vor allem – konkrete Vermutungen über die Lage des Punktes S' zu Tage fördern und kommt einer möglicherweise vorhandenen Neugier entgegen.

- Die Vermutung, dass die beiden „Schwerpunkte" eines Dreiecks und der Inkreismittelpunkt stets auf einer Geraden liegen, muss – trotz aller Suggestivkraft einer dynamisch-geometrischen Konstruktion – *bewiesen* werden, um als wahr gelten zu können. Die oben vorgeführte Argumentation – deren Ziel die Formeln (8) und (9) sind – bietet auf der rechnerischen Ebene keine allzu großen Schwierigkeiten. Die eigentliche mathematisch-kreative Leistung besteht hier darin, eine Beziehung dieser Art *anzustreben* und sie auch *interpretieren* zu können – zwei Schlüsselfertigkeiten in allen Wissenschaften, die mathematische Modelle benutzen.

- Die für die Entwicklung der Mathematik wichtige Methode der *Verallgemeinerung* des bereits Bekannten und Gesicherten wird vor allem im letzten Teil der skizzierten Argumentationskette sichtbar:

  - Die Idee, auch andere merkwürdige Punkte des Dreiecks als Massenmittelpunkte geeigneter Systeme von Massenpunkten zu interpretieren, erwächst einer systematischen Verallgemeinerung des Schwerpunktsbegriffs (in deren Lichte die Ermittlung von S' lediglich als Auftakt erscheint), wobei dem Begriff des gewichteten Mittels nun eine umfassendere Bedeutung zukommt: Es wird gewissermaßen als Brille benutzt, durch die die Lage von Punkten im Dreieck betrachtet wird.

  - Ein letzter Verallgemeinerungsschritt (die Aufgabe der Positivitätsbedingung an die Gewichte) führt zur Idee der baryzentrische Koordinaten, einem umfassenden System zur Beschreibung der Lage von Punkten der Ebene in Bezug auf ein gegebenes Dreieck.

- Insgesamt wird in der Argumentationslinie eine *Dynamik* deutlich, die nicht von einer auf Anwendung hinsteuernden Logik, sondern von einem *innermathematischen Interesse* getragen wird, das sich stark an der „Natürlichkeit" der Fragestellungen orientiert und die behandelten Themen gewissermaßen als *l'art pour l'art* erscheinen lässt. Die Entdeckung mathematischen Neulands wurde stets – in mehr oder weniger starkem Ausmaß – von Beweggründen dieser Art vorangetrieben.

Die vorgestellte Thematik ist allerdings nicht nur reich an mathematischen Arbeitsweisen, sondern auch stark aufbauend: In mehreren Stufen ergibt sich aus einer Erkenntnis die nächste Fragestellung. Daraus erwächst die didaktische Hauptschwierigkeit, die sich hier stellt: Einerseits ist eine halbwegs eigenständige Bearbeitung durch SchülerInnen nur möglich, wenn schrittweise vorgegangen wird. Andererseits unterläuft eine Zerstückelung in einzelne Aufgabenstellungen tendenziell sowohl die innere Logik der Fragestellungen und Erkenntnisse als auch die Motivation der SchülerInnen. Daher erscheint es sinnvoll, den SchülerInnen den Stoff in Form eines Unterrichtsprojekts näher zu bringen, das individuelle – den Neigungen und Fähigkeiten entsprechende – Wahlmöglichkeiten zulässt.

Eine Möglichkeit der Strukturierung (unter vielen) sei durch die folgende Ablaufskizze illustriert:

- Es wird angenommen, dass die allgemeine Formel (6) für die Lage des Inkreismittelpunkts und der Begriff des gewichteten Mittels (in ausreichendem Maße) bereits zur Verfügung stehen.
- Gemeinsame Besprechung der Frage, was genau der „Schwerpunkt des Dreiecks" ist. Die Identität der Schwerpunkte des Eckensystems und der Dreiecksfläche wird begründet. Es wird auf die Idee des „Schwerpunkts der Dreieckslinie" hingewiesen.
- SchülerInnen (oder Gruppen von SchülerInnen) sollen in eigenständiger Arbeit herausfinden, ob S' mit S zusammenfällt.
- SchülerInnen (oder Gruppen von SchülerInnen) sollen in eigenständiger Arbeit die Lage des Punktes S' rechnerisch ermitteln. Dabei kann Regel (3) als Hinweis gegeben werden. Falls nötig, wird als Vertiefungsmöglichkeit auf die Begründung dieser Regel hingewiesen, dies steht aber nicht im Vordergrund.
- Präsentation der Ergebnisse, gegebenenfalls Korrektur. Als gemeinsame Grundlage für das Folgende sollte der Ausdruck (5) festgehalten werden. Dokumentation (schriftliche Fixierung) durch die SchülerInnen.
- Wo liegt S'? Besteht eine interessante Beziehung zu anderen charakteristischen Punkten im Dreieck? SchülerInnen benutzen dynamische Geometrie, um zu Vermutungen zu gelangen.
- Zusammenführung der Ergebnisse und Diskussion. Unter anderem sollte nun die Vermutung, dass S', S und I stets auf einer Geraden liegen, im Raum stehen.
- SchülerInnen (oder Gruppen von SchülerInnen) sollen in eigenständiger Arbeit diese Vermutung beweisen. Dabei kann als Hinweis an die Formel (6) für den Inkreismittelpunkt erinnert werden.
- Präsentation der Ergebnisse, gegebenenfalls Korrektur. Als gemeinsames Resultat sollte die „Entdeckung" einer zweiten merkwürdigen Geraden im Dreieck festgehalten werden. Dokumentation (schriftliche Fixierung) durch die SchülerInnen.
- In einer weiteren Runde eigenständiger Arbeit werden den SchülerInnen weiterführende Fragestellungen zu folgenden Themen (mit entsprechenden Hinweisen) angeboten:
    - Interpretation des Inkreismittelpunkts als Massenmittelpunkt.
    - Interpretation von S' als Massenmittelpunkt des Eckensystems mit geeigneten Gewichten (Massen).
    - Beziehung von S' zu dem aus den Halbierungspunkten der Seiten gebildeten kleineren Dreieck. Finden einer Konstruktionsvorschrift für S' mit Zirkel und Lineal.

  SchülerInnen ist es individuell freigestellt, wie viele der Fragestellungen bearbeitet werden.
- Präsentation der Ergebnisse, gegebenenfalls Korrektur. Gemeinsames Festhalten der erzielten Erkenntnisse. Dokumentation (schriftliche Fixierung) einzelner frei gewählter Fragestellungen durch die SchülerInnen.
- Zuletzt wird auf die Idee der baryzentrischen Koordinaten hingewiesen. Anhand mathematischer Literatur (z.B. Wikipedia-Seiten zur Dreiecksgeometrie) wird erläutert, was die bei charakteristischen Punkten des Dreiecks (etwa in http://de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Punkt) angegebenen baryzentrischen Koordinatenverhältnisse bedeuten.

- Abschließende Besprechung. Wenn möglich, werden die im Ablauf aufgetretenen mathematischen Arbeitsweisen bewusst gemacht und besprochen. Feedback durch die SchülerInnen.

Steht für ein derartiges Projekt zu wenig Zeit zur Verfügung, so bietet die etappenhafte Struktur dieses Ablaufs eine Reihe kürzerer, aber ebenfalls sinnvoller Szenarien an.

8 Lernpfad

Ergänzend zur vorliegenden Arbeit wurde vom Autor ein Lernpfad gestaltet, der unter der Adresse

http://www.mathe-online.at/lernpfade/Schwerpunkte/

frei zur Verfügung steht. Er stellt *eine* mögliche stoffdidaktische Umsetzung des behandelten Themas für den Unterricht dar, wobei das methodisch-didaktische Setting (Lern- und Sozialformen sowie die verlangte Form der schriftlichen Fixierung des Gelernten) offen gelassen ist. Gegen Ende des Schuljahrs 2007/8 wird der Lernpfad in einigen Klassen der österreichischen Sekundarstufe 2 versuchsweise eingesetzt. Sobald Details zu Durchführung und Evaluation vorliegen, werden diese ebenfalls unter der angegebenen Web-Adresse veröffentlicht.

9 Anhang 1

Die Lage des Höhenschnittpunkts eines Dreiecks kann durch den wenig attraktiven Ausdruck

$$H = f\left(\frac{A}{-a^2+b^2+c^2} + \frac{B}{a^2-b^2+c^2} + \frac{C}{a^2+b^2-c^2}\right) \tag{A1.1}$$

mit

$$f = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)} \tag{A1.2}$$

angegeben werden. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Summe der Koeffizienten der Eckpunktvektoren in (A1.1) gleich 1 ist, kann eine bescheidene Vereinfachung der Schreibweise erzielt werden. Die Lage des Umkreismittelpunkts ist durch

$$U = g\left(a^2(-a^2+b^2+c^2)A + b^2(-a^2+b^2-c^2)B + c^2(a^2+b^2-c^2)C\right) \tag{A1.3}$$

mit

$$g = \frac{1}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)} \tag{A1.4}$$

gegeben. Der tiefere Grund für die Komplexität dieser Ausdrücke im Vergleich zu (1), (5) und (6), die in der vorliegenden Arbeit die Hauptrolle spielen, liegt darin, dass Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt sich in stärkerer Weise auf die *Dreieckswinkel* (oder die *Skalarprodukte* der durch die Seitenlinien definierten Vektoren) beziehen als die Punkte S', S und I. Daher überrascht es nicht, dass die obigen Ausdrücke für H und U unter Zuhilfenahme von

Winkelfunktionen etwas vereinfacht werden können. Die Analyse der Punkte S, S' und I kommt hingegen ganz ohne Verwendung von Winkelfunktionen aus (was im Unterricht manchmal ein Vorteil sein mag).

10 Anhang 2

Hier werden zwei Argumente gegeben, die die Übereinstimmung des Schwerpunkts S des *Eckensystems* mit jenem der *Dreiecksfläche* zeigen.

Das „physikalische" Argument geht aus vom Verhalten eines starren Körpers im Schwerefeld: Wird versucht, eine Dreiecksfläche (etwa ein dreieckig zugeschnittenes Stück Pappe) entlang einer Schwerlinie (d.h. entlang der Verbindungsstrecke eines Eckpunkts mit dem gegenüberliegenden Seitenhalbierungspunkt) zu balancieren, so trägt jedes Massenelement der Fläche ein *Drehmoment* bei, dessen Betrag gleich dem Produkt aus seinem Normalabstand zur Schwerlinie und seiner Masse ist. Ein (wenngleich unstabiles) Gleichgewicht, d.h. ein tatsächliches Balancieren, liegt vor, wenn die Summe der Drehmomente von allen Punkten auf *einer* Seite der Schwerlinie gleich jener von allen Punkten auf der *anderen* Seite der Schwerlinie ist, d.h. wenn die Drehmomente der beiden Dreieckshälften einander aufheben. Eine Verschiebung der Lage eines der Eckpunkte, die nicht auf der gewählten Schwerlinie liegen, entlang einer zur Schwerlinie parallelen Geraden – wie in Abbildung 3 gezeigt – kann als bloße *Verschiebung von Massenelementen* gedeutet werden, die den Normalabstand jedes Massenpunkts zur Schwerlinie und daher das Drehmoment nicht ändert.

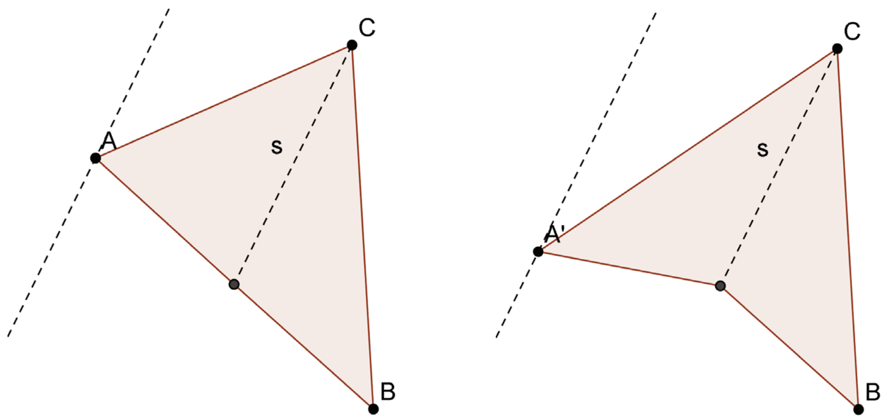

Abbildung 3

Da die Dreiecksfläche mit Hilfe einer solchen Verschiebung in eine bezüglich der Schwerlinie symmetrische Gestalt gebracht werden kann, heben die Drehmomente einander auf. Daher sind die Schwerlinien des Dreiecks tatsächlich Linien, entlang derer die Dreiecksfläche balanciert werden kann. Da der Schwerpunkt der Dreiecksfläche auf *jeder* solchen Linie liegt und die drei Schwerlinien einander im Punkt S schneiden, fallen beide Punkte zusammen.

Eine andere Begründung beruht auf der Regel (3). Dazu wird die Dreiecksfläche in dünne, zu einer Seitenlinie parallele Streifen zerlegt. Der Massenmittelpunkt jedes Streifens liegt (näherungsweise) auf einer Schwerlinie – siehe Abbildung 4 – und zwar umso präziser, je dünner der Streifen ist. Nach Regel (3) kann daher jeder Streifen auf einen Punkt der Schwerlinie konzentriert werden, ohne den Schwerpunkt der gesamten Dreiecksfläche zu ändern.

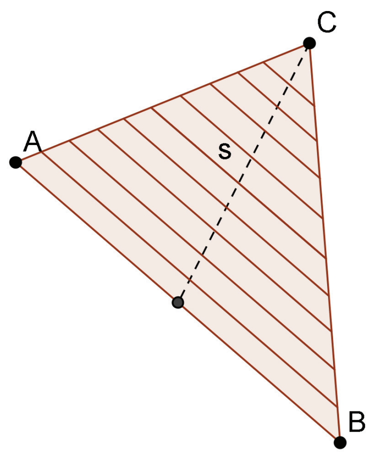

Abbildung 4

Letzterer liegt daher *auf der* (und damit *auf jeder*) Schwerlinie, muss also mit S, dem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Schwerlinien, zusammenfallen.

Genau genommen beruhen diese beiden Argumentationen auf zwei mathematisch äquivalenten, aber von der Idee her unterschiedlichen Schwerpunktsbegriffen. (Der erste benutzt das Verhalten von Körpern unter der Einwirkung der Schwerkraft, der zweite lässt sich eher von allgemeinen Symmetrieüberlegungen leiten).

11 Anhang 3

In einem n-Eck mit $n \geq 4$ fällt der Schwerpunkt des Eckensystems nicht notwendigerweise mit dem Schwerpunkt der n-Eckfläche zusammen (vgl. Seebach [2], Lambert und Peters [3] und Shilgalis and Benson [4]). Um das einzusehen, genügt es, als extremen Spezialfall ein Viereck $ABCD$ zu betrachten, in dem die Eckpunkte A und D sehr nahe benachbart sind, d.h. das vom Aussehen her ungefähr dem Dreieck ABC gleicht. Der Schwerpunkt der Vierecksfläche $ABCD$ ist daher (ungefähr) gleich dem Schwerpunkt der Dreiecksfläche ABC. Der Schwerpunkt des Eckensystems entspricht (ungefähr) dem Massenmittelpunkt eines Systems aus den drei Massenpunkten A, B und C, wobei aber die dem Punkt A zugeordnete Masse doppelt so groß ist als die anderen! Im Grenzfall $D = A$ ist der Schwerpunkt der Fläche durch (1) gegeben, jener des Eckensystems durch

$$\frac{1}{4}\left(2A+B+C\right), \qquad \text{(A3.1)}$$

was *nicht* mit (1) übereinstimmt.

12 Anhang 4

Dieser Anhang ist einer rechnerischen Plausibilitätsüberlegung für Regel (3) gewidmet: „Wird in einem System aus Massenpunkten die Masse eines *Teilsystems* in dessen Massenmittelpunkt konzentriert, so ändert sich der Massenmittelpunkt des *Gesamtsystems* dadurch nicht“.

Dazu betrachten wir ein System aus endlich vielen Massenpunkten. Sein Massenmittelpunkt ist durch

$$\frac{m_A\ A + m_B\ B + m_C\ C + m_D\ D + \ldots}{m_A + m_B + m_C + m_D + \ldots} \tag{A4.1}$$

gegeben. Nun wird die Masse $m_{AB} = m_A + m_B$ des aus den Punkten A und B bestehenden Teilsystems in dessen Massenmittelpunkt

$$S_{AB} = \frac{m_A\ A + m_B\ B}{m_{AB}} \tag{A4.2}$$

konzentriert, womit sich der Massenmittelpunkt dieses neuen Systems zu

$$\frac{m_{AB}\ S_{AB} + m_C\ C + m_D\ D + \ldots}{m_{AB} + m_C + m_D + \ldots} \tag{A4.3}$$

ergibt. Schon ein Blick auf (A4.1) und (A4.3) – und ein Seitenblick auf (A4.2) – zeigt, dass diese beiden Ausdrücke identisch sind. In völlig analoger Weise kann auch ein größeres Teilsystem in seinen Massenmittelpunkt konzentriert werden, ohne dass sich dabei der Massenmittelpunkt des Gesamtsystems ändert. Mit diesem Argument bleibt man zwar auf den Fall einer *endlichen* Zahl von Massenpunkten beschränkt, aber intuitiv mag es einleuchten, dass Regel (3) auch für *kontinuierliche* Massenverteilungen (die durch diskrete beliebig genau approximiert werden können) gilt.

Der vollständige Beweis, also unter Einschluss kontinuierlicher Massenverteilungen, erfordert Methoden der Integralrechnung (wie ja auch der Massenmittelpunkt eines kontinuierlichen Systems genau genommen als Integral definiert ist).

13 Anhang 5

Die allgemeine Formel (6) für die Lage des Inkreismittelpunkts kann mit Standardmethoden der Vektorrechnung hergeleitet werden. Um den Punkt I rechnerisch zu finden, genügt es, zwei Winkelsymmetralen (Innenwinkelhalbierende) zu schneiden. Die Winkelsymmetralen durch die Punkte A und B sind in Parameterdarstellung durch

$$X_A(t) = A + t\left(\frac{C-A}{b} + \frac{B-A}{c}\right) \tag{A5.1}$$

und

$$X_B(s) = B + s\left(\frac{A-B}{c} + \frac{C-B}{a}\right) \tag{A5.2}$$

gegeben. Ihr Schnittpunkt erfüllt $X_A(t) - X_B(s) = 0$. Diese Aussage ist ein Gleichungssystem, das nach den Parameterwerten t und s gelöst werden muss. Der Vektor

$$X_A(t) - X_B(s) = \left(1 - \frac{s}{c} - \frac{t}{b} - \frac{t}{c}\right)A + \left(-1 + \frac{s}{a} + \frac{s}{c} + \frac{t}{c}\right)B + \left(\frac{t}{b} - \frac{s}{a}\right)C \tag{A5.3}$$

kann nur dann gleich dem Nullvektor sein, wenn alle drei auftretenden Koeffizienten verschwinden[16], was unmittelbar auf die Lösung

$$t = \frac{b\,c}{a+b+c} \quad \text{und} \quad s = \frac{a\,c}{a+b+c} \tag{A5.4}$$

und, in $X_A(t)$ oder $X_B(s)$ eingesetzt, auf (6) führt.

Literatur

[1] Baptist, Peter (1992), *Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie*. Bibliographisches Institut - Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich.

[2] Seebach, Karl (1983), *Über Schwerpunkte von Dreiecken, Vierecken und Tetraedern*. In: Didaktik der Mathematik 11, 4, S. 270 – 282.

[3] Lambert, Anselm und Peters, Uwe (2004), *Mittelwerte und Mitten in Geometrie und Physik*. In: Der Mathematikunterricht 50, 5, S. 30 – 41.

[4] Shilgalis, Thomas W. and Benson, Carol T. (2001), *Centroid of a Polygon – Three Views*. In: Mathematics Teacher 94, 4, S. 302 – 307.

[16] Tatsächlich genügt es, wenn zwei der Koeffizienten 0 sind (es könnte beispielsweise durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems $A=0$ erzielt werden); der dritte Koeffizient verschwindet dann automatisch.