Дифференциальная геометрия 2 курс

А.В. ЧЕРНАВСКИЙ

25 мая 2012 г.

ГЛАВА 1. Введение. (*Напоминания известного материала*)

ГЛАВА 2. Кривые

ГЛАВА 3. Длина кривой. Кривизна

ГЛАВА 4. Теория Френе

ГЛАВА 9. Деривационные уравнения и теорема Гаусса

ГЛАВА 10. Параллельный перенос и геодезические

ГЛАВА 11. Вращение векторного поля вдоль кривой и теорема Гаусса – Бонне

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ. (*Напоминания известного материала*)

1.1 Напоминания из линейной алгебры. Плоскости = линейные многообразия

Пространство $\mathbb{R}^n$. В линейной алгебре рассматривались конечномерные вещественные или комплексные линейные (векторные) пространства и линейные отображения между ними. Такие пространства одной размерности над одним полем изоморфны. Поэтому мы можем для начала пользоваться в каждой размерности одним стандартным пространством, которое будем обозначать $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, соответственно в вещественном или комплексном случае. (Размерность линейного пространства это число элементов любого базиса.)

Матрица линейного отображения. Пусть $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *линейное отображение* (т.е. сохраняющее векторные операции). Фиксируем в обоих пространствах базисные реперы: $\mathbf{e}_i$ в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbf{f}_i$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда отображение L запишется системой линейных уравнений:

$$y^i = a^i_j x^j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le k, \quad \text{причем} \quad L\mathbf{e}_j = a^i_j \mathbf{f}_i. \qquad (*)$$

(Мы воспользовались общепринятым соглашением: если в одночлене индекс встречается ровно два раза, один раз вверху, а другой – внизу, то это предполагает суммирование таких одночленов для всех значений индекса, опуская знак суммы. Например, a^i_i есть след матрицы.)

Матрица коэффициентов $(L) = (a^i_j)$ (i – номер строки, j – номер столбца) служит при фиксированных базисах представителем отображения L, а при замене переменных с матрицей $B = (b^j_{j'})$ в прообразе и с матрицей $C = (c^{i'}_i)$ в образе, $Bx' = x$, $y' = Cy$, она заменяется на $(L)' = C(L)B^{-1} = (c^{i'}_i a^i_j b^j_{j'})$: $y^{i'} = c^{i'}_i a^i_j b^j_{j'} x^{j'}$.

Образ и ядро линейного отображения. Вместе с каждым линейным отображением $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ определено два подпространства: в $\mathbb{R}^n$ определен *образ* $im\, L = L(\mathbb{R}^k)$, а в $\mathbb{R}^k$ – *ядро* $ker\, L = L^{-1}(0)$.

Аффинное пространство. Линейному пространству отвечает "точечное множество": каждому вектору ставится в соответствие точка, для которой он служит *радиус-вектором.* Это множество называется *аффинным пространством.* В нем не определены векторные операции, но операции в исходном векторном пространстве определяют в аффином пространстве различные геометрические структуры.

Операция прибавления вектора $\mathbf{v}$ ($\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}+\mathbf{v}$) порождает в аффинном пространстве взаимно однозначное отображение на себя, которое называется *параллельным сдвигом или переносом.* С помощью параллельного переноса векторные операции исходного пространства переносятся в каждую точку аффинного пространства, т.е. каждая точка A аффинного пространства становится *начальной точкой* ("началом") нового векторного пространства V_A. При этом устанавливается естественные изоморфизмы между всеми этими пространствами. (Естественность означает, что композиция двух таких изоморфизмов является также изоморфизмом, устанавливаемым параллельным переносом.) Начало исходного пространства будет обозначаться $\mathbb{O}$. $V_{\mathbb{O}}$ отождествим с исходным пространством $\mathbb{R}^n$.

Вектор в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ это элемент одного из пространств V_A и на него можно смотреть как на стрелку, имеющую начало и конец, направление и длину.

Стандартное "пифагорово" расстояние между точками $\mathbb{R}^n$ согласовано с каноническим скалярным произведением в векторных пространствах V_A. Мы обозначаем это скалярное произведение угловыми скобками. В канонических координатах: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} v^i_1 v^i_2$.

k-репéр – это система из k независимых векторов, приложенных к некоторой точке аффинного пространства. Если $k = n$ (размерность пространства), то пишется просто *репер.*

Если перенести параллельно из $\mathbb{O}$ в A векторы базисного репера и еще вектор $\mathbf{v}$, то координаты перенесенного вектора в перенесенном репере будут те же, что координаты $\mathbf{v}$ в исходном репере.

Плоскости. Основные геометрические объекты аффинного пространства – это *плоскости.* Они определяются с помощью векторных операций тремя различными способами.

Параметрическое задание плоскости. Однородные уравнения (*) определяют в пространстве $\mathbb{R}^n$ подпространство $P_L = im(L)$ размерности k, если матрица (L) *невырождена* (т.е. имеет максимальный ранг) и $k \le n$. Геометрически это плоскость, которая проходит через начало O.

Если в правой части каждого уравнения системы добавить по константе b^i, то образом будет служить новая плоскость $P_{L,\mathbf{b}}$, полученная из прежней параллельным сдвигом на вектор $\mathbf{b}$ с координатами b^i. Полученное отображение $\mathbf{y} = L\mathbf{x} + \mathbf{b}$ является *параметризацией* плоскости с областью параметров $\mathbb{R}^k$: параметрами, определяющими точку $\mathbf{y}$ плоскости $P_{L,\mathbf{b}}$ являются коодинаты ее прообраза $\mathbf{x}$.

Неявное задание плоскости. С другой стороны ядро L (множество решений системы (*) при нулевых y^i) – это плоскость $Q_L = kerL$ в $\mathbb{R}^k$, проходящая через начало. Ее размерность (т.е. размерность соответствующего векторного подпространства) равна $k - n$, если матрица системы невырождена и $k \geq n$. Если брать прообразы не только начала, а всех точек $\mathbb{R}^n$, то непустые прообразы будут (по теореме Кронекера – Капелли) параллельными плоскостями одной размерности, получаясь друг из друга параллельными сдвигами.

В случае невырожденной матрицы, если $k \geq n$, то $im(L) = \mathbb{R}^n$, а если $k \leq n$, то $ker(L) = 0$. Во всех случаях ранг матрицы равен размерности $im(L)$.

Эти хорошо известные факты линейной алгебры дают нам два способа задания геометрических объектов – плоскостей.

В первом случае мы говорим, что плоскость задана *параметрически* (параметрами точек плоскости служат координаты x^i точек в $\mathbb{R}^k$). Во втором – плоскость задана *неявно* (как прообраз точки из $\mathbb{R}^n$).

Контрольный вопрос. Как для неявно заданной плоскости получить ее параметрическое задание и, наоборот, по параметрическому получить неявное задание?

Случай графика. В первом случае полезно выделить вариант, когда $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^{n-k}$ служат дополнительными координатными плоскостями в $\mathbb{R}^n$, а $im(L)$ – графиком линейного отображения $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n-k}$.

Точнее: пусть в репере $\mathbf{f}_i$ в $\mathbb{R}^n$ первые k векторов совпадают с репером $\mathbf{e}_i$ в $\mathbb{R}^k$. Тогда наше отображение имеет вид системы

$$\begin{array}{lcll} y^i & = & x^i & \text{для} \quad 1 \leq i \leq k \\ y^i & = & a^i_j x^j + b^i & \text{для} \quad k+1 \leq i \leq n. \end{array}$$

Вторая строчка задает линейное отображение $l : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$, матрицей которого служит "существенная" часть (a^i_j), $k+1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$ матрицы всей линейной системы. Отображение $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, задаваемое всей системой, можно записать в виде $x \mapsto (x, l(x))$. Образ $L(\mathbb{R}^k)$ этого отображения будет графиком отображения l. Матрица (L) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ (a^i_j) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E}$ единичная $k \times k$-матрица. Очевидно, L невырождена независимо от (a^i_j). Это отображение задает параметризацию графика.

(В случае $n = 2$, $k = 1$ это график линейного отображения $y = kx + b$ прямой Ox в прямую Oy.)

Контрольные вопросы. Как построить базисы в пространствах $im\,L$ и $ker\,L$ для данного линейного отображения L?

В каких случаях композиция линейных отображений максимального ранга имеет максимальный ранг? [Если оба отображения мономорфизмы (ядра нулевые) или оба эпиморфизмы (отображения на весь образ), это, очевидно, верно. Какие могут быть случаи, если одно отображение мономорфизм, а другой эпиморфизм?]

1.2 Топологические свойства подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Теперь вспомним топологические свойства. Мы в одной из последующих глав подробнее поговорим об абстрактных топологических пространствах и их свойствах, знать которые нужно в разных вопросах дифференциальной геометрии. Но вначале скажем о подмножествах $\mathbb{R}^n$.

Открытые подмножества. Напомним, что *ε-окрестностью* $O_\varepsilon(x)$ точки x называется шар (с исключенной границей) с центром в x и радиуса ε.

Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ *открыто*, если каждая точка $x \in U$ лежит в U со своей ε-окрестностью $O_\varepsilon(x)$ для некоторого ε, т.е. $\forall x \, \exists \varepsilon > 0$ так, что $O_\varepsilon(x) \subset U$. Открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ называются также *областями* и *окрестностями* содержащихся в них точек и множеств.

Подмножество B множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым в* A (и также открытым *относительно* A), если оно есть пересечение с A какого-нибудь открытого подмножества $\mathbb{R}^n$, т.е. $\exists U$, открытое в $\mathbb{R}^n$, так, что $B = U \bigcap A$. Хорошо известно (и вполне очевидно), что пересечение конечного числа открытых множеств и объединение любого их числа открыто.

Дополнения к открытым множествам называются *замкнутыми*, они обладают двойственными свойствами (т.е. конечные объединения и любые пересечения замкнутых множеств замкнуты). Они характеризуются тем, что содержат все свои *предельные точки.*

(Так как $\mathbb{R}^n$, очевидно, открыто и замкнуто, его дополнение – пустое множество $\emptyset$ – также считается замкнутым и открытым.)

Непрерывность отображения $f : X \to Y$ (в смысле "ε-δ определения") эквивалентна условию: прообраз любого открытого подмножества Y открыт в X (или: прообраз любого закнутого замкнут).

Важным примером является *гомеоморфизм*: непрерывное отображение, для которого существует непрерывное обратное отображение. (Отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ взаимно обратны, если композиции fg и gf являются тождественными отображениями $\mathbf{1}_X$ и $\mathbf{1}_Y$ соответственно.)

Подмножества X и Y в этом случае называются *гомеоморфными.* Ясно, что гомеоморфность есть отношение эквивалентности. Заметьте, что гомеоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие между системами открытых подмножеств образа и прообраза, с сохранением операций пересечения и объединения.

Задача. Представим $\mathbb{R}^n$ как прямое произведение двух координатных пространств $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, и пусть $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ отображение области $U \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n-k}$. Покажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда график f гомеоморфно проектируется на U.

Свойства, которые одновременно выполняются для всех гомеоморфных между собой пространств, называются *топологическими.*

Два особенно важных топологических свойства – связность и компактность.

Связность. Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ связно, если его нельзя разбить на два открытых подмножества.

(Мы говорим вообще, что множество X *разбито* на свои подмножества A_α, если эти подмножества непусты, не пересекаются попарно и их объединение есть X.)

Оказывается, связность сохраняется не только при гомеоморфизме, но при любом непрерывном (сюръективном) отображении $f : X \to Y$: если Y разбито на два открытых подмножества, то их полные прообразы дадут разбиение X.

На прямой связными являются *интервалы* – подмножества, состоящие из всех точек между двумя a и b, причем сами эти концевые точки могут принадлежать и могут не принадлежать подмножеству, могут быть бесконечными ($+$ или $-$), могут совпасть. Соответственно, мы получаем отрезки, (конечные) интервалы и полуинтервалы, лучи (вправо и влево, с концом и без него), всю прямую и точки – всего 10 типов (к которым можно прижелании присоединить пустое множество).

На плоскости и вообще в $\mathbb{R}^n$ связные подмножества могут быть гораздо сложнее. Но можно охарактеризовать открытые связные подмножества: *открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ связно, если и только если любые две его точки можно соединить (связной) ломаной, лежащей в U.*

Параллельно рассматривают другое важное свойство, которое естественно напрашивается для характеризации связности.

Подмножество X называется *линейно связным*, если для любых его двух точек x и y существует непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в X, при котором 0 отображается в x, а 1 в y.

(Непрерывное отображение отрезка в X называется *путем*, соединяющим образы его концов.)

Очевидно, в силу связности отрезка, линейно связное подмножество является связным. Однако классический *пример* графика $\sin \frac{1}{x}$ с присоединенным вертикальным отрезком $[-1, 1]$ оси ординат показывает, что связное подмножество не обязательно линейно связно.

Компактность. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ *компактно* (иначе: является *компактом*), если из всякого открытого покрытия X можно выделить конечное покрытие.

(Покрытием множества X называется система подмножеств, объединение которых содержит X. Если говорится «открытое покрытие», «ε-покрытие» и т. п. , имеется в виду, что каждый элемент этой системы является соответственно открытым, имеет диаметр меньше ε и т.д.) В нашем случае, очевидно, не имеет значения, берем ли мы множества открытые в $\mathbb{R}^n$ или открытые относительно X.

Компактность, как и связность, сохраняется при непрерывном отображении $f : X \to Y$: берем полные прообразы элементов данного покрытия Y, выбираем из них конечное покрытие X и образы отобранных элементов дадут требуемое подпокрытие в Y.

Даже на прямой компактные множества очень разнообразны. Например, к ним принадлежит знаменитое *канторово множество.* Из интервалов компактны только отрезки (и точки).

Задача. Построить гомеоморфизм канторова множества, меняющий местами две данные его точки (например, конец выкинутого отрезка и двусторонне предельную точку)

Компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ характеризуются выполнением двух свойств: ограниченности и замкнутости.

(В бесконечномерных функциональных пространствах и в метрических пространствах компатные подмножества обладают этими свойствами, но не характеризуются ими: например, замкнутый единичный шар может быть не компактен.)

Из инвариантности связности и компактности относительно непрерывных отображений вытекают классические теоремы Больцано и Вейерштрасса. Первая следует из того, что в силу инвариантности связности непрерывный образ интервала есть интервал. Вторая из того, что непрерывный образ отрезка есть компактный интервал, т.е. отрезок.

1.3 Гладкие отображения.

Линеаризация. Дифференциал и матрица Якоби. Напомним прежде всего, что отображение $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемым в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^k$, если оно *линеаризуемо*, т.е. имеется линейное отображение $dF : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ такое, что $F(x) = F(x_0) + dF(x - x_0) + \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ – бесконечно малая при стремлении $x \to x_0$ более высокого порядка, чем $|x - x_0|$, т.е. $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{|x - x_0|} = 0$.

Отображение $F(x_0) + dF(x - x_0)$ называется линеаризацией $F(x)$. Например, $y = x$ есть линеаризация $\sin x$ в нуле.

Из курса анализа известно, что отображение дифференцируемо в данной области, если и только если все его первые частные производные существуют и непрерывны в точках этой области.

Линейное отображение dF называется *дифференциалом* F; при фиксированных координатных системах в образе и прообразе ему сопоставляется матрица – *матрица Яко́би* – элементами которой служат частные производные $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$. (В строке этой матрицы стоят производные одной координаты образа по координатам прообраза.) Матрица Якоби отображения F будет обычно обозначаться (J_F). В случае $k = n$ матрица Якоби имеет детерминант, который называется *якобианом* и обозначается J_F.

Замечание. При линейной замене в образе или в прообразе матрица Якоби умножится на невырожденную матрицу линейного преобразования или ее обратную. Ранг ее не изменится. В частности, сохранится свойство отображения быть *невырожденным* в данной точке, т.е. иметь матрицу Якоби максимального ранга. $\square$

Контрольные вопросы. Чему равна матрица Якоби линейного отображения?

Показать, что линейной заменой координат в окрестности точки можно привести матрицу Якоби в данной точке к простейшему виду: в левом верхнем углу единичная $r \times r$-матрица, а остальные элементы нули, где r – ранг матрицы.

Цепное правило. Теорема о производной сложной функции $f(g(x))$ в курсе многомерного анализа приняла форму теоремы о дифференциале композиции или "цепного правила": *дифференциал композиции равен композиции дифференциалов*, т.е. если отображение H равно композиции GF, то $dH = dG\, dF$ – справа композиция линейных отображений. В матричной форме $(J_H) = (J_G)(J_F)$, справа матричное умножение.

Мы предполагаем здесь, что областью определения каждого из рассматриваемых отображений служит открытое подмножество соответствующего линейного пространства. (Скажем, $G : V \to W$, $F : U \to V$, где U открыто в $\mathbb{R}^k$, V в $\mathbb{R}^l$ и W в $\mathbb{R}^m$, $GF : U \to W$.)

Если существуют и непрерывны все производные до порядка k, то говорят, что отображение имеет *класс гладкости* k. Если существуют все производные всех порядков, говорят, что отображение имеет бесконечный класс гладкости.

Обычно считают, что отображение принадлежит тому классу гладкости, который нужен по задаче, т.е. в зависимости от того, производные какого порядка встречаются в данных рассуждениях.

Если мы говорим, что дано гладкое отображение, это и будет значит, что оно имеет нужный класс гладкости. В важных случаях мы его укажем.

Формулировка теоремы о неявной функции:

Пусть дано отображение $F : U \to \mathbb{R}^n$, где U – открытое подмножество $\mathbb{R}^k$, с непрерывной матрицей Якоби (т.е. с непрерывными первыми частными производными) причем $k \geq n$ и ранг матрицы Якоби в некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in U$ максимален (т.е. равен n). Пусть $F(\mathbf{x}^0) = \boldsymbol{y}^0$.

Тогда пересечение $F^{-1}(\boldsymbol{y}^0)$ с некоторой окрестностью точки $\mathbf{x}^0$ есть график непрерывно дифференцируемого отображения открытого подмножества координатной (k-n)-мерной плоскости в дополнительную n-мерную координатную плоскость.

(Практически сначала по ненулевому минору матрицы Якоби в прообразе находится n-мерная координатная плоскость, а затем дополнительная к ней $(k-n)$-мерная.)

Эта формулировка подчеркивает, что при некоторых условиях (невырожденности матрицы Якоби) множество, заданное как прообраз точки, оказывается графиком (состоит из точек вида $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$). Это обобщает описанную выше ситуацию линейной алгебры. Мы покажем позже, что эта теорема позволяет на самом деле свести общий случай к линейному "с точностью до нелинейной замены координат".

Замечание. Мы часто будем для краткости заменять последовательность координат одной буквой, например, писать $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вместо $F(x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^s)$. Ясно, что здесь $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – проекции точки из $\mathbb{R}^{r+s}$ на координатные плоскости $\mathbb{R}^r$ и $\mathbb{R}^s$.

Важным спутником теоремы о неявном отображении является теорема об обратном отображении (на самом деле эти теоремы эквивалентны).

Теорема об обратном отображении. *Пусть дано непрерывно дифференцируемое отображение* $f_i(x_1, \ldots, x_m) = y_i, 1 \le i \le m$, *заданное в окрестности* $U \subset \mathbb{R}^m$ *точки* $\mathbf{x}^0$, *с ненулевым якобианом в этой точке.*

Тогда в некоторой окрестности $V \subset \mathbb{R}^m$ *точки* $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0)$ *определено такое гладкое отображение* $g_i(y_1, \ldots, y_m) = x_i$, *что*

$$f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \text{для } \mathbf{y} \in V \quad \text{и} \quad g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{для } \mathbf{x} \in g(V),$$

причем $g(\mathbf{y}^0) = \mathbf{x}^0$ *и матрица Якоби* g *в точке* $\mathbf{y}^0$ *обратна к матрице Якоби* f *в точке* $\mathbf{x}^0$ *и* $g(V) \subset U$ *есть окрестность точки* $\mathbf{x}$.

Следствие. Образ открытого подмножества аффинного пространства при невырожденном во всех точках отображении его в аффинное пространство той же размерности является открытым подмножеством ("принцип сохранения области"). □

Заметим, что f взаимно однозначно отображает $g(V)$ на V

Теорема об обратном отображении утверждает, что отображение открытого подмножества аффинного пространства в это же пространство (или другое равной размерности) будет *диффеоморфизмом* в достаточно малой окрестности точки, если в этой точке якобиан отличен от нуля.

Определение. *Диффеоморфизмом* области $\mathbb{R}^n$ называется *обратимое отображение этой области на другую область, возможно, в другом аффинном пространстве, непрерывно дифференцируемое в обе стороны.* (Размерность второго пространства также n, т.к. дифференциалы взаимно обратны.)

Это понятие в дифференциальной геометрии имеет фундаментальное значение: все дифференциальные свойства одной области остаются справедливыми и для другой диффеоморфной ей области. Оно будет дальше распространено на многомерные поверхности в аффинных пространствах.

Значение этого понятия в применении к областям $\mathbb{R}^n$ в том, что с его помощью вводятся общие нелинейные системы координат. Диффеоморфизм автоматически является невырожденным отображением, т.к. композиция прямого и обратного отображения имеет единичную матрицу Якоби и, значит, определители матриц Якоби обоих этих отображений взаимнообратны и ненулевые.

Отображения с максимальным рангом матрицы Якоби называются *регулярными* или *невырожденными.* Мы будем употреблять оба эти термина.

1.4 Векторные функции.

Чаще всего встречаются два крайних случая дифференцируемых отображений конечномерных аффинных пространств: отображения $\mathbb{R}^n$ в прямую, т.е. *функции* n переменных, и отображения прямой (или ее интервалов) в $\mathbb{R}^n$, т.е. *векторные функции* числового аргумента.

Сейчас мы займемся вторым случаем. Мы считаем известными из курса математического анализа в применении к этому случаю понятия предела, непрерывности и дифференцируемости и соответствующие свойства векторных функций.

Важно не забывать о различии между векторной функцией числового аргумента и множеством ее значений – т.е. *кривой,* которую она определяет. Эту кривую называют *годографом* векторной функции, а саму функцию – *параметризацией* кривой. Аргумент функции в таком случае называется параметром этой параметризации или *параметром на кривой.* Нас в первую очередь интересует именно кривая, а параметризация играет роль средства изучения, но часто выступает на первый план.

1). **Дифференцирование произведений**

Договоримся обозначать дифференцирование по произвольному параметру, как в механике – точкой над знаком функции (или несколькими точками для старших производных), а штрихи сохраним для обозначения в дальнейшем производной по специальному параметру – длине дуги годографа. Напомним вначале обычные свойства линейности дифференцирования:

– производная суммы равна сумме производных,
– постоянный множитель выносится за знак производной,
– производная постоянной векторной функции равна нулю,

Дифференцирование произведений. Далее нам следует упомянуть о поведении дифференцирования по отношению к различным умножениям – операциям, для которых справедливо *правило Лейбница*: чтобы получить производную произведения из k сомножителей, нужно по очереди заменить в нем один из сомножителей его производной и сложить получившиеся k произведений. Доказательства стандартны и мы здесь можем считать их хорошо известными.

– Если $f(t)$ – скалярная (числовая) функция, а $\mathbf{r}(t)$ – векторная, то

$$(f(t)\mathbf{r}(t))^{\cdot} = \dot{f}(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\dot{\mathbf{r}}(t).$$

Разложив для каждого значения параметра вектор $\mathbf{r}(t)$ по осям координат, получаем

Следствие: координаты производной векторной функции равны производным соответствующих координат самой функции.

– Если $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ – векторные функции с общей областью определения, то скалярное произведение $\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t)\rangle$ – скалярная функция, определенная там же. Тогда

$$\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t)\rangle^{\cdot} = \langle \dot{\mathbf{v}}(t), \mathbf{u}(t)\rangle + \langle \mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)\rangle.$$

В $\mathbb{R}^3$ имеется еще векторное умножение двух векторов и смешанное умножение трех векторов. Правило дифференцирования соответствующих произведений векторных функций также подчиняется закону Лейбница и мы не выписываем формул.

Контрольный вопрос. Покажите, что правила дифференцирования смешанного произведения и детерминанта согласованы.

Соответственно с этим мы можем в n-мерном пространстве определить "смешанное произведение" n векторов как определитель матрицы, столбцами которой являются данные векторы. Дифференцирование этого "смешанного произведения" определено правилом дифференцирования определителя и согласовано с правилом Лейбница.

[*Вывод правила дифференцирования определителя.* Правило Лейбница применим к каждому из $n!$ слагаемых определителя. Мы получим $n\cdot n!$ слагаемых, в каждом из которых ровно один сомножитель заменен на свою производную. Если собрать вместе слагаемые, в которых заменен на производную элемент первого столбца, то их сумма даст определитель, отличающийся от исходного заменой первого столбца на столбец из производных его элементов. Вся сумма распадется на n таких сумм, каждая из которых даст определитель, получающийся из данного заменой одного из столбцов на его производную. Таким образом, производная определителя, составленного из координат n векторов, т.е. их смешанного произведения, действительно получается по правилу Лейбница.]

Пример. *Матричные функции.*

Матрицу порядка $k \times l$ можно рассматривать как вектор в пространстве размерности kl, считая элементы матрицы ее координатами. Матричная функция от параметра t есть, следовательно, матрица, элементы которой являются функциями от t, и производная определяется как матричная функция, элементы которой являются производными от элементов данной матрицы.

Задача. Покажите, что дифференцирование матричного произведения подчиняется правилу Лейбница, т.е. что $(UV)^{\cdot} = U^{\cdot}V + UV^{\cdot}$. (Порядок существен!)

2) **Формула Тейлора**

Напомним для нашего случая, т.е. для векторной функции $\mathbf{r}(t)$ в предположении ее k-кратной непрерывной дифференцируемости, формулу Тейлора. Она, конечно, состоит из формул Тейлора для координатных (скалярных) функций, но ее можно записать и в векторной форме:

$$\mathbf{r}(t+h) = \mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)h + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{r}}(t)h^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{r}^{(n-1)}(t)h^{n-1} + R_n,$$

где остаточный член нельзя, вообще говоря, написать в стандартной форме $R_n = \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t')}{n!}h^n$, т.к. промежуточное значение аргумента t различно для производных разных координат. Поэтому остаточный член надо взять в форме $R_n = (\frac{\mathbf{r}^{(n)}(t)}{n!} + \boldsymbol{\alpha})h^n$. Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор, стремящийся к нулю вместе с h.

Особое значение имеет многочлен Тейлора первой степени, состоящий из свободного члена $\mathbf{r}(t)$ и дифференциала $d\mathbf{r}$. Это *линеаризация* – единственное (если существует) линейное отображение, отличающееся от $\mathbf{r}(t+h)$ на величину бесконечно малую более высокого порядка, чем h.

3) **Интеграл от векторной функции**

Интеграл от векторной функции, неопределенный и определенный, можно ввести покоординатно. Разумеется, оказывается, что операция неопределенного интегрирования обратна дифференцированию:

$$\frac{\partial \int \mathbf{r}(t)\;dt}{\partial t} = \mathbf{r}(t), \quad \int \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t}\;dt = \mathbf{r}(t) + \mathbf{const},$$

для определенного интеграла справедлива формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t}\;dt = \mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a),$$

и выполнены свойства линейности и обычные свойства интегралов.

4) **Векторные дифференциальные уравнения**

Система из k векторных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка r это k соотношений между некоторым числом m векторных функций от скалярного аргумента t, их производными по t до порядка r и независимым переменным t. Мы предполагаем, что значения векторных функций принадлежат одному и тому же аффинному пространству размерности n.

Мы встретимся только с линейными системами в нормальной форме, в которой старшие производные выражаются линейно через младшие и сами неизвестные функции. Такая система распадается на n тождественных скалярных систем (по одной для каждой координаты), которые отличаются только начальными данными.

Мы можем использовать стандартную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой в первую очередь относятся: теорема существования и единственности, теоремы о зависимости решения от начальных данных и от параметров и свойства линейных систем.

5) **Векторная функция с постоянной длиной вектора**

Из правила дифференцирования скалярного произведения вытекает

Лемма 1. Если длина вектора $\mathbf{r}(t)$ постоянна, то он ортогонален своей производной: $(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = 0$.

Упражнение. Докажите обратное.

[$\langle (l\boldsymbol{\tau})^{\cdot}, (l\boldsymbol{\tau})\rangle = \dot{l}l\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}\rangle + l^2\langle \dot{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\tau}\rangle = 0$. Т.к. $\langle \dot{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\tau}\rangle = 0$ и $\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}\rangle = 1$, то либо $\dot{l} = 0$, либо $l = 0$, т.е. $l = const$.]

Конец вектора постоянной длины с началом в $\mathbb{O}$ лежит все время на одной и той же сфере, сам он служит радиус-вектором точек на этой сфере. Производная ортогональна радиусу и, значит, является вектором касательным к сфере в обычном школьном смысле.

6) **Векторная функция, не обращающаяся в нуль, с постоянным направлением вектора**

Задача. Векторная функция, не обращающаяся в нуль, сохраняет направление (конец вектора все время лежит на одной и той же прямой, проходящей через $\mathbb{O}$), если и только если она коллинеарна своей производной: $\mathbf{r}(t) = a(t)\dot{\mathbf{r}}(t)$ для скалярной функции $a(t)$.

[**Доказательство**. Пусть сохраняется направление. Представим функцию $\mathbf{r}(t)$ в виде $l(t)\boldsymbol{\tau}$, где l – длина, а $\boldsymbol{\tau}$ – орт. Тогда $\boldsymbol{\tau}$ постоянен, т.к. у него постоянны и направление и длина. В таком случае по правилу дифференцирования произведения получаем: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{l}(t)\boldsymbol{\tau}$, т.е. производная имеет тот же постоянный орт, что и сама функция. Значит, ее направление постоянно и совпадает с направлением $\mathbf{r}(t)$ и можно принять $a(t) = \frac{\dot{l}(t)}{l(t)}$. (Здесь условие необращения в нуль не имеет значения.)

Обратно, пусть $\dot{\mathbf{r}}(t) = a(t)\mathbf{r}(t) = a(t)r(t)\boldsymbol{\tau}(t)$, где $a(t)$ – скалярная функция, а r – длина $\mathbf{r}$. Имеем:

$$ar\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{r}}(t) = (r\boldsymbol{\tau})^{\cdot} = \dot{r}\boldsymbol{\tau} + r\dot{\boldsymbol{\tau}}.$$

Умножим это равенство на $\dot{\boldsymbol{\tau}}$. Т.к. производная орта ему ортогональна, в силу леммы 1, получим ($\mathbf{r}(t) \neq 0$), что $\dot{\boldsymbol{\tau}}^2 = 0$, т.е. $\dot{\boldsymbol{\tau}} = 0$: орт данной векторной функции постоянен и, значит, постоянно ее направление.

(Если $\dot{\mathbf{r}}(t)$ обращается в нуль, то после прохождения нулевого значения вектор может изменить направление.) □]

Наконец, рассмотрим более общий случай вектора, остающегося все время параллельным некоторой плоскости.

7) **Векторная функция с вектором параллельным неизменной плоскости**

Лемма 3. Если вектор $\mathbf{r}(t)$ и его первые $k-1$ производные линейно независимы для некоторого интервала переменной t, а k-ая производная линейно выражается черз них, то вектор остается параллельным постоянной плоскости P размерности k.

(Разумеется, если, обратно, вектор все время лежит в некоторой плоскости, то там же лежат и его производные.)

Доказательство проведем с помощью дифференциальных уравнений. Выразив k-ую производную линейно через предыдущие и саму функцию, мы получим векторное линейное дифференциальное уравнение k-ого порядка с переменными коэффициентами. Мы имеем одно и то же уравнение для каждой координаты. Эти уравнения будут иметь одну и ту же фундаментальную (скалярную) систему решений и будут различаться только начальными значениями. Поэтому решение нашего уравнения в общем виде записывается как линейная комбинация k постоянных векторов (начальные значения) со скалярными функциями (решения) в качестве коэффициентов. □

Физическая интерпретация. Движение материальной точки под действием центральной силы (планеты вокруг Солнца) происходит в постоянной плоскости, т.к. по закону Ньютона в этом случае ускорение пропорционально в каждый момент радиус-вектору.

(Можно также заметить, что $[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]^{\cdot} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + c[\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0 + 0.$)

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 2. Кривые

2.1 Кривые, параметризации

Векторные функции эквивалентны параметризациям кривых, служащих их годографами.

Определение. *Параметризация кривой* γ в $\mathbb{R}^n$ есть непрерывное отображение числового интервала в $\mathbb{R}^n$, образом которого является γ.

Это отображение не обязательно взаимно однозначно, хотя обычно допускаются самопересечения кривой лишь в отдельных точках. Мы будем в основном иметь дело с хорошими параметризациями, в частности, как правило, взаимно однозначными. Т.к. параметризация $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ определяет векторную функцию $\mathbf{r}(t)$ ($\mathbf{x}(t)$ – конец вектора $\mathbf{r}(t)$), мы можем говорить о дифференцируемой параметризации.

Производная вектор-функции, отвечающая данной параметризации, называется ее *вектором скорости.* (Координаты вектора скорости равны производным ее координат.)

Мы будем рассматривать различные параметризации одной и той же кривой, выбирая ту, которая наиболее удобна для данной задачи.

Отметим два особых случая: если кривая может быть представлена как график, т.е. ее проекция на какую-нибудь ось однозначна и производная по этой переменной не нулевая, то в качестве параметра часто бывает удобно взять именно эту проекцию, т.е. координату вдоль этой оси. Другой важный случай – параметризация посредством длины дуги. Мы рассмотрим его подробно дальше.

То, что параметризации предполагаются дифференцируемыми, не устраняет особенностей разного рода: самопересечений, изломов и проч. Даже предположение непрерывной дифференцируемости не устраняет появления угловых точек (в которых производная нулевая). Например, *астроида* имеет параметризацию $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$ и вблизи начала она имеет *остриё* (рис.1). Но основным случаем для нас будет *простая гладкая дуга.*

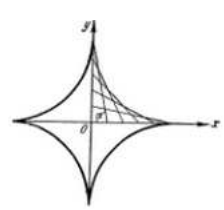


Рис. 1: астроида

2.2 Регулярные параметризации и гладкие кривые.

Определение. *Регулярная параметризация* это параметризация регулярным отображением, т.е. отображением с максимальным рангом матрицы Якоби. В нашем случак этот ранг равен 1, значит, в каждой точке производная хотя бы одной координаты должна быть отлична от нуля. Иначе говоря, при каждом значении параметра вектор скорости параметризации не нулевой.

Область определения параметризации может состоять из нескольких интервалов прямой, когда кривая состоит из нескольких компонент. Она может также иметь самопересечения.

Определение. *Простая гладкая дуга* это кривая, имеющая регулярную параметризацию интервалом числовой прямой, которая взаимно однозначна.

Определение. *Гладкой кривой* назовем кривую, которая имеет такую регулярную параметризацию, что в окрестности каждого значения параметра она является простой дугой.

(Она может иметь самопересечения, но образ малой окрестности каждого значения параметра не имеет самопересечения.)

Обратим внимание на то, что мы пользуемся термином "гладкая" не вполне законно: гладкая дуга – дуга, имеющая *регулярную* параметризацию, а не только гладкую. Гладкую (непрерывно дифференцируемую) параметризацию любого класса гладкости может иметь и кривая с углами.

Контрольный вопрос. Построить C^1-параметризацию границы квадрата.

2.3 Преобразования параметризаций гладкой кривой.

Предложение. *Если имеются две регулярные параметризации гладкой кривой в окрестности некоторой ее точки, то два параметра монотонно и дифференцируемо зависят друг от друга.* (Т.е. преобразование параметра в параметр задается диффеоморфизмом соответствующих интервалов прямой.)

Кроме того, малая окрестность каждой точки может служить графиком отображения интервала некоторой координатной оси в дополнительную $(n-1)$-мерную координатную плоскость.

Доказательство. В определении гладкой кривой мы имеем $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, и без ограничения общности можно считать, что $\dot{x}(t) \neq 0$. Значит, по теореме об обратной функции существует гладкая функция $\mathrm{t} = \mathrm{t}(\mathrm{x})$ с ненулевой производной. В таком случае абсциссу точки можно принять за параметр, и, в частности, $y = y(t(x))$ оказывается гладкой функцией от x, а кривая в окрестности данной точки *графиком этой функции.*

По определению гладкой кривой, $x = x(\tau)$ также гладкая функция, их композиция $t = t(x) = t(x(\tau))$ тоже будет гладкой функцией, т.е. t есть гладкая функция от τ. По симметричным соображениям $\tau = \tau(t)$ также будет гладкой. Т.к. эти два отображения взаимно обратны и оба непрерывно дифференцируемы, они являются взаимнообратными диффеоморфизмами. □

Заметим, что две регулярные параметризации $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(\tau)$ имеют в каждой точке коллинеарные векторы скорости, т.к. по теорме о сложной функции $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(\tau)\frac{d\tau}{dt}$ и $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$.

2.4 Три способа задания гладкой дуги.

Мы показали сейчас, в частности, что гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, определенная регулярной параметризацией $\mathbf{r}(t)$ представляется в окрестности каждой точки как график непрерывного отображения. Именно, одну из координат можно принять за регулярный параметр.

С другой стороны, теорема о неявной функции, как мы ее сформулировали выше (стр.12), утверждает, что прообраз точки при регулярном отображении области евклидова пространства в евклидово пространство меньшей размерности также есть график гладкого отображения области одной координатной плоскости в дополнительную координатную плоскость. В случае отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ прообраз точки будет одномерным Он будет графиком отображения интервала координатной прямой в дополнительную координатную плоскость и, в частности, он будет иметь регулярную параметризацию этим интервалом.

Мы приходим к такому утверждению:

Теорема. Следующие три способа задания гладкой дуги $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ эквивалентны:

1. Каждая точка $x \in \gamma$ имеет в дуге окрестность $U(x)$, которая представляется прообразом точки при регулярном отображении окрестности $V(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(U = \gamma \cap V)$ в пространство $\mathbb{R}^{n-1}$;

2. Каждая точка $x \in \gamma$ имеет в дуге окрестность $U(x)$, служащей образом регулярного отображения некоторого интервала числовой оси в пространство $\mathbb{R}^n$ (задающего регулярную параметризацию $U(x)$);

3. Каждая точка $x \in \gamma$ имеет в дуге окрестность $U(x)$, которая служит графиком отображения интервала некоторой координатной прямой в дополнительное $(n-1)$-мерное координатное пространство.

Доказательство. Мы уже показали, что каждое из свойств 1. и 2. влечет 3. Кроме того, если некоторая дуга кривой служит графиком гладкой функции $f(x)$ в интервале $a < x < b$, то отображение $x \mapsto (x, f(x))$ есть регулярное отображение в пространство $\mathbb{R}^n$ (производная x по x равна 1) и служит регулярной параметризацией кривой γ. Таким образом, 2. и 3. эквивалентны.

Осталось показать, что из 3. следует 1. Доказательство состоит в переносе всего в левую часть.

Именно, если γ является графиком гладкого (не обязательно регулярного) отображения $\mathbf{y} = F(t)$, где t пробегает интервал оси $\mathbb{O}t$, а $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$, то точки на графике являются решениями уравнения $\mathbf{y} - F(t) = 0$ (системы из $n-1$ уравнений с n переменными), причем в точках γ отображение $\mathbf{y} - F(t)$ (области n-мерного пространства в $n-1$-мерное) является регулярным. Действительно, производные по y_i дают единичный минор порядка $n-1 \times n-1$. $\square$

Задача. *Окрестность простой дуги.* Пусть простая дуга γ в $\mathbb{R}^2$ предствлена как график функции $f(x)$, где x пробегает интервал $I_1 = (a, b)$. Рассмотрим для интервала $I_2 = (-1, 1)$ графики функций $f(x) + c$, $c \in I_2$. Покажите, что эти графики не пересекаются, и их объединение есть открытая окрестность U графика $f(x)$. При этом каждая точка U однозначно определяется парой (c, x), т.е. мы имеем взаимно однозначное отображение прямого произведения $I_1 \times I_2$ на U. Покажите, что это есть диффеоморфизм.

Имеем отображение $(x, c) \mapsto (x, f(x) + c)$, с матрицей Якоби $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix}$.

Постройте такую же окрестность графика, исходя из двух других способов задания простой дуги.

Из этого построения следует, что простая дуга лежит на координатной линии ($c = 0$) некоторой локальной системы координат в плоскости, см. след. пункт. (То же имеет место и в $\mathbb{R}^n$.)

2.5 Диффеоморфизмы. Криволинейные координаты. Полярная, сферическая, цилиндрическая системы.

Локальные координаты. Пусть задан диффеоморфизм $h : U \to V$, где U и V – области в $\mathbb{R}^n$. Принимая стандартные координаты точки $x \in U$ в $\mathbb{R}^n$ за координаты точки $y = h(x)$, говорят, что в V введена (вообще говоря, нелинейная, если нелинейно h) *система координат.*

Определение. Образы координатных прямых и плоскостей и параллельных им называются *координатными линиями* и *координатными поверхностями* (соответствующих размерностей) данной криволинейной координатной системы в V.

Рассмотрим основные примеры на плоскости и в $\mathbb{R}^3$.

Полярная система. Самый известный пример нелинейной координатной системы – полярная система на плоскости. Здесь U есть открытая (т.е. без граничных точек) полуполоса ($x_1 > 0, 0 < x_2 < 2\pi$), а V – область на плоскости дополнительная к лучу оси абсцисс $x \geq 0$, диффеоморфизм задается отображением

$$y_1 = x_1 \cos x_2,\ \ y_2 = x_1 \sin x_2.$$

(Луч абсцисс можно заменить на любой другой луч из $\mathbb{O}$, взяв другой интервал для x_2.)

Задать взаимно однозначно координаты сразу во всей области $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{O}$ с помощью прямоугольной области U (произведение интервалов, может быть, бесконечных) нельзя потому, что она недиффеоморфна прямоугольнику – она *неодносвязна:* единичную окружность нельзя непрерывно продеформировать в точку, как это можно было бы сделать в такой области U. Мешает начало $\mathbb{O}$, которое не входит в эту область.

Формулы диффеоморфизма и его обратного в обычных обозначениях:

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2,\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Координатные линии в этой системе – это окружности с центром в $\mathbb{O}$ и лучи, выходящие из $\mathbb{O}$ (нужно вычесть точки одного луча).

Сферическая система. Имеются два аналога полярной системы координат в трехмерном пространстве – сферическая и цилиндрическая системы.

Сферическая система имеет значение для географии и астрономии и вообще для наблюдения мира из одной точки. Координатами в этой системе служат радиус – расстояние r от начала (например, центра Земли или глаза) и два угла: азимут φ и широта θ. Определение угловых координат ведется по отношению к декартовой системе. Угол φ совпадает с азимутом проекции точки на плоскость x, y, а угол θ отсчитывается в вертикальной (проходящей через точку и через ось z) плоскости от положительного направления оси z. Азимут меняется на всей числовой оси и имеет период 2π, θ меняется от 0 до π. Для точек на оси $\mathbb{O}z$ азимут не определен.

(Иногда отсчет θ ведут от экватора, т.е. плоскости xy, в этом случае говорят о "географических" координатах и "широта" θ меняется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а азимут называется "долготой".)

Эта система имеет законное право называться (нелинейной) системой координат лишь для областей, не содержащих точек на оси z, при этом область не должна полностью охватывать эту ось, т.к. иначе азимут не будет иметь определенного значения, оно изменяется на 2π при однократном обходе этой оси.

Формулы диффеоморфизма, задающего сферическую координатную систему, и его обратного:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},\ \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Сферическая система имеет многомерное обобщение, определение которого можно дать индуктивно. Добавление k-ой координтной оси добавляет новую угловую координату θ_{k-2}, причем предыдущие формулы умножаются на $\sin\theta_{k-2}$ и добавляется новая формула $x_k = r\cos\theta_{k-2}$.

Цилиндрическая система. Координатами точек в $\mathbb{R}^3$ в этой системе служат обе полярные координаты (ρ, φ) проекции точки на плоскость x, y и координата z декартовой системы. Заметим, что здесь ρ – расстояние до оси z, а не до начала.

Формулы координатного диффеоморфизма:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z.$$

Отметим, что все три примера нелинейных систем координат предполагают уже заданной декартову систему и, в частности, заданной *метрику*, измерение длин и углов.

Контрольный вопрос. Опишите координатные линии и поверхности построенных координатных систем.

[Для сферической системы кординатными кривыми являются лучи из начала (с исключенным началом), горизонтальные окружности с центром на вертикальной оси координат и вертикальные полуокружности. Координатные поверхности – сферы с центром $\mathbb{O}$, вертикальные полуплоскости и конусы с вершиной $\mathbb{O}$.

Заметьте, что эти поверхности пересекаются под прямыми углами.

Для цилиндрической системы координатные поверхности – цилиндры с осью $\mathbb{O}z$, вертикальные полуплоскости и горизонтальные плоскости, с исключенными точками на оси $\mathbb{O}z$.]

Якобиан системы. Нелинейная система координат определяется диффеоморфизмом одной области пространства $\mathbb{R}^n$ на другую. Важной локальной характеристикой диффеоморфизма является его якобиан. Это, как показывалось в курсе анализа, – коэффициент объемного растяжения в точке.

Как нетрудно подсчитать, якобиан для полярной системы равен ρ, для сферической — $r^2\sin\theta$ и для цилиндрической — ρ.

Введение нелинейных систем координат бывает полезно, чтобы упростить те или иные условия задачи. Например, если мы имеем уравнение $r(a\cos\varphi + b\sin\varphi) = c$, то график решения выглядит достаточно сложной кривой. Но применив переход от полярных коодинат к декартовым, мы получим обычное уравнение прямой.

Упражнение. Нарисуйте график этой кривой (в области задания полярных координат).

Замечание. *В конце предыдущего пункта мы показали, что всякая регулярная дуга (по крайней мере локально) может быть гладкой заменой координат переведена в интервал прямой линии.*

Локальные координаты вводятся, как известно, не только в аффинном пространстве, но и, например, на поверхностях, как, скажем, географические координаты областей на сфере (географические карты). Но мы пока еще не готовы ввести это понятие в нужной общности.

2.6 Касательная прямая и вектор скорости параметризованной кривой

Итак, мы рассматриваем кривые с непрерывно дифференцируемыми параметризациями. Из математического анализа хорошо известно понятие касательной прямой в данной точке кривой как предельного положения секущей. Нам, однако, потребуется аналитическое определение, приспособленное для гладких кривых (имеющих регулярную параметризацию).

Определение. *Касательная к гладкой кривой в точке* x_0 – это образ линеаризации регулярной параметризации $\mathbf{r}(t)$. (Более педантично: образ линейного отображения полученного линеаризацией).

Пусть $x_0 = \mathbf{r}(t_0)$. Напомним, что линеаризация это сумма $\mathbf{r}(t_0) + d\mathbf{r}(t)$, где дифференциал $d\mathbf{r}(t)$ – линейное отображение, определенное в точке t_0 с помощью матрицы Якоби (в нашем случае – столбца производных n координат: $(\frac{dx^i(t)}{dt}|_{t_0}) = (\dot{r}^i(t_0)))$.

В нашем случае хотя бы одна из этих производных отлична от нуля, значит, вектор $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$, и образом линеаризации служит прямая $r^i(t_0) + \dot{r}^i(t_0)(t - t_0)$ (вдоль прямой берется тот же параметр t).

Направляющим вектором касательной, как и всякой прямой, называется любой лежащий на ней вектор, отличный от нулевого. В частности, за координаты направляющего вектора можно взять координаты матрицы (столбца) Якоби $(\frac{dx^i}{dt})$ – *вектора скорости* параметризации кривой.

Предложение. *Касательная в данной точке кривой не зависит от параметризации.*

Доказательство. При переходе к другой регулярной параметризации $\mathbf{r}(t')$ все производные $\frac{dx^i}{dt}$ умножатся на одно и то же число – производную $\frac{dt}{dt'}$. Значит, новый направляющий вектор коллинеарен прежнему. $\square$

Предложение. *В случае гладких кривых данное определение касательной эквивалентно определению через предельное положение секущей.*

Доказательство следует из формулы конечных приращений:

$$\triangle\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}\triangle t + o(\triangle t).$$

Левая часть определяет секущую, а первое слагаемое справа – касательную. В пределе второе слагаемое исчезает. $\square$

Можно также определить касательную в данной точке $A = x_0 = x(t_0)$ на кривой $x(t)$ как прямую, проходящую через A и такую, что отклонение точки $x(t)$ на кривой от этой прямой является величиной второго порядка малости относительно $t - t_0$ при $t \to t_0$ (т.е. при стремлении точки на кривой к A):

Утверждение. *Расстояние от точек кривой до касательной является величиной 2-го порядка малости от* $\Delta t = t - t_0$. *Касательная прямая – это единственная прямая с таким свойством.*

Доказательство. Дана параметризованная кривая $\gamma = \mathbf{x}(t)$ и точка $A = \mathbf{x}(t_0)$. Возьмем любую прямую, проходящую через A, записанную в нормальной форме: $\langle \mathbf{n}, (\boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{r}(t_0))\rangle = 0$. Возьмем разложение Тейлора: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t - t_0) + \mathbf{R}$ ($\mathbf{v}$ – вектор скорости, $\mathbf{R}$ – остаточный член ряда Тейлора). Расстояние точки $\mathbf{r}(t)$ от взятой прямой есть $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)\rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{v}\Delta t + \mathbf{R}\rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{v}\rangle t + \langle \mathbf{n}, \mathbf{R}\rangle$

Очевидно, что для того, чтобы расстояние точки на кривой до прямой было величиной второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$ были ортогональны, т.е. чтобы прямая имела направление вектора скорости. $\square$

2.7 Касательная в особой точке.

Если все производные обращаются в нуль, определение с помощью дифференциала не применимо.

Упражнение. В этом случае допустим, что k – первое целое число такое, что все производные порядка меньшего, чем k, нулевые, но имеется производная порядка k отличная от нуля. Тогда в качестве направляющего вектора касательной служит вектор, координаты которого равны k-ым производным координат кривой в данной точке.

В этом случае разложение Тейлора имеет вид: $\triangle\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_0^k}{k!}(\triangle t)^k + \boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор, стремящийся к нулю быстрее, чем $(\triangle t)^k$. Тогда $\frac{\triangle\mathbf{r}}{(\triangle t)^k} \to \mathbf{r}_0^k$. Таким образом вектор, лежащий на секущей стремится к вектору $\mathbf{r}_0^k$, и, значит, вектор $\mathbf{r}_0^k$ является направляющим вектором касательной, в силу обычного определения касательной. $\square$

(Если же все производные равны нулю, то аналитический подход не срабатывает и приходится исследовать поведение кривой в этой точке геометрически.)

2.8 Касательные векторы и векторы скорости.

Любой вектор, лежащий на касательной к кривой, с началом в точке касания называется *касательным вектором* к кривой в этой точке.

Каждая дифференцируемая параметризация выделяет касательный вектор – $\dot{\mathbf{r}}$, который называется *вектором скорости этой параметризации.* Любой отличный от нуля касательный вектор служит вектором скорости для некоторой *регулярной* параметризации. Для этого нужно заменить данный параметр t на параметр ct для подходящей константы $c \neq 0$.

(Нулевой вектор также можно представить как вектор скорости некоторой параметризации, т.е. взаимно однозначного и дифференцируемого отображения интервала прямой на дугу кривой. Скажем, $y = x^3$ параметризует ось ординат и в нуле имеет нулевой вектор скорости. Но мы, как правило, будем рассматривать регулярные параметризации, с векторами скорости всюду отличными от нуля.)

Мы назвали вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$, направляющий для касательной и отвечающий данной параметризации $\mathbf{r}(t)$, вектором *скорости*, исходя из естественной аналогии: область изменения параметра можно принять за ось времени, расстояния в $\mathbb{R}^n$ определены стандартной "пифагоровой" формулой $\Sigma(x^i)^2$. В таком случае длина вектора $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ равна пределу отношения расстояния смещенной точки $\mathbf{r}(t)$ от точки $\mathbf{r}(t_0)$ к "затраченному времени" $t - t_0$, т.е. равна скорости.

2.9 Касательная в трех способах задания кривой

Мы определили касательную с помощью регулярной параметризации.

Вектор скорости есть, очевидно, образ единичного вектора при отображении, заданном дифференциалом параметризации.

Если рассматривать касательную как одномерное подпространство в векторном пространстве с началом в данной точке кривой, то получается, что

Утверждение 1. *Касательная есть образ $\mathbb{R}^1$ при линейном отображении, определенном дифференциалом; $dt \mapsto \dot{\mathbf{r}}_0 dt$.* □

Рассмотрим представление простой дуги с помощью неявного задания: $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ ($\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$), т.е. с помощью регулярной системы из $n-1$ уравнений от n переменных.

Утверждение 2. *Касательные векторы к кривой в точке $(\mathbf{x}_0)$ и только они принадлежат ядру дифференциала $dF|_{\mathbf{x}_0}$.*

Доказательство. Подставим вместо $\mathbf{x}$ в уравнение регулярную параметризацию нашей дуги $\mathbf{x}(t)$ и возьмем дифференциал (в соответствующей точке t_0) получившегося отображения $F(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{y}_0$ прямой в $\mathbb{R}^{n-1}$. Справа получится нуль, а слева по цепному правилу применение дифференциала отображения F к вектору скорости кривой. В результате мы получим, что вектор скорости и с ним вся касательная принадлежат ядру дифференциала. На самом деле получится все ядро, т.к. все решения получившейся линейной невырожденной системы пропорциональны (размерность ядра есть 1). □

Например, для уравнения $F(x, y) = 0$ касательная имеет линейное уравнение $F_x\,dx + F_y\,dy = 0$, где $(dx,\, dy) = (x - x_0,\, y - y_0)$ – векторы, лежащие на касательной.

Контрольный вопрос. Из получившегося уравнения для дифференциала видно, что вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}(t)$ любой регулярной параметризации в каждой точке кривой пропорционален вектору $\mathbf{v}(t) = (F_y,\, -F_x)$. Верно ли, что существует параметризация, для которой векторы скорости в точности равны $(F_y,\, -F_x)$?

Пусть наша кривая задана регулярной параметризацией $\mathbf{r}(t)$. Тогда $\dot{\mathbf{r}}(t) = \lambda(t)\mathbf{v}(t)$. Функция $\lambda(t)$ гладкая и не обращается в нуль. Можно считать, что она строго положительна. Определим функцию $\tau(t) = \int \lambda(t)\,dt$. Эта функция гладко и строго монотонно зависит от t. Поэтому мы можем принять τ за новый параметр: $\boldsymbol{\rho}(\tau) = \mathbf{r}(t(\tau))$. Вектор скорости в новой параметризации есть: $\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\lambda(t)} = \mathbf{v}(t)$.

В окрестности нашей кривой векторы $(F_y, -F_x)$ определяют дифференциальное уравнение (систему) $\dot{x} = F_y$, $\dot{y} = -F_x$. Мы видим, что наша кривая служит при некоторой параметризации решением этого уравнения (его интегральной кривой). Мы доказали: Регулярная кривая на плоскости, касающаяся в каждой своей точке векторов некоторого векторного поля является в некоторой регулярной параметризации интегральной кривой этого поля. Иначе можно сказать: если кривая в каждой точке касается какой-либо интегральной кривой поля, то она совпадает с некоторой интегральной кривой.

2.10 Примеры. Циклоида (рис.1). Пусть окружность радиуса a катится по прямой линии, которая принята за ось абсцисс. На окружности отмечена точка M (фонарик на ободе велосипеда), которая (в темноте) описывает кривую, называемую *циклоидой.* Параметризуем нашу кривую, приняв за параметр угол t (измеряемый в радианах) между вертикальным радиусом OA окружности, направленным вниз, к точке A касания с осью, и радиусом OM. Допустим, что при $t = 0$ точка M совпадает с началом координат $\mathbb{O}$. Принимая координаты точки M за координаты ее радиус-вектора $\mathbf{r}(M) = \overrightarrow{\mathbb{O}A}$, получаем $\mathbf{r}(M) = \overrightarrow{\mathbb{O}A} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$. Координаты слагаемых легко найти и отсюда получаем:

$$\mathbf{r} = (a(t - \sin t),\ a(1 - \cos t))$$

или

$$\mathbf{r} = a((t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j})$$

$(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ – стандартные орты декартовой системы координат.

Вектор скорости этой параметризации есть $\dot{\mathbf{r}} = a((1 - \cos t)\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j})$. Этот вектор нулевой при $t = 2k\pi$, это особые точки нашей кривой. График кривой между соседними особыми точками периодически повторяется. Чтобы найти направление касательной в особой точке, посчитаем вторую производную: $\ddot{\mathbf{r}} = a\mathbf{j}$. Таким образом, в каждой особой точке касательная вертикальна и кривая имеет в этой точке остриё.

Свойства циклоиды. Циклоида - одна из самых знаменитых кривых, имеющая много свойств, полезных не только для изучения геометрии, но и в механике (там, где встречается движение одновременно поступательное и вращательное).

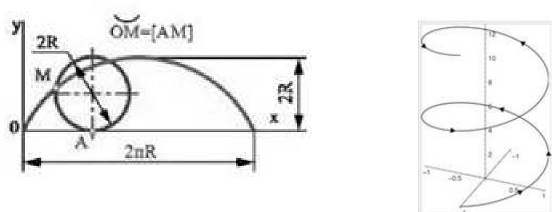
Перевернутая циклоида – брахистохрона (кривая быстрейшего спуска под действием тяжести), она имеет свойство таутохронности (тела начавшие спуск в разных точках достигают подножия одновременно), период колебаний точки, скользящей по циклоиде под действием веса, не зависит от амплитуды. Диаметр одной арки равен 4-х кратному диаметру производящей окружности, площадь под аркой равна утроенной площади круга.

В следующем примере нам удобно воспользоваться вместо обычной декартовой системы координат подвижной системой: при каждом значении параметра координатный репер поворачивается. Именно, для задач, в которых участвуют вращения, полезна плоская система, состоящая из вектора $\mathbf{e}(\varphi) = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$ и его производной $\mathbf{g}(\varphi) = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}$.

Эти векторы ортогональны, как легко проверить непосредственно. Кроме того это орты, и их производные им ортогональны.

Винтовая линия (рис.2). Пусть горизонтальный отрезок поднимается вертикально так, что один конец его поднимается по оси $\mathbb{O}z$, и одновременно отрезок поворачивается против часовой стрелки, причем скорость поворота пропорциональна скорости подъема с коэффициентом b. Второй конец отрезка описывает пространственную кривую, которая называется винтовой линией (“винтовая лестница”). Примем азимут φ (угол отсчитываемый от положительной полуоси абсцисс) за параметр, и пусть при $\varphi = 0$ отрезок лежит на оси абсцисс. Тогда $z = b\varphi$. Радиус-вектор точки кривой есть сумма его проекции на координатную плоскость $\mathbb{O}xy$ и вертикального вектора. Если параметр точки φ, то первое слагаемое есть $a\mathbf{e}(\varphi)$, а второе $b\varphi\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ – орт оси аппликат $\mathbb{O}z$).

Таким образом, $\mathbf{r}(\varphi) = a\mathbf{e}(\varphi) + b\varphi\mathbf{k}$. Вектор скорости есть $\dot{\mathbf{r}}(\varphi) = a\mathbf{g}(\varphi) + b\mathbf{k}$, касательная ортогональна вектору $\mathbf{e}(\varphi)$. Угол подъема, т.е. угол кривой с горизонтальной плоскостью есть $\arctan \frac{b}{a}$.



(a) циклоида (b) винтовая линия

Рис. 2:

Большая часть того, что сказано выше о гладких кривых оказывается справедливым, с соответствующими изменениями, для гладких поверхностей в трехмерном пространстве (и также для k-мерных поверхностей в $\mathbb{R}^n$).

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 3. Длина кривой. Кривизна.

[3.1 Длина кривой через предел по направленности конечных подмножеств.

Вписанные ломаные. Определение длины дуги кривой давалось в курсе математического анализа и мы здесь лишь напомним его, добавив некоторые уточнения. На кривых, которые мы допускаем к рассмотрению, точки упорядочены (например, с помощью любой однозначной параметризации, с точностью обращения порядка). Кроме того, можно считать, что дуга *связна*, т.е. параметризуется одним интервалом прямой (a, b).

Поэтому любое конечное множество точек дуги определяет *вписанную ломаную*, состоящую из отрезков, соединяющих эти точки последовательно. Для конечной ломаной определена длина, равная сумме длин ее звеньев (а длина звена определена с помощью стандартной метрики в $\mathbb{R}^n$ как $\sqrt{\sum_i (b^i - a^i)^2}$, где a^i и b^i координаты концов звена).

Мы можем рассмотреть предел длин вписанных ломаных *по направленности* конечных подмножеств при условии, что наибольшая длина звена стремится к нулю (а концы ломаной совпадают с концами дуги).

Предел по направленности это обобщение понятия предела последовательности. Предполагается, что дано множество M, частично упорядоченное так, что за любыми двумя его элементами имеется общий третий, т.е. M есть *направленное* множество. Например, таково множество окрестностей точки или любого множества в $\mathbb{R}^n$. Другой пример дает множество дополнений к компактным подмножествам в $\mathbb{R}^n$, которые можно считать "окрестностями бесконечности".

Если на направленном множестве M задана, скажем, числовая функция f (или отображение $M \to \mathbb{R}^n$), то *пределом* f называется такое число (или точка) A, что для любой окрестности $O(A)$ найдется элемент $m \in M$ такой, что значения f для всех элементов, идущих за m, лежат в O(A). (Единственность предела следует из определения направленности.)

Предел не изменится, если мы вместо M возьмем подмножество всех его элементов, идущих за любым данным элементом, или, вообще, любое *конфинальное* подмножество N, т.е. такое, что за каждым элементом из M идет какой-либо элемент из N. Это может быть и *последовательность*. Например, конфинальную последовательность можно найти, если M счетно.

Направленность конечных подмножеств. В нашем случае частично упорядоченным множеством является совокупность конечных множеств точек дуги. Все конечные подмножества образуют направленное множество: одно подмножество A идет за другим B, если $A \supset B$.

Пусть дана дуга кривой в $\mathbb{R}^n$, заданная какой-нибудь параметризацией $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Рассмотрим направленное множество M ее конечных подмножеств μ и функцию $l : M \to \mathbb{R}_+$ на нем, заданную длинами соответствующих ломаных $l(\mu)$. (Порядок вершин ломаной определен параметризацией и при изменении параметризации может замениться только на обратный, отчего длины ломаных, конечно, не изменятся.)

Определение. *Длина кривой* $\mathbf{r}(t)$ есть предел длин вписанных конечнозвенных ломаных по направленности всех конечных подмножеств этой кривой.

Если этот предел существует, кривая называется *спрямляемой*. Более общим образом, кривая, параметризованная некомпактным интервалом (например, всей числовой прямой), спрямляема, если при данной параметризации спрямляема каждая ее конечная (т.е. параметризованая замкнутым интервалом) дуга.

Упражнение. Этот предел, если он существует, можно вычислить по любой *последовательности* вписанных ломаных, удовлетворяющей следующему требованию: для всякого $\varepsilon > 0$ только конечное число членов последовательности имеет звенья длиной больше $\varepsilon > 0$.

Докажите, что имеются конфинальные последовательности с таким свойством.

Предложение. *Если кривая имеет регулярную параметризацию, она спрямляема.*

Доказательство. Длина звена ломаной при данной параметризации $\mathbf{r}(t)$ кривой равна длине вектора $\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)$. Считая параметризацию непрерывно дифференцируемой, мы можем представить этот вектор по формуле конечных приращений как $\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i) = \dot{\mathbf{r}}(t_i)\Delta t + \boldsymbol{\alpha}_i \Delta t$. Здесь $\boldsymbol{\alpha}_i$ – вектор, длина которого стремится к нулю вместе с Δt. Тогда, конечно, и $|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)| = |\dot{\mathbf{r}}(t_i)|\Delta t + \beta_i \Delta t$, где β_i – число, стремящееся к нулю вместе с Δt.

Числа β_i, в силу равномерной непрерывности $\dot{\mathbf{r}}(t_i)$, можно ограничить одним числом β для каждой ломаной так, что оно будет стремиться к нулю вместе с Δt.

(Точнее. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти ломаную так, что для нее и для всех последующих ломаных все β_i можно взять меньше ε.)

В таком случае сумма длин ломаной оказывается представленной в форме интегральной суммы $\sum |\dot{\mathbf{r}}(t_i)|\Delta t$ для функции $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$, причем сумма дополнительных слагаемых оценивается как $\beta \sum \Delta t_i$, т.е. стремится к нулю. ($\sum \Delta t_i$ есть длина интервала параметризации.) Таким образом, длина параметризованной кривой выражается интегралом

$$\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\; dt. \qquad (+)$$

□

Мы показали, во-первых, что предел существует для кривой с регулярными параметризациями. Во-вторых, оказалось, что этот предел выражается с помощью интеграла от модуля производной векторной функции, которая задает параметризацию. Этот интеграл не зависит от выбора параметризации, т.к. он равен длине дуги, определяемой независимо от параметризации.]

3.2 Другой подход к определению длины дуги. Чтобы не иметь дела с пределами по направленным множествам и вспоминать основы анализа, прямо *определяем* длину дуги $\gamma = \overset{\smile}{AB}$ с помощью параметризации $\mathbf{r}(t)$, $a < t < b$, $A = \mathbf{r}(a)$, $B = \mathbf{r}(b)$, интегральной формулой $(+)$.

Определение. *Длиной дуги* кривой, заданной параметризацией $\mathbf{r}(t)$, где параметр t меняется в интервале, содержащем $[a, b]$, есть число

$$s(\breve{AB}) = \int\limits_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt. \tag{+}$$

Здесь нужна проверка независимости результата от параметризации:

Предложение. *Длина дуги, определенная формулой* $(+)$, *не зависит от параметризации.*

Доказательство. В самом деле, пусть задана другая параметризация $\mathbf{w}(q)$ той же кривой. Считая, что обе параметризации взаимно однозначны, мы получаем диффеоморфное преобразование одной из них в другую: $t = \varphi(q)$, $\mathbf{w}(q) = \mathbf{r}(\varphi(q))$. Тогда $\dot{\mathbf{w}}(q) = \dot{\mathbf{r}}|_{t=\varphi(q)}\dot{\varphi}(q)$, и в то же время $dt = \dot{\varphi}(q)\, dq$.

Поэтому (предполагая, что обе параметризации одинаково ориентируют кривую и, значит, $\dot{\varphi} > 0$):

$$s(\breve{ab}) = \int\limits_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt = \int\limits_{\varphi^{-1}a}^{\varphi^{-1}b} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\dot{\varphi}(q)\, dq = \int\limits_{\varphi^{-1}a}^{\varphi^{-1}b} |\dot{\mathbf{w}}(q)|\, dq). \qquad \square$$

3.3 Натуральный параметр. Из основной формулы $(+)$ выводятся другие формулы, более удобные для частных случаев. Один из них – параметризация длиной – является теоретически наиболее важным.

Предполагая верхний предел переменным, получим функцию: $s(t) = \int\limits_a^t |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$. Из этой формулы следует, что $\frac{ds}{dt} = |\frac{d\mathbf{r}}{dt}| \neq 0$, т.е. отображение $s \mapsto \mathbf{r}(t(s)) \in \mathbb{R}^n$ регулярно и s может быть принято за параметр.

Определение. Параметр на кривой называется *натуральным*, если разность значений его для двух точек равна по модулю длине дуги кривой между этими точками.

(Здесь, очевидно, предполагается, что рассматривается связная кривая. Если кривая не связная, то нужно отдельно параметризовать каждую ее связную компоненту.)

Натуральный параметр обычно обозначается буквой s, как и длины дуг. Он определен с точностостью до выбора направления и до добавления константы (определенной выбором начала отсчета на кривой).

Орты касательной и ориентация кривой. Производная длины дуги по параметру, как мы только что видели, есть $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$. В частности, если параметр натуральный, эта производная равна 1. Но производная радиус-вектора по любому параметру есть вектор, лежащий на касательной. Таким образом, получаем:

Утверждение 1. *Производная радиус-вектора по натуральному параметру есть орт касательной.*

(Напомню, что *ортом* называется вектор единичной длины (нормы).)

Обозначим этот вектор $\boldsymbol{\tau}$.

Касательная имеет два направления.

Определение. Выбор направления натуральной параметризации кривой называется *ориентацией* этой кривой. (Т.е. при движении в положительном направлении длина, отсчитываемая от начальной точки, возрастает. Ориентация определяет отношение между точками – предыдущая и последующая, и это отношение не меняется при непрерывном перемещении точек, если они не совпадают.)

Эквивалентность дуги и хорды. Из равенства единице модуля производной радиус-вектора по натуральному параметру вытекает:

Следствие. *Длина хорды между двумя близкими точками кривой и длина стянутой ею дуги являются эквивалентными бесконечно малыми величинами при бесконечном сближении концов дуги.*

Доказательство. Действительно, $1 = |\boldsymbol{\tau}| = |\frac{d\mathbf{r}}{ds}| = \lim\limits_{|\triangle s| \to 0} \frac{|\triangle \mathbf{r}|}{|\triangle s|}$. В числителе стоит длина хорды, в знаменателе длина дуги между ее концами. $\square$

Отметим, что для справедливости этого общего факта (известного для окружности еще из школы) требуется, чтобы кривая была гладкой, т.е. чтобы она имела регулярную параметризацию.

Натуральный параметр *характеризуется* тем, что его вектор скорости имеет единичную длину. Более общим образом:

Утверждение 2. *Вектор скорости имеет постоянную длину тогда и только тогда, когда приращение параметра пропорционально приращению длины, т.е.* $\triangle s = c\triangle t$. (Параметр и длина пропорциональны, если начальная точка для обоих параметров общая.)

Доказательство. Если $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = \mathrm{const} = c$, то $ds = |\frac{d\mathbf{r}}{dt}|dt \Rightarrow \triangle s = c\triangle t$. Обратное очевидно. □

3.4 Формулы длины дуги. Из равенства модуля производной по натуральному параметру единице вытекает такая формула для длины дуги по натуральному параметру:

$$s(\smile{AB}) = \int\limits_{s(A)}^{s(B)} ds.$$

Другие формулы для длины дуги. Выражая по теореме Пифагора приращение радиус-вектора через координаты, получаем, переходя к пределу,

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{\sum (\dot{x}_i(t))^2}\, dt.$$

Формально внося dt под знак радикала, получаем запись интеграла не каноническую, но удобную и часто употребляемую:

$$s = \int\limits_A^B \sqrt{\sum (dx_i)^2}. \qquad ++$$

(В этой записи нет параметра, а только координаты точек в $\mathbb{R}^n$. A и B – концевые точки дуги.)

Если в $\mathbb{R}^n$ используются криволинейные координаты, то удобно начать с формулы (++) и выразить дифференциалы dx_i через дифференциалы криволинейных координат, а затем перейти к параметру на кривой. Например:

Упражнение. *Длина дуги в полярных координатах в* $\mathbb{R}^2$ имеет выражение

$$\int\limits_a^b \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2}.$$

$\left[dx = d\rho\,\cos\varphi - \rho\,\sin\varphi\, d\varphi \quad dy = d\rho\,\sin\varphi + \rho\,\cos\varphi\, d\varphi, \quad dx^2 + dy^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 x.\right]$

Если за параметр принят аргумент φ, то получится выражение

$$\int\limits_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Подчеркнем в заключение, хотя это может показаться тривиальным, что длина кривой определяется на основе уже существующей метрики в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$. Для определения длины кривой, лежащей в гладкой поверхности, нам нужно будет сначала определить локальное измерение расстояний на поверхности, что будет сделано позже также с использованием метрики объемлющего $\mathbb{R}^n$.

Обозначение. *В обозначении производных по натуральному параметру точки заменяют штрихами.*

3.5 Кривизна

Пусть кривая задана натуральным параметром t = s. Мы обозначили орт $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ через $\boldsymbol{\tau}$. Вектор $\boldsymbol{\tau}'$ ортогонален $\boldsymbol{\tau}$ как производная вектора постоянной длины.

Чем больше вектор $\boldsymbol{\tau}'$, тем сильнее изгиб кривой. Этим оправдано следующее

Определение. *Кривизной* гладкой кривой называется величина

$$k(s) := |\boldsymbol{\tau}'| = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|. \tag{1}$$

Теорема 1. *Кривизна кривой на некотором участке нулевая* $\Leftrightarrow$ *этот участок прямолинейный.*

Доказательство. Справа налево очевидно: продифференцируйте два раза уравнение прямой! Слева направо: возьмем разложение Тейлора по натуральному параметру $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'\triangle s + \frac{\mathbf{r}''\triangle s^2}{2} + \dots$. Если $k(s) \equiv 0$, останутся только первые два члена, к тому же $\mathbf{r}' = \boldsymbol{\tau}$ постоянен, т.к. $\boldsymbol{\tau}' = 0$. Следовательно, мы имеем уравнение прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{c}s$ ($|\mathbf{c}| = |\boldsymbol{\tau}| = 1$). □

Этим оправдано следующее

Определение. Точка на кривой есть *точка спрямления*, если в этой точке кривизна равна 0.

Теорема 2. *Расстояние от кривой до своей касательной в точке спрямления (и только в такой точке) является величиной третьего порядка малости относительно* $\triangle s$.

Доказательство. Мы можем взять кривую в $\mathbb{R}^n$ при любом n. Имеем

$$\triangle\mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{1}\triangle s + \frac{\mathbf{r}''}{2!}\triangle s^2 + \frac{\mathbf{r}'''}{3!}\triangle s^3 + \dots.$$

Расстояние до произвольной прямой, проходящей через точку $\mathbf{r}_0$ с направляющим ортом $\mathbf{m}$ равно

$$d = |[\triangle\mathbf{r}, \mathbf{m}]| = \left|[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}]\triangle s + \frac{1}{2}[\mathbf{r}'', \mathbf{m}]\triangle s^2 + \frac{1}{6}[\mathbf{r}''', \mathbf{m}]\triangle s^3 + \dots\right|.$$

Расстояние d имеет третий порядок малости $\Leftrightarrow$ вектор m одновременно коллинеарен векторам $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{r}''$, откуда $\mathbf{r}'' = 0$, т.е. $k = 0$ (т.к. $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{m}$ ненулевые). □

Главная нормаль и соприкасающаяся плоскость. Вектор $\mathbf{r}'' = \boldsymbol{\tau}'$ ортогонален касательной.

Определение. Прямая, содержащая $\mathbf{r}''$, называется *главной нормалью.*

(На плоскости нормаль одна. В $\mathbb{R}^3$ их бесконечно много. Мы выделили ту, на которой лежит $\boldsymbol{\tau}'$.)

При $k(s) \neq 0$ определён орт $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{k}\mathbf{r}'' = \frac{1}{k}\boldsymbol{\tau}'$.

Определение. Вектор $\boldsymbol{\nu}(s)$ называется *вектором главной нормали* в точке $\mathbf{r}(s)$. Этот вектор ортогонален касательной (т.к. $\langle\boldsymbol{\nu}(s), \boldsymbol{\tau}\rangle = 0$), и он служит направляющим ортом для главной нормали.

Для произвольного параметра t вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ не обязательно ортогонален касательной, но он лежит в плоскости, определенной парой векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$. Для натурального параметра $k\boldsymbol{\nu} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ и

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\dot{s}^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds}\ddot{s} = k(s)\dot{s}^2\boldsymbol{\nu} + \ddot{s}\boldsymbol{\tau}, \tag{$\times$}$$

Мы будем называть его *вектором ускорения* (данной параметризации).

Определение. Плоскость, определенная парой $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ называется *соприкасающейся* (к кривой в данной точке). Эта плоскость содержит векторы ускорения для всех параметризаций.

Механический смысл кривизны.

Если кривая есть траектория движения точки единичной массы в силовом поле, то вектор ускорения $\ddot{\mathbf{r}}$ совпадает с действующей силой (по закону Ньютона $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$), и в силу ($\times$)

$$\langle\ddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\nu}\rangle = \langle\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \boldsymbol{\nu}\rangle\dot{s}^2 = \langle k\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}\rangle\dot{s}^2 = kv^2.$$

Кривизна оказывается пропорциональной абсолютной величине нормальной составляющей силы и обратно пропорциональной квадрату линейной скорости $v = \dot{s}$: чем сила больше, тем более она искривляет движение, но чем быстрее движение, тем это влияние меньше.

Заметим, что $\langle\dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau}\rangle = \dot{s} = v$, $\langle\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle = \langle\ddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau}\rangle = \ddot{s} = \dot{v}$, но $\langle\dot{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\tau}\rangle = \langle\dddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau}\rangle = \dddot{s} - k^2\dot{s}^3 = \ddot{v} - k^2v^3$, т.е. кривизна влияет на изменение и касательной составляющей силы, если путь жестко задан.

3.6 Геометрический смысл кривизны

Кривизна – скорость поворота касательной. По определению кривизны мы имеем:

$$k = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta s}\right| = \lim\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta\varphi}\right|\lim\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|,$$

где $\Delta\varphi$ есть угол поворота касательного орта при изменении параметра на Δs.

Перенесем параллельно оба касательных орта, отвечающих концам интервала изменения параметра s, совместив их начала с $\mathbb{O}$. На большом круге единичной сферы, который они определяют, $\Delta\boldsymbol{\tau}$ – хорда дуги, длина которой равна $\Delta\varphi$. Но $\Delta\boldsymbol{\tau}$ и $\Delta\varphi$ являются эквивалентными бесконечно малыми, и мы получаем:

Предложение. Кривизна $|\varphi'(s)|$ есть *скорость поворота касательной.* □

Запишем $\boldsymbol{\tau}_x$ (орт в точке x) как $\mathbf{e}(\varphi(s))$ ($\mathbf{e}(\varphi)$ единичный вектор с полярным углом φ – углом наклона вектора $\boldsymbol{\tau}_x$). Тогда $\boldsymbol{\tau}_x' = \varphi'(s)\mathbf{g}(\varphi)$ ($\mathbf{g}(\varphi) = \mathbf{e}(\varphi(s))'$ – единичный вектор ортогональный $\mathbf{e}(\varphi)$). Мы снова получили, что кривизна по модулю есть скорость поворота касательной.

Для плоской кривой мы можем отбросить модуль и определить кривизну как $\varphi'(s)$, т.е. учесть не только величину скорости поворота, но и направление поворота (на ориентированной плоскости).

В $\mathbb{R}^3$ кривизна всегда берется положительной.

Контрольный вопрос. Покажите, что если кривизна плоской кривой отрицательна, то вектор главной нормали и сама кривая в окрестности точки расположены по разные стороны от касательной (как стрела и дуга лука).

Замечание. В формуле $k(s) = \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ в числителе стоит длина дуги единичной окружности, а в знаменателе длина соответствующей дуги кривой. Поэтому *кривизна является коэффициентом локального растяжения* отображения кривой в окружность (которое определено переносом $\boldsymbol{\tau}$).

3.7. Интеграл кривизны по замкнутому плоскому контуру. Из формулы $k = \frac{d\varphi}{ds}$ мы получаем: $d\varphi = k\,ds$.

Допустим дано регулярное в каждой точке отображение единичной окружности в плоскость. Это означает следующее. Примем за параметр на кривой γ (образе этого отображения) угол t (в радианах) точки на окружности. Хотя этот угол определен с точностью до добавления кратного 2π, производная по t определена недусмысленно. Это отображение, в силу регулярности, взаимно однозначно на малых интервалах, но образ может иметь самопересечения, т.е. разные точки окружности могут отобразиться в одну.

Мы имеем две гладкие функции $\varphi(t)$ (угол наклона касательной) и $s(t)$ (длина дуги, отсчитываемая от какой-либо точки кривой.) Поскольку t регулярный параметр, а s монотонно возрастает с возрастанием t, мы можем заменить t на натуральный параметр. Когда t меняется от 0 до 2π, s меняется от 0 до S(= длина замкнутой кривой).

Рассмотрим теперь интеграл $\int\limits_0^s k(s)\,ds$. Т.к. $d\varphi = k(s)\,ds$, мы получаем, что этот интеграл есть $\int\limits_{\varphi(s(0))}^{\varphi(s(t))} d\varphi = \varphi(s(t)) - \varphi(s(0))$, т.е. изменение угла наклона от начальной точки до точки в конце дуги длиной s.

Рассмотрим теперь полный обход нашей кривой. Когда t меняется от 0 до 2π (и s меняется от 0 до S), касательная возвращается в исходное положение, но значение угла наклона касательной может измениться на $2n\pi$ для некоторого целого n. Таким образом значение интеграла $\oint k(s)\,ds$ есть $2n\pi$, n целое.

Это целое число n замечательно тем, что при непрерывной деформации кривой, при которой производные также меняются непрерывно, и, значит, непрерывно меняктся $k(s)$, оно должно меняться непрерывно, но будучи целым, остается постоянным и является таким образом целочисленной характеристикой нашей кривой, ее можно назвать *закрученностью.*

Для стандартной окружности закрученность равна 1 (при положительном обходе и -1 при противоположном).

Упражнение. Покажите, что для любого целого n имеются кривые с закрученностью n.

Известно, что если две замкнутые регулярные кривые на плоскости имеют одно и то же число закрученности, то их можно перевести друг в друга непрерывной деформацией с непрерывным изменением производной, не обращая ее в нуль (такая деформация называется регулярной.) Иначе говоря, два регулярных образа окружности на плоскости регулярно деформируются друг в друга тогда и только тогда, когда их закрученности совпадают.

3.8 Соприкасающаяся окружность и соприкасающаяся плоскость

Пример. Рассмотрим окружность радиуса R в $\mathbb{R}^2$ в полярных координатах: $\mathbf{r}(\varphi) = (R\cos\varphi,\, R\sin\varphi) = R\mathbf{e}(\varphi)$. Перейдем к натуральному параметру: $s = R\varphi$, $\varphi = \frac{s}{R}$ и $\mathbf{r}(s) = R(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}) = R\mathbf{e}(\frac{s}{R})$. Тогда

$$\boldsymbol{\tau} = \left(-\sin\frac{s}{R},\, \cos\frac{s}{R}\right) = \mathbf{g}\left(\frac{s}{R}\right), \quad \boldsymbol{\tau}' = \left(-\cos\frac{s}{R},\, -\sin\frac{s}{R}\right) = -\frac{1}{R}\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}\right).$$

Следовательно, $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}\right) = \left(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}\right)$, и кривизна $k = \frac{1}{R}$. Знак минус говорит, что нормаль (т.е. $\boldsymbol{\nu}$) направлена к центру, т.е. против $\mathbf{r}(\varphi)$.

Определение. Если в некоторой точке $k \neq 0$, то величина $R = \frac{1}{k}$ называется *радиусом кривизны* (в направлении $\boldsymbol{\nu}$). Окружность радиуса R в соприкасающейся плоскости с центром в точке, находящейся на расстоянии R от кривой в направлении вектора $\boldsymbol{\nu}$, называется *соприкасающейся.*

Теорема 1. *Расстояние от кривой до соприкасающейся окружности является величиной третьего порядка малости от $\triangle s$. Эта окружность – единственная с таким свойством.*

Доказательство. Проведём произвольную окружность через точку $\mathbf{r}_0$. Пусть k – кривизна нашей кривой в точке $\mathbf{r}_0$, $\tilde{k}$ – кривизна окружности. Для кривой разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\tau}\triangle s + \frac{1}{2}k\boldsymbol{\nu}(\triangle s)^2 + \frac{1}{6}\mathbf{r}'''(\triangle s)^3 + \ldots,$$

а для окружности

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 + \tilde{\boldsymbol{\tau}}\triangle s + \frac{1}{2}\tilde{k}\tilde{\boldsymbol{\nu}}(\triangle s)^2 + \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{r}}'''(\triangle s)^3 + \ldots.$$

Расстояние между точками при одном и том же значении параметра равно длине вектора $\triangle\mathbf{r} - \triangle\tilde{\mathbf{r}}$:

$$d = |(\boldsymbol{\tau} - \tilde{\boldsymbol{\tau}})\triangle s + \frac{1}{2}(k\boldsymbol{\nu} - \tilde{k}\tilde{\boldsymbol{\nu}})(\triangle s)^2 + \frac{1}{6}\mathbf{r}''' - \tilde{\mathbf{r}}'''(\triangle s)^3 + \ldots|.$$

Эта величина будет третьего порядка малости тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\tau} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}$ и $k\boldsymbol{\nu} = \tilde{k}\tilde{\boldsymbol{\nu}}$. Векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ единичные, значит, $k = \tilde{k}$ и наша окружность совпадает с соприкасающейся. $\square$

Эта теорема оправдывает название окружности «соприкасающаяся».

Следствие. Если плоская кривая имеет в некоторой точке ненулевую кривизну, то касательная в этой точке лежит по одну сторону от кривой в (окрестности точки).

Теорема 2. *Соприкасающаяся плоскость к кривой $\gamma = \mathbf{r}(t)$ в точке $A = \mathbf{r}(t_0)$ – единственная плоскость, такая, что расстояние от кривой до нее третьего порядка малости от $\triangle s$.*

Доказательство. Возьмем произвольную плоскость с единичным нормальным вектором $\mathbf{n}$, проходящую через точку $\mathbf{r}_0$. Тогда расстояние до плоскости будет равно

$$d = |\langle\mathbf{n}, \triangle\mathbf{r}\rangle| = \left|\langle\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}\rangle\triangle s + \frac{1}{2}k\langle\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}\rangle(\triangle s)^2 + \frac{1}{6}\langle\mathbf{n}, \mathbf{r}'''\rangle(\triangle s)^3 + \ldots\right|.$$

Для выполнения условий теоремы необходимо и достаточно $\langle\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}\rangle = 0 = \langle\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}\rangle$, что и означает совпадение данной плоскости с соприкасающейся (содержащей $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$).

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 4. Теория Френе.

4.1 Реперное поле вдоль кривой и его производная

Мы по-прежнему рассматриваем в пространстве $\mathbb{R}^n$ канонический репер, орты которого обозначаем $\mathbf{e}_i$. В таком случае каждый репер в этом пространстве определяется начальной точкой и невырожденной матрицей. Канонические координаты векторов репера служат столбцами этой матрицы. Ортонормированным реперам отвечают ортогональные матрицы.

Мы будем рассматривать специальное *реперное поле вдоль кривой* в $\mathbb{R}^3$ (т.е. в каждой точке кривой задан репер, матрица которого меняется непрерывно с точкой). Первые векторы этого репера нам известны – орт касательной $\boldsymbol{\tau}$ и орт главной нормали $\boldsymbol{\nu}$. Мы дополним его третьим вектором: $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]$ до ортонормированного репера.

Кривая реперов и кривая в группе матриц. Важное замечание состоит в том, что если дана параметризованная кривая $\mathbf{r}(t)$ и реперное поле $(\mathbf{f}_i(t))$ вдоль этой кривой, то ему отвечает кривая в группе невырожденных матриц, а для ортонормированного репера – в группе ортогональных матриц. Обратно, параметризованная кривая в группе матриц порождает реперное поле вдоль каждой (параметризованной тем же параметром) кривой. Это соответствие оказывается возможным благодаря существованию в $\mathbb{R}^n$ параллельного переноса: по матрице мы можем построить репер, приложенный к началу $\mathbb{O}$, и затем перенести его параллельно в точку кривой с данным параметром.

4.2 Репер Френе

Определение. Построенный ортонормированный репер $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$ называется *репером Френе.*

Первый вектор служит ортом касательной, первые два вместе дают ортонормированный базис в соприкасающейся плоскости. Т.к. мы положили $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]$, репер задает положительную ориентацию $\mathbb{R}^3$ (т.е. согласованную с ориентацией основного базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$). Иногда его направление выбирают исходя из другого условия (см. ниже).

Определение. Вектор $\boldsymbol{\beta}$ называется *вектором (ортом) бинормали*, а прямая, для которой он служит направляющим, называется *бинормалью.* Она ортогональна соприкасающейся плоскости.

4.3 Уравнения Френе.

Мы уже видели, что для любой параметризации производная радиус-вектора пропорциональна $\boldsymbol{\tau}$, а вторая производная есть линейная комбинация $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$. Третья производная и все высшие линейно выражаются в $\mathbb{R}^3$ через все три вектора репера. Репер Френе получается из репера производных $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$ (предполгая, что они линейно независимы) с помощью канонического процесса ортонормализации, и поэтому векторы репера Френе гладко зависят от параметра. Коэффициенты линейных выражений производных векторов репера Френе через сами эти векторы также гладко зависят от параметра. Нам нужно найти эти коэффициенты.

Определение. Выражения производных $\boldsymbol{\tau}_k(s)$ по натуральному параметру векторов $\boldsymbol{\tau}_k(s)$ в репере Френе в точке $\mathbf{r}(s)$ составляют систему векторных линейных дифференциальных уравнений, которая называется *системой Френе* (или *уравнениями Френе*), а ее матрица – *матрицей Френе*.

Вид матрицы Френе. **Во-первых**, производную $\boldsymbol{\tau}$ мы уже знаем: она равна $k\boldsymbol{\nu}$, коэффициент k мы назвали кривизной.

Во-вторых, мы сейчас покажем, что матрица (A) наших коэффициентов *кососимметрична*, т.е. $A = -A^T$ (T знак транспонирования) – элементы симметричные относительно диагонали имеют противоположные знаки. В частности, на диагонали стоят нули.

Утверждение. *Имеют место формулы Френе:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= && k\boldsymbol{\nu}, && \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k\boldsymbol{\tau}+ && && \varkappa\beta, \\ \boldsymbol{\beta}' &= && -\varkappa\boldsymbol{\nu}. && \end{aligned} \tag{$-$}$$

(Штрихом обозначается дифференцирование по натуральному параметру.)

Матрица Френе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим два репера Френе в двух соседних точках кривой со значениями параметра $s = 0$ и $\triangle s$. Матрица Π перехода от первого ко второму ортонормирована, значит, удовлетворяет уравнению $\Pi\Pi^T = \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ – единичная матрица). При стремлении $\triangle s$ к нулю $\Pi \to \mathbf{E}$.

Нас интересует производная Π'. Продифференцируем указанное равенство: $\Pi'\Pi^T + \Pi(\Pi^T)' = \mathbf{0}$ (нулевая матрица). При $s = 0$ имеем $\Pi'\mathbf{E} + \mathbf{E}(\Pi^T)' = \mathbf{0}$ или $\Pi' + (\Pi')^T = \mathbf{0}$ – матрица Π' кососимметрична.

Мы знаем первую строку этой матрицы и, значит, знаем первый столбец. Кроме того, по диагонали стоят нули. Остается два свободных места, на которых стоят элементы противоположные по знаку. Обозначим их $\varkappa$ и $-\varkappa$ и теорема доказана. □

Определение. Коэффициент $\varkappa(s)$ называется *кручением.*

Обратим внимание на то, что первая и последняя строка матрицы Френе содержат только по одному ненулевому элементу.

Контрольный вопрос. Напишите систему Френе в двумерном пространстве.

Замечание 1. Можно более элементарно вывести условие кососимметричности. Равенство нулю диагональных элементов следует из того, что векторы репера имеют единичную длину. Равенство $a_{ij} = -a_{ji}$ в двумерном случае следует из ортонормированности: $0 = \langle\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j\rangle' = \langle\boldsymbol{\tau}_i', \boldsymbol{\tau}_j\rangle + \langle\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j'\rangle = a_{ij}\langle\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}_j\rangle + a_{ji}\langle\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_i\rangle = a_{ij} + a_{ji}$.

Замечание 2. Так как для натурального параметра кривой первый вектор репера Френе является вектором скорости, кривая восстанавливается по нему однозначно интегрированием при заданных начальных условиях, т.е. заданном векторе скорости в точке $\mathbf{r}(s_0)$.

Ниже мы покажем, что вообще, если дана система Френе с некоторым параметром, то интегрированием вектора $\boldsymbol{\tau}$ получается кривая, для которой данный параметр является натуральным, а ее система Френе совпадает с данной (т.е. коэффициенты системы будут кривизной и кручением этой кривой).

4.4 Выражение высших производных.

С помощью уравнений Френе производится рекуррентное выражение последующих производных радиус-вектора через векторы репера Френе. Действительно, $\mathbf{r}^{(p+1)} = (\mathbf{r}^{(p)})'$. Теперь нужно подставить существующее по индуктивному предположению выражение $\mathbf{r}^{(p)}$ через векторы репера и продифференцировать его. Затем остается воспользоваться уравнениями Френе, и заменить производные векторов репера векторами самого репера.

В трехмерном пространстве: $\mathbf{r}' = \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{r}'' = k(s)\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{r}''' = k'(s)\boldsymbol{\nu} - k(s)^2\boldsymbol{\tau} + k(s)\varkappa(s)\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{r}^{IV} = (\mathbf{r}''')' = \dots$.

4.5 Направление ортов репера Френе, знак кривизны и ориентация кривой

Направление главной нормали, т.е. вектора ν, выбирают так, чтобы кривизна была положительной.

На плоскости тогда гладкая кривая разбивается на участки, разделенные точками спрямления (где $k = 0$), причем при переходе из одного участка в соседний направление орта нормали может измениться (кривая перейдет с одной стороны касательной в точке спрямления на другую).

Однако, если плоскость уже ориентирована, полезно иногда выбирать направление нормали так, чтобы пара $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ давала положительную ориентацию. (Тогда вектор ν меняется непрерывно и определен также и в точках спрямления.)

Наоборот, замкнутая связная кривая разбивает плоскость (согласно известной теореме Жордана) на две области – внутреннюю и внешнюю. Если договориться выбирать направление $\boldsymbol{\nu}$, скажем, во внутреннюю область, то ориентация кривой (направление обхода) определяет ориентацию плоскости.

В $\mathbb{R}^3$ мы выбираем направление $\boldsymbol{\beta}$ так. чтобы репер Френе был положительным, поэтому с изменением направления обхода кривой $\boldsymbol{\beta}$ меняет направление:

Предложение. *Изменение направления обхода кривой (т.е. ее ориентации) изменяет направления $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\beta}$ и не изменяет направление $\boldsymbol{\nu}$.* Кривизна и кручение не меняются.

Доказательство. Для вычисления производной в точке A нужно сместиться в близкую точку B и затем устремить B к A. Изменение направления обхода изменит знак Δs и не меняет вектор $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}$. Значит, изменится знак $\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}}{\Delta s}$. Вектор $\boldsymbol{\nu}$ есть предел отношения $\frac{\triangle \boldsymbol{\tau}}{\triangle s}$. Поскольку и числитель и знаменатель этого отношения изменят знак, само оно знака не изменит и, значит, направление $\boldsymbol{\nu}$ не изменится. Тогда направление β должно измениться. Т.к. знаки $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ меняются, знак $\varkappa$ не изменится, а кривизна положительна по определению. □

Теорема. *При зеркальном отражении кривой меняется знак кручения.*

Доказательство. Можно взять отражение в любой плоскости, т.к. одну плоскость можно непрерывно перевести в другую. Возьмем соприкасающуюся. Тогда направления $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$ не изменятся, поскольку эти векторы лежит в этой плоскости. Следовательно, направление β также не изменится, поскольку мы сохраняем ориентацию пространства. Но составляющая производной орта нормали ν изменит знак. Действительно, вектор-приращение $\triangle\boldsymbol{\nu}$ при отражении в соприкасающейся плоскости изменяет знак своей проекции на бинормаль. В пределе мы получаем изменение знака $\langle \boldsymbol{\nu}', \boldsymbol{\beta} \rangle = \varkappa$. □

Следствие. *В $\mathbb{R}^3$ (в отличие от плоскости) мы можем различать левые и правые кривые. Они различаются знаком кручения.*

(Разумеется знак может меняться в точках, где кручение равно нулю. Тогда надо говорить о левых и правых дугах кривой. Важно, что неплоскую кривую нельзя непрерывным движением в пространстве совместить с ее зеркальным отражением, см. п.13.)

Упражнение. Напишите уравнения левой и правой винтовых линий.

4.6 Геометрический смысл кручения и вращение репера Френе

Предложение. *Если $\boldsymbol{\beta}' = 0$ в целом интервале, в котором $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}' \neq 0$, то кривая лежит в постоянной плоскости, ортогональной $\boldsymbol{\beta}$.*

Доказательство. Если $\boldsymbol{\beta}' = 0$, то вектор $\boldsymbol{\beta}$ постоянен. Но этот вектор нормален к соприкасающейся плоскости, которая, таким образом также постоянна. При этом $\varkappa = 0$ (третье уравнение Френе). Значит, $\mathbf{r}'' = \boldsymbol{\nu}' = -k\boldsymbol{\tau}$ линейно выражается через $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}'$, и, значит, кривая плоская (см.п.1.4). □

Определение. Назовем точку *точкой уплощения*, если кручение в ней равно нулю.

Упражнение. Точка $\mathbf{r}_0$ есть точка уплощения $\Leftrightarrow$ расстояние от кривой до соприкасающейся плоскости имеет четвертый порядок малости от $\triangle s$.

Ось мгновенного вращения репера Френе. Если при движении точки по кривой вектор поворачивается вместе с репером Френе (т.е. его координаты в этом репере постоянны), то скорость его изменения выражается в этом репере с помощью формул Френе: для вектора $\mathbf{v} = a\boldsymbol{\tau} + b\boldsymbol{\nu} + c\boldsymbol{\beta}$ скорость $\mathbf{v}' = a\boldsymbol{\tau}' + b\boldsymbol{\nu}' + c\boldsymbol{\beta}' = ak\boldsymbol{\nu} + b(-k\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}) - c\varkappa\boldsymbol{\nu} = -bk\boldsymbol{\tau} + (ak - c\varkappa)\boldsymbol{\nu} + b\varkappa\boldsymbol{\beta}$.

Найдем вектор $\mathbf{w}$, остающийся неподвижным, т.е. $\mathbf{w}' = 0$. Это направляющий вектор мгновенной оси вращения репера Френе. Принимая, что кривизна и кручение ненулевые, имеем: $b = 0$ и $ak - c\varkappa = 0$. В качестве $\mathbf{w}$ можно взять вектор с координатами (в репере Френе) $(\varkappa,\ 0,\ k)$. Итак,

Утверждение. *Мгновенное вращение репера Френе при равномерном движении точки по кривой происходит вокруг оси, направляющий вектор которой имеет координаты* $(\varkappa,\ 0,\ k)$. □

Мы можем назвать модуль нашего вектора *мгновенной скоростью вращения* репера Френе. Не вдаваясь в теоремы механики, мы можем оправдать это название следующим образом.

Если мгновенно неподвижная ось есть бинормаль, то $a = b = 0$, $\varkappa = 0$ и модуль есть k – мгновенная скорость поворота $\boldsymbol{\tau}$ и также $\boldsymbol{\nu}$ (первые два уравнения Френе). Точно так же, если ось есть касательная, то $k = 0$ и $\varkappa$ есть модуль нашего вектора и одновременно мгновенная скорость вращения ортов нормальной плоскости (второе и третье уравнения).

Значит, вообще мгновенная скорость вращения репера с неподвижной осью вектора $\mathbf{w}$ есть $\sqrt{k^2 + \varkappa^2}$.

Контрольный вопрос. Что можно сказать о точке, в которой мгновенно неподвижна главная нормаль?

4.7 Формулы для плоского случая.

Кривизна плоской кривой. На плоскости $\mathbb{R}^2$ репер Френе состоит из двух векторов – орта касательной $\boldsymbol{\tau}$ и орта нормали $\boldsymbol{\nu}$, причем $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\boldsymbol{\nu}$ и $\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -k\boldsymbol{\tau}$.

Т.к. кривизна k неотрицательна, поворот $\boldsymbol{\tau}$ (т.е. отклонение от касательной) происходит в сторону, указываемую вектором $\boldsymbol{\nu}$, т.е. направление орта нормали выбирается в сторону изгиба кривой.

Произвольный параметр. Полезно уметь вычислять кривизну в случае, если параметр не обязательно натуральный. Для получения соответствующей формулы проведем следующие выкладки:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}t', \quad t' = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

$$k\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}' = \ddot{\mathbf{r}}(t')^2 + \dot{\mathbf{r}}t''$$

$$k[\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}] = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}'] = [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]t'^3.$$

Отсюда

$$k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$

Эта формула верна для любой кривой в $\mathbb{R}^3$. Для плоской кривой получим выражение в координатах $(\mathbf{r} = (x(t), y(t)))$:

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Согласно п.3.7 радиус соприкасающейся окружности есть $R = \frac{1}{k}$. Мы получаем теперь выражение для радиуса: $R = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})}$.

Упражнение. Написать выражение кривизны для кривой, заданной неявно с помощью уравнения $F(x,\, y) = 0$ и также заданной графиком функции $y = f(x)$, принимая $t = x$.

Имеется параметризация кривой, при которой вектором скорости в каждой точке является вектор $(F_y,\ -F_x)$. см. упражнение в п.2.9.

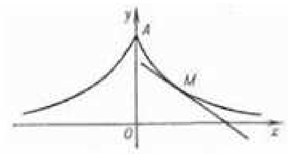
4.8 Трактриса.

Название этой кривой происходит от латинского слова, означающего "тащить". Для нее отрезок касательной от точки касания до оси абсцисс постоянен. (Представьте себе ребенка, который идет по краю тротуара и тянет на веревочке тележку, которая катится за ним по мостовой.)

Пусть этот отрезок равен a. Примем за параметр угол α между отрезком и осью абсцисс. Тогда ордината будет $y = a \sin\alpha$. Сразу видно, что особая точка будет при $\alpha = \pi/2$, когда отрезок ортогонален оси.

Чтобы найти абсциссу точки приходится обратиться к интегрированию. Именно, $dy = \operatorname{tg}\alpha\, dx$ и, значит, $dx = a\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\, d\alpha$. Интеграл легко берется и мы получаем параметрическое представление нашей кривой:

$$\begin{aligned} x &= a\,(\cos\alpha + \ln\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}) \\ y &= a\,\sin\alpha. \end{aligned}$$



[]

Рис. 3: Трактриса

Заметим, что постоянная интегрирования выбрана так, что $x = 0$ при $\alpha = \pi/2$ и кривая симметрична относительно оси ординат (слева от этой оси угол наклона касательной меняется от 0 до $\pi/2$, а справа от $\pi/2$ до π). Касательная в точке $x = 0$ вертикальна $x = 0$ и эта точка особая:

Действительно, $\dot{x}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = (-\sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha})|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 0 = \dot{y}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}}$ и $\ddot{x}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 0$, $\ddot{y}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = -a$. (Знак минус связан с тем, что кривая меняет возрастание на убывание, хотя точка особая и этот "поворот" происходит через остановку – производные обоих координат обращаются в нуль.)

Интерес представляет геометрическое место центров кривизны трактрисы – ее *эвольвента*. Для этого найдем ее кривизну, используя определение кривизны как скорости (по натуральному параметру) вращения касательной. Так как $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2}{\operatorname{tg}\alpha} d\alpha^2$, получаем

$$\frac{1}{R} = k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{a} = \frac{y}{a^2\cos\alpha}$$

(R – радиус кривизны). Но $\frac{y}{\cos\alpha}$ есть отрезок нормали до оси абсцисс. Обозначив его N, получим $RN = a^2$. Значит, отрезок касательной a есть среднее геометрическое между R и N. Так как выпуклость кривой направлена вниз ($\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} > 0$ слева от оси ординат), мы получаем такое геометрическое построение центра кривизны: это есть точка пересечения нормали и перпендикуляра к оси абсцисс в точке пересечения с этой осью касательной к кривой (мы используем то, что высота в прямоугольном треугольнике есть среднее геометрическое отрезков гипотенузы).

Задачи (*см. учебник А.П. Нордена, §48*):

Найти координаты центра кривизны при данном значении параметра α и показать, что центры кривизны образуют цепную линию $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

Показать, что радиус кривизны трактрисы R равен длине дуги цепной линии от особой точки трактрисы до центра кривизны.

Показать, что цепная линия касается радиуса кривизны трактрисы в центре кривизны.

Эти свойства цепной линии означают, что она является *эволютой* трактрисы (см. след. пункт).

4.9 Эволюты и эвольвенты

Теорема.

1. *Кривая ζ, образованная центрами кривизны данной кривой $\gamma = \mathbf{r}(s)$ (s – нормальный параметр γ), служит огибающей семейства нормалей γ, т.е. касательные к ζ служат нормалями к γ.*

2. *Радиусы кривизны γ равны длинам дуг на ζ до соответственной точки от некоторого начала.*

3. *Если кривая служит кривой центров кривизны для двух разных кривых, то расстояние между соответственными точками этих кривых (*эвольвент данной кривой*) постоянно.*

Доказательство. 1) Напишем параметрическое задание кривой ζ: $\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k}\boldsymbol{\nu}(s)$, беря за параметр натуральный параметр кривой $\gamma = \mathbf{r}(s)$. Вектор скорости $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ есть $\boldsymbol{\tau} + (\frac{1}{k})^{\cdot}\boldsymbol{\nu} - (\frac{1}{k})k\boldsymbol{\tau} = (\frac{1}{k})^{\cdot}\boldsymbol{\nu}$. Таким образом, вектор скорости направлен по нормали к γ в соответствующей точке.

2) Возьмем теперь в качестве параметра $\bar{s}$ натуральный параметр кривой ζ и запишем задание $\gamma = \mathbf{r}(\bar{s})$ в этом параметре: $\mathbf{r}(\bar{s}) = \boldsymbol{\rho}(\bar{s}) + R(\bar{s})\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})$, где R – радиус кривизны γ, а $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ – касательный орт ζ в соответственных точках. Тогда вектор скорости кривой γ есть $\dot{\mathbf{r}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} + \dot{R}\bar{\boldsymbol{\tau}} + R\bar{\boldsymbol{\tau}}'$ ($\bar{\boldsymbol{\tau}}$ орт касательной кривой ζ). Согласно предыдущему, орты касательных двух кривых в соответственных точках ортогональны, и мы получаем: $0 = \langle \dot{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\tau}} \rangle = 1 + \dot{R} + R\bar{k}\langle \bar{\boldsymbol{\nu}}\ \bar{\boldsymbol{\tau}} \rangle = 1 + \dot{R}$. Интегрирование дает: $R(\bar{s}) = R(\bar{s}_0) - \int_{\bar{s}_0}^{s} ds = R(\bar{s}_0) - (\bar{s} - \bar{s}_0) = R(\bar{s}_0) - \triangle\bar{s}$.

Если начальная точка $\bar{s} = 0$ отвечает точке пересечения этих кривых, то получается, что радиус кривизны γ равен длине дуги ζ от этой точки пересечения до соответственной точки.

3) С другой стороны из этой формулы следует, что расстояние между соответственными точками двух эвольвент той же кривой постоянно. $\square$

Определение. Кривая ζ, состоящая из центров кривизны кривой γ, называется ее *эволютой*, а γ – *эвольвентой* кривой ζ.

Упражнение. Найдите кривизну цепной линии, используя то, что она эволюта трактрисы.

4.10 Формулы для трехгранника Френе в $\mathbb{R}^3$

Трехгранник Френе кривой в $\mathbb{R}^3$. Мы уже знаем названия трех осей подвижной системы координат в точках гладкой кривой. Это касательная, (главная) нормаль и перпендикулярная им бинормаль. Их орты обозначаются $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$. Плоскость, содержащая касательную и нормаль, называется соприкасающейся. Осталось назвать две другие плоскости трехгранника, это *нормальная* плоскость, содержащая нормаль и бинормаль и ортогональная касательной, и *спрямляющая*, (содержащая касательную и бинормаль). Смысл последнего названия станет ясен немного ниже.

Уравения координатных плоскостей трехгранника для произвольного параметра. Эти уравнения естественно записывать в нормальной форме. Найдем уравнения для произвольной параметризации.

Соприкасающаяся плоскость. Запишем нормальный вектор к этой плоскости как векторное произведение $[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]$, тогда получим уравнение соприкасающейся плоскости для кривой $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ в виде $\langle[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}], (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r})\rangle = 0$ или:

$$(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r})) = \begin{pmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{pmatrix} = 0.$$

(Греческие буквы обозначают координаты переменной точки на плоскости, а латинские – той точки на кривой, в которой взята плоскость.)

Нормальная плоскость. Уравнение плоскости нормальной к вектору $\dot{\mathbf{r}}$ есть $\langle\dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}\rangle = 0$, где $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор точки на плоскости, а $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки кривой, в которой проведена плоскость.

Спрямляющая плоскость. Уравнение спрямляющей плоскости (она нормальна к главной нормали кривой) есть $\langle\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}\rangle = 0$. Чтобы выразить его в прозвольной параметризации кривой, вспомним (п.4.8), что $k\dot{s}^2\boldsymbol{\nu} = \ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\tau}\ddot{s}$, откуда $\ddot{s} = \langle\ddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau}\rangle$ и $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{k\dot{s}^2}(\ddot{\mathbf{r}} - \langle\ddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau}\rangle\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{k\dot{s}^2}(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|^2}\langle\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}\rangle\dot{\mathbf{r}})$, (т.к. $\boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$). Таким образом, уравнение записывается в таком виде:

$$\langle\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}, |\dot{\mathbf{r}}|^2\ddot{\mathbf{r}} - (\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}\rangle = 0.$$

Формула кривизны. Для вычисления кривизны выше была получена формула: $k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$. В $\mathbb{R}^3$ выражение в координатах получается более сложным, чем для двумерного случая:

$$k = \frac{\sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Формула кручения. Чтобы получить формулу кручения, мы должны к выражениям двух первых производных, приведенных в предыдущем пункте, ($\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}t'$, $\mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}(t')^2 + \dot{\mathbf{r}}t''$) добавить выражение третьей производной по натуральному параметру через производные по произвольному параметру: $\mathbf{r}''' = \dddot{r}(t')^3 + 3\ddot{r}t't'' + \dot{r}t'''$.

Это выражение вместе с предыдущими нужно подставить в равенство

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = ([\mathbf{r}', \mathbf{r}''], \mathbf{r}''') = (k\boldsymbol{\beta}, -k^2\boldsymbol{\tau} + k'\boldsymbol{\nu} + k\varkappa\boldsymbol{\beta}) = k^2\varkappa.$$

Получится $k^2\varkappa = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})t'^6$. Учитывая, что $t' = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|}$ и $k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$, имеем

$$\varkappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{k^2|\dot{\mathbf{r}}|^6} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}.$$

Упражнение. Запишите это выражение в координатах.

Упражнение. Выведите из этих выражений для трехмерного случая:

– равенство нулю кривизны в интервале параметра влечет, что в этом интервале $\ddot{\mathbf{r}}$ пропорционально $\dot{\mathbf{r}}$ (и, значит, кривая является интервалом прямой),

– равенство нулю кручения в интервале параметра означает, что в этом интервале кривая плоская, ($\mathbf{r}'''$ ортогонально векторному произведению первых двух производных и, значит, линейно через них выражается)

– при зеркальном отражении кручение меняет знак.

4.11 Разложение Тейлора отклонения от плоскости.

Пусть дана кривая $\mathbf{r}(s)$ с натуральным параметром в окрестности точки $M_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$, $s_0 = 0$. Расстояние от кривой до плоскости, заданной нормальным уравнением $\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$, равняется $l = \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle$. Знак l положителен, если точка кривой лежит с той стороны, в которую указывает нормальный вектор $\mathbf{n}$.

Разложение l в ряд Тейлора получается подстановкой разложения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0 s + \frac{1}{2}\mathbf{r}''_0 s^2 + \frac{1}{6}\mathbf{r}'''_0 s^3 + ...$ (см.гл. 5, п.3). С точностью до 4-ого порядка оно имеет вид

$$l = (\mathbf{n}, \mathbf{r}'_0)s + \frac{1}{2}(\mathbf{n}, \mathbf{r}''_0)s^2 + \frac{1}{6}(\mathbf{n}, \mathbf{r}'''_0)s^3 + As^4.$$

Применяя формулы Френе, получаем (индекс 0 опускается):

$$l = (\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})s + \frac{k}{2}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu})s^2 + \frac{1}{6}(\mathbf{n}, -k^2\boldsymbol{\tau} + k'\boldsymbol{\nu} + k\varkappa\boldsymbol{\beta})s^3 + As^4.$$

Общая плоскость. Плоскость, проходящая через точку M_0, является *трансверсальной* к кривой, когда $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) \neq 0$, т.е. не касается ее (не содержит касательную), и расстояние от точки M кривой, приближающейся к M_0, до плоскости – величина того же порядка малости, что и длина дуги $\overset{\smile}{MM_0}$ или расстояние до M_0.

Касательные плоскости и соприкасающаяся плоскость. Плоскость *касается* кривой в точке M_0, если она содержит касательную в этой точке, это равносильно тому, что $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) = 0$ и, значит, расстояние от точки кривой до такой плоскости имеет порядок малости по крайней мере второй. Считая, что кривизна в точке M_0 не нуль, мы получим, что этот порядок в точности равен два, если плоскость не соприкасающаяся, т.е. $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}) \neq 0$, например, если это спрямляющая плоскость. Для соприкасающейся плоскости ($(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) = 0$ и $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}) = 0$) порядок равен трем, если в M_0 не обращается в нуль кривизна или ее производная (или больше, если $k = 0$ и $k' = 0$).

4.12 Вид кривой в сопровождающем трехграннике

Пересечение кривой с плоскостью. При малом s знак l совпадает со знаком первого ненулевого члена разложения. Этот знак меняется при переходе через точку M_0, если степень s нечетная, и не меняется, если она четная. Изменение знака l означает, что точка переходит с одной стороны плоскости на другую.

Из этого следует, что если плоскость трансверсальная или соприкасающаяся, то точка кривой переходит с одной стороны плоскости на другую, если же это касательная, но не соприкасающаяся, то она остается с одной стороны. (Предполагается, что кривизна и кручение в точке ненулевые.)

Проекции кривой на оси репера Френе. Если координаты в сопровождающем репере вдоль осей $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$ обозначить соответственно x, y, z, то они будут совпадать с расстояниями до соответствующих координатных плоскостей репера с учетом знака и первые члены разложения этих координат для точки M на кривой будут:

$$\begin{aligned} x &\approx s \\ y &\approx \tfrac{k}{2}s^2 \\ z &\approx \tfrac{k\varkappa}{6}s^3. \end{aligned}$$

Проекции на координатные плоскости. Чтобы получить проекции кривой на одну из координатных плоскостей репера, нужно отбросить дополнительную координату. (Мы снова сохраняем только первые члены разложений.)

Проекция на соприкасающуюся плоскость получается отбрасыванием координаты z, уравнение этой проекции в параметрической форме оказывается уравнением *параболы*: $x = s, y = \frac{1}{2}ks^2$. "Усы" этой параболы направлены в сторону, указываемую ортом нормали $\boldsymbol{\nu}$.

Проекция на спрямляющую плоскость оказывается *кубической параболой* $z = \frac{1}{6}k\varkappa x^3$. В зависимости от знака кручения кривая переходит с отрицательной на положительную сторону соприкасающейся плоскости или наоборот, где положительная сторона указана направлением бинормали. (При изменении направления обхода меняет направление и орт бинормали.)

Проекция на нормальную плоскость имеет вид *полукубической параболы*: $y = \frac{1}{2}ks^2, z = \frac{1}{6}k\varkappa s^3$. Она имеет в точке M_0 *остриё*, причем ветви этой проекции лежат по разные стороны от бинормали. (ср. п.9 гл.1).

4.13 Восстановление кривой по функциям кривизны и кручения

Гладкую кривую в $\mathbb{R}^3$ можно восстановить по функциям кривизны $k(s)$ и кручения $\varkappa(s)$. (В частности, плоскую кривую можно восстановить по кривизне $k(s)$). Для этого нужно изучить свойства системы Френе. (Под системой Френе мы понимаем здесь абстрактно заданную систему дифференциальных уравнений, имеющую вид (–), не связывая ее с определенной кривой.)

Рассмотрим систему Френе в трехмерном пространстве как систему линейных обыкновенных *векторных* уравнений. Такая система задается двумя функциями $k(t) > 0$, $\varkappa(t)$, где t меняется в некотором интервале (a, b). Мы имеем здесь одну и ту же систему обыкновенных дифференциальнных уравнений, повторенную три раза – по одному для каждой координаты. Эти три одинаковые системы отличаются только начальными данными. В нашем случае начальные данные образуют 3×3-матрицу, которая должна быть невырожденной (чтобы получить фундаментальную систему трех решений). Мы возьмем в качестве начального ортонормированный репер, который обозначим $(\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\beta}_0)$. Соответствующую фундаментальную систему решений обозначим $\boldsymbol{\tau}(t)$, $\boldsymbol{\nu}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$. Допустим, $t_0 = 0$.

В силу теоремы о существовании и единственности для линейных систем эти решения также образуют реперную функцию, т.е. для каждого t векторы $\boldsymbol{\tau}(t)$, $\boldsymbol{\nu}(t)$, $\boldsymbol{\beta}(t)$ независимы и образуют репер. Мы покажем сейчас, что для нашей системы этот репер при каждом значении t будет ортонормированным. *Существенно здесь то, что матрица нашей системы кососимметрична и начальный репер ортонормирован.*

Докажем вначале общий факт.

Лемма. *Пусть $X(t)$ – $n \times n$ матрица, зависящая от параметра, причем в начальный момент $t = 0$ она ортогональна. Тогда следующие утверждения равносильны:*
(i) *матрица $X(t)$ ортогональна при всех t;*
(ii) *при всех t матрица $X(t)^{-1}\dot{X}(t)$ кососимметрична.*

Доказательство. Положим $A(t) = X^T(t)X(t)$, $B(t) = X(t)^{-1}\dot{X}(t)$. Тогда

$$\dot{A} = \dot{X}^T X + X^T \dot{X} = \dot{X}^T\left((X^T)^{-1}X^T\right)X + X^T\left(XX^{-1}\right)\dot{X} = B^T A + AB.$$

Матрица $X(t)$ ортогональна тогда и только тогда, когда $A(t) = X^T(t)X(t) = \mathbf{E}$ – единичная матрица. Если $A(t) = \mathbf{E}$ для всех t, то из полученного равенства следует, что $B^T(t) + B(t) = 0$, т.е. $B(t)$ кососимметрична для всех t.

Если при всех t матрица $B(t)$ кососимметрична и A(0) = E, то постоянная функция $A(t) = \mathbf{E}$ является решением дифференциального уравнения $\dot{A} = B^T A + AB$ с этим начальным условием. Решение единственно и, таким образом, из кососимметричности матрицы $B(t)$ следует ортогональность $X(t)$. □

Теперь мы будем доказывать, что для двух функций $k(t) > 0$ и $\varkappa(t)$ имеется единственная кривая, определенная с точностью до движения пространства и выбора начального значения параметра, для которой параметр t является натуральным, а данные функции служат кривизной и кручением этой кривой.

Сначала фиксируем начальную точку и начальный репер Френе:

Теорема. *Пусть даны две функции $k(t) > 0)$ и $\varkappa(t)$ и в трехмерном пространстве даны начальная точка P и репер $(\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\beta}_0)$ в этой точке, задающий положительную ориентацию пространства.*

Существует единственная кривая $\mathbf{r}(t)$, натуральный параметр которой совпадает с t, причем для начального значения t_0 $\mathbf{r}(t_0) = P$, репер Френе этой кривой в точке P совпадает с данным репером $(\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\beta}_0)$, и для каждого значения t кривизна и кручение этой кривой в точке $\mathbf{r}(t)$ равны соответственно $k(t)$ и $\varkappa(t)$.

Доказательство. Будем считать, что P есть начало $\mathbb{O}$ пространства $\mathbb{R}^3$ и что $t_0 = 0$.

Сначала не обращая внимания на начальную точку, построим с помощью данных функций систему Френе:

$$\begin{array}{rlll} \boldsymbol{\tau}' = & & k\boldsymbol{\nu}, & \\ \boldsymbol{\nu}' = & -k\boldsymbol{\tau}+ & & \varkappa\beta, \\ \boldsymbol{\beta}' = & & -\varkappa\boldsymbol{\nu}. & \end{array} \qquad (-)$$

и применим к ней предыдущую лемму. Мы получим реперную функцию

$$(\boldsymbol{\tau}(t),\, \boldsymbol{\nu}(t),\, \boldsymbol{\beta}(t)), \qquad \text{(xx)}$$

в которой для каждого t репер ортонормированный (и положительно ориентированный) и, в частности, векторы репера единичные для каждого t.

Рассмотрим интеграл $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int\limits_0^t \boldsymbol{\tau}(t)\,dt$, приняв, что $\mathbf{r}(0) = \mathbb{O}$.

Мы получим кривую γ, проходящую в начальный момент через $\mathbb{O}$, вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}(t)$ которой в точке с параметром t есть $\boldsymbol{\tau}(t)$. Это единичный вектор, значит, t ее натуральный параметр.

Покажем теперь, что кривизна и кручение кривой γ совпадают с данными функциями, а репер Френе кривой в каждой точке совпадает с $(\boldsymbol{\tau}(t),\, \boldsymbol{\nu}(t),\, \boldsymbol{\beta}(t))$.

Обозначим кривизну и кручение кривой γ через $\hat{k}(t)$ и $\hat{\varkappa}$. Мы имеем равенства $\hat{k}(t)\hat{\boldsymbol{\nu}}(t) = \tau'(t) = k(t)\boldsymbol{\nu}(t)$ (левое равенство как первое уравнение Френе для γ, а правое как уравнение системы, которую мы построили по данным функциям). Беря модули, получим $\hat{k}(t) = k(t)$ и тогда $\hat{\boldsymbol{\nu}}(t) = \boldsymbol{\nu}(t)$.

Аналогично имеем: $-\hat{k}(t)\tau(t) + \hat{\varkappa}(t)\hat{\boldsymbol{\beta}}(t) = \boldsymbol{\nu}'(t) = -k(t)\tau(t) + \varkappa(t)\boldsymbol{\beta}(t)$.

Первые слагаемые слева и справа равны, поэтому $\hat{\varkappa}(t)\hat{\boldsymbol{\beta}}(t) = \varkappa(t)\boldsymbol{\beta}(t)$. Беря модули, получаем $|\hat{\varkappa}(t)| = |\varkappa(t)|$, сокращая – $\hat{\boldsymbol{\beta}}(t) = \boldsymbol{\beta}(t)$.

(Направления векторов $\hat{\boldsymbol{\beta}}(t)$ и $\boldsymbol{\beta}(t)$ одинаковы, в силу согласованности с ориентацией пространства: для кривой γ это входит в определение репера Френе кривой, для решения уравнения – по выбору начального репера.)

Итак, репер кривой γ, построенной интегрированием первого вектора репера (xx), полученного решением системы (–), совпал с репером (xx), а кривизна и кручение этой кривой с данными функциями. Кривая с такими свойствами единственна, так как система (–) имеет единственное решение с заданным начальным репером, и интегрирование однозначно определяет кривую с выбранным началом. $\square$

Следствие из теоремы. *Две кривые с равными кривизнами и кручениями в точках с одинаковым значением натурального параметра переводятся друг в друга движением пространства.*

Доказательство. Для двух кривых мы всегда ровно одним движением можем совместить две их наперед заданные точки и при этом так, что совместятся их реперы Френе в этих точках. (Реперы имеют одинаковую ориентацию, т.к. ориентация определяется знаком кручения, а кручения совпадают.).

Передвинем одну кривую так, чтобы совместились две точки данных кривых с одним значением параметра, и совместились реперы Френе.

Значения кривизны и кпучения при этом у перемещенной кривой не изменятся. Но по теореме, в силу единственности, она тогда должна полностью совместиться с другой кривой. $\square$

Мы можем сказать, что функции кривизны и кручения вместе определяют форму кривой. Передвигая кусок жесткой проволоки в пространстве, мы не изменяем кривизны и кручения и репер Френе остается тем же. Наоброт, если даны два куска проволоки, у которых в соответственных точках кривизна и кручение совпадают, то мы сможем, по теореме, совместить их движением.

Упражнение. Кривая с постоянными кривизной и кручением – винтовая линия, см. выше п.2.10.

Двумерный случай. Разберем подробнее для большей ясности вычисления в случае плоской кривой. Мы имеем здесь векторную систему

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{\tau}' & = \ k\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}' & = -k\boldsymbol{\tau}. \end{array}$$

Пусть $\mathbf{r}(s) = (x(s),\, y(s))$ – определяемая этой системой кривая (s – параметр системы и автоматически натуральный параметр кривой).

Тогда $\boldsymbol{\tau}(s) = (x'(s),\, y'(s))$ и $\boldsymbol{\nu}(s) = (-y'(s),\, x'(s))$, т.к. $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}) = 0$.

Имеем две одинаковые системы для первых и для вторых координат. Ограничимся первой:

$$\begin{array}{rl} x''(s) & = -k(s)y'(s) \\ y''(s) & = \ k(s)x'(s). \end{array}$$

Вектор $\boldsymbol{\tau}$ единичный, т.е. $x'^2 + y'^2 = 1$, отсюда $x''^2 + y''^2 = k^2$.

Положим $x'(s) = u(s)$. Тогда $u'^2 + k^2u^2 = k^2$, т.е. $u' = k\sqrt{1-u^2}$. Это уравнение интегрируется:

$$u(s) = \sin\left(\int_{s_0}^{s} k(s)ds\right).$$

После этого можно найти $x(s)$ и $y(s)$.

Пусть, например, $k(s) = s$. Тогда $u(s) = \sin(\frac{s^2+c_1}{2})$, и

$$x(s) = \int_0^s \sin(\frac{s^2+c_1}{2})ds + c_2, \qquad y(s) = \int_0^s \cos(\frac{s^2+c_1}{2})ds + c_3.$$

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 5. Поверхности в $\mathbb{R}^3$. Соприкосновение.

5.1 Поверхности и их параметризации

Определение. Подмножество M в $\mathbb{R}^3$ называется *гладкой поверхностью*, если для каждой точки $x \in M$ найдется регулярное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$, где V – открытое подмножество $\mathbb{R}^2$, такое, что $\varphi(V) = U$ – открытая окрестность x относительно M и φ взаимно однозначно отображает V на U.

Такое отображение φ называется *локальной параметризацией* поверхности, а пара (U, φ) *картой* в окрестности x (по аналогии с географическими картами).

С помощью карты вводится локальная система координат в M: для каждой точки $x \in U$ ее локальными кординатами в данной карте являются стандартные координаты точки $\varphi^{-1}x$.

Преобразования параметризаций гладкой поверхности.

Как и в случае кривой две параметризации поверхности M связаны в общей области диффеоморфным преобразованием. Мы обозначаем координаты в $\mathbb{R}^3$ через x, y, z.

Предложение. *Если имеются две регулярные параметризации $\varphi_1 : V_1 \to \mathbb{R}^3$ и $\varphi_2 : V_2 \to \mathbb{R}^3$ ($\varphi_1(V_1) = U_1 \subset M$, $\varphi_2(V_2) = U_2 \subset M$) гладкой поверхности в окрестности некоторой ее точки (x_0, y_0, z_0), то отображение $\psi = \varphi_2^{-1}\varphi_1 : V_1' \to V_2'$, где $V_1' = \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ и $V_2' = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$, является диффеоморфизмом.*

Этот диффеоморфизм называется *преобразованием локальных координат* при переходе от карты φ_2 к карте φ_1 (он задает нелинейную систему координат в области V_2', выражая стандартные координаты в области V_2' через стандартные координаты области V_1'.)

Доказательство (ср. п.2.3) Обозначим координаты в V_1' через (u_1, v_1), в V_2' через (u_2, v_2).

Т.к. отображение $\varphi_1 : V_1 \to \mathbb{R}^3$ регулярно, его матрица Якоби имеет ненулевой 2×2-минор и, значит композиция φ_1 и проекции p на одну из координатных плоскостей, скажем, на $\mathbb{O}xy$, определяет, по теореме об обратной функции, диффеоморфизм окрестности O_1 точки $(u_{10}, v_{10}) = \varphi_1^{-1}(x_0, y_0, z_0)$ в V_1' на окрестность W точки (x_0, y_0) в координатной плоскости. Получившееся диффеоморфное отображение окрестности O_1 на W обозначим g_1.

Композиция $p\varphi_2$, возможно, не будет регулярной, но будет непрерывно дифференцируемым отображением. Ее композиция с g^{-1} даст непрерывно дифференцируемое отображение окрестности точки $(u_{20}, v_{20}) = \varphi_2^{-1}(x_0, y_0, z_0)$ на окрестность точки (u_{10}, v_{10}). По симметрии обратное отображние также будет непрерывно дифференцируемым и, значит, каждое из них будет регулярным в окрестности соответствующей точки. Следовательно, мы получим диффеоморфизм между достаточно малыми окрестностями этих точек.

Это и будет требуемый диффеоморфизм ψ окрестностей точек (u_{10}, v_{10}) и (u_{20}, v_{20}). □

Следствие. *Попутно мы получили локальное представление M в виде графика гладкого отображения.*

Действительно, композиция $\varphi_1 g_1^{-1}$ есть регулярное отображение окрестности W в $\mathbb{R}^3$, образ которого есть окрестность в M и которое обратно проекции на плоскость $\mathbb{O}xy$.

Это значит, что мы получаем на W гладкую функцию $z(x, y)$, графиком которой служит окрестность точки (x_0, y_0, z_0) в M. □

5.2 Три способа задания гладкой поверхности.

Мы показали, что, аналогично гладким кривым, гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, определенная регулярной параметризацией $\varphi(u,v)$ представляется в окрестности каждой точки как график гладкого отображения. При этом за локальные (регулярные) координаты каждой точки в этой окрестности принимаются координаты ее проекции в координатную плоскость.

Теорема о неявной функции, как мы помним, утверждает, что прообраз точки при регулярном отображении области евклидова пространства в евклидово пространство меньшей размерности также есть график гладкого отображения области одной координатной плоскости в дополнительную координатную плоскость. В нашем случае речь идет об отображении $F : G \to \mathbb{R}^1,\ G \subset \mathbb{R}^3$, т.е. о функции, заданной в области трехмерного пространства. Прообраз точки двумерен и служит графиком отображения $z = f(x,y)$ области координатной плоскости (например, $\mathbb{O}xy$) в дополнительную координатную прямую. В частности, он будет иметь регулярную параметризацию из этой области: $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$.

Следующая теорема вполне аналогична соответствующей теореме для кривых:

Теорема. *Следующие три способа локального задания гладкой поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ эквивалентны:*

1. *Каждая точка $x \in M$ имеет в M окрестность $U(x)$, которая представляется прообразом точки при регулярном отображении окрестности $G(x)$ этой точки в пространстве $\mathbb{R}^3$ $(U(x) = G(x) \cap M)$ в пространство $\mathbb{R}^1$;*

2. *Каждая точка $x \in M$ имеет окрестность $U(x)$ в поверхности, служащей образом регулярного отображения $\varphi(u,v)$ некоторой области $V \subset \mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$ (задающего карту или регулярную параметризацию $U(x)$);*

3. *Каждая точка $x \in M$ имеет окрестность $U(x)$ в поверхности, которая служит графиком отображения области W некоторой координатной плоскости в дополнительную координатную прямую.*

Доказательство. Мы уже знаем, что каждое из свойств 1. и 2. влечет 3. Кроме того, если некоторая окрестность в M служит графиком гладкой функции $z = f(x,y)$ в области $V \subset \mathbb{O}xy$, то отображение $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$ есть регулярное отбражение в $\mathbb{R}^3$ (почему?) и служит локальной регулярной параметризацией поверхности.

Таким образом, 2. и 3. эквивалентны.

Осталось показать, что из 3. следует 1. Доказательство состоит в переносе правой части в левую.

Именно, пусть M является графиком гладкого (не обязательно регулярного!) отображения $z = F(x,y)$, где (x,y) принадлежит области координатной плоскости $\mathbb{O}\,xy$, а z лежит в дополнительной координатной прямой. Тогда точки на графике этого отображения являются решениями уравнения $z - F(x,y) = 0$, причем в точках M отображение $\Phi(x,y,z) = z - F(x,y)$ (окрестности точки $(x_0, y_0, z_0 = F(x_0,y_0))$ в $\mathbb{R}^3$ в прямую) является регулярным. Действительно, производная по z равна единице. □

Окрестность в поверхности, которая имеет одно из этих представлений будем называть *простым куском* поверхности (по аналогии с простой дугой).

Задача. *Окрестность простого куска поверхности.* Пусть простой кусок M в $\mathbb{R}^3$ предствлен как график гладкой функции $z = f(x,y)$, где (x,y) лежит в области $U = I_1$ плоскости $\mathbb{O}xy$. Рассмотрим на U графики функций $f(x,y) + c$, где $c \in (-1,+1) = I_2$.

Покажите, что эти графики не пересекаются, и их объединение есть открытая окрестность V графика $f(x,y)$ в $\mathbb{R}^3$. При этом каждая точка V однозначно определяется парой $((x,y),c)$, $(x,y) \in U = I_1$, $c \in I_2$, т.е. мы имеем взаимно однозначное отображение прямого произведения $I_1 \times I_2$ на V. Покажите, что это есть диффеоморфизм.

Постройте такую же окрестность графика, исходя из двух других способов задания простого куска.

Следствие. *Это построение означает, что локальную систему координат, заданную в поверхности, можно продолжить до локальной системы координат в области трехмерного пространства.*

Из этого построения следует также, что простой кусок лежит на координатной поверхности некоторой локальной системы координат в $\mathbb{R}^3$. Можно сказать, что в некоторой локальной системе координат в $\mathbb{R}^3$ простой кусок поверхности является плоской областью (открытым подмножеством плоскости).

5.3 Касательная плоскость поверхности. Касательные векторы

Наши рассуждения снова будет направлять аналогия со случаем кривых.

Для кривой мы определили касательную как прямую, имеющую в качестве направляющего вектора вектор скорости кривой, приложенный к точке кривой. При этом касательная оказывается образом стандартной прямой при отображении дифференциала (точнее, линеаризации). Далее мы показали, что это определение эквивалентно определению через предельное положение секущей, что оно не зависит от параметризации и что касательная есть единственная прямая, расстояние до которой от точки на кривой есть бесконечно малая по крайней мере второго порядка по отношению к приращению параметра.

Для поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ параметризацию мы назвали *картой.* Это регулярное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$, которое взаимно однозначно отображает V на окрестность U данной точки $A \in M$ относительно поверхности (и записывается системой из трех функций от двух переменных).

Уточним, что картой в M называется открытое *относительно* M подмножество $U \subset M$ вместе с фиксированным гомеоморфизмом $\varphi : V \to U$, где V – область в $\mathbb{R}^2$, причем φ должно быть регулярным отображением в $\mathbb{R}^3$. Стандартные координаты точки $z \in V$ принимаются за (криволинейные) локальные координаты точки $x = \varphi(z)$ в M.

Удобно представить параметризацию векторной функцией от двух переменных в виде $\varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{r}(u, v)$.

Определение. *Касательной плоскостью* $\tau_A M$ к точке $A \in M \subset \mathbb{R}^3$ называется образ линеаризации L отображения φ в этой точке, т.е. $L(\mathbf{h}) = A + d\varphi(\mathbf{h})$. Здесь $\mathbf{h}$ вектор в $\mathbb{R}^2$ с началом в $\mathbb{O}$, $d\varphi$ – дифференциал отображения φ, и запись справа означает вектор, приложенный к точке A.

Касательная плоскость, как всякая плоскость, является одновременно двумерным векторным пространством и двумерным аффинным (“точечным”) пространством.

Именно, совокупность всех векторов, полученных указнным образом, образует линейное пространство, являющееся подпространством в V_A (V_A есть векторное пространство в $\mathbb{R}^3$ с началом в A). Оно называется (двумерным) *касательным пространством* к поверхности M в точке A, а соответствующее аффинное пространство и есть *касательная плоскость* $\tau_A M$.

Сами векторы в пространстве $\tau_A M$ называются *касательными векторами* к M в точке A.

Чтобы убедиться в двумерности, достаточно заметить, что стандартные базисные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$ отображаются дифференциалом в независимые векторы, поскольку 3×2-матрица Якоби отображения φ имеет ранг 2 (максимальный). Координаты этих векторов служат столбцами матрицы Якоби: $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u)^T$ и $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)^T$ (векторы записываются столбиками, а T вверху – знак транспонирования.)

Произвольный касательный вектор в точке A записывается в виде $\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$, его координаты: $x_u du + x_v dv$, $y_u du + y_v dv$, $z_u du + z_v dv$. Производные берутся в точке $\varphi^{-1}A$.

Запишем касательную плоскость в координатах в параметрической форме. Касательная плоскость служит образом линейного отображения: $\mathbf{r}(u_0, v_0) + (J_\varphi)(u - u_0,\, v - v_0)^T$, где (J_φ) – матрица Якоби. Например, $x(u, v) = x_0 + x_u(u - u_0) + x_v(v - v_0)$, и аналогично две другие координаты.

Для записи плоскости в нормальной форме нужен нормальный вектор. Им является векторное произведение $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$. Уравнение касательной плоскости есть $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho} \rangle = 0$, где $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(x, y, z)$ радиус-вектор точки плоскости.

В качестве нормального вектора чаще всего мы будем брать орт $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|}$.

Мы можем сказать, что с помощью линеаризации мы вводим *на касательной плоскости* аффинную систему координат, принимая за координаты вектора, приложенного к точке A, стандартные координаты его прообраза (относительно $d\varphi$) в $\mathbb{R}^2$. Эти же координаты du, dv будут у него в его выражении через 2-репер $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ в касательной плоскости в $\mathbb{R}^3$.

5.4 Независимость касательной плоскости от параметризации. Тензорное определение касательного вектора.

Утверждение. *Разные параметризации дают одну и ту же касательную плоскость в данной точке поверхности.*

Доказательство. Две параметризации связаны диффеоморфизмом $\varphi_2 \psi = \varphi_1$. Так как композиция дифференциалов $d\varphi_2 d\psi$ есть дифференциал композиции отображений ($d(\varphi_2\psi) = d\varphi_1$), а ψ есть диффеоморфизм (значит, $d\psi$ изоморфизм), образы дифференциалов обеих параметризаций совпадают: $d\varphi_2(\mathbb{R}^2_2) = d\varphi_1(\mathbb{R}^2_1)$ ($\mathbb{R}^2_1$ и $\mathbb{R}^2_2$ координатные плоскости для двух карт). □

Кроме того, мы получаем, что координаты вектора касательной плоскости в двух параметризациях получаются один из другого умножением на матрицу Якоби координатного преобразования ψ. Действительно, так как $d\varphi_1 = d\varphi_2 d\psi$, мы получаем в матричной форме: $(J_{\varphi_1}) = (J_{\varphi_2})(J_\psi)$.

Мы приходим к следующему классическому (*тензорному*) определению касательного вектора:

Определение. *Касательным вектором* в точке A поверхности называется правило, сопоставляющее каждой (нелинейной) локальной системе координат в окрестности точки пару чисел (координаты вектора в данной системе) так, что пары отвечающие двум локальным системам в этой точке, получаются друг из друга умножением на матрицу Якоби координатного перехода.

5.5 Касательный вектор к поверхности и класс кривых соприкасающихся в точке.

В аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ любой размерности n рассмотрим гладкие кривые, проходящие через точку A и имеющие фиксированные регулярные параметризации. В множестве этих кривых мы можем ввести следующее отношение эквивалентности:

Определение. Регулярно параметризованные кривые эквивалентны в точке A, если они имеют совпадающий вектор скорости в точке A.

Очевидно, это действительно есть отношение эквивалентности.

Мы примем, что значение каждого параметра в точке A равно нулю, так что можно считать, что для любых двух кривых в малой окрестности A их параметризаци определены на одном и том же интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Это отношение эквивалентности можно ввести, не опираясь на понятие вектора, через отношение соприкосновения.

Определение. Две регулярно параметризованные кривые $\mathbf{r}(t)$ и $\bar{\mathbf{r}}(t)$ *соприкасаются* в точке A, если $|\mathbf{r}(t) - \bar{\mathbf{r}}(t)|$ есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем t.

(Заметим, что t имеет, в силу гладкости кривых, тот же порядок малости, что $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)|$ или $|\bar{\mathbf{r}}(t) - \bar{\mathbf{r}}(0)|$.)

Утверждение. *Две кривые $\mathbf{r}(t)$ и $\bar{\mathbf{r}}(t)$ соприкасаются в A тогда и только тогда, когда они имеют общий вектор скорости.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}$ общий вектор скорости данных кривых. Тогда $\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(0)}{t} = \mathbf{v} = \lim_{t\to 0} \frac{\bar{\mathbf{r}}(t)-\bar{\mathbf{r}}(0)}{t}$. Но $\bar{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{r}(0)$, и, значит, $\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{r}(t)-\bar{\mathbf{r}}(t)}{t} = 0$. Обратное очевидно. □

Замечание. Мы можем формально добавить еще один класс эквивалентности – нулевой. В него входят кривые, имеющие в точке A нулевую производную. Эти кривые не гладкие по нашему определению, но пополнение множества классов нулевым вполне естественно. Впрочем, естественность тут алгебраическая – векторное пространство должно иметь нулевой вектор. Геометрически кривая с нулевым вектором скорости может иметь настоящую касательную (по определению: отклонение точки кривой от касательной – бесконечно малая относительно ее расстояния до точки касания). При этом касательная может иметь любое направление. Иными словами, регулярная параметризация определяет касательную однозначно, а нулевой вектор скорости может быть у кривой любого направления.

Теперь мы обернем наше определение. Мы рассматриваем регулярно параметризованные кривые, проходящие через A, причем значение параметра для каждой из них в этой точке равно нулю.

Определение. Назовем *вектором* в точке A класс кривых соприкасающихся в A.

Нулевым вектором назовем класс кривых с дифференцируемой параметризацией, регулярной для $t \neq 0$ и имеющих нулевую производную в $t = 0$.

Множество так определенных векторов находится, в силу предыдущего, во взаимно однозначном соответствии с множеством «старых» векторов-стрелок. Таким образом мы дали новое определение понятию *вектор.* Это определение неудобно для введения векторных операций (даже понятие нулевого вектора пришлось вводить особо). Однако, оно очень удобно для конкретных доказательств. В аффинном пространстве мы можем гладкую кривую, проходящую через точку A, рассматривать как представитель вектора в этом новом смысле.

Мы применим сейчас этот подход для определения понятия *касательного вектора поверхности.* Касательный вектор для поверхности в $\mathbb{R}^3$ пока определен как вектор аффинного пространства («стрелка»), лежащий в касательной плоскости. Полезно иметь его определение *внутреннее* для поверхности, не связанное с объемлющим аффинным пространством. Для этого будем рассматривать гладкие кривые, лежащие на поверхности.

Утверждение. *Пусть дана точка A на поверхности M в $\mathbb{R}^3$. Две регулярно параметризованные кривые $\mathbf{r}(t)$ и $\bar{\mathbf{r}}(t)$, лежащие в M, соприкасаются в точке A тогда и только тогда, когда для некоторой (и тогда для любой) локальной карты $\varphi : V \to M$, $V \subset \mathbb{R}^2$, в окрестности A прообразы $\varphi^{-1}\mathbf{r}(t)$ и $\varphi^{-1}\bar{\mathbf{r}}(t)$ этих кривых соприкасаются в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство следует из того, что отображение φ регулярно и взаимно однозначно, и оставляется читателю. □

Из этого утверждения следует, что для того, чтобы установить, что две кривые в поверхности соприкасаются, нам достаточно обратиться к координатам и убедиться в соприкосновении координатных представителей этих кривых.

Теперь мы можем дать новое определение касательного вектора к поверхности в данной точке.

Определение. Пусть точка A принадлежит поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$. Касательным вектором к поверхности в точке A называется класс попарно соприкасающихся в A регулярно параметризованных кривых, лежащих в M. Образом этого вектора при вложении M в $\mathbb{R}^3$ является общий вектор скорости этих кривых.

Замечание. Важно, что вектор, касательный к поверхности в данной точке, можно представлять кривыми на поверхности, имеющими в качестве вектора скорости в этой точке данный вектор.

5.6 Касательная плоскость в трех способах локального задания поверхности.

Мы можем перенести на случай поверхности утверждения о касательной плоскости в разных способах задания, которые были даны нами для случая кривых.

Для параметрического способа мы *приняли за определение*, что касательная плоскость есть образ линеаризации параметризации поверхности (и показали, что она не зависит от выбора параметризации). Случай неявного задания мы можем оставить в качестве задачи:

Задача. Доказать, что касательная плоскость $\tau_A M$ в точке A поверхности, заданной локально с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$, есть *ядро дифференциала* dF отображения $F(x, y, z) = t$ (перенесенное в точку A), т.е. совокупность решений уравнения $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$. (Сравните со случаем касательной для гладкой кривой.)

Касательные векторы (dx, dy, dz) поверхности удовлетворяют уравнению $dF = F_x dx + F_y dy + \ = 0$ (представим такой вектор вектором скорости кривой, лежащей на поверхности и используем теорему о дифференцировании сложной функции. Это значит,что касательные векторы в данной точке лежат в ядре дифференциала. Но в нашем случае дифференциал есть линейное отображение трехмерного векторного пространства в одномерное, значит, ядро двумерно (если бы оно оказалось трехмерным, все производные F были бы равны нулю). Так как касательная плоскость двумерна (поскольку параметризация поверхности регулярна), она совпадает с ядром дифференциала.

Контрольный вопрос. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной графиком гладкой функции $z = f(x, y)$.

5.7 Соприкосновение кривой с поверхностями

Рассмотрим обобщение способа определения касательной прямой как предела секущей.

В определении касательной у нас даны с одной стороны кривая γ в $\mathbb{R}^n$, будем считать, что она дана с параметризацией $\mathbf{r}(t)$ в окрестности точки $x_0 = \mathbf{r}(t_0)$, а с другой семейство всех прямых в этом же пространстве. Прямая определена, если указаны координаты любого ее направляющего вектора, т.е. n чисел в данной системе координат с точностью до пропорциональности.

Задача состоит тут в том, чтобы выбрать элемент этого семейства, наиболее тесно "прилегающий" к кривой в данной точке. Эта задача была решена с помощью набора чисел, равных первым производным от координат в данной точке кривой (вектора скорости).

В пространстве $\mathbb{R}^3$ пусть дано семейство гладких поверхностей, определяемых конечным числом параметров, и нужно выбрать элемент этого семейства, указав набор параметров так, чтобы отвечающая ему поверхность оказалась наиболее тесно прилегающей к кривой γ в данной точке (x_0, y_0, z_0).

Например, таким семейством поверхностей может быть семейство сфер. Сфера определяется 4-мя параметрами (а именно: 3 координаты центра и радиус).

Если такой элемент семейства существует (и единственен), то он называется *соприкасающимся*. Однако нам нужно уточнить, что значит "наиболее тесно прилегающий".

Для определенности будем считать, что данное семейство, зависящее от k параметров, представлено неявным образом в виде одного уравнения

$$F(x, y, z; c_j) = 0,\ 1 \le j \le k, \qquad +$$

где первая тройка переменных – координаты точки в $\mathbb{R}^3$, а остальные k – параметры семейства.

Если фиксировать k точек на γ, то получится система из k уравнений относительно k переменных c_j для поиска поверхности семейства, проходящего через все эти точки. Эта система, вообще говоря, нелинейна, но можно ожидать, что она имеет решение, возможно, даже однозначное.

В качестве *соприкасающегося* члена семейства берут предельное положение поверхности семейства, проходящей через k точек кривой при одновременном стремлении всех этих точек к данной точке $(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$.

Конечно, существование и единственность такой поверхности, вообще говоря, не гарантируется. Но если соприкасающаяся поверхность найдена, говорится, что соприкосновение имеет порядок $k-1$, по причине, которая станет понятной чуть позже.

5.8 Нахождение соприкасающейся поверхности.

Для поверхности, фиксированной определенным выбором параметров c_j, левая часть уравнения (+) задает функцию от параметра t на кривой $\gamma = (x(t), y(t), z(t))$:

$$f(t, c_j) = F(x(t), y(t), z(t); c_j).$$

В точках пересечения кривой с поверхностью эта функция равна нулю. Тогда, по теореме Ролля, если кривая пересекает эту поверхность в точках, отвечающих значениям параметра t_1 и t_2, имеется промежуточное значение параметра, в которой обращается в нуль первая производная этой функции. Если имеется k точек пересечения, то имеется $k-1$ точка, где обращается в нуль первая производная, и аналогично $k-2$ точки, где обращается в нуль вторая производная ... , в конце концов, имеется точка в которой обращается в нуль производная порядка $k-1$.

Устремляя теперь k значений параметра t, для которых происходит пересечение переменной поверхности семейства с кривой γ к начальному значению t_0, мы одновременно получим стремление к t_0 и тех значений, для которых обращаются в нуль все упомянутые производные функции $f(t)$. Тогда, в силу непрерывности этих производных в точке t_0, мы получим для этой точки систему из k уравнений:

$$\begin{aligned} f(t_0, c_j^0) &= 0 \\ \dot f(t_0, c_j^0) &= 0 \\ \dots\dots\dots &\ \ \dots\dots \\ f^{(k-1)}(t_0, c_j^0) &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы, в которой число уравнений k равно числу переменных c_j, вообще говоря, можно определить нужный набор параметров, т.е. требуемую поверхность (назовем ее предельной).

5.9 Порядок соприкосновения.

Допустим, что в точке $\mathbf{r}(t_0)$ предельная поверхность не имеет особенности. Тогда диффеоморфизмом малой окрестности этой точки пересечение этой окрестности с поверхностью можно перевести, как мы установили (см.выше), в координатную плоскость, причем значение функции $f(t, c_j^0) = F(\mathbf{r}(t), c_j^0)$ станет третьей координатой. Тогда функция $f(t, c_j^0)$ измеряет отклонение точек кривой от этой плоскости. Но т.к. первые $k-1$ производных в точке $\mathbf{r}(t_0)$ нулевые, ее разложение Тейлора начинается с k-ого члена, и мы вправе сказать, что соприкосновение имеет порядок $k-1$.

Для полной аккуратности следует показать, что порядок отклонения точки кривой от поверхности при стремлении этой точки к точке соприкосновения не меняется при диффеоморфизме, если он имеет производные порядка на единицу больше, чем порядок соприкосновения. Мы опустим здесь эту проверку.

Мы рассмотрели здесь соприкосновение кривой с поверхностями в 3. Аналогичным образом можно рассмотреть и соприкосновение кривой с семейством k-мерных поверхностей в n-мерном пространстве (только вместо одного уравнения придется рассмотреть систему уравнений, зависящую от параметров). Мы не будем здесь рассматривать этот общий случай.

5.10 Соприкосновение кривой с плоскостями

Это случай, который потребуется в дальнейшем. Семейство плоскостей в 3-мерном аффинном пространстве является 3-параметрическим. (Например, общее уравнение плоскости $ax+by+cz = d$ имеет 4 параметра, но они заданы с точностью до пропорциональности. Разделив коэффициенты на какой-нибудь из них не равный нулю, мы получим три параметра, если все они меньше ε мы получим окрестность, которую можно условно назвать ε-окрестностью, хотя мы и не вводим расстояний).

Значит, можно искать плоскость, соприкосновение которой с кривой имеет порядок 2. Такая плоскость (существующая по крайней мере в неособых точках, особых мы здесь не рассматриваем) называется *соприкасающейся*. Выше мы определили сорикасающуюся плоскость как плоскость, содержащую касательную и главную нормаль, и показаои, что это единственная пллоскость, проходящая через данную точку, от которой кривая отклоняется с порядком касания 2 или выше.

Покажем, как эта плоскость возникает по общей теории соприкосновения.

В векторной (нормаьной) форме уравнение плоскости есть $\langle \mathbf{N}, \boldsymbol{\rho} \rangle + D = 0$, где $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор точки на плоскости, $\mathbf{N}$ – нормальный вектор к плоскости, а D – свободный член. Согласно общему правилу для соприкасающейся плоскости к кривой $\mathbf{r}(t)$ в точке x_0, т.е. предельному положению плоскости, проходящей через n близких к x_0 точек, имеем систему уравнений для определения коэффициентов плоскости:

$$\begin{aligned} (\langle \mathbf{N}, \mathbf{r}(t) \rangle + D)|_{t=t_0} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\langle \mathbf{N}, \mathbf{r}(t) \rangle + D)|_{t=t_0} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}(\langle \mathbf{N}, \mathbf{r}(t) \rangle + D)|_{t=t_0} &= 0. \end{aligned}$$

После дифференцирования и подстановки имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_0 \rangle + D &= 0 \\ \langle \mathbf{N}, \dot{\mathbf{r}}_0 \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{N}, \ddot{\mathbf{r}}_0 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение выражает тот факт, что точка соприкосновения лежит на соприкасающейся плоскости. Два другие означают, что в этой плоскости лежат первые две производные от параметризации кривой (эти векторы откладываются от точки соприкосновения).

Если первое уравнение заменить уравнением $\langle \mathbf{N}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$, где $\boldsymbol{\rho}$ – переменный радиус-вектор точки на плоскости, то мы получим три вектора, ортогональных одному и тому же вектору $\mathbf{N}$, т.е. лежащих в одной плоскости и следовательно, линейно зависимых. Значит, определитель, составленный из их координат, равен нулю. Это – уравнение соприкасающейся плоскости: $(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0) = 0$.

Оно определяет единственную плоскость, если сами производные линейно независимы в точке $\mathbf{r}_0$.

Контрольный вопрос. Покажите, что если бы вместо плоскостей мы рассматривали семейство прямых, мы бы вернулись к определению касательной как предела секущей.

5.11 Соприкасающаяся окружность плоской кривой и радиус кривизны. Другой подход.

[(ср.п.3.8)

Соприкасающаяся окружность. Окружности на плоскости образуют трехмерное семейство и по общей теории соприкосновения можно искать окружность с соприкосновением второго порядка в данной точке кривой. Такая окружность называется *соприкасающейся*, она определяется как предельное положение окружности, три точки пересечения которой с кривой стремятся к данной точке.

Уравнение соприкасающейся окружности. Пусть дана кривая $\mathbf{r}(s)$, s – натуральный параметр, и на ней точка $A_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$. Единичный касательный вектор кривой обозначим $\boldsymbol{\tau}$. Его производная ему ортогональна, т.е. идет по нормали к кривой. Длину ее обозначим k, а орт нормали $\boldsymbol{\nu}$. Тогда $\boldsymbol{\tau}' = k\boldsymbol{\nu}$. Направление нормали выберем так, чтобы k оказался неотрицательным.

Пусть окружность с уравнением $\langle \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_c, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_c \rangle = R^2$ пересекает кривую, кроме точки A_0, еще в двух "бесконечно близких" точках (т.е. стремится к соприкасающейся). Нужно найти радиус-вектор центра ρ_c и радиус R предельной окружности. Система уравнений для нахождения соприкасающейся окружности такая:

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{r}(s_0) - \boldsymbol{\rho}_c, \mathbf{r}(s_0) - \boldsymbol{\rho}_c) = R^2 \\
2((\mathbf{r}(s_0) - \boldsymbol{\rho}_c), \tau) = 0 \\
2(\boldsymbol{\tau}(s_0), \boldsymbol{\tau}(s_0)) + 2((\mathbf{r}(s_0) - \boldsymbol{\rho}_c), k\boldsymbol{\nu}(s_0)) = 0.
\end{gathered}
$$

Первое уравнение выражает, помимо того, что окружность проходит через данную точку кривой, тот факт, что расстояние $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_c|$ до этой точки от центра равно R – радиусу окружности (что, конечно, тривиально верно).

Согласно второму уравнению, вектор $\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_c$ ортогонален касательной и, значит, лежит на нормали.

В таком случае третье уравнение $1 + k((\mathbf{r}(s_0) - \boldsymbol{\rho}_c), \boldsymbol{\nu}(s_0)) = 0$, гласящее, что проекция этого вектора на нормаль есть $-\frac{1}{k}$, утверждает, на самом деле, что длина этого вектора равна $\frac{1}{k}$, т.е. что $R = \frac{1}{k}$. *Коэффициент k оказался обратным радиусу соприкасающейся окружности.*

(Знак минус в выражении для проекции означает, что вектор $\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_c$ направлен против орта нормали $\boldsymbol{\nu}$, т.е. что центр окружности лежит в направлении, указываемом этим ортом.)

Центр и радиус кривизны. Центр соприкасающейся окружности называется *центром кривизны*, ее радиус – *радиусом кривизны* данной кривой в точке соприкосновения. Обратная величина называется *кривизной* кривой в данной точке. (Ее вычисление см.выше.)

Упражнение. Найдите из этих уравнений координаты центра кривизны.]

5.12 Гладкие многообразия.

Мы видели, что определение гладкой поверхности, доказательство диффеоморфности координатных преобразований и эквивалентности трех типов задания поверхности фактически повторяли с поправкой на размерность сказанное ранее о гладких кривых. Это же относится к понятию касательной плоскости и касательного вектора.

На самом деле эта базисная часть теории одинакова в общем случае гладких подмногообразий в евклидовом пространстве. Единственное, что требует уточнения – обозначения. Мы повторим здесь эти определения и предложения в общем виде, но оставим доказательства в качестве упражнения.

Определение. Подмножество M^k евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется *гладким k-мерным подмногообразием* в $\mathbb{R}^n$, если для каждой точки $A \in M^k$ имеются окрестность $U(A)$ в M^k ($U = M^k \cap G$, где G открыто в $\mathbb{R}^n$) и регулярное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, где V открыто в $\mathbb{R}^k$, взаимно однозначно отображающее $V \subset \mathbb{R}^k$ на U.

Отображение φ с этими свойствами называется *картой* в M^k. Говорят, что карта вводит *локальные координаты* в M^k (точнее, в окрестности U). Координатами точки $\mathbf{x} \in U$ в этой координатной системе являются стандартные координаты точки $\varphi^{-1}\mathbf{x}$ в $\mathbb{R}^k$.

Теорема 1. *Если даны две локальные системы координат $\varphi_i : V_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, соответственно в окрестностях $U_i \subset M^n$ точки $A \in M^k$, то отображение $\psi = \varphi_1\varphi_2^{-1} : Z_1 \to Z_2$, где $Z_i = \varphi_i^{-1}(U_2 \cap U_2)$ является диффеоморфизмом.*

Теорема 2. *Пусть M^k – подмножество $\mathbb{R}^n$. Следующие три условия эквивалентны:*

1. *M^k является гладким k-мерным подмногообрзием в $\mathbb{R}^n$ в смысле данного выше определения.*

2. *Для каждой точки $A \in M^k$ имеется окрестность $G(A)$ в $\mathbb{R}^n$ и ее регулярное отображение $F : G \to \mathbb{R}^{n-k}$ так, что $F^{-1}(B) = M^k \cap G$, где $B = FA$. (Ситуация теоремы о неявной функции в окрестности каждой точки M^k.)*

3. *Для каждой точки $A \in M^k$ имеется окрестность $U(A)$ в M^k, служащая графиком гладкого отображения $f : W \to \bar{\mathbb{R}}^{n-k}$, W – открыто в $\bar{\mathbb{R}}^k$ и $\bar{\mathbb{R}}^{n-k}$, $\bar{\mathbb{R}}^k$ – дополнительные координатные плоскости в $\mathbb{R}^n$ ($\bar{\mathbb{R}}^{n-k} \oplus \bar{\mathbb{R}}^k = \mathbb{R}^n$).*

(Каждое условие 1. и 2. влечет 3. – первое устаналивается в доказательстве, данном для предыдущей теоремы, а второе теоремой о неявной функции. Из 3. непосредственно следует 1., т.к. отображение $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ есть отображение на график и, очевидно, регулярное отображение в $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства, что из 3. следует 2., рассмотрим сначала отображение $\Phi : W \times D \to \mathbb{R}^n$, где D – единичный открытый шар в $\mathbb{R}^{n-k}$, определенное следующим образом: $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x},\, f(\mathbf{x}) + \mathbf{y})$. Это отображение диффеоморфно отображает, как легко проверить, открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ на окрестность графика f, причем на сам график отображается плоская область $W \times \mathbb{O}$, $\mathbb{O}$ – центр шара D.)

В приведенном доказательстве попутно устанавливается четвертое свойство гладких подмногообразий, эквивалентное первым трем:

Следствие. *Для каждой точки $A \in M^k$ имеется окрестность G в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\Psi : G \to \mathbb{R}^n$, при котором образ $M^k \cap G$ есть открытое подмножество k-мерной плоскости. (Иными словами в некоторой локальной системе координат в пространстве $M^k \cap G$ задается системой $n-k$* линейных *уравнений.)*

Перейдем к касательным плоскостям и касательным векторам. Пусть сначала дана локальная параметризация (карта) $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, $\phi(V) = U$ – окрестность в M^k данной точки $A \in M^k$, V открытое подмножество $\mathbb{R}^k$.

Определение. *Касательной плоскостью* $\tau_A M^k$ в точке $A \in M^k \subset \mathbb{R}^n$ называется образ $L(\mathbb{R}^k)$ линеаризации $L(\mathbf{h}) = A + d\varphi\,(\mathbf{h})$ отображения φ в этой точке. Здесь $\mathbf{h}$ вектор в $\mathbb{R}^k$ с началом в $\mathbb{O}$, $d\varphi$ – дифференциал отображения φ, и запись справа означает вектор, приложенный к точке A.

Совокупность всех векторов, полученных таким образом, образует линейное пространство, являющееся подпространством в V_A (V_A есть векторное n-мерное пространство с началом в A). Оно называется (k-мерным) *касательным пространством* к M^k в точке A, а соответствующее аффинное пространство и есть касательная плоскость $\tau_A M^k$.

Сами векторы в пространстве $\tau_A M$ называются *касательными векторами* к M в точке A.

Обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ через $\mathbf{e}_i$, а координаты точки x^i, $1 \le i \le n$. В координатном пространстве $\mathbb{R}^k$ обозначим базисные векторы через $\boldsymbol{\varepsilon}_j$, координаты u^j, $1 \le j \le k$.

Чтобы убедиться, что $\tau_A M^k$ k-мерно, достаточно заметить, что стандартные базисные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ отображаются дифференциалом $d\varphi$ в независимые векторы, поскольку матрица Якоби $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)$ отображения φ имеет ранг k (максимальный). Координаты этих векторов служат столбцами матрицы Якоби. Мы будем эти векторы обозначать $\mathbf{r}_j$, а их координаты также $x^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}$.

Запишем касательную плоскость в координатах. Для этого удобно представить параметризацию векторной функцией от k переменных: $\varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{r}(u^j)$. Касательная плоскость служит образом линейного отображения: $\mathbf{r}(u^j)^i = \mathbf{r}^i(u^1_0, \ldots, u^k_0) + \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)(u^j)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$.

Мы можем сказать, что с помощью линеаризации мы вводим *на касательной плоскости* аффинную систему координат, принимая за координаты вектора, приложенного к точке A, стандартные координаты его прообраза (относительно $d\varphi$) в $\mathbb{R}^k$. Эти же координаты будут у него в его выражении через k-репер $(\mathbf{r}_{u^j})$ в n-пространстве.

Доказательство независимости касательной плоскости от параметризации повторяет доказательство трехмерного случая.

Как и в трехмерном случае мы оставим в качестве упражнения доказательство того, что при неявном (локальном) задании $F(x^i) = 0$ подмногообразия касательная плоскость является ядром дифференциала. Ядро задается системой линейных уравнений $F_{x^i} dx^i = F_{x^i}(x^i - x^i_0) = 0$.

Два определения понятия касательного вектора, данные в трехмерном случае также переносятся на произвольную размерность.

Определение 1. Касательным вектором в точке A к подмногообразию $M^k \subset \mathbb{R}^n$ называется правило, сопоставляющее каждой карте в окрестности точки A столбец из k чисел так, что при переходе к другой карте столбец умножается на матрицу Якоби координатного перехода.

Определение 2. Касательным вектором в точке A к подмногообразию $M^k \subset \mathbb{R}^n$ называется класс гладких параметризовванных кривых в M^k, проходящих через A так, что расстояние между соответствующими точками двух кривых из одного класса есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем расстояние кажой из них до A.

(Точки соответствуют друг другу, если значения их параметров отличаются от значения для точки A на ту же величину.)

Как и в трехмерном случае это условие эквивалентно тому, что кривые имеют совпадающий вектор скорости в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Нуль-вектор вводится, как и в трехмерном случае.

Оба эти определения эквивалентны между собой и эквивалентны начальному определению касательного вектора как образа вектора из $\mathbb{R}^k$ при дифференциале отображения φ.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 6. Метрика поверхности (первая квадратичная форма)

6.1 Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ в нелинейных координатах

До тех пор, пока мы пользуемся линейными системами координат, мы имеем простое соответствие между векторами и точками в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ и нам безразлично, в какой точке выбран координатный репер. С помощью операции параллельного переноса мы устанавливаем изоморфизмы линейных пространств $V_{\mathbf{x}}$ с началами в точках $\mathbf{x}$.

Иначе говоря, при аффинной замене координат для *координат векторов* сохраняется правило: векторы, приложенные в двух точках равны, если равны их координаты. «Векторы равны» означает, что они получаются друг из друга параллельным переносом.

Перейдем к нелинейной системе координат в области $U \subset \mathbb{R}^n$, которая задается диффеоморфизмом $\psi : W \to U$, где W другая область в $\mathbb{R}^n$. Теперь новые координаты вектора зависят от той точки, к которой он приложен. Именно, $(u^i) = (J_A)(w^j)$ ((u^i) и (w^j) – столбцы координат, а (J_A) – матрица Якоби диффеоморфизма $d\psi$ в точке $B = \psi^{-1}A$.)

Поэтому наше правило нарушится. Мы можем только сказать, что если два вектора в точках A_1 и A_2 данной области параллельны и стандартные координаты их равны, то новые (нелинейные) координаты вектора в A_1 получаются из новых координат вектора в A_2 с помощью матрицы $(J_{A_1})^{-1}(J_{A_2})$.

Итак, если мы перемещаем паралельно вектор по пространству, то его нелинейные координаты меняются, являются (гладкими) функциями точки.

Поставим теперь задачу: как вычислить длину вектора и скалярное произведение пары векторов в точках области U, пользуясь нелинейными координатами в этой области.

Мы перейдем в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, которым в основном и будем далее заниматься, хотя многое справедливо одинаково во всех размерностях.

Квадрат длины вектора $\mathbf{u}$ в стандартных координатах записывается "по Пифагору" с помощью квадратичной формы $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$ с единичной матрицей, а скалярное произведение двух векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ с помощью сответствующей билинейной формы $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3$, что записывается в матричной форме как $(u)^T(v)$ (здесь (u), (v) – *столбцы координат*, индекс T вверху, как всегла, означает транспонирование).

Перейдем к нелинейным координатам, заданным в окрестности A диффеоморфизмом $\psi : W \to U$.

Мы лишены теперь права пользоваться параллельными переносами, как мы видели. Поэтому мы не будем сейчас отождествлять векторы, приложенные к разным точкам, а рассмотрим скалярное произведение в каждой точке отдельно.

Скалярное произведение в нелинейной координатной системе. Пусть дана точка A в U и пусть $\psi B = A$. Пусть даны векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, приложенные в точке A, которые являются образами векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, приложенных к точке $B = \psi^{-1}A$, для дифференциала диффеоморфизма ψ: $\mathbf{u}_1 = d\psi(\mathbf{v}_1), \mathbf{u}_2 = d\psi(\mathbf{v}_2)$.

Нас интересует, как выразится скалярное произведение векторов $\mathbf{u}_i$ в нелинейной системе координат, *т.е. через координаты* $\mathbf{v}_i$. В матричной форме имеем: $(J)(v_i) = (u_i)$, $i = 1, 2$.

((J) – матрица Якоби в точке B, (u_i), (v_i) – *столбцы координат.* Дальше эти скобки опускаем для краткости.) Тогда

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = u_1^T u_2 = \left(v_1^T (J)^T\right)((J)v_2) = v_1^T \left((J)^T (J)\right) v_2 = v_1^T G v_2.$$

В координатах:

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = u_1^1 u_2^1 + u_1^2 u_2^2 + u_1^3 u_2^3 = (v_1^1\ v_1^2\ v_1^3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{pmatrix} = g_{ij} v_1^i v_2^j.$$

(Транспонирование вектора отвечает суммированию по номеру строки, левому сомножителю.)

Итак, стандартное скалярное произведение векторов $\mathbf{u}_i$ в точке A записывается в нелинейной системе координат с помощью матрицы $G = (J^T)(J)$ как билинейная форма с матрицей G, но теперь коэффициенты (элементы матрицы) являются функциями от координат (x_1, x_2, x_3) точки A:

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle |_A = g_{ij}(x_1, x_2, x_3) v_1^i v_2^j.$$

Здесь v_k^j – нелинейные координаты векторов $\mathbf{u}_k$.

Утверждение. *Матрица G симметрична, невырождена и положительно определена.*

Доказательство. (J) – невырождена по определению координатной замены. Тогда и G невырождена. Она симметрична по построению. Т.к. $v^T G v = v^T (J)^T (J) v = ((J)v)^T (J) v$ есть скалярный квадрат вектора $\mathbf{u} = (J)\mathbf{v}$, который больше нуля, если $\mathbf{v} \neq 0$, матрица G положительно определена. $\square$

Замена координат. Разумеется, если мы перейдем к новой системе координат, эта матрица заменится на матрицу $(J_1)^T G (J_1)$, где (J_1) – матрица Якоби диффеоморфизма замены.

6.2 Поле скалярных произведений (метрика)

В результате мы можем сказать, что получили *полевой объект*, т.е. объект, связанный с векторным пространством, зависящем от точки данной области. В нашем случае это:

Поле билинейных форм в $\mathbb{R}^n$ – функция, которая каждой точке A в $\mathbb{R}^n$ (или в области $U \in \mathbb{R}^n$) ставит в соответствие билинейную форму в векторном пространстве V_A в этой точке.

Такое поле считается гладким, если коэффициенты этих форм являются гладкими функциями в какой-нибудь (и тогда в любой) гладкой системе координат (например, в стандартной). Нас будут интересовать симметричные билинейные формы, они находятся во взаимно однозначном соответствии с квадратичными формами, и мы будем свободно заменять в нашем рассмотрении одни другими.

Введем пространство симметрических матриц порядка $n \times n$. Это линейное подпространство в пространстве всех квадратных матриц. Оно имеет размерность $n + C_n^2 = C_{n+1}^2$ (в качестве координат берут диагональные элементы и все элементы над диагональю). Обозначим это пространство $\mathbf{Q}_n$. Невырожденные матрицы образуют в нем открытое подмножество, а положительно определенные матрицы еще меньшее открытое подмножество.

Контрольный вопрос. Докажите последнее утверждение.

Поле квадратичных форм в области $U \in \mathbb{R}^n$ это отображение U в пространство $\mathbf{Q}_n$. (Каждой точке области U ставится в соответствие своя форма).

Мы записываем поле $q(\mathbf{x})$ квадратичных форм в U в виде $\sum q_{ij}(\mathbf{x})\, dv^i\, dv^j$ и считаем его непрерывным или гладким или аналитическим, если таковы все функции $q_{ij}(\mathbf{x})$.

Здесь в форме дифференциалов записаны координаты вектора–аргумента квадратичной формы. Заметим, что в этой записи имеются координаты точки (x^i) и координаты вектора (dv^i). В стандартной системе координат в аффинном пространстве эти координаты согласованы: координаты вектора равны разности координат его концов. Но когда мы перешли к нелинейным координатам, эта согласованность становится более сложной (координаты вектора определены с помощью дифференциала координатного отображения). В принципе она может стать необязательной: координаты точек задаются координатным отображением, а координаты векторов, например, стандартной системой в образе. Это нужно иметь в виду и следить, как координаты точек и векторов определяются в данной задаче.

Иными словами координатные преобразования точек и координатные преобразования векторов могут быть согласованы (с помощью матрицы Якоби), а могут задаваться и независимо друг от друга.

Если дан координатный диффеоморфизм ψ и координаты точек и векторов согласованно определяются как координаты их прообразов при отображении ψ и при отображении дифференциала $d\psi$ соответственно, то мы записываем поле квадратичных форм в виде $g_{ij}(x_1, \dots, x_n)\, dx^1 \dots dx^n$ в каждой системе локальных координат.

Важное замечание. Исходный пример поля квадратичных форм – стандартная форма $dx^2 + dy^2 + dz^2$, ее матрица постоянная – единичная. Мы ответили на вопрос: как выглядит это поле в переменной нелинейной системе координат? Мы пришли к простому ответу: это квадратичная форма, но с переменными коэффициентами.

Тогда возникает естественный обратный вопрос. Если нам дана такая форма с переменными коэффициентами, можем ли мы считать, что она получена из стандартной формы заменой переменных. Обратная замена тогда превратит данную форму в стандартную.

Итак, новый вопрос таков: всякую ли квадратичную форму с гладкими переменными коэффициентами можно заменой переменных превратить в форму с единичной постоянной матрицей?

Оказывается, ответ отрицателен. Это можно сделать в одной точке, с помощью линейной замены в области (докажите!). Но если коэффициенты зависят от точки, то "привести матрицу к единичной" сразу во всех точках заменой локальных координат, вообще говоря, нельзя. Мы скоро увидим это на примерах, но строгие доказательства будут даны позднее.

6.3 Терминологические замечания

Во-первых, мы в дальнейшем будем говорить, как это принято, о скалярном произведении как о «квадратичной форме» (от одного аргумента), хотя правильнее говорить в этом случае «билинейная форма» (от двух аргументов). Это не имеет большого значения: напомним, что симметрическая билинейная форма $\mathbf{q}(\mathbf{u},\, \mathbf{v})$ однозначно соответствует квадратичной форме $Q(\mathbf{v}) = q(\mathbf{v},\, \mathbf{v})$, в силу тождества: $q(\mathbf{u}+\mathbf{v},\, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = q(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + q(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) + 2q(\mathbf{u},\, \mathbf{v})$, т.е. $q(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(Q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{v}))$.

Метрика. Во-вторых, поле $g_{ij}\,(\mathbf{x})du^i\, dv^j$ кратко называется *метрикой* по той причине, что с его помощью вычисляются длины векторов и также длины кривых, как мы скоро увидим. (Не следует путать этот термин с метрикой метрического пространства.)

Метрики. При этом термин *метрика* сохраняется за *всякой симметрической и невырожденной* формой, хотя и *не обязательно положительно определенной.* Иными словами, допускается ее обращение в нуль на ненулевых векторах, лишь бы ее матрица была невырожденной. Простым примером является квадратичная форма $dx^2 - dy^2$ на плоскости. (Правда, в этом случае понятие длины расширяется: длины могут быть отрицательными, нулевыми и даже комплексными в случае комплексных пространств $\mathbb{C}^n$.)

Римановы и псевдоримановы метрики.

Определение. Метрика в строгом смысле слова, т.е. *положительно определенная* в каждой точке, называется *римановой*, а метрики неопределенные – *псевдоримановыми.*

Для нас основным случаем будут римановы метрики, хотя ниже мы уделим немного внимания и псевдоримановым метрикам. Впрочем, многое из того, что мы будем говорить о римановых метриках, почти без изменения приложимо и к псевдоримановым.

6.4 Метрика на поверхности. Первая квадратичная форма

Дальше мы будем иметь дело с трехмерным пространством. Стандартные координаты точек в этом пространстве будут обозначаться x, y, z и стандартный репер $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Первая наша задача заключается в переходе от областей в $\mathbb{R}^3$ к поверхностям в $\mathbb{R}^3$.

Определение. Пусть дана гладкая поверхность M в $\mathbb{R}^3$. *Метрикой в M* назовем задание скалярного произведения $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ в касательной плоскости $\tau_{\mathbf{x}}(M)$ в каждой точке $\mathbf{x} \in M$.

Поверхность, для которой определена риманова метрика, называется *римановой поверхностью.*

Замечание. Имеется другое также важное значение термина «риманова поверхность» – в комплексном анализе. Мы его здесь не будем касаться.

Пусть локальная карта в M задана как регулярное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ и $U = \varphi V$ есть область в нашей поверхности M, $V \subset \mathbb{R}^2$. Мы принимаем стандартные координаты u, v в координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ за локальные координаты в U.

Переходя к векторной записи, мы обозначим радиус-вектор точки $\varphi(u, v)$ (с координатами (u, v) в карте) как $\mathbf{r}(u, v)$.

Обозначим через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – стандартный базис в координатной плоскости. Для каждой точки $A \in U$ дифференциал $d\varphi$ в точке $B = \varphi^{-1}A$ изоморфно отображает координатную плоскость на касательную плоскость τ_A. При этом дифференциал переносит стандартную систему координат координатной плоскости в линейную систему координат в касательной плоскости. Именно, образы базисных векторов $d\varphi(\mathbf{e}_1)$, $d\varphi(\mathbf{e}_2)$ образуют базис в τ_A, т.е. независимы, т.к. матрица Якоби невырождена.

Матица Якоби координатного отображения φ есть

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы являются производными $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ и служат образами векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, т.е. образуют базис в касательной плоскости. Координаты векторов в этом базисе будем обозначать du, dv, а дальше также u^1, u^2.

(Заметим, что дифференциал изоморфно отображает векторное пространство координатной плоскости на векторное пространство касательной плоскости. Но этим также порождается взаимно однозначное отображение аффинной координатной плоскости на аффинную касательную плоскость, т.е. "точечное" отображение. Мы свободно переходим от векторного отображения к аффинному и обратно.)

Теперь обратимся к римановой метрике. В принципе мы можем задать скалярное произведение в каждой касательной плоскости произвольно, лишь бы коэффициенты были гладкими функциями. Но для нас основной будет риманова метрика, *индуцированная* из стандартной метрики в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Именно, *за скалярное произведение векторов в касательной плоскости мы возьмем их скалярное произведение в объемлющем пространстве.*

Пусть даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в касательной плоскости τ_A в точке A. Эти векторы имеют два сорта координат. В объемлющем пространстве их координаты dx_1, dy_1, dz_1 и dx_2, dy_2, dz_2. В системе, введенной нами в координатной плоскости – du_1, dv_1 и du_2, dv_2. Первые получаются из вторых умножением на матрицу Якоби. Например, $dx_1 = x'_u du_1 + x'_v dv_1$ и т.д.

Чтобы получить выражение скалярного произведения в координатах касательной плоскости, надо сделать подстановку:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = dx_1\, dx_2 + dy_1\, dy_2 + dz_1\, dz_2 =$$

$$(x'_u du_1 + (x'_v dv_1)(x'_u du_2 + x'_v dv_2) + (y'_u du_1 + y'_v dv_1)(y'_u du_2 + y'_v dv_2) + (z'_u du_1 + z'_v dv_1)(z'_u du_2 + z'_v dv_2) =$$

$$(x'_u x'_u + y'_u y'_u + z'_u z'_v) du_1 du_2 + (x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v) du_1 dv_2 + (x'_v x'_u + y'_v y'_u + z'_v z'_u) dv_1 du_2 + (x'_v x'_v + y'_v y'_v + z'_v z'_v) dv_1 dv_2.$$

В скобках стоят скалярные квадраты и скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ столбцов матрицы Якоби, т.е. векторов $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$. Таким образом скалярное произведение векторов касательной плоскости приобретает такую форму:

$$\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle du_1 du_2 + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle du_1 dv_2 + \langle \mathbf{r}_v \mathbf{r}_u\rangle dv_1 du_2 + \langle \mathbf{r}_v \mathbf{r}_v\rangle dv_1 dv_2$$

Скалярный квадрат вектора $\mathbf{a}$ с координатами du, dv в касательной плоскости, т.е. значение соответствующей квадратичной формы для $\mathbf{a}$ имеет вид

$$\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle du^2 + 2\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle du\, dv + \langle \mathbf{r}_v \mathbf{r}_v\rangle dv^2.$$

Матрица этой квадратичной формы есть матрица скалярных произведений

$$G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle & \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle \\ \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle & \langle \mathbf{r}_v \mathbf{r}_v\rangle \end{pmatrix}$$

Такая матрица называется *матрицей Грама* векторов $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u$. Она очевидно равна произведению матрицы Якоби на ее транспонированную: $G = (J)^T(J)$.

Мы будем обозначать эти коэффициенты двумя способами: g_{ij}, $i, j = 1, 2$ или $E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle = g_{11}$, $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle = g_{12} = g_{21}$, $G = \langle \mathbf{r}_v \mathbf{r}_v\rangle = g_{22}$. Первый способ используется, когда координаты векторов мы обозначаем du^1, du^2, второй для записи с координатами du, dv. Во втором случае квадратичная форма принимает вид:

$$Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

(Хотя мы обозначили одной буквой G матрицу метрики и один коэффициент ее выражения в координатах, это не вызовет у нас путаницы.)

Обратим внимание на то, что при отождествлении координатной и касательной плоскостей полученная квадратичная форма задает на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ метрику, которая, вообще говоря, не является стандартной. Таким образом, начав со стандартной метрики в $\mathbb{R}^3$, мы с помощью задания карты на поверхности M получили, возможно, нестандартную метрику в $\mathbb{R}^2$.

Метрика, заданная на поверхности, называется *первой квадратичной формой* поверхности. Это важнейший объект дифференциальной геометрии, она определяет, как мы увидим, *внутреннюю геометрию* поверхности, ее свойства, которые не зависят от ее расположения в пространстве.

Замена координат. При переходе к другой карте матрица Якоби выразится через новую матрицу Якоби (J_1) и матрицу Якоби (J_ψ) координатного преобразования ψ произведением $(J) = (J_1)(J_\psi)$ и матрица скалярного произведения получит выражение $G = ((J_1)(J_\psi))^T((J_1)(J_\psi) = (J_\psi)^T(J_1)^T(J_1)(J_\psi) = (J_\psi)^T G_1 (J_\psi)$. Таким образом, матрица G в каждой точке меняется по закону изменения матрицы квадратичной формы.

Заменяя условие положительной определенности на условие невырожденности, т.е. считая, что на M задана неопределенная *псевдориманова метрика*, мы приходим к понятию *псевдоримановой поверхности.*

6.5 Длины векторов и дуг кривых.

Метрика – это задание скалярного произведения в каждой касательной плоскости поверхности. В частности, она позволяет измерять длины касательных векторов и углы между ними с помощью известных формул: $|\mathbf{w}| = \sqrt{g_{ij}(A)w^i w^j}$, $\mathbf{w} \in \tau_A M$ и

$$\cos \widehat{\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2} = \frac{g_{ij}(A)w_1^i w_2^j}{\sqrt{g_{ij}(A)w_1^i w_1^j}\sqrt{g_{ij}(A)w_2^i w_2^j}}$$

Длина кривых на поверхности. Теперь мы можем распространить определение длины кривой, данное ранее для кривых в $\mathbb{R}^n$, на случай кривых в римановой поверхности. Мы исходим из формулы $\int |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt$, где $\mathbf{r}(t) = (x^1, x^2, x^3)$ – параметризованная кривая и $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$ – ее вектор скорости. Это выражение может быть перенесено на риманову поверхность: длину вектора скорости берем в смысле стандартной метрики в $\mathbb{R}^3$ и вычисляем ее с помощью первой квадратичной формы поверхности $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\sum \dot{x}^i(t)\dot{x}^i(t)} = \sqrt{Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2}$.

Т.к. $|ds| = |d\mathbf{r}|$, мы записываем скалярный квадрат дифференциала длины дуги в следующей форме

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2 = (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\,\dot{v} + G\dot{v}^2)dt^2.$$

Определение. Длиной дуги кривой $\mathbf{x}(t) \subset M$ от точки $A_1 = \mathbf{x}(t_1)$ до точки $A_2 = \mathbf{x}(t_2)$ называется интеграл

$$s(\smile{A_1A_2}) = \int_{A_1}^{A_2} \sqrt{Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\,\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt$$

Независимость от параметризаци доказывается так же, как это было проделано для случая кривых в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Угол между кривыми в точке их пересечения есть угол между их векторами скорости.

Этот угол задается своим косинусом, который определяется с помощью первой квадратичной формы по приведенной формуле, которая теперь для векторов $\mathbf{w}_1 = (du, dv)$ и $\mathbf{w}_2 = (\delta u, \delta v)$ (мы заменили d на δ, чтобы различить векторы) принимает вид:

$$\cos \widehat{\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2} = \frac{\sqrt{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Ясно, что это определение не зависит от параметризаций кривых, т.к. при замене параметризации вектор скорости умножится на скаляр, а значение косинуса не изменится – скаляры сократятся.

Замечание. Если первую квадратичную форму умножить на скалярную функцию, то значения косинусов также не изменятся из-за сокращения в формуле для косинуса.

6.6 Метрика и расстояние

Как известно, словом *метрика* в топологии обозначают неотрицательную функцию от пары точек, которая симметрична относительно перестановки аргументов, равна нулю, если и только если аргументы совпадают, и удовлетворяет аксиоме треугольника. С помощью такой функции определяют *расстояния*. Множество, в котором задана метрика, называется *метрическим пространством.*

Метрика определяет топологию с помощью ε-окрестностей, служащих базисом топологии. Метрика в нынешнем новом смысле на поверхности позволяет определить функцию расстояния, т.е. метрику в топологическом смысле.

Расстояние в римановой поверхности M. Пусть дана риманова метрика $g(x) = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ в M. За расстояние $s(x, y)$ между точками M принимается максимальная нижняя грань длин кусочно гладких кривых, соединяющих эти две точки. Такая грань существует, поскольку длины кривых неотрицательны и

Упражнение. Любые две точки в связной гладкой поверхности можно соединить кусочно гладкой кривой конечной длины.

Нетрудно показать и то, что если расстояние равно нулю, то точки совпадают. Докажем сначала лемму для областей евклидова пространства.

Лемма. *Пусть в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задано поле $g(x)$ положительно определенных симметричных квадратичных форм. Для каждой точки $x_0 \in U$ найдется окрестность U_0 и положительное число c так, что $\rho_0(x_1) > c\,r_0(x_1)$ для всех $x_1 \in U_0$, где $r_0(x_1)$ – стандартное расстояние между x_0 и x_1 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. длина отрезка $l = [x_0, x_1]$), а $\rho_0(x_1)$ – максимальная нижняя грань длин (в смысле метрики g) гладких кривых, соединяющая x_0 и x_1 в U_0.*

Доказательство. В силу компактности сферы и положительной определенности g найдется $\bar{c} > 0$ так, что $g(\mathbf{r}) = g_{ij}(x_0)dx^i dx^j > \bar{c}^{\,2}$ на единичных векторах $\mathbf{r} = (dx^i)$ в точке x_0. По непрерывности g, то же верно и для единичных векторов во всех точках некоторой окрестности U_0 точки x_0. Для вектора $\mathbf{r} = (dx^i)$ произвольной длины $|\mathbf{r}|$ в любой точке A этой окрестности тогда можно написать $g_A(\mathbf{r}) = g_{ij}(A)dx^i dx^j > \bar{c}^{\,2}|\mathbf{r}|^2 = \bar{c}^{\,2}\Sigma_i(dx^i)^2$. Окрестность U_0 можно взять шаровой.

Пусть γ – произвольная гладкая кривая, соединяюшая x_0 с x_1 в U_0, ρ_γ – длина γ и $l = [x_0, x_1]$ – прямолинейный отрезок с концами x_0 и x_1. Тогда

$$\rho_\gamma = \int_\gamma \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j} > \bar{c}\int_\gamma \sqrt{(dx^i)^2} \geq \bar{c}\ r_0(x_1). \qquad \square$$

Поскольку для любой кривой γ, соединяющей точки x_0 и x_1, длина $\rho_\gamma > \bar{c}\ r_0(x_1)$, мы получаем для точной грани требуемое неравенство $\rho_0(x_1) > c\,r_0(x_1)$, взяв $c = \frac{1}{2}\bar{c}$.

Следствие. *Расстояние между двумя различными точками риманова поверхности M строго больше нуля.*

Доказательство. Пусть даны точки x_0 и x_1 в M. Возьмем какую-нибудь карту $\varphi : V \to U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in V$. Пусть $U_1 \subset U$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром $\varphi(x_0)$ и V не содержит точки x_1. Любая кривая, соединяющая точку $\varphi(x_0)$ с точкой вне U_1 должна иметь дугу, соединяющую в U точку $\varphi(x_0)$ с точкой на границе U, и потому она имеет длину (в смысле метрики в V, перенесенной в U) больше, чем $c\,r_0 > 0$, где r_0 – радиус U_1. $\square$

Введенная функция $s(x, y)$ (равная наибольшей нижней грани длин кусочно гладких кривых, соединяющих x и y), очевидно, симметрична, неотрицательна и равна нулю, как мы показали, если и только если $x = y$. Она также удовлетворяет аксиоме треугольника. В самом деле, сумма расстояний от точки z до точек x и y равна, очевидно, наибольшей нижней грани длин кусочно гладких кривых, соединяющих x и y и проходящих через z. Она может только уменьшиться, если не нужно требовать, чтобы кривые содержали z.

Итак, *риманова поверхность является метрическим пространством.* Риманова метрика однозначно определяет расстояние между точками.

В дальнейшем мы будем говорить *метрика* только в смысле *риманова метрика*, а под *расстоянием* в M будем понимать расстояние, определенное в M с помощью его римановой метрикитак, как это было описано выше. (Или будем пользоваться пифагоровым расстоянием в объемлющем пространстве.)

6.7 Метрика и отображения

Посмотрим, как ведет себя метрика по отношению к отображениям поверхностей.

Предложение 1. *По данному гладкому отображению $M_1 \xrightarrow{F} M_2$ и полю q билинейных форм в M_2 однозначно определяется поле билинейных форм $\tilde{q}$ в M_1:*

$$\tilde{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = q(dF|_A(\mathbf{u}), dF|_A(\mathbf{v}))$$

. В этом случае говорят, что форма $\tilde{q}$ индуцирована формой q или что она является прообразом q.

Доказательство. Очевидно, указанная в формулировке предложения формула однозначно определяет билинейную форму на $\tau_A(M)$. Ее матрица $J^T GJ$, где J – матрица Якоби F в точке A, а G – матрица q, для фиксированных карт в окрестностях A и $F(A)$.

Класс гладкости $\tilde{q}$ равен минимуму классов гладкости q и F. $\square$

Случай скалярного произведения. Если в образе дано поле скалярных произведений, то в прообразе получится в каждой точке симметрическая билинейная форма, но **она не обязательно будет положительно определена!** Именно, она будет равна нулю на векторах, которые отображаются дифференциалом в нулевой вектор:

Предложение 2. *Индуцированная скалярным произведением форма будет неотрицательно определенной всегда, а невырожденной, т.е. скалярным произведением, она будет, если и только если дифференциал имеет нулевое ядро. В частности, это будет так для диффеоморфизмов.* □

Следствие. *Если гладкое отображение в каждой точке имеет нулевое ядро дифференциала (т.е. является погружением, в частности, если это – диффеоморфизм), то метрическое поле в образе индуцирует метрическое поле в прообразе.*

В случае диффеоморфизма (в этом случае имеется обратное отображение) мы получаем, что и наоборот поле в прообразе индуцирует поле в образе. □

6.8 Метрика поверхности в $\mathbb{R}^3$

Наиболее важный для нас случай последнего результата это *тождественное отображение* поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ в пространство $\mathbb{R}^3$, причем в $\mathbb{R}^3$ берется стандартное скалярное произведение. Мы видели в п. 6.4, как оно индуцирует риманову метрику на поверхности, лежащей в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим формулу получающейся метрики в трех стандартных случаях локального задания M.

Параметрическое задание. Этот случай был рассмотрен в п.6.4.

Неявное задание. Если поверхность задана неявно, уравнением $F(x, y, z) = 0$, то мы должны допустить, что в некоторой локальной карте одна из частных производных F, скажем, $\frac{\partial F}{\partial z} = F_z$ отлична от нуля. Тогда мы можем написать

$$dz = -\frac{F_x}{F_z}dx - \frac{F_y}{F_z}dy.$$

Значит,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (\frac{F_x}{F_z}dx + \frac{F_y}{F_z}dy)^2 = \frac{F_z^2 + F_x^2}{F_z^2}dx^2 + 2\frac{F_xF_y}{F_z^2}dx\,dy + \frac{F_z^2 + F_y^2}{F_z^2}dy^2,$$

и коэффициенты нашей квадратичной формы имеют вид:

$$E = \frac{F_z^2 + F_x^2}{F_z^2},\ \ F = \frac{F_xF_y}{F_z^2},\ \ G = \frac{F_z^2 + F_y^2}{F_z^2},$$

а сама форма –

$$ds^2 = \frac{(F_z^2 + F_y^2)dx^2 + 2F_xF_y\,dx\,dy + (F_z^2 + F_y^2)dy^2}{F_z^2}$$

Случай графика. Если поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$, т.е. $F = z - f(x, y)$, то $F_z = 1$ и

$$E = 1 + f_x^2,\ \ F = f_xf_y,\ \ G = 1 + f_y^2.$$

Удобны *обозначения Монжа*: $f_x = p$, $f_y = q$. В этих обозначениях $E = 1 + p^2$, $G = pq$, $F = 1 + q^2$, и

$$ds^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pq\,dxdy + (1 + q^2)dy^2.$$

Замечание. Обратите внимание на то, что метрика на поверхности в рассматриваемых случаях индуцируется из стандартной метрики в $\mathbb{R}^3$. Мы могли бы теми же приемами получить метрику из какой-либо нестандартной метрики в $\mathbb{R}^3$. (Один случай псевдоевклидовой метрики будет позже рассмотрен.) Можно также произвольно задать метрику в карте поверхности формулой $g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\,dx^i\,dx^j$ с условием, что в каждой точке получается скалярное произведение и при этом функции g_{ij} гладкие. Подробно об этом будет сказано в курсе следующего семестра.

Неравенства для коэффициентов. Поскольку первая квадратичная форма представляет собою скалярное произведение, она, конечно, является положительно определенной квадратичной (или билинейной) формой. Из высшей алгебры известны критерии положительной определенности. В нашем случае они означают положительность диагональных элементов E и G и определителя $g = EG - F^2$. Выполнение этих условий можно проверить и непосредственно. Для E и G это очевидно, поскольку они сами являются скалярными квадратами координатных векторов $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$. Что касается определителя, то он положителен вследствие неравенства Шварца (Коши – Буняковского). Кроме того, он тоже оказывается скалярным квадратом, именно векторного произведения этих векторов. Это вытекает, например, с помощью тождества Лагранжа:

$$\langle[\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v],[\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v]\rangle =$$
$$= \quad \langle\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_u\rangle\langle\mathbf{r}_v,\ \mathbf{r}_v\rangle - \langle\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v\rangle^2 = \begin{pmatrix} \langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle & \langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle \\ \langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle & \langle\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle \end{pmatrix},$$

что есть $g = EG - F^2$.

Обе части равенства равны, как доказывается в аналитической геометрии, квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, левая по школьному определению векторного произведения, а правая есть квадрат определителя дифференциала карты, рассматриваемого как линейное отображение координатной плоскости на касательную плоскость (докажите!).

(Вспомним, что определитель линейного отображения равен отношению площади параллелограмма к площади его прообраза. Значит, он равен площади образа параллелограмма единичной площади.)

Упражнение. Докажите тождество Лагранжа. (См. в п.13 доказательство более общей формы этого тождества.)

С определителем $g = EG - F^2 = |[\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v]|^2$ мы будем встречаться постоянно.

Формула для синуса и ортогональность координатных линий. Векторное произведение, как известно, по модулю равно площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, которая в свою очередь равна произведению их модулей на синус угла между ними (взятого в положительную сторону). В таком случае мы получаем выражение для синуса угла θ между координатными линиями в данной точке:

$$\sin\,\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Отсюда сразу видно, например, что для ортогональности координатных линий в данной точке необходимо и достаточно, чтобы средний коэффициент в первой квадратичной форме равнялся нулю. (Это, конечно, видно и из выражения для косинуса.)

Выведем также выражение для синуса угла φ между любыми двумя векторами в касательной плоскости. Мы снова используем выражения для площади параллелограмма.

Векторное произведение векторов $u_1\mathbf{r}_u + v_1\mathbf{r}_v$ и $u_2\mathbf{r}_u + v_2\mathbf{r}_v$ есть $(u_1v_2 - v_1u_2)[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$. Значит,

$$|[u_1\mathbf{r}_u + v_1\mathbf{r}_v, u_2\mathbf{r}_u + v_2\mathbf{r}_v]| = (u_1v_2 - v_1u_2)\sqrt{EG - F^2}.$$

Таким образом

$$\sin\,\varphi = \frac{(u_1v_2 - v_1u_2)\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{Eu_1^2 + 2Fu_1v_1 + Gv_1^2}\sqrt{Eu_2^2 + 2Fu_2v_2 + Gv_2^2}}.$$

Контрольный вопрос. Напишите выражение для тангенса угла между кривыми, пересекающимися в данной точке.

6.9 Ортогональные системы координат

Локальная изометрия с плоскостью. Мы уже упомянули фундаментальный вопрос, можно ли при заданной метрике найти локальную систему координат, в которой эта метрика выражалась бы так же, как стандартная метрика плоскости, т.е. чтобы средний коэффициент был бы тождественно нулевым, а крайние – единичными. Мы можем назвать поверхность в этом случае *локально изометричной плоскости*, т.к. в этом случае диффеоморфизм локальной карты устанавливает соответствие области на поверхности и области на координатной плоскости, при котором соответствующие друг другу кривые будут иметь одинаковые длины.

По внешности эта задача напоминает алгебраическую задачу приведения квадратичной формы к каноническому виду с той разницей, что здесь коэффициенты зависят от точки поверхности.

Однако, дело не только в этом. Операция приведения имеет канонический характер и мы можем проводить ее одновременно во всех точках, сохраняя непрерывную дифференцируемость коэффициентов. Таким образом такое приведение осуществить можно. Но оно не будет связано с введением новой системы координат! Мы в этом случае действовали бы непосредственно в касательных пространствах, строя реперное поле, которое не порождалось бы локальной картой, *не было бы координатным.* Коэффициенты метрики потеряют свой смысл скалярных произведений координатных векторов.

Мы увидим дальше, что эта задача разрешима далеко не для всякой метрики. Позже мы опишем класс тех поверхностей, для которых это имеет место, но доказательство, что для других поверхностей это не так, придется отложить до следующего семестра.

Ортогональность координатных линий. Между классом всех поверхностей и поверхностей локально изометричных плоскости имеются промежуточные классы. Прежде всего для любой поверхности можно устранить средний коэффициент. Мы видели, что для этого необходимо и достаточно, чтобы координатные кривые образовывали два ортогональных друг другу семейства (т.е. чтобы в каждой точке кривая одного семейства была бы ортогональна кривой другого.) Такие системы координат всегда существуют. Назовем их *ортогональными.*

Построение ортогональной системы координат. Возьмем в любой системе координат одно из двух семейств координатных кривых. В каждой точке возьмем вектор скорости проходящей через нее кривой этого семейства. Получим поле ненулевых векторов. Теперь в каждой точке возьмем единичный вектор ортогональный вектору полученного поля и образующий с ним положительный репер. Это также ненулевое поле, оно порождает обыкновенное дифференциальное уравнение в координатной плоскости. Интегральные кривые будут ортогональны кривым исходного семейства и будут параметризованы натуральным параметром.

Этим построено два ортогональных семейства кривых, но естественные их параметры нельзя принять за координаты. При движении вдоль кривой одного семейства естественный параметр на этой кривой меняется независимо от того, с какой кривой второго семейства происходит пересечение в данной точке.

Мы можем, однако, ввести локальную систему так, что кривые двух семейств станут (по крайней мере в окрестности данной точки) координатными кривыми. Именно, достаточно взять из первого и второго семейства по одной кривой, γ и η, соотв., проходяших через данную точку A, с любыми их фиксированными регулярными параметризациями, скажем, p и q. За координаты $((p, q))$ точки $\mathbf{x}$ в малой окрестности A взять значения параметров точек пересечения этих кривых с кривыми обоих семейств, проходящих через $\mathbf{x}$: кривой γ с кривой второго семейства и кривой η с кривой первого семейства. Кривые двух семейств останутся ортогональными в каждой точке, параметризации будут согласованы, но векторы двух исходных полей не будут векторами скорости новых параметризаций.

Задача. Проверьте, что таким образом введена регулярная локальная система координат в окрестности A. Иначе говоря, существует диффеоморфизм окрестности A на область в $\mathbb{R}^2$, при котором введенные координаты точек окрестности становятся стандартными координатами образов этих точек.

В построенной системе координат метрика (индуцированная вложением поверхности в $\mathbb{R}^3$) будет иметь вид $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$. Параметризации кривых не будут натуральными, если только какой-либо из коэффициентов не окажется тождественно единицей.

Оказывается возможным построить ортогональную систему координат так, чтобы по крайней мере кривые одного семейства получили натуральный параметр, так что один из коэффициентов E или G станет равным единице. Однако, это требует использования дополнительной техники и мы вернемся к этому вопросу позже (п.10.5).

Замечание. Убрать средний коэффициент можно было бы и непосредственно, указав требуемое преобразование локальных координат. Запишем $ds^2 = (\sqrt{E}dx + \sqrt{F/2}dy)^2 + (G - \frac{F^2}{4})dy^2$. Нужно найти такую функцию $T(x)$, для которой $\frac{\sqrt{E}dx+\sqrt{F/2}dy}{\sqrt{T}}$ оказалось бы полным дифференциалом dz (так называемый *интегрирующий множитель*). Тогда $ds^2 = Tdz^2 + (G - \frac{F^2}{4})dy^2$. Этот интегрирующий множитель не всегда находится явным образом, хотя наше геометрическое рассуждение показывает, что он существует.

Упражнения. Записать метрику плоскости в полярной системе координат. Записать метрику сферы с центром в O в сферической системе координат, метрику конуса, метрику цилиндра. Показать, что конус и цилиндр локально изометричны плоскости.

6.10 Измерение площади поверхности

Кроме длин и углов, метрика позволяет вычислять площади. Мы не можем здесь заниматься подробным напоминанием, известным из анализа, теории измерения площади поверхности.

Напоминание. Площадь поверхности не может быть разумно определена как предел площадей вписанных многогранников (по прямой аналогии с вписыванием ломаных в дугу кривой.) Известный пример (“сапог Шварца”, см.курсы анализа) показывает, что предел может не существовать. Поэтому вместо вписывания многогранников поступают иначе.

Схема определения площади поверхности. Для локальной карты берут разбиение ее прообраза в координатной плоскости сеткой малых квадратов и образ каждого квадрата заменяют параллелограмом с вершиной в образе одной из вершин и со сторонами – касательными векторами, образами при дифференциале сторон квадратика в этой вершине.

Сумма площадей параллелограмов, вычисленная в трехмерном пространстве, и является аппроксимацией площади поверхности, т.к. она имеет предел, не зависящий от локальных координат и от способа подразделения прообраза на квадраты. Это, конечно, только очень грубая картина и мы должны отослать в этом месте за строгим изложением к курсу математического анализа.

Вычисление площади двойным интегралом. Касательные векторы, которые мы приняли за стороны параллелограма в какой-либо из вершин подразделения, это $\mathbf{r}_u du$ и $\mathbf{r}_v dv$. Площадь построенного на них параллелограма есть $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| dudv$. Видно, что сумма этих выражений по всем квадратам есть интегральная сумма для двойного интеграла, взятого по области, в которой определен диффеоморфизм локальной карты. Этот факт мы и положим в основу определения. Итак, площадь области U поверхности, покрытой этой картой, есть

$$S = \iint_U |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \, dudv = \iint_U \sqrt{g} \, dudv = \iint_U \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

Определение площади двойным интегралом. Мы поступим здесь, как и в случае определения длины кривой: примем этот интеграл за определение площади поверхности. Нужно только доказать независимость результата от выбора параметризации.

Доказательство независимости от карты. При переходе к другой координатной системе определитель матрицы формы умножится на квадрат якобиана перехода, а корень из него – на модуль якобиана: $\sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = \sqrt{EG - F^2}|J|$. По правилу замены переменных в двойном интеграле мы имеем: $\iint f(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1) \, du_1dv_1 = \iint f(u, v)|J| \, dudv$. Таким образом

$$S_1 = \iint \sqrt{E_1G_1 - F_1^2} \, du_1dv_1 =$$
$$= \iint \sqrt{EG - F^2}|J| \, du_1dv_1 = \iint \sqrt{EG - F^2} \, dudv = S.$$

Здесь J – якобиан матрицы обратного координатного перехода (матрицы из производных переменных u, v по новым переменным u_1, v_1). □

(Дифференциальное выражение под знаком интешрала имеет инвариантный вид $g \, dudv$ и называется (дифференциалшьным) элементом площади.)

Площадь большой области. Если нужно подсчитать площадь области, которая не покрывается одной локальной картой, то нужно разбить ее конечным числом гладких дуг на конечное число кусков, каждый из которых покрыт одной картой и воспользоваться свойством аддитивности интеграла, чтобы показать, что результат не будет зависеть от подразделения. Аккуратное проведение этого рассуждения здесь также будет опущено. Главный факт, на который нам нужно обратить внимание: *измерение площади определяется здесь метрикой.*

Метрика и площадь. Хотя мы не останавливаемся на систематическом изложении теории измерения площадей на поверхности, сделаем все же уточняющее замечание о связи метрики и площади. В намеченной нами схеме метрика была нужна для того, чтобы определить площадь параллелограмма. Именно, в области определения локальной карты мы имеем малый квадрат, стороны которого, исходящие из некоторой вершины, рассматриваем как векторы. Дифференциал диффеоморфизма карты переводит эти векторы в векторы в касательной плоскости, взятой в образе этой вершины. Эта пара векторов образует в касательной плоскости 2-репер, и нам нужно взять площадь параллелограмма, для которого векторы репера служат сторонами. В этом месте мы замечаем, что так как параллелограмм лежит в трехмерном пространстве, в котором дана стандартная метрика, площадь этого параллелограмма определена. (Например, с помощью векторного произведения.)

Вспомним теперь, что в линейном пространстве любой конечной размерности, если объем какого-то параллелепипеда принят за единичный, а его ориентированные стороны за единичный репер, то объем параллелепипеда, построенного на любом другом репере равен определителю перехода к нему от единичного репера. В таком случае мы имеем возможность определить площади ориентированных областей на поверхности, если нам задано ориентирующее реперное поле и мы принимаем в каждой точке заданный там репер за единичный.

Таким образом метрика нам нужна только для того, чтобы определить единичные объемы в касательных плоскостях, но в принципе мы можем задать их и независимо от метрики. В обычных задачах, однако, связь объема и метрики оказывается существенной. Но можно встретиться и с необычной задачей, когда единичные объемы задаются из соображений не связанных с метрикой.

Вычисление площади. Посмотрим теперь, как вычисляется площадь поверхности по данному определению при различных способах задания поверхности.

Параметрическое задание. В этом случае $\sqrt{EG-F^2}$ заменяется на $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|$.

Неявное задание. Если поверхность задана неявным образом с помощью уравнения $F = 0$, причем $F_z \neq 0$, то, используя вычисленные выше значения коэффициентов первой квадратичной формы, получаем для корня из определителя матрицы этой формы значение

$$\sqrt{\frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{F_z^2}} = \frac{|\nabla F|}{|F_z|} \quad \text{и} \quad S = \iint \frac{|\nabla F|}{|F_z|}\,dxdy \quad \text{или} \quad S = \iint \frac{|\nabla F|}{|F_y|}\,dxdz\ldots$$

Случай графика. Если поверхность представлена графиком функции $z = f(x, y)$, то аналогично получаем для корня из определителя

$$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+p^2+q^2} \quad \text{и} \quad S = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

6.11 Изотермические метрики и поверхности вращения. Поверхность Бельтрами.

Изотермические или конформные метрики. Рассмотрим метрики поверхностей, точнее, локальных карт, в которых не только $F = 0$, но и $E = G$, т.е. форма отличается от евклидовой множителем (зависящим от точки поверхности): $ds^2 = E(u, v)(du^2 + dv^2)$. Это так называемые метрики *конформно эквивалентные плоской*. Локальные координаты, в которых метрика имеет такой вид, называются *изотермическими*. В локальной карте с такой первой квадратичной формой измерение углов совпадает с евклидовым.

Это следует из выведенной выше формулы для косинуса угла. В самом деле, нетрудно видеть, что в этой формуле числитель и знаменатель отличаются от евклидова случая на множитель E, который сократится, и тогда останется евклидова формула.

Площадь в изотермических координатах выражается формулой $S = \iint E(u, v)dudv$.

Изотермические координаты существуют для любой метрики, но доказательство в общем случае требует решения достаточно сложного уравнения в частных производных (см. «Сборник задач...» А.С. Мищенко, Ю.П. Соловьев, А.Т. Фоменко, 2004, решение задачи 19.28, стр.337-339). Частным случаем поверхностей, для которых нетрудно построить изотермическую систему координат, служат *поверхности вращения*.

Репер $\{\mathbf{e}, \mathbf{g}\}$. Для параметризации такой поверхности и в других задачах с симметрией вращения полезно воспользоваться ортом $\mathbf{e}(\varphi)$ луча в плоскости, проведенного под углом φ к оси абсцисс. Очевидно, $\mathbf{e}(\varphi) = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – стандартный репер в $\mathbb{R}^3$. Обозначим производную $\dot{\mathbf{e}}(\varphi) = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}$ через $\mathbf{g}(\varphi)$. Тогда $\dot{\mathbf{g}}(\varphi) = -\mathbf{e}(\varphi)$.

Поверхность вращения. Зададим в открытой полуплоскости Oxz, $x > 0$ кривую параметрически: $x = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$. Эта кривая будет называться образующей. Если орт по оси z обозначить $\mathbf{k}$, то параметрическое задание кривой, полученной из данной вращением ее плоскости вокруг оси Oz на угол φ, будет $\mathbf{r} = \eta(t)\mathbf{e}(\varphi) + \zeta(t)\mathbf{k}$. Совокупность этих кривых образует однопараметрическое семейство, их объединение есть поверхность, параметризованная парой параметров (t, φ).

Предположим, что $\eta > 0$ и $\dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 > 0$. Тогда легко проверить, что все точки этой поверхности неособые.

Кривые, в которые при вращении полуплоскости последовательно переходит образующая кривая, называются *меридианами*, а окружности, которые описывает при этом каждая ее точка, называются *параллелями* поверхности. Они образуют координатные линии полученного параметрического задания. Первая квадратичная форма есть скалярный квадрат дифференциала радиус-вектора. Она легко находится после дифференцирования и возведения в квадрат

$$ds^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = = (\dot{\eta}(t)\mathbf{e}(\varphi)dt + \eta(t)\mathbf{g}d\varphi + \dot{\zeta}(t)\mathbf{k}dt, \dot{\eta}(t)\mathbf{e}(\varphi)dt + +\eta(t)\mathbf{g}d\varphi + \dot{\zeta}(t)\mathbf{k}dt) = = \eta^2 d\varphi^2 + (\dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)dt^2.$$

Видно, что меридианы и параллели образуют ортогональную сеть (что ясно и непосредственно, т.к. плоскости, проходящие через ось, являются нормальными плоскостями окружностей-параллелей).

Если l – нормальный параметр на образующей кривой (обозначение s уже занято), то $\eta'^2 + \zeta'^2 = 1$ и $ds^2 = \eta^2 d\varphi^2 + dl^2 = \eta^2(d\varphi^2 + \left(\frac{dl}{\eta}\right)^2)$.

Остается положить $u = \int \frac{dl}{\eta(l)}$, $v = \varphi$ и форма приводится к изотермическому виду

$$ds^2 = \eta^2(l(u))(du^2 + dv^2).$$

Псевдосфера Бельтрами. Найдем в качестве важного примера метрику псеевдосферы Бельтрами. Эта поверхность (на которой, как увидим, реализуется часть плоскости Лобачевского) получается вращением трактрисы вокруг оси абсцисс. Чтобы сопоставить координатые задания кривой и поверхности вращения, примем в определении трактрисы за ось абсцисс, направленную противоположно, за ось $\mathbb{O}z$. Будем считать, что параметр на кривой взят натуральный, который здесь обозначим l и положим для простоты $a = 1$. Тогда функция η будет в нашем случае $\sin\,\alpha(l)$.

Мы имеем $dl = \operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha$, откуда $l = \ln\,\sin\,\alpha$ и $\sin\,\alpha = e^l$

Согласно предыдущему, мы получим такое выражение метрики:

$$ds^2 = (\sin\,\alpha(l))^2 d\varphi^2 + dl^2 = e^{2l}\left(d\varphi^2 + \left(\frac{dl}{e^l}\right)^2\right).$$

Положим $\frac{dl}{e^l} = du$, тогда $u = -e^{-l}$, $e^{2l} = u^{-2}$ и мы приходим к конформной метрике

$$ds^2 = \frac{d\varphi^2 + du^2}{u^2}.$$

(Если $a \neq 1$, то эта метрика умножится на a^2.)

[**6.12 Тождество Лагранжа**

Утверждение. Пусть даны две пары векторов в $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Тогда

$$([\mathbf{u},\mathbf{v}],\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]) = \det\begin{pmatrix} (\mathbf{u},\mathbf{a}) & (\mathbf{u},\mathbf{b}) \\ (\mathbf{v},\mathbf{a}) & (\mathbf{v},\mathbf{b}) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть даны две пары векторов в $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Обозначим координаты векторного произведения $[\mathbf{a}, ,b] = \mathbf{m}$ первой пары m^1, m^2, m^3, векторного призведения $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \mathbf{n}$ второй пары — n^1, n^2, n^3.

(Напомним, что координатами векторного произведения двух векторов служат миноры матрицы, составленной из столюцов координат этих векторов, причем первая координата есть минор, полученный вычеркиванием первой строки, вторая – второй строки и третья – третьей строки.)

Рассмотрим произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \langle\mathbf{a},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{a},\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{a},\mathbf{m}\rangle \\ \langle\mathbf{b},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{b},\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{b},\mathbf{m}\rangle \\ \langle\mathbf{n},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{n},\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{m},\mathbf{n}\rangle \end{pmatrix}$$

(Значок ^{T} указывает транспонирование матрицы.) Определитель каждой матрицы слева равен скалярному произведению векторных произведений наших пар векторов. (Как смешанное произведение трех векторов.) Матрица справа есть

$$\begin{pmatrix} \langle\mathbf{a},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{a},\mathbf{v}\rangle & 0 \\ \langle\mathbf{b},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{b},\mathbf{v}\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle\mathbf{m},\mathbf{n}\rangle \end{pmatrix}$$

Таким образом, беря определители, получаем равенство:

$$\langle\mathbf{m},\mathbf{n}\rangle^2 = \det\begin{pmatrix} \langle\mathbf{a},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{a},\mathbf{v}\rangle \\ \langle\mathbf{b},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{b},\mathbf{v}\rangle \end{pmatrix}\langle\mathbf{m},\mathbf{n}\rangle,$$

и сокращая (в предположении, что m и n не ортогональны), получаем требуемое равенство. □

Контрольный вопрос. Верно ли наше равенство, если m и n ортогональны?

Дадим другое доказательство для случая двух одинаковых пар (см. п.8). Пусть в $\mathbb{R}^3$ даны два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Дополним эту пару до репера $R = \{\mathbf{u},\,\mathbf{v},\,\mathbf{z}\}$ вектором $\mathbf{z}$, единичной длины и ортогонального обоим векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, и построим линейное отображение $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, переводящее единичный репер $R_0 = \{\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_3\}$ в репер R. Матрица (A) этого отображения имеет столбцами координаты векторов репера R. Определитель этой матрицы равен смешанному произведению векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{z}$, т.е., объему параллелепипеда, построенного на векторах репера R и, значит, площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, т.е. $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|$. В то же время, как нетрудно видеть, произведение этой матрицы на ее транспонированную есть матрица, полученная окаймлением матрицы Грама (т.е. нашей матрицы $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$) единицей на диагонали и нулями. Ее определитель g равен $EG - F^2$.

Итак, g есть квадрат длины или скалярный квадрат вектора $[\mathbf{u},\,\mathbf{v}]$.

Контрольный вопрос. Покажите, что g равен сумме квадратов трех миноров матрицы координат векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.]

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 7. Вторая квадратичная форма поверхности

7.1 *Основной вопрос – кривизна поверхности.* Основным вопросом в *локальной* теории поверхностей является искривленность поверхности, т.е. характер отличия ее от плоскости. Оказывается, этот вопрос разбивается на две части: внутренний, касающийся геометрии самой поверхности и выраженный в терминах ее метрики, т.е. первой квадратичной формы, и внешний, касающийся ее расположения в пространстве, которое задается еще одной дифференциальной формой. Ею мы будем заниматься в этой главе.

Форма фигур в пространстве это относительное понятие, связанное с выбором группы преобразований пространства. В качестве основной группы принимают группу движений аффиного пространства – преобразований, сохраняющих расстояние. Мы видели, что для кривой в пространстве ее форма полностью определяется двумя функциями – функциями кривизны и кручения. Для поверхностей имеет место аналогичный факт: форма поверхности определяется двумя квадратичными формами. (Хотя, в отличие от случая кривых, не для всякой пары форм найдется поверхность с такими формами.)

По идее Гаусса (которого привели к его геометрическим исследованиям занятия геодезией – измерениями на земной поверхности) собственная или "*внутренняя*" геометрия поверхности определяется измерениями длин кривых, лежащих на ней, и углов между ними, а форма расположения – измерениями расстояний между ее точками в $\mathbb{R}^3$. Так как измерение длин, углов, площадей на поверхности выражается через первую квадратичную форму, внутренняя геометрия поверхности совпадает с изучением первой квадратичной формы.

Форма поверхности прежде всего связана, как сказано, с ее искривленностью. Замечательное открытие Гаусса состояло в обнаружении характеристики кривизны, названной им мерой кривизны, которая выражается (довольно сложным образом) через коэффициенты первой квадратичной формы и, следовательно, не меняется при перемещениях поверхности в пространстве с сохранением ее метрики, т.е., с сохранением длин кривых, лежащих на поверхности. Теперь эту характеристику называют также гауссовой кривизной.

Например, для любой цилиндрической или конической поверхности, которые локально легко разворачиваются на плоскость без растяжений или сжатий, эта величина равняется нулю. Вообще, если две поверхности можно одновременно параметризовать так, что в сответствующих точках коэффициенты первой квадратичной формы будут совпадать, то кривизны их в соответствующих точках одинаковы.

Кривизна сферы во всех точках обратна квадрату ее радиуса и она не изометрична с плоской областью даже локально. (Кусок резинового мяча нельзя уложить на плоскость без растяжений.) Вообще, в точках, где поверхность выпукла, кривизна положительна. В седловых точках (как у гиперболического параболоида) она отрицательна и это означает, что ни при каких изгибаниях поверхности, сохраняющих ее локальную метрику, нельзя добиться, чтобы окрестность такой точки стала выпуклой.

Кривизна внутренняя и кривизна расположения. Мы знаем, что коэффициенты первой квадратичной формы выражаются через *первые* производные радиус-вектора поверхности. Оказывается, что изгиб, связанный с ее расположением в пространстве, выражается через *вторые* частные производные. (Например, изгиб цилиндра.) Это выражение получить легче, чем теорему Гаусса, и мы начинаем с его изучения, оставляя теорему Гаусса до следующей главы.

7.2 Определение второй квадратичной формы

Второй дифференциал. Начнем с разложения Тейлора радиус-вектора поверхности в специальной системе координат. Пусть дана поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ и точка в M. Совместим начало O с данной точкой и координатную плоскость стадартной координатной системы пространства с касательной плоскостью к M в этой точке. Тогда поверхность станет графиком функции $z = f(x, y)$, у которой значение в O и производные первого порядка равны нулю, т.е. разложение Тейлора начнется со второго дифференциала.

Если мы ведем в плоскости другие координаты, то первые производные все равно останутся нулевыми, а второй дифференциал заменится по правилу замены квадратичной формы. Однако, если мы возьмем новые координаты в трехмерном пространстве, то касательная плоскость не будет параллельная координатной и изменение второго дифференциала станет более сложным.

(На самом деле правило замены определено для суммы первого и второго дифференциала и оно включает в свое выражение вторые производные замены, а не только матрицу Якоби.)

Задача. Напишите правило преобразования многочлена Тейлора 2-го порядка, т.е. $df + \frac{1}{2}d^2f$.

Обозначения Монжа. Мы будем дальше использовать принятые (со времен Гаспара Монжа, около 1800 года) обозначения p, q, r, s, t частных производных функции f:

$$p = f_x,\ q = f_y, \quad r = f_{xx},\ s = f_{xy},\ t = f_{yy}.$$

Тогда наша квадратичная форма имеет запись $rdx^2 + 2sdx\,dy + tdy^2$. В системе координат, в которой касательная плоскость в данной точке принята за координатную, т.е. точка особая, многочлен Тейлора выражает отклонение поверхности-графика от касательной плоскости с точностью до бесконечно малых третьего порядка. С точностью до умножения на 2 это останется верным и для нашей квадратичной формы.

Мы хотим сопоставить поверхности квадратичную форму, изменяющуюся в каждой точке по известносму закону при замене переменных, которая при представлении функции графиком оказывалась бы в особых точках вторым дифференциалом функции.

Инвариантное определение второй квадратичной формы. На поверхности M рассмотрим локальную параметризацию (u, v) в окрестности ее точки A и пусть $\mathbf{r}(l)$ – гладкая кривая в M, параметризованная длиной дуги ($l = 0$ в точке A). Ее касательный орт в точке $\mathbf{r}(l)$ обозначим $\boldsymbol{\tau}(l) = \mathbf{r}'(l)$. Рассмотрим вдоль этой кривой поле единичных векторов нормальных к поверхности: $\mathbf{n}(l)$ ($\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}$). При каждом l имеем: $\langle \boldsymbol{\tau}(l), \mathbf{n}(l)\rangle = 0$. (Направление $\mathbf{n}$ выберем так, чтобы тройка $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}$ была положительной, т.е. $\mathbf{n}$ совпадает по направлению с $[\mathbf{r}_u,\, \mathbf{r}_v]$.)

Дифференцируя, получим: $\langle k\boldsymbol{\nu},\, \mathbf{n}\rangle + \langle \mathbf{r}',\, \mathbf{n}'\rangle = 0$ (с помощью первой формулы Френе, k – кривизна, $\boldsymbol{\nu}$ – орт главной нормали кривой в точке A); $k\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{n}\rangle = -\frac{\langle \mathbf{r}',\, \mathbf{n}'\rangle\, ds^2}{ds^2} = -\frac{\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{n}\rangle}{ds^2}$. Скалярное произведение единичных векторов равно косинусу угла между векторами. Обозначим угол между нормалью к поверхности и главной нормалью кривой в точке A через φ и заменим кривизну k на радиус кривизны $R = 1/k$. Мы получаем

$$\frac{\cos\varphi}{R} = -\frac{\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{n}\rangle}{ds^2}. \qquad \langle * \rangle$$

В этой формуле $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv$. Поскольку $\mathbf{n}(s)$ – поле единичных векторов, его производная ему ортогональна и, значит, лежит в касательной плоскости в точке A. По правилу сложного дифференцирования $\mathbf{n}' = \mathbf{n}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{n}_v \frac{dv}{ds}$, значит, $d\mathbf{n} = \mathbf{n}'\, ds = \mathbf{n}_u\, du + \mathbf{n}_v\, dv$.

В таком случае скалярное произведение представляет квадратичную форму в касательной плоскости:

$$\begin{gathered}\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{n}\rangle = \langle(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv), (\mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv)\rangle = \\ = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u\rangle du^2 + (\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v\rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u\rangle) du\, dv + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v\rangle dv^2.\end{gathered}$$

В этой формуле (du, dv) – координаты произвольного касательного вектора поверхности в данной точке. Мы, таким образом, получили поле квадратичных форм на поверхности. Заметим, что ее коэффициентами служат скалярные произведения производных радиус-вектора и нормального вектора поверхности в данной точке. Эта форма называется **второй квадратичной формой поверхности.**

Инвариантность второй квадратичной формы следует из ее выражения скалярным произведением $\langle d\mathbf{r},\, d\mathbf{n}\rangle$, поскольку оба первых дифференциала являются векторами и их координаты при замене локальной карты изменяются с помощью матрицы Якоби замены. Именно, скалярное произведение в матричной форме записывается в виде $dr^T G dn$. (Здесь dr и dn – столбцы координат векторов, G матрица первой квадратичной формы, T – знак транспонирования.) При замене переменных с матрицей Якоби (J) получаем

$$\langle d\mathbf{r},\, d\mathbf{n}\rangle = dr^T G dn = dr^T ((J)^T \bar{G}(J)) dn = ((J)dr)^T \bar{G}((J)dn) = d\bar{r}\bar{G}d\bar{n} = \langle d\bar{\mathbf{r}}^T, d\bar{\mathbf{n}}\rangle.$$

(Черточка сверху означает запись в новой системе координат.)

В формуле $(*)$ в качестве $d\mathbf{r} = (du,\, dv)$ мы взяли вектор касательный к кривой на поверхности.

Утверждение. *Левая часть* $(*)$ *зависит от кривизны кривой и от угла между ее главной нормалью и нормалью к поверхности, а правая зависит только от направления касательной.* □

Полученная форма $\langle d\mathbf{r},\, d\mathbf{n}\rangle$, *взятая с минусом*, и есть требуемая вторая квадратичная форма, которую мы сейчас несколько преобразуем и проинтерпретируем.

7.3 Формулы.

Прежде всего заметим, что два слагаемых в среднем члене совпадают: оба они равны $\langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{r}_{vu}, \mathbf{n}\rangle$. Это вместе с другими соотношениями следует из дифференцирования тождеств

$$\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}\rangle = 0 = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}\rangle,$$

означающих, что вектор $\mathbf{n}$ ортогонален поверхности:

$$\begin{array}{rcccl}\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}\rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u\rangle & = & 0 & = & \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}\rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v\rangle \\ \langle \mathbf{r}_{vu}, \mathbf{n}\rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u\rangle & = & 0 & = & \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}\rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v\rangle.\end{array}$$

Из этого следует другое выражение 2-ой формы: $\langle \ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}\rangle = \langle(\mathbf{r}_{uu}\, \dot{u}^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\, \dot{u}\, \dot{v} + \mathbf{r}_{vv}\, \dot{v}^2, \mathbf{n}\rangle$. (Здесь дифференцирование ведется по параметру кривой.)

Для коэффициентов второй квадратичной формы, как и для коэффициентов первой формы, будут использоваится два типа обозначений: L, M и N (для параметров u, v) и b_{ij} (для параметров u^i, $i = 1, 2$).Таким образом вторая квадратичная форма в координатах записывается в виде:

$$L(u,v)du^2 + 2M(u,v)du\, dv + N(u,v)dv^2 = b_{ij}du^i du^j.$$

Выразим коэффициенты, используя формулу $\frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG-F^2}}$ для орта нормали к поверхности:

$$\begin{array}{llcll} L & = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u\rangle & = & \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}\rangle = & \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \\ M & = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v\rangle = & -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u\rangle = & \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}\rangle = & \frac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \\ N & = -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v\rangle & = & \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}\rangle = & \frac{(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}.\end{array}$$

Удобно обозначать первую форму римской цифрой I, а вторую II:

$$\mathrm{I}(du, dv) = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2; \quad \mathrm{II}(du, dv) = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

Случай графика. Если поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$, то в введенных выше обозначениях Монжа имеем прежде всего для коэффициентов первой формы: $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$ и $EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2$.

Коэффициенты второй формы получают тогда выражения:

$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Если точка (x, y) – особая точка функции f, т.е. касательная плоскость к графику в этой точке горизонтальна, то $p = q = 0$ и определитель $EG - F^2 = 1$. Поэтому $L = r$, $M = s$, $N = t$, т.е. $\mathrm{II}(du, dv) = df$.

Мы видим. что вторая форма дает удвоенное отклонение поверхности от касательной плоскости (с точностью до бесконечно малых третьего порядка).

Упражнение. Напишите коэффициенты второй квадратичной формы для неявного задания поверхности уравнением $F(x, y, z) = 0$.

[Ответ (в предположении, что $F_z \neq 0$):

$$L = \frac{-F_z^2 F_{xx} + 2F_x F_z F_{xz} - F_x^2 F_{zz}}{F_z^2 \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

$$M = \frac{-F_z^2 F_{xy} + F_x F_z F_{yz} + F_y F_z F_{xz} - F_x F_y F_{zz}}{2F_z^2 \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

$$N = \frac{-F_z^2 F_{yy} + 2F_y F_z F_{yz} - F_y^2 F_{zz}}{F_z^2 \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}]$$

Важное замечание. При изменении ориентации пространства изменяется направление вектора $\mathbf{n}$, а следовательно и знак второй квадратичной формы. Одновременно изменяется знак всех нормальных кривизн. Поэтому, во-первых, для кривых на поверхности в ориентированном пространстве кривизна берется со знаком (в отличие от кривых в пространстве, для которых она всегда считается положительной), во-вторых, для двух кривых пересекающихся в одной точке независимо от ориентации пространства можно сказать, одинаковый у них знак или противоположный. В частности, *произведение кривизн имеет определенный знак.*

7.4 Кривизна кривых на поверхности, имеющих данное направление. Теорема Мёнье.

Теперь вернемся к формуле для косинуса угла между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой на поверхности.

$$k \cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{R} = \frac{\mathrm{II}(du, dv)}{\mathrm{I}(du, dv)} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Правая часть этого равенства содержит коэффициенты, которые являются функциями координат точки, и координаты du, dv касательного вектора. На самом деле правая часть зависит только от отношения этих координат, т.к. числитель и знаменатель являются однородными второй степени по паре du, dv. Это значит, что левая часть в каждой точке зависит только от направления касательного вектора, т.е. от отношения $\frac{du}{dv}$ (или $\frac{dv}{du}$). Угол φ в левой части определяет направление главной нормали кривой. Отсюда вытекает:

Теорема. *Радиусы кривизны кривых, проведенных через данную точку на поверхности и имеющих общую касательную и общую главную нормаль, совпадают в этой точке.* □

Следствие. *Все кривые на поверхности, имеющие в данной точке общую соприкасающуюся плоскость, имеют в этой точке одну и ту же кривизну.* □

Нормальные сечения.

Утверждение. Пересечение поверхности M с плоскостью, проходящей через точку A, нормаль которой в A не совпадает с нормалью к поверхности, является в окрестности A гладкой дугой.

Доказательство Пересечение определяется системой из двух уравнений ($F(x,y,z) = 0$ и $\langle \mathbf{n}, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$), матрица Якоби которой невырождена, т.к. нормальные векторы ($\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ и $\mathbf{n}$) не параллельны. Дуга, получающаяся в этом пересечении, называется *плоским сечением.* □

Среди плоских сечений с данным направлением касательной имеется ровно одна дуга, главная нормаль которой совпадает с нормалью к поверхности. Такие *нормальные сечения* получаются в пересечении поверхности с нормальными плоскостями, т.е. проходящими через нормаль к поверхности. Для нормальных сечений косинус в нашей формуле равен ± 1 и мы получаем важный результат:

Теорема. *Кривизна нормального сечения k_n в данной точке и для данного направления равна отношению значений второй и первой квадратичных форм в этой точке для данного направления.* □

Замечание. Радиус положителен, но кривизна берется со знаком, совпадающим со знаком косинуса. (Он зависит от ориентации поверхности, т.е. от направления ее нормали.) Значит,

знак кривизны нормального сечения совпадает со знаком второй формы.

В отличие от теории кривых, где всегда $k > 0$, величина k_n может быть отрицательной: если изменить ориентацию пространства, то нормальный орт поверхности изменит направление и вместе с ним изменит знак скалярное произведение $\langle \ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n} \rangle$.

Теорема Мёнье (Jean Baptiste Meusnier). *Центры кривизны всех кривых данного направления в данной точке лежат на одной окружности в нормальной плоскости к этому направлению, имеющей в качестве диаметра радиус кривизны нормального сечения.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, $\pm\frac{1}{R_n} = \frac{\cos\varphi}{R}$, т.е. радиус кривизны R любой (гладкой) кривой на поверхности относится к радиусу кривизны R_n нормального сечения того же направления как косинус угла между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности с точностью до знака. Геометрически $R = R_n \cos\varphi$ означает, что центр кривизны данной кривой получается из центра кривизны нормального сечения проекцией на нормаль кривой. Это доказывает теорему. □

Контрольные вопросы. Что есть геометрическое место концов векторов кривизны ($\mathbf{r}''(s)$) кривых данного направления в данной точке?

Обратим внимание на то, что кривизна нормального сечения минимальна среди кривых с данным направлением. А каков максимум? Рассмотрите поверхности $z = x^2 \pm y^2$ в начале.

Нормальная кривизна. Кривизна нормального сечения называется *нормальной кривизной* каждой кривой с данным направлением. Или, согласно сказанному:

Теорема. *Нормальная кривизна $k_n = k_n(u, v, du, dv)$ данной кривой в данной точке равна длине проекции вектора кривизны на нормаль поверхности в этой точке.*

Проекция вектора кривизны на касательную плоскость. Геодезическая кривизна. Естественно рассмотреть проекцию вектора кривизны также на касательную плоскость. Эта проекция играет важную роль. Она называется вектором геодезической кривизны, а длина ее – геодезической кривизной.

Роль геодезической кривизны состоит в том, что это есть кривизна кривой относительно внутренней геометрии поверхности, т.е. выражается только в терминах первой квадратичной формы, как мы увидим позже. В частности, она не меняется при изгибаниях поверхности (деформациях, не меняющих локально длины кривых). Например, геодезическая кривизна кривых, нарисованных на цилиндре или конусе (или вообще на развертывающихся поверхностях), совпадает после наложения этих поверхностей на плоскость с обычной кривизной.

7.5 Индикатриса Дюпена

Вторая квадратичная форма и квадратичная аппроксимация поверхности. Рассмотрим снова специальную систему координат, когда поверхность представляется графиком функции $z = f(x, y)$, а координатная плоскость $z = 0$ является касательной плоскостью в данной точке, совмещенной с началом координат.

Вторая квадратичная форма представляется в этом случае, как мы знаем, в виде $rdx^2 + 2sdx\,dy + tdy^2$ и совпадает с (удвоенным) многочленом Тейлора, взятым с точностью до третьего порядка. Нетрудно видеть, что у этой поверхности второго порядка (которая совпадает с графиком своей собственной второй квадратичной формы) все нормальные кривизны в начале будут те же, что и у данной поверхности. В самом деле, нормальная кривизна есть отношение значений двух квадратичных форм, а обе формы у этих поверхностей в начальной точке совпадают.

Индикатриса Дюпена. Поведение функции, графиком которой служит поверхность второго порядка, мы можем охарактеризовать в данной точке с помощью кривой второго порядка. Именно, возьмем сечения графика уровнями

$z = \pm 1$ и спроектируем их на плоскость $z = 0$. Мы получим в случае неособой точки поверхности (а не функции!) центральную кривую: эллипс или пару гипербол с общими асимптотами или пару параллельных прямых.

Такая кривая, в нашем случае построенная с помощью аппроксимирующей поверхности второго порядка, носит название *индикатриса Дюпена* (данной поверхности в данной точке).

Инвариантное определение индикатрисы и ее уравнение. Заметим прежде всего, что индикатриса есть кривая в касательной плоскости. Посмотрим, чему равна длина касательного вектора с концом в данной точке индикатрисы, т.е. чему равно расстояние этой точки от начала в касательной плоскости. В нашей специальной системе координат во взятой точке вторая квадратичная форма, рассматриваемая как функция на касательной плоскости, равна по модулю 1. Из основной формулы вытекает, что в таком случае радиус нормального сечения равен квадрату длины этого вектора.

Таким образом, расстояние точки индикатрисы от начала есть корень из радиуса кривизны нормального сечения, проходящего через эту точку. Это определение не зависит от выбора координатной системы в объемлющем пространстве. Итак,

Определение. Индикатриса Дюпена в касательной плоскости точки данной поверхности – это кривая, в точках которой выполнены два эквивалентных условия: 1) значение второй квадратичной формы равно по модулю единице, 2) длина радиус-вектора точки этой кривой равна квадратному корню из радиуса кривизны нормального сечения в направлении, указанном этим вектором.

Доказательство эквивалентности этих условий вытекает из формулы $\pm 1/R_n = \frac{\mathrm{II}(\xi,\eta)}{\mathrm{I}(\xi,\eta)}$. □

Уравнением индикатрисы служит равенство $\mathrm{II}(\xi,\eta) = \pm 1$ или $L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \pm 1$. Здесь ξ, η – координаты касательного вектора, отвечающие данной карте.

(Слово "*индикатриса*" означает указатель, с ее помощью видно, как меняется кривизна нормального сечения при повороте направления касательной в данной точке поверхности.)

7.6 Главные кривизны и формула Эйлера

Главные направления. Фиксируем точку A на поверхности M и обратимся к касательной плоскости $\boldsymbol{\tau}_A$ в этой точке. В этом линейном двумерном пространстве задан базис $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ и даны две квадратичные формы. Одна из них имеет положительно определенную симметричную матрицу G и задает метрику в $\boldsymbol{\tau}_A$ – скалярное произведение векторов по формуле $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = g_{ij}u^iv^j$ (в указанном базисе). Другая форма имеет симметричную матрицу B (не обязательно невырожденную) и записывается в этом же базисе в виде $b_{ij}u^iv^j$.

Эта ситуация известна из курса высшей алгебры. Основная теорема тут утверждает, что возможно сделать (линейную) замену переменных в $\boldsymbol{\tau}_A$, которая обе матрицы приведет к диагональному виду. При этом матрица G перейдет в единичную, что означает, что новый базис является ортонормированным.

Обозначим новый базис $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$, а координаты вектора $\mathbf{u}$ в этом базисе $\bar{u}^1, \bar{u}^2$. Таким образом квадрат нормы вектора $\mathbf{u}$ примет "пифагоров" вид $(\bar{u}^1)^2 + (\bar{u}^2)^2$, а скалярное произведение – $\bar{u}^1\bar{v}^1 + \bar{u}^2\bar{v}^2$.

Вторая квадратичная форма будет в этом базисе иметь вид $\mathrm{II}(\mathbf{u}) = a(\bar{u}^1)^2 + b(\bar{u}^2)^2$. Наша задача: установить смысл коэффициентов a и b.

Обратим внимание, что замена переменных была произведена в векторном касательном пространстве, она не индуцирована сменой карты в окрестности точки A. Это можно сделать, но такая замена приведет формы к диагональному виду только в точке A. Поэтому нам нет смысла обращаться к замене карты, мы действуем прямо в касательной плоскости.

Упражнение. Постройте замену локальных координат в окрестности точки A, которая индуцирует в $\boldsymbol{\tau}_A$ заданное линейное преобразование L (т.е. дифференциал замены в точке A есть L).

Напомним, что базисные векторы $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ новой координатной системы в $\boldsymbol{\tau}_A$ являются собственными векторами матрицы B, а числа a и b – соответствующими собственными значениями.

Определение. Направления векторов $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ называются *главными направлениями* в касательной плоскости $\boldsymbol{\tau}_A$.

Рассмотрим теперь произвольное направление в $\boldsymbol{\tau}_A$, определяемое единичным вектором $\boldsymbol{m}$. Поскольку система координат сейчас ортонормированная, координаты этого вектора равны $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, где φ угол между $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}$. По основной формуле $k_n = \frac{\mathrm{II}(\mathbf{m})}{\mathrm{I}(\mathbf{m})}$ мы получаем:

$$k_n = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi.$$

Здесь k_n кривизна нормального сечения в направлении вектора $\mathbf{m}$. Так как этот вектор единичный, знаменатель в правой части основной формулы равен 1.

Рассмотрим нормальные сечения в двух главных направлениях (с координатами (1,0) и (0,1)). Мы получим: $k_1 = a$ и $k_2 = b$, где через k_1 и k_2 обозначены нормальные кривизны в этих направлениях.

Подставляя эти значения в предыдущую формулу, мы получим выражение нормальной кривизны произвольного направления через нормальные кривизны двух главных направлений:

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.* Нормальные кривизны главных направлений называются **главными кривизнами.**

Будем поворачивать нормальную плоскость вокруг нормали к поверхности в точке A. Кривизна нормального сечения будет циклически меняться.

Утверждение. *Кривизна нормального сечения монотонно возрастает от меньшей главной кривизны к большей и затем обратно два раза за полный оборот.*

Доказательство. Перепишем нашу формулу:

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 - k_2 \cos^2 \varphi = (k_1 - k_2) \cos^2 \varphi + k_2. \qquad \square$$

Поскольку $\cos^2 \varphi$ меняется от 0 до 1, то если $k_1 > k_2$, максимальным значением нормальной кривизны является k_1, а k_2 минимальное значение, и наоборот, если $k_2 > k_1$. Таким образом, главные кривизны служат экстремальными значениями нормальной кривизны.

(Главные направления, очевидно являются главными осями индикатрисы, см. предыдущий пункт.)

Классификация точек поверхности. По соотношению между главными кривизнами мы получаем следующие типы точек:

1. Если $k_1 = k_2$, точка поверхности называется *сферической* (или омбилической); в этом случае все нормальные кривизны равны между собой.

2. Если обе главные кривизны отличны от нуля и одного знака, точка называется *эллиптической*; в этом случае поверхность выпукла в точке, т.е. малая окрестность точки лежит по одну сторону от касательной плоскости.

3. Если обе главные кривизны отличны от нуля и имеют противоположные знаки, то точка называется *гиперболической*; в этом случае при вращении нормальной плоскости вокруг нормали сечение в окрестности точки переходит с одной стороны касательной плоскости на другую. Можно доказать, что пересечение поверхности и касательной плоскости сотоит из двух гладких дуг, пересекающихся под ненулевым углом.

4. Если одна из главных кривизн равна нулю, а другая отлична от нуля, то точка называется *параболической*; в этом случае одна из главных кривизн равна нулю. Если другая отлична от нуля, то из формулы Эйлера следует, что нормальные кривизны всех направлений, кроме второго главного отличны от нуля и имеют один и тот же знак. Но нормальное сечение с нулевой кривизной может иметь в точке сложное поведение.

5. Если обе главные кривизны равны нулю, точка называется *точкой уплощения.* В этом случае вторая квадратичная форма равна нулю, а отклонение поверхности от касательной плоскости имеет третий порядок малости. Возможно сложное поведение поверхности вблизи этой точки.

Определение. Гауссовой (или полной) кривизной (или просто *кривизной*) называется произведение главных кривизн $K = k_1 k_2$. **Средней кривизной** называется полусумма (иногда сумма) главных кривизн $H = \frac{k_1+k_2}{2}$.

Мы покажем сейчас, что главные кривизны k_1, k_2 – инварианты второй квадратичной формы.

7.7 Вычисления в $\mathbb{R}^3$. Полная кривизна и средняя кривизна

Из курса высшей алгебры нам известно, что числа k_1 и k_2 являются собственными числами матрицы B и они служат корнями характеристического уравнения $\det(B - \lambda G) = 0$.

Для поверхности в $\mathbb{R}^3$ мы должны решить уравнение $\det \begin{pmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{pmatrix} = 0$.

Левая часть представляет собой многочлен, корнями которого служат главные кривизны поверхности k_1 и k_2. Он записывается в виде

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K,$$

где H средняя кривизна, а K — гауссова кривизна поверхности в данной точке. Раскрывая определитель, мы получим:

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Упражнение. Напишите выражение главных кривых для параметрического задания поверхности и задания графиком.

Рассмотрим простейший случай: поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$ в ортогональной системе координат, причем координатная плоскость $\mathbb{O}xy$ в точке $\mathbb{O}$ является касательной плоскостью к поверхности. В этой точке первая форма имеет вид $x^2 + y^2$, а вторая является вторым дифференциалом: $f_{xx}\, x^2 + 2f_{xy}dx\, dy + f_{yy}dy^2$. Таким образом, кривизна нашей поверхности есть определитель $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = rt - s^2$.

Например, кривизна поверхности $z = x^2 \pm y^2$ в точке $\mathbb{O}$ есть ± 4.

Контрольный вопрос. Докажите, что кривизна сферы радиуса 1 равна 1 в каждой точке. Чему равна кривизна сферы радиуса r?

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 8. Гауссова кривизна, сферическое отображение и развертывающиеся поверхности

8.1 Значение полной кривизны. Локальный анализ формы поверхности

Полная кривизна и теорема Гаусса. Основная теорема теории поверхностей, теорема Гаусса, которую мы докажем в следующей главе, состоит в том, что полная кривизна имеет выражение через первую квадратичную форму, т.е. через ее коэффициенты и их производные. Из приведенного выше выражения видно, что для этого нам предстоит выразить через коэффициенты E, F, G первой формы определитель второй формы. На самом деле теорему Гаусса можно доказывать, идя разными путями, в том числе и указанным. Но можно дать и доказательства, основанные не на вычислении K, а на прояснении ее геометрического смысла. Мы познакомимся с обоими этими путями.

Роль знака полной кривизны. Особое значение имеет знак полной кривизны $K = k_1k_2$. Если $K > 0$, то знаки k_1 и k_2 совпадают, если $K < 0$, то знаки k_1 и k_2 противоположны, если $K = 0$, то хотя бы одна из главных кривизн нулевая. Как мы сейчас увидим, этого достаточно, чтобы в первом приближении охарактеризовать форму поверхности в окрестности данной точки. В частности, эта характеризация зависит только от метрики. Сами знаки главных кривизн несущественны, т.к. мы можем поменять их, просто изменив ориентацию поверхности.

Индикатриса Дюпена в основных случаях. Указанные три возможности различаются типом индикатрисы Дюпена как кривой второго порядка: она будет эллипсом в случае $K > 0$, парой гипербол в случае $K < 0$ и парой прямых в случае $K = 0$, $H \neq 0$.

Уравнения в нормальной системе координат соответственно будут: $k_1\xi^2 + k_2\eta^2 = \pm 1,\ k_1\xi^2 - k_2\eta^2 = \pm 1,\ k_1\xi^2 = \pm 1$. (Случай *точки уплощения*, когда обе главные кривизны и, значит, все нормальные кривизны равны нулю, мы оставим в стороне.)

В *эллиптической точке*, где $K > 0$, знак нормальных кривизн постоянен и все нормальные сечения лежат по одну сторону касательной плоскости, т.е. поверхность имеет окрестность данной точки, лежащую целиком по одну сторону от касательной плоскости в этой точке. Это значит, что поверхность *выпукла* в данной точке.

(Имеется два подхода к определению выпуклости: через отрезки, соединяющие точки множества, и локальный – через касательные “опорные” плоскости. Естественно, оба определения эквивалентны, но мы не задерживаемся здесь на анализе этого важного понятия, см... .)

Если обе главные кривизны равны, то индикатриса Дюпена будет окружностью. Такая точка называется *омбилической*.

Упражнения. Покажите, что в омбилической точке коэффициенты обеих форм пропорциональны, а $H^2 = 4K$.

Замечание. Поверхность, целиком состоящая из омбилических точек, есть сфера. Доказательство этого факта требует дополнительных соображений (см. Норден, стр. 198-199).

В *гиперболической точке*, где $K < 0$, индикатриса Дюпена состоит из двух гипербол. Две общие асимптоты этих гипербол разбивают касательную плоскость в окрестности начала на четыре угла, так что знак нормальных кривизн для нормальных сечений, проведенных через одну пару противоположных углов, положительный, а через другую – отрицательный. Значит, поверхность в окрестности данной точки изогнута в одну сторону от касательной плоскости в углах одной пары и в другую сторону в углах другой пары. Это строение окрестности описывают названием *седловая точка*. Заметьте, что модули главных кривизн совпадают в точности в тех точках поверхности, где $H = 0$. Индикатриса Дюпена в этих точках состоит из равнобочных гипербол, в частности, для них направления асимптот ортогональны.

В *параболической точке*, где $K = 0$, $k_1 \neq 0$, индикатриса Дюпена состоит из двух несовпадающих параллельных прямых. В направлении этих прямых (асимптотическом) нормальная кривизна нулевая, она достигает максимума в ортогональном направлении, между этими направлениями изменяется монотонно, в частности, сохраняет знак.

Поэтому все нормальные сечения, исключая асимптотическое, имеют направление выпуклости в одну сторону нормали, но сечение асимптотического направления может иметь сложное строение, требующее особого анализа. В простейшем случае оно имеет в данной точке точку перегиба и тогда поверхность в ее окрестности имеет *полуседло*.

Мы оставляем в стороне анализ особого случая *точки уплощения*, в которых обе главные кривизны и, значит, все нормальные кривизны равны нулю. Ограничимся примером "обезьяньего седла", заданного с помощью комплексного переменного уравнением $f(x, y) = \Re(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$. График этой функции имеет в начале индикатрису с тремя прямыми в качестве асимптот. Поэтому график имеет три вдавленности вниз (для ног и хвоста) и три других – вверх.

Взгляд на поверхность в целом. Если теперь от локального рассмотрения строения поверхности в одной точке обратиться ко всей поверхности, то можно заметить, что эллиптические и гиперболические точки образуют области (т.к. выделяются строгими неравенствами), а параболические точки, вообще говоря, образуют линии, как правило, разделяющие эти области. Уравнением такой линии служит условие $K = 0$, которое эквивалентно равенству $LN - M^2 = 0$.

Упражнение. Найдите линии $K = 0$ на торе, образованном вращением окружности вокруг вертикальной оси. (На поверхности бублика.)

[Воспользуйтесь, например, теоремой Менье.]

8.2 Частные случаи. Развертывающиеся поверхности, минимальные поверхности и поверхности вращения.

Случай развертывающихся поверхностей. Конечно, поверхность может иметь и области, целиком состоящие из параболических точек. Для такой поверхности мы имеем $rt - s^2 = 0$ в обозначениях Монжа. Класс поверхностей, удовлетворяющих этому дифференциальному уравнению в частных производных составляют *развертывающиеся поверхности*, исключая те, которые неудачно расположены по отношению к системе координат: имеют направления, параллельные оси аппликат. Мы рассмотрим эти поверхности в следующем пункте.

Средняя кривизна, оператор Лапласа и минимальные поверхности.

В особой точке функции $z = f(x, y)$ и в ортонормированной системе координат на плоскости $\mathbb{O}xy$ удвоенная средняя кривизна оказывается равной $r + t = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \Delta f$, т.е. значению оператора Лапласа для функции f.

Оказывается, условие, что средняя кривизна H поверхности тождественно равна нулю, равносильно экстремальному свойству этой поверхности: среди всех поверхностей достаточно близких к данной с фисированным граничным контуром (возможно, состоящем из нескольких замкнутых кривых) площадь этой поверхности принимает минимальное значение. Поэтому такие поверхности называются *минимальными.* (Две главные кривизны как бы уравновешивают противоположные натяжения, стремящиеся уменьшить площадь.)

Возможно, что на тот же контур могут быть натянуты минимальные поверхности разной площади, но далекие друг от друга.

Если на поверхности введены изотермические координаты (u, v), то векторная функция $\mathbf{r}(u, v)$ удовлеьворяет уравнению Лапласа $\triangle \mathbf{r} = 0$, т.е. три координатные функции оказываются гармоническими: $\frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial v^2} = 0$ (и аналогично для двух других координат.) В других не изотермических координатах координатные функции не будут гармоническими, так что инвариантной является связь между

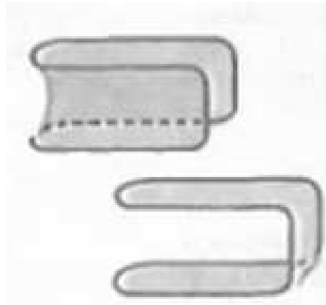
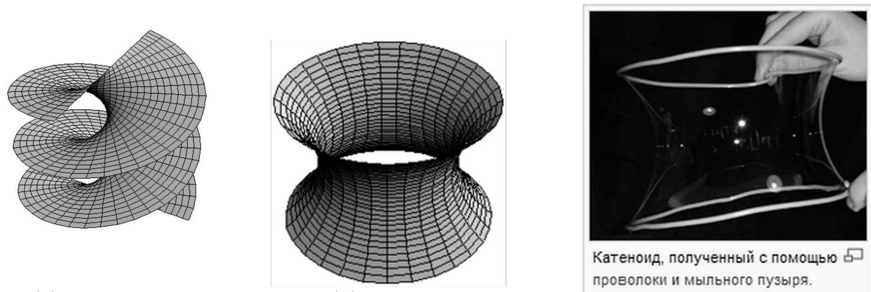


Рис. 4: минимальные поверхности с общим контуром и разной площадью



(a) геликоид (b) катеноид

Рис. 5: локально изометричные минимальные поверхности

равенством нулю средней кривизны и минимальностью, но не с уравнением Лапласа. Подробнее о минимальных поверхностях см. учебники Дубровина – Новикова – Фоменко и Новикова – Тайманова.

Поверхности вращения.

Ясно, что направление меридиана в каждой точке, не лежащей на оси вращения, есть одно из двух главных направлений: меридиан лежит в плоскости, проходящей через ось, значит, в плоскости симметрии поверхности, а тогда и симметрии индикатрисы Дюпена.

Главные направления это как раз направления симметрии индикатрисы. Второе направление ортогонально первому, т.е. меридиану, и это есть направление параллели. Но сама параллель, как правило, не является нормальным сечением. Однако, ее центр кривизны лежит на оси вращения, которая ортогональна ее нормали, и, значит, там же лежит и центр кривизны нормального сечения, проектирующийся, по теореме Менье, в центр этой окружности. Значит один радиус кривизны есть отрезок нормали до оси вращения.

Вторым радиусом кривизны служит радиус кривизны меридиана.

Контрольный вопрос. В каком случае радиус параллели является является главным радиусом кривизны для поверхности?

Задача. Рассмотрим тор, полученный вращением вокруг оси Oz окружности, лежащей в плоскости Oxz с центром в точке $x = 2$ оси Ox и радиусом 1. Найти кривизну тора в точке указанной окружности с радиусом, наклоненным под углом φ к оси Oz.

Задача. Найдите главные кривизны поверхности, полученной вращением трактрисы вокруг оси Ox (в левой полуплоскости). Она называется *псевдосферой Бельтрами.* Используя геометрические свойства этой кривой, покажите, что гауссова кривизна псевдосферы постоянна и отрицательна (она локально изометрична плоскости Лобачевского.)

[Параметр a (отрезок касательной) является средним геометрическим между отрезком нормали N и радиусом кривизны R трактрисы в данной точке: $RN = a^2$. Но отрезок нормали до оси абсцисс, т.е. до оси вращения в нашем случае, есть второй главный радиус кривизны. Переходя к кривизнам, получаем: $K = k_1 k_2 = -\frac{1}{a^2}$.

Знак мы берем отрицательный, т.к. трактриса имеет вогнутость к оси вращения и два вектора кривизны направлены в разные стороны от касательной плоскости.]

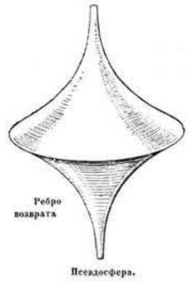


Рис. 6: псевдосфера

8.3 Сферическое отображение и геометрический смысл полной кривизны.

Геометрический смысл полной кривизны удобно выясняется с помощью простой геометрической операции – сферического отображения – впервые введенной еще Гауссом.

Сферическое отображение. Если нормальный орт $\mathbf{n}(u, v)$, взятый в каждой точке поверхности M^2, отложить от начала координат в $\mathbb{R}^3$, то конец орта будет лежать на единичной сфере S^2, и возникнет отображение $n : M^2 \to S^2$. (Точке на поверхности отвечает конец перенесенного вектора нормали на сфере.) Оно называется сферическим отображением поверхности.

О классе гладкости сферического отображения. Для поверхности, локально заданной уравнением $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ с непрерывно дифференцируемой функцией F, координаты нормального вектора аналитически выражаются через производные F. Поэтому класс гладкости отображения n на единицу меньше, чем класс гладкости поверхности (такой же, как класс гладкости производных F). Чтобы обеспечить непрерывную дифференцируемость сферического отображения, нам поэтому нужно потребовать по крайней мере непрерывность вторых производных F, т.е. принадлежность поверхности к классу гладкости C^2, что будем считать выполненным.

Для понимания этой темы поможет аналогия с определением кривизны кривой. Напомним, что кривизна кривой это скорость поворота касательной (или нормали) по отношению к натуральному параметру, т.е. предел отношения угла между касательными ортами в близких точках к длине дуги между ними. На плоскости удобно было перенести орты в начало, представляя угол между ними дугой единичной окружности между их концами. Вместо касательных ортов в близких точках с тем же успехом можно было взять орты нормалей.

Теперь мы поступаем аналогичным образом, но вместо длин дуг нам нужно будет говорить о площадях малых областей и о пределе отношения площадей:

Теорема 1. *Полная кривизна в точке $A \in M^2$ есть предел отношения площади образа малой окрестности этой точки к площади самой окрестности при стягивании окрестности к точке A.*

Доказательство. Случай неособой точки. Рассмотрим сначала основной случай неособой для отображения n точки $A \in M^2$, в которой якобиан этого отображения не нуль. В таком случае по теореме об обратном отображении мы можем считать, что в некоторой окрестности U нашей точки отображение n является диффеоморфизмом U на $V = n(U)$.

Теорема об обратном отображении применяется к локальному представителю отображения, т.е. к двум плоским областям, на которых заданы локальные карты в окрестности точки A и в окрестности $B = n(A)$ в образе.

Локальные карты. Нам удобно для параметризации окрестности точки $B = n(A)$ в сфере воспользоваться теми же параметрами u, v, которые составляют локальную координатную систему поверхности в окрестности $A \in M^2$. Иначе говоря, мы возьмем *одну и ту же* координатную область для поверхности и для сферы и примем, что координаты u, v точек из окрестности $U(A)$ и их образов в $V(B)$ совпадают. Мы можем записать наше отображение в векторной форме в виде $n(\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{n}(u, v)$ (орт нормали в точке поверхности совпадает с радиус-вектором соответствующей точки сферы).

Если область U поверхности параметризована плоской областью W, то ее площадь выражается, как мы знаем, интегралом

$$S = \iint\limits_W |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \, du \, dv,$$

распространенным по W. На сфере радиус-вектором служит нормальный орт к поверхности M^2 в соответствующей точке. Поэтому на сфере площадь V – образа U – выражается интегралом

$$S_0 = \iint\limits_W |[\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v]|\, du\, dv,$$

распространенным по той же области параметров.

Векторные произведения в обоих интегралах коллинеарны, т.к. они идут по нормалям к поверхности и сфере в соответствующих точках, а эти нормали параллельны по определению отображения n. Значит, $[\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v] = \lambda[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$. Подсчитаем коэффициент пропорциональности λ.

Напомним тождество Лагранжа (см. п. 6.12, стр.50):

Скалярное произведение двух векторных произведений равно определителю, составленному из скалярных произведений векторов первой пары на векторы второй пары.

Умножим скалярно на $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ условие $[\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v] = \lambda[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ и заменим, согласно упомянутому тождеству, скалярные произведения векторных произведений детерминантами:

$$\det\begin{pmatrix} \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{r}_u\rangle & \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{r}_v\rangle \\ \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{r}_u\rangle & \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{r}_v\rangle \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle & \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle \\ \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u\rangle & \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v\rangle \end{pmatrix}.$$

Но все скалярные произведения, входящие в это выражение, оказываются коэффициентами наших квадратичных форм, так что слева стоит детерминант $\Delta = LN - M^2$, а справа – $\lambda g = \lambda(EG - F^2)$. В результате мы получаем, что коэффициент пропорциональности λ это как раз полная кривизна K.

Внося его в выражение площади области на сфере, получим, что отношение площадей наших областей равно:

$$\frac{\iint |K||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv}{S}.$$

Стягивая область U к точке A, мы можем по теореме о среднем вынести в числителе кривизну за знак интеграла и получить, что в пределе это отношение стремится к значению кривизны K в A. $\square$

Напоминание о геометрическом смысле якобиана. В курсе анализа доказывалось, что якобиан в неособой точке A гладкого отображения области евклидова пространства в пространство той же размерности имеет смысл локального коэффициента растяжения объемов (площадей), точнее есть предел отношения объема образа малой окрестности точки A к объему этой окрестности, когда окрестность стягивается к точке A.

Однако, чтобы связать якобиан отображения с объемами, нужно, чтобы измерение объемов происходило в образе и прообразе согласованно. Если обе области, образ и прообраз, лежат в одном евклидовом пространстве, то измерение *будет* согласованным – имеется единая единица измерения объема (порожденная единой метрикой), дифференциал отображения будет переводить параллелепипеды в параллелепипеды, объемы которых измеряются в той же системе. Но если, как в нашем случае, речь идет о двух кривых поверхностях, координаты в которых задаются независимо от измерения, то связь между отображением и измерением площадей теряется. Например, при построении сферического отображения $n(\mathbf{x})$ мы выбрали на сфере те же координаты, что и для данной поверхности, так что в этих координатах матрица Якоби единичная и не имеет отношения к кривизне.

Чтобы все же связать кривизну с якобианом (что будет полезно, как мы увидим дальше), мы воспользуемся тем, что обе поверхности лежат в общем трехмерном пространстве, из которого они заимствуют метрику (первую квадратичную форму) и измерение площади (с помощью определителя этой формы).

Теорема 2. *Гауссова кривизна поверхности в точке $A \in M^2$ есть якобиан в этой точке сферического отображения окрестности этой точки в подходящих координатах.*

Доказательство. Проведем касательные плоскости τ_A к M и τ_B к сфере в точках A и $B = n(A)$. Эти плоскости параллельны. В каждой из них возьмем *ортонормированную* систему координат соотв. с началом A и B: $A\xi\eta$ и $B\bar{\xi}\bar{\eta}$. В силу регулярности обеих поверхностей, имеются окрестности U на M и V на сфере, которые диффеоморфно проектируются ортогонально на эти плоскости: U проектируется на область $\widetilde{U} \subset \tau_A$, V проектируется на область $\widetilde{V} \subset \tau_B$.

Обозначим через $\bar{n} : \bar{U} \to \bar{V}$ композицию трех отображений: диффеоморфизма $\bar{U}$ на U обратного к проекции, отображения $n : U \to V$ и проекции V на $\bar{V}$.

Пусть теперь P малая область в U, $\bar{P}$ – ее проекция, $Q = n(P)$ и $\bar{Q}$ – проекция Q. Тогда $\bar{Q} = \bar{n}(\bar{P})$. Будем обозначать площадь области X (поверхности или плоскости) через σX.

Напомним, что при проекции параллелограмма на плоскость его площадь умножается на косинус угла между плоскостями параллелограмма и проекции. Соответственно, если касательные плоскости поверхности M в точках U наклонены к плоскости τ_A меньше, чем на малый угол α, то для каждой области $P \subset U$ будем иметь: $c\,\sigma P < \sigma \bar{P}$, где $0 < c < \cos\alpha$. Поэтому:

$$\frac{\sigma\bar{Q}}{\sigma\bar{P}} = \frac{\sigma\bar{Q}}{\sigma Q}\frac{\sigma Q}{\sigma P}\frac{\sigma P}{\sigma\bar{P}} < \frac{\sigma Q}{\sigma P}\frac{\sigma P}{\sigma\bar{P}} < \frac{1}{c}\,\frac{\sigma Q}{\sigma P}.$$

Но теперь, поскольку $\bar{n}$ есть отображение плоскости на плоскость в $\mathbb{R}^3$ и обе плоскости имеют стандартную метрику с общей единицей измерения, мы можем применить теорему о якобиане: этот предел равен якобиану отображения $\bar{n}$.

В точке A этот якобиан равен кривизне $K(A)$. Действительно, стягивая область P к точке A, мы можем одновременно устремить c к 1, и тогда (так как $c\,\sigma P < \sigma\bar{P} < \sigma P$, аналогично для Q и $\bar{Q}$):

$$\lim\frac{\sigma\bar{Q}}{\sigma\bar{P}} = \lim\frac{\sigma Q}{\sigma P} = K.$$

Если принять проекции на касательные плоскости за карты в U и V, то мы получим, что кривизна K в точке A действительно является якобианом сферического отображения в выбранных координатах, но это будет верно, вообще говоря, только для одной точки A. $\square$

8.4 Особые точки сферического отображения

Посмотрим, что из себя представляет поверхность, для которой *все* точки сферического отображения особые. Мы будем использовать *теорему о ранге* из курса математического анализа (в случае отображения двумерных областей), см.ниже.

Случай особой точки. Если точка является особой для отображения поверхности в поверхность в каких-то координатах, то она остается особой и при любой регулярной замене координат. Особая точка сферического отображения является в введенных выше координатах (u, v) особой точкой отображения $n(u, v)$. В такой точке векторы $\mathbf{n}_u$ и $\mathbf{n}_v$ пропорциональны. Тогда пропорциональны строки матрицы второй формы. Значит, равен нулю определитель второй квадратичной формы, т.е. и $K = 0$. Значит, также и в этом случае K совпадает с (нулевым) якобианом. $\square$

Следствие. Кривизна обращается в нуль в каждой точке области на поверхности $M^2 \in \mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда каждая точка этой области есть особая точка сферического отображения. $\square$

Оставим в стороне случай, когда особая точка изолирована, и предположим, что в каждой точке области U кривизна нулевая и, значит, якобиан нулевой (безразлично в каких координатах).

Теорема. *Если кривизна поверхности нулевая в каждой точке окрестности* (A)*, то образ малой окрестности* A *при сферическом отображении есть регулярная кривая на сфере или одна точка.*

Доказательство. Расмотрим построенные выше с помощью касательных плоскостей карты и отображение $\bar{n}(\mathbf{x})$. Если якобиан отображения $\bar{n}$ в некоторой точке не нуль, то не нуль и якобиан n в соответствующей точке области U. Значит, в нашем случае якобиан $\bar{n}$ нулевой во всех точках области $\bar{P}$.

Применим к $\bar{n}$ теорему о ранге. Если ранг отображения n единица в некоторой точке, то, в силу непрерывности производных, можно допустить, что ранг равен 1 в каждой точке (возможно, уменьшенной) области U. Очевидно, то же верно для отображения $\bar{n}$. Следовательно, образ $\bar{n}$ по теореме о ранге есть регулярная кривая в $\bar{V}$. Но тогда в силу диффеоморфности проекций, также и образ $n(x)$ есть регулярная кривая.

Если ранг в каждой точке нулевой, т.е. матрица Якоби нулевая (в любых координатах), т.е, очевидно, образом $n(P)$ служит одна точка. $\square$

Теорема о ранге. Если во всех точках области матрица Якоби гладкого оображения $f : M^m \to N^n$ вырождена, *но ранг* k *ее постоянен*, то образом служит подмногообразие меньшей размерности (*какой?!*) (см. Фихтенгольц, т.1, п.216, изд.7, 1969 г., Зорич, т.1..., или **Дополнение** в конце этих лекций).

[*Указание.* Считая, что $N = \mathbb{R}^n$, покажите, что проекция образа $f(M)$ на некоторую плоскость в $\mathbb{R}^n$ является графиком в окрестности образа $f(x_0)$ данной точки $x_0 \in M$. Полезно использовать компактность конечномерной сферы.]

Докажем это утверждение (следуя учебнику Фихтенгольца) только в нашем случае отображения поверхности в поверхность.

Переходя к локальным координатам, допустим, что отображение записано в виде системы двух функций $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, причем $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$. По теореме о неявной функции мы можем написать $u = \varphi(x,v)$. Принимая за переменные x, v, продифференцируем тождество $f(\varphi(x,v),v) - x = 0$ по v. Мы получим: $\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0$. Но, по условию, производные f пропорциональны производным g и поэтому это же тождество сохраняет силу, если в нем f заменить на g. Значит, полная производная по v функции, полученной из g подстановкой $\varphi(x,v)$ вместо u, равна нулю, т.е. эта функция на самом деле не зависит от v. Это значит, что y есть функция от x. Следовательно, образ нашего отображения есть кривая. □

Вернемся к особым точкам сферического отображения.

Случай 1. Ранг матрицы Якоби сферического отображения равен единице в каждой точке области. Если в целой области поверхности полная кривизна равна нулю, то, как мы видели, образ сферического отображения есть регулярная кривая. Прообраз каждой точки этой кривой есть кривая на поверхности, в точках которой нормаль к поверхности постоянна и, значит, *касательная плоскость в них одна и та же* (в силу теоремы Лагранжа о конечном приращении). Вводя параметр на кривой-образе, мы получаем в прообразе однопараметрическое семейство кривых (прообразов точек), вдоль каждой из которых поверхность касается некоторой плоскости. Это значит, что наша поверхность (в данной области) является *огибающей* однопараметрического семейства плоскостей. В следующем пункте мы покажем, что отюда следует, что поверхность принадлежит к классу развертывающихся, т.е. локально изометричных плоскости, причем кривые касания на самом деле являются прямыми.

Случай 2. Ранг матрицы Якоби равен нулю в каждой точке области. Если ранг матрицы Якоби равен нулю в целой области, т.е. все частные производные равны нулю, то координаты образа постоянны, значит, образ есть одна точка и, значит, во всех точках поверхности касательные плоскости параллельны, т.е. совпадают. Значит, наша область – *плоская*. □

Интегральная кривизна. Заметим в заключение этого раздела, что площадь сферического образа данной области оказывается поверхностным интегралом от кривизны, распространенным по этой области. Этот интеграл называется *интегральной кривизной* области. Это понятие было введено Гауссом под названием curvatura integra, что иногда переводилось как “полная кривизна”. Кривизну K, называемую теперь полной или гауссовой, сам Гаусс называл “мерой кривизны”. С интегральной кривизной мы еще встретимся дальше.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ дана поверхность M, для которой $n : M \to S^2$ оказывается диффеоморфизмом (тогда M выпукла). Используя этот диффеоморфизм для установления соответствия между локальными координатами, мы получим, что интегральная кривизна всей поверхности равна площади сферы, т.е. равна 4π. Для произвольной компактной поверхности мы укажем, чему равна ее интегральная кривизна, ниже. Важно то, что она не зависит, как мы увидим, не только от расположения поверхности в пространстве, но также от метрики, и определяется ее топологическим строением. В частности, для любого гладкого (класса $\mathcal{C}^2$) вложения сферы она равна 4π.

8.5 Линейчатые и развертывающиеся поверхности.

Мы показали, что поверхности, имеющие постоянную нулевую кривизну, являются либо плоской областью, либо служат огибающими однопараметрического семейства плоскостей. Именно, для каждого значения параметра c из некоторого числового интервала имеется плоскость P_c, которая служит касательной поверхность. в точках кривой γ_c на поверхности. При этом нормальный вектор $\mathbf{n}_c$ гладко зависит от параметра.

Приступим к более детальному анализу этого класса поверхностей. Мы покажем, что эти поверхности являются развертывающимися, что означает, что они локально изометричны плоскости (в окрестности каждой точки имеется карта, в которой запись метрики поверхности такая же, как в некоторой карте в плоской области).

Предварительно мы установим, что наша поверхность принадлежит к классу линейчатых, т.е. она покрыта однопараметрическим семейством прямых (которые и являются кривыми γ_c), а из класса линейчатых огибающие семейств плоскостей выделяются тем, что вдоль указанных прямых касательная плоскость не меняется. Наконец, будет установлено, что имеется три типа поверхностей, являющихся огибающими семейств плоскостей, и поверхности всех трех классов действительно являются развертывающимися, т.е. их метрики приводятся к виду плоской метрики.

Определение. *Линейчатой* называется гладкая поверхность, покрытая однопараметрическим семейством прямых l_u. Прямые l_u называются *образующими* на этой поверхности.

Если на поверхности дана пространственная кривая $\gamma = \boldsymbol{\rho}(u)$, параметризованная тем же параметром u, и $\boldsymbol{\rho}(u)$ есть точка пересечения γ с прямой l_u семейства, то эта кривая называется *направляющей* для поверхности.

Теорема 1. *Поверхность, служащая огибающей однопараметрического семейства плоскостей – линейчатая.*

Доказательство. Пусть P_t плоскость семейства, отвечающая значению параметра t, которая касается поверхности вдоль кривой $\boldsymbol{\gamma}_t$. Рассмотрим плоскость $P_{t+\Delta t}$ для близкого значения параметра. Она пересекается с P_t по прямой $l_{\Delta t}$. При стремлении Δt к нулю $l_{\Delta t}$ должна стремиться к $\boldsymbol{\gamma}_t$ (проверьте!). Но предельное положение прямой также есть прямая. □

В нашем случае мы получаем в качестве следствия:

Теорема 2. *Если поверхность имеет кривизну нуль (и одна из главных кривизн не нулевая), то она является линейчатой, причем касательная плоскость вдоль каждой образующей постоянная.* □

Мы показали, что если поверхность имеет постоянную кривизну нуль, то в некоторой области, где ранг матрицы Якоби сферического отображения равен 1 во всех точках, эта поверхность является огибающей однопараметрического семейства плоскостей: она покрыта семейством прямых, вдоль каждой из которых касательная плоскость постоянна.

Покажем, что в этом случае поверхность (локально) принадлежит к одному из трех типов:

Теорема 3. *Линейчатая поверхность, в которой касательные плоскости вдоль образующих постоянны, принадлежит к одному из трех типов: 1. цилиндрические поверхности, 2. конические поверхности, 3. поверхности касательных.*

Цилиндрические поверхности выделяются тем, что их образующие параллельны, конические тем, что образующие проходят через одну точку. Поверхность касательных есть поверхность, образованная касательными к пространственной кривой, которая называется *ребром возврата* этой поверхности.

Доказательство. Построим в окрестности данной точки A на данной линейчатой поверхности кривую γ, которая ортогональна образующим в каждой своей точке.

(Для построения такой кривой нужно в карте окрестности A задать дифференциальное уравнение, правая часть которой есть в каждой точке орт, ортогональный образующей проходящей через данную точку, и решить уравнение, взяв за начальное значение точку A.)

Пусть $\boldsymbol{\rho}(l)$ задание γ в натуральном параметре и $\mathbf{r}(l,v) = \boldsymbol{\rho}(l) + v\mathbf{m}(l)$ параметризация нашей поверхности. Нормальный вектор к поверхности есть $[\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_v] = [\boldsymbol{\tau}(l) + v\mathbf{m}'(l), \mathbf{m}(l)] = [\boldsymbol{\tau}(l), \mathbf{m}(l)] + v[\mathbf{m}'(l), \mathbf{m}(l)]$. Так как этот вектор не должен менять направление вдоль образующей с изменением v, мы получаем, что векторы $[\boldsymbol{\tau}(l), \mathbf{m}]$ и $[\mathbf{m}'(l), \mathbf{m}]$ должны быть коллинеарны. Они ортогональны касательной плоскости, откуда, в частности, следует, что вектор $\mathbf{m}'(l)$ ортогонален нормали, т.н. лежит в касательной плоскости. А так как он также ортогонален орту $\mathbf{m}$, *он коллинеарен вектору* $\boldsymbol{\tau}$.

Вспомним теперь из плоской геометрии соотношение между эволютами и эвольвентами и попробуем найти формально “эволюту” кривой γ. Иными словами, напишем по параметрическому заданию $\boldsymbol{\rho}(l)$ кривой γ уравнение кривой $\boldsymbol{\xi}(l) = \rho(l) + x(l)\mathbf{m}(s)$, где x – коэффициент, заменяющий радиус кривизны, величину которго мы сейчас определим.

Дифференцируя равенство $\langle \mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}\rangle = 0$ ($\boldsymbol{\tau}$ – орт касательной γ), получим: $\langle \mathbf{m}', \boldsymbol{\tau}\rangle = -\langle \mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}'\rangle = -k_g$. Т.к. оба вектора $\boldsymbol{\tau}'$ и $\mathbf{m}$ лежат в нормальной плоскости кривой, а $\mathbf{m}$ в касательной плоскости поверхности, k_g есть величина проекции вектора кривизны $\boldsymbol{\tau}'(s)$ на касательную плоскость, т.е. геодезическая кривизна кривой γ (п. 7.4, стр.54). В нашем случае эта величина есть модуль вектора $\mathbf{m}'$, т.к. мы показали выше, что $\mathbf{m}'$ коллинеарен орту $\boldsymbol{\tau}$.

Если $k_g = 0$, то это значит, что вектор $\mathbf{m}$ постоянен, т.е. образующие нашей поверхности образуют систему параллельных прямых. *Это – случай цилиндрической поверхности.*

Возможно, что $\boldsymbol{\xi}$ вырождается в одну точку, т.е. все образующие (проходящие через окрестность точки A) выходят из одной точки. *Это – случай конической поверхности.*

Если же $\boldsymbol{\xi}$ оказывается регулярной кривой и $k_g \neq 0$, то образующие будут касательными к этой кривой, если в качестве x мы возьмем $\frac{1}{k_g}$ и $\boldsymbol{\xi}(l) = \boldsymbol{\rho}(l) + \frac{1}{k_g(l)}\mathbf{m}(l)$. Действительно,

$$\boldsymbol{\xi}'(l) = \boldsymbol{\tau} + \left(\frac{1}{k_g(l)}\right)' \mathbf{m} + \frac{1}{k_g(l)}\mathbf{m}'(l).$$

$$[\boldsymbol{\xi}', \mathbf{m}] = \mathbf{n} + \mathbf{0} + \frac{1}{k_g(l)}[\mathbf{m}', \mathbf{m}] = \mathbf{n} - \frac{1}{k_g(l)}k_g(l)[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}] = \mathbf{n} - \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

т.е. $\mathbf{m}$ коллинеарен $\boldsymbol{\xi}'$ и, значит, нормальный вектор к γ, направляющий вектор прямой семейства, есть касательный вектор к кривой $\boldsymbol{\xi}$. Таким образом, наша поверхность в этом случае является *поверхностью касательных* к кривой $\boldsymbol{\xi}$. □

Покажем теперь, что обратно:

Теорема 4. *Каждая из поверхностей этих трех типов развертывающаяся, т.е. локально изометрична плоскости.*

Это значит, что в каждом случае в окрестности каждой точки поверхности можно ввести такие координаты, что метрика поверхности будет иметь выражение совпадающее с метрикой плоскости в некоторой системе координат.

Доказательство. 1. Цилиндрические поверхности. В этом случае поверхность имеет параметризацию $\mathbf{r}(l,v) = \boldsymbol{\rho}(l) + v\mathbf{m}$, где единичный вектор $\mathbf{m}$ постоянен. Тогда $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}dl + \mathbf{m}dv$ и, предполагая, что направляющая кривая ортогональна образующим, $ds^2 = dl^2 + dv^2$.

2. Конические поверхности. Параметризация поверхности: $v\mathbf{m}(l)$ (считая, что начало совмещено с вершиной конуса). Мы допустим снова, что $\mathbf{m}$ единичный вектор и что $\mathbf{m}(l)$ есть параметрическое задание кривой, для которой параметр l натуральный. Тогда $d\mathbf{r} = \mathbf{m}(l)dv + v\mathbf{m}'(l)dl$ и $ds^2 = dv^2 + v^2dl^2$. Это выражение совпадает с метрикой плоскости в полярной системе координат.

3. Рассмотрим теперь поверхность касательных к кривой $\boldsymbol{\rho}$. Естественная параметризация поверхности есть $\mathbf{r}(l,v) = \boldsymbol{\rho}(l) + v\mathbf{m}(l)$. Здесь l параметр вдоль $\boldsymbol{\rho}$, за который мы возьмем натуральный параметр этой кривой, $\mathbf{m}$ вектор вдоль образующей, отвечающей значению параметра l, который будем считать единичным, т.е. совпадающим с $\boldsymbol{\tau}$, и v – параметр вдоль образующей, равный расстоянию от точки касания с кривой $\boldsymbol{\rho}$.

Имеем: $\mathbf{r}_l = \boldsymbol{\tau}(l) + v\dot{\boldsymbol{\tau}}(l)$; $\quad \mathbf{r}_v = \boldsymbol{\tau}(l)$. Нормальный вектор $[\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_v] = [v\dot{\boldsymbol{\tau}}(l), \boldsymbol{\tau}(l)] = vk[\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}] = -vk\boldsymbol{\beta}$ не зависит от параметра v, т.е. вдоль образующей, отвечающей каждому значению параметра l, нормальный вектор не меняет направления и, значит, касательная плоскость одна и та же. Это – соприкасающаяся плоскость к ребру возврата в точке касания с ней образующей. Запишем метрику:

$$ds^2 = dr^2 = (1 + k^2v^2)dl^2 + 2dl\,dv + dv^2.$$

Заметим, что эта метрика, определенная кривой $\boldsymbol{\rho}$, содержит только функцию кривизны этой кривой и не содержит функцию кручения, которую можно задать произвольно, не меняя вид метрики. Возьмем, в частности, нулевое кручение, т.е. возьмем плоскую кривую. Область, покрытая образами образующих вне ребра возврата, будет изометрична поверхности, данной вначале, что доказывает, что она – развертывающаяся.

(От каждой образующей нужно взять одну половину, вдоль ребра возврата имеется складка и поверхность ляжет на плоскость двумя листами.) $\square$

Упражнение. Напишите метрику произвольной линейчатой поверхности, покажите, что развертывающиеся поверхности выделяются равенством нулю смешанного произведения $(\mathbf{m},\, \mathbf{m}_u,\, \dot{\boldsymbol{\rho}})$.

[

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{m}(u); \quad d\mathbf{r} = (\dot{\boldsymbol{\rho}}(u) + v\dot{\mathbf{m}}(u))du + \mathbf{m}\,dv.$$

Пусть $u = l$ – натуральный параметр направляющей кривой и $\mathbf{m}(s)$ – единичные векторы вдоль образующих. Тогда

$$ds^2 = \langle d\mathbf{r}\rangle^2 = (1 + 2\langle\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}\rangle + v^2)dl^2 + 2(\langle\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}\rangle + v)dl\,dv + dv^2.$$

Нормальный вектор к поверхности, $[\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_v] = [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}] - v[\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{m}]$, должен быть постоянным. Тогда $[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}]$ параллелен $[\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{m}]$. Но это значит, в частности, что $\dot{\mathbf{m}}$ ортогонален $[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}]$, т.е. смешанное произведение $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}})$ равно нулю. Разумеется, верно и обратное, т.к. тогда векторы $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}}$ лежат в одной плоскости, и нормальный вектор постоянен вдоль образующей.]

Напишите, в частности, метрику геликоида (поверхности, состоящих из полупрямых, ортогональных оси $\mathbb{O}z$ и соединяющих ее точки с точками винтовой линии). Приведите метрику к конформному виду.

Упражнение. Найдите вторую квадратичную форму в каждом из трех случаев развертывающейся поверхности и покажите, что гауссова кривизна в каждом из этих случаев равна нулю.

Упражнение. Какие поверхности являются одновременно и линейчатыми и поверхностями вращения? развертывающимися и поверхностями вращения?

Упражнение. Мы показали, что поверхность, имеющая во всех точках кривизну нуль – развертывающаяся и принадлежит одному из трех типов. Из теоремы Гаусса об инвариантности кривизны (о которой речь в следующей главе) вытекает, что поскольку поверхности каждого из этих типов изометричны плоской области, кривизна каждой такой поверхности тождественно равна нулю. Значит, кривизна тождественный нуль тогда и только тогда, когда поверхность развертывающаяся, или тогда и только тогда, когда она – огибающая однопараметрического семейства плоскостей.

Покажите непосредственно, вычислив вторую квадратичную форму, что кривизна поверхности каждого из трех типов нулевая во всех точках.

Замечание. Из формулы кривизны видно, что развертывающиеся поверхности это те поверхности, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению (Монжа) в частных производных: $rt - s^2 = 0$. Здесь приходится исключить неудачно раположенные относительно координатной системы поверхности, те, касательные плоскости которых в некоторых точках параллельны оси аппликат.

Используя теорию огибающих можно написать уравнение первого порядка, охватывающее все развертывающиеся поверхности.

ГЛАВА 9. Деривационные уравнения и теорема Гаусса

Мы приступаем к центральной теме — знаменитой теореме Гаусса, сформулировавшего и доказавшего ее в основополагающем мемуаре “Общие исследования о кривых поверхностях” (латинское название “Disquisitiones generales circa supercifies curvas”) в 1828 году. Гаусс подчеркнул важность этой теоремы словами “блистательная теорема” – *theorema egregium*. Этот латинский эпитет (означающий также «высокочтимая») закрепился как ее название. В ней утверждается, что

кривизну поверхности можно выразить в терминах первой квадратичной формы. Более точно:

Теорема Гаусса. *Кривизна K поверхности в R^3 выражается в каждой карте через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их частные производные 1-го и 2-го порядков.*

Чтобы получить такое выражение, нам нужно научиться дифференцировать касательные векторные поля на поверхности инвариантным (не зависящим от локальной карты) способом. С этого мы начнем.

Мы будем рассматривать поверхности в трехмерном пространстве. В частности, это означает, что на поверхности рассматривается риманова метрика, индуцированная стандартной “пифагоровой” метрикой объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$. Но мы будем пользоваться индексной системой, которая одинаково выглядит для произвольного подмногообразия в евклидовом пространстве любой размерности.

9.1 Метод подвижного репера.

Мы будем действовать отчасти по аналогии с методом Френе: рассмотрим поле реперов, приспособленных к поверхности в каждой точке, выразим производную этого поля в нем самом, и получим дифференциальные уравнения, *определяющие нашу поверхность*. В отличие от теории Френе это будут уравнения в частных производных, для которых теорема существования и единственности требует выполнения некоторых условий — так называемых условий интегрируемости (происходящих, грубо говоря, из-за симметрии последовательного дифференцирования функций по каждой паре переменных). С другой стороны, условие ортонормированности реперов, которое играло в случае кривых очень важную роль, здесь имеет меньшее значение и даже затемняет принципиальную сторону вопроса, хотя и упрощает вычислительные формулы.

Имеется еще одна дифференциально геометрическая задача, кроме задачи описания поверхности с помощью дифференциальных уравнений,

— научиться дифференцировать векторные поля на поверхности, т.е поля, составленные из касательных векторов (и обобщения этой задачи). Прямое использование карт нам не поможет, т.к. при вычислении производных приходится *вычитать значения дифференцируемого векторного поля в двух близких, но разных точках*, а такая разность не будет касательным вектром поверхности. Мы воспользуемся покоординатным дифференцированием векторных полей в объемлющем трехмерном линейном пространстве, для которого эта задача легко решается с помощью параллельного переноса. Но при этом производными касательного к поверхности поля будут *векторы объемлющего пространства*, вообще говоря, не касательные векторы поверхности. Посмотрим, как обойти эту трудность.

Мы начнем с локального поля реперов, построенного, как и раньше, по некоторой карте данной поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Мы обозначаем карту $\varphi : V \to U \subset M^2$, где, как обычно, V — область в плоскости $\mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (u, v), а U — открытое подмножество M^2, т.е. пересечение M^2 с открытым подмножеством W в $\mathbb{R}^3$. Координаты в $\mathbb{R}^3$ обозначаются (x, y, z), отображение карты φ параметрически выражается векторной функцией $\mathbf{r}(u, v)$. Таким образом, мы получаем в каждой точке $A \in M^2$ репер $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n})$, где $\mathbf{n}$ — орт, ортогональный к M^2 (т.е. к касательной плоскости $\tau_A M^2$), но векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ не будут предполагаться ортонормированными, они, как обычно, являются образами стандартного репера $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ при ее линейном отображении (дифференциале карты $d\varphi$) на $\tau_A M^2$. Напомним, что орт $\mathbf{n}$ выражается через $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ по формуле $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|}$ и он ортогонален векторам $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$.

9.2 Деривационные уравнения

Запишем теперь основные уравнения, которые называются *деривационными*, смысл которых в том, чтобы выразить в указанном базисе производные элементов базиса в базисных направлениях $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Их можно рассматривать как аналоги для поверхности уравнений Френе, но это — уравнения в частных производных. Их коэффициенты будут играть важную роль и их обозначения общеприняты. Мы отметим дальше некоторые соотношения между коэффициентами.

Имеются две системы — дифференцирования по первой координате u и по второй координате v. Имеется в виду дифференцирование координат векторов в $\mathbb{R}^3$, а векторы берутся касательными к поверхности. Дифференцирование по u мы обозначаем индексом 1, по v индексом 2, в частности, $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_{uu} = \mathbf{r}_{11}$ и т.д.:

$$\begin{array}{rlrl} \mathbf{r}_{11} = & \Gamma^1_{11}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}_2 + b_{11}\mathbf{n} & \mathbf{r}_{12} = & \Gamma^1_{12}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}_2 + b_{12}\mathbf{n} \\ \mathbf{r}_{21} = & \Gamma^1_{21}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{21}\mathbf{r}_2 + b_{21}\mathbf{n} & \mathbf{r}_{22} = & \Gamma^1_{22}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}_2 + b_{22}\mathbf{n} \\ \mathbf{n}_1 = & -b^1_1\mathbf{r}_1 - \ b^2_1\mathbf{r}_2 & \mathbf{n}_2 = & -b^1_2\mathbf{r}_1 - \ b^2_2\mathbf{r}_2 \end{array} \qquad (\times)$$

Обозначение коэффициентов b_{ij} законно – это действительно коэффициенты второй квадратичной формы: умножим скалярно первые и вторые равенства на $\mathbf{n}$ и получим

$$(\mathbf{r}_{ij},\, \mathbf{n}) = b_{ij}.$$

Оператор Вейнгартена. Так как $\mathbf{n}$ единичный вектор, его производные ему ортогональны и лежат в касательной плоскости. Поэтому в последних уравнениях третий коэфициент нулевой. Вместе эти два уравнения задают отображение $\mathbf{n}_i = -b^j_i\mathbf{r}_j$ касательной плоскости в себя, называемое (самосопряженным) оператором Вейнгартена.

Найдем коэффициенты b^i_j. Умножая скалярно на $\mathbf{r}_i$, получим: $-\langle \mathbf{n}_j,\, \mathbf{r}_i\rangle = b^1_j\langle \mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}_i\rangle + b^2_j\langle \mathbf{r}_2,\, \mathbf{r}_i\rangle$. Слева стоят коэффициенты второй формы: $-\langle \mathbf{n}_j,\, \mathbf{r}_i\rangle = \langle \mathbf{r}_{ij},\, \mathbf{n}\rangle = b_{ij}$. Скалярные произведения $\langle \mathbf{r}_i,\, \mathbf{r}_j\rangle$ это коэффициенты первой квадратичной формы g_{ij}. Мы получаем систему линейных уравнений относительно b^i_j:

$$b_{ij} = b^1_j g_{1i} + b^2_j g_{2i}.$$

В сокращенной форме: $b_{ij} = b^k_j g_{ki}$. Определитель этой системы есть g. Обозначим через g^{ij} элементы матрицы обратной к матрице первой формы. Тогда $b^i_j = g^{ki}b_{kj}$.

Итак, матрица (b^i_j) есть произведение матриц $(g^{ki})(b_{kj})$, ее определитель – произведение определителей $\frac{1}{g}\det(b_{kj})$, т.е. кривизна K.

Мы можем теперь не ссылаться на теорему Лагранжа, чтобы показать, что K есть отношение модулей векторных произведений производных $\mathbf{n}$ и производных $\mathbf{r}$ и, следовательно, якобиан:

$$|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]| = |b^i_1 b^k_2[\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k]| = |b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2| \cdot |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| = |\det(b^j_i)| \cdot |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|.$$

Важное замечание. В отличие от теории Френе матрицы деривационных уравнений не будут кососимметрическими (если базисные поля $\mathbf{r}_1(u^1, u^2), \mathbf{r}_2(u^1, u^2)$ не ортонормированы), но так как $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{12}$, мы имеем *соотношения симметрии*: $\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}$, $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}$ и известное нам $b_{12} = b_{21}$.

9.3 Символы Кристоффеля и дифференцирование векторных полей на поверхности.

Нам осталось найти коэффициенты Γ^k_{ij}. Они называются *символами Кристоффеля* (или просто “кристоффелями”) и играют особую роль.

Именно, с помощью деривационных уравнений мы введем сейчас операцию дифференцирования векторных полей на M^2 вдоль кривых на M^2. Это должна быть операция, которая касательному векторному полю сопоставляет в каждой точке гладкой кривой вектор, касательный к поверхности и выражающий изменение поля вдоль кривой в этой точке. Она должна иметь свойства линейности и удовлетворять закону Лейбница относительно разных произведений.

Если (в пределах карты) задано векторное поле $\mathbf{m}(u,\, v)$ касательных векторов, мы можем разложить его по координатным полям:

$$\mathbf{m}(u,\, v) = m^1(u,\, v)\mathbf{r}_1 + m^2(u,\, v)\mathbf{r}_2$$

(m^1 и m^2 – координаты $\mathbf{m}$ в репере $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$). Если теперь дана кривая $\gamma \subset M^2$ с параметризацией $\mathbf{r}(u(t),\, v(t))$, то мы можем написать, по закону дифференцирования сложной функции, производную этого векторного поля вдоль кривой γ (*используя покоординатное дифференцирование в объемлющем пространстве* $\mathbb{R}^3$):

$$\frac{d\,\mathbf{m}}{d\,t} = \mathbf{m}_1\dot{u} + \mathbf{m}_2\dot{v}, \tag{$+$}$$

производные $\mathbf{m}_1 = \frac{\partial\,\mathbf{m}}{\partial\,u}$ и $\mathbf{m}_2 = \frac{\partial\,\mathbf{m}}{\partial\,v}$ получаются по правилу покоординатного дифференцирования:

$$\mathbf{m}_j = m_j^1\mathbf{r}_1 + m^1\mathbf{r}_{1j} + m_j^2\mathbf{r}_2 + m^2\mathbf{r}_{2j}, \tag{$++$}$$

где m_j^1 и m_j^2 — производные коэффициентов m^1 и m^2. Сокращенно: $\mathbf{m}_j = m_j^i\mathbf{r}_i + m^i\mathbf{r}_{ij}$.

Остается подставить выражения $\mathbf{r}_{1j}$ и $\mathbf{r}_{2j}$ из деривационных уравнений:

$$\mathbf{m}_j = m_j^i\mathbf{r}_i + m^i(\Gamma_{ij}^k\mathbf{r}_k) + m^i b_{ij}\mathbf{n}.$$

Это дифференцирование законно, но, как говорилось, его недостаток тот, что результат не принадлежит поверхности, т.е. не является ее касательным вектором. В самом деле, остается нормальная составляющая.

Естественно возникает предложение (высказанное впервые в самом начале XX века Лѐви-Чивѝта) отбросить эту составляющую, т.е. спроектировать ортогонально результат на касательную плоскость.

Таким образом мы приходим к внутренней операции дифференцирования касательных векторных полей на M^2, которая заключается в обычном (внешнем для M^2) дифференцировании в пространстве $\mathbb{R}^3$ с последующим проектированием результата на касательную плоскость. Она называется *ковариантным дифференцированием*, и обладает необходимыми свойствами, которые мы изучим позже. Сейчас же отметим, что эта операция целиком определена символами Кристоффеля, т.е. правыми частями двух первых уравнений в каждой системе ($\times$) с отброшенными третьими слагаемыми, которые содержат нормаль $\mathbf{n}$:

$$\begin{matrix} \Gamma_{11}^1\mathbf{r}_1 + \Gamma_{11}^2\mathbf{r}_2 & \qquad & \Gamma_{12}^1\mathbf{r}_1 + \Gamma_{12}^2\mathbf{r}_2 \\ \Gamma_{21}^1\mathbf{r}_1 + \Gamma_{21}^2\mathbf{r}_2 & \qquad & \Gamma_{22}^1\mathbf{r}_1 + \Gamma_{22}^2\mathbf{r}_2 \end{matrix}\quad . \tag{$\times\times$}$$

Чтобы уточнить формальную сторону дела, нам прежде всего удобно перейти от обозначения координат u, v к обозначению x^1, x^2 в соответствии с обозначением координат $\mathbf{m}$ через m^i. Мы можем записать правые части деривационных уравнений *на поверхности*, т.е. после ортогонального проектирования, в виде $\Gamma_{ij}^k\mathbf{r}_k$. Таким образом,

$$\frac{d\,\mathbf{m}}{d\,t} = (m_j^i\mathbf{r}_i + m^i\Gamma_{ij}^k\mathbf{r}_k)\dot{x}^j + m^i b_{ij}\mathbf{n}\dot{x}^j.$$

Отбрасывая слагаемое ортогональное касательной плоскости, мы получаем операцию дифференцирования векторного поля по вектору скорости кривой, которая дает в каждой точке кривой касательный вектор поверхности.

Далее заметим, что для определения дифференцирования по параметру t в формуле ($+$) нам вовсе не требуется знать всю кривую γ. Если мы хотим знать производную векторного поля в данной точке кривой, нам достаточно знать координаты $\dot{x}^1$, $\dot{x}^2$ вектора скорости этой кривой в данной точке. Но *каждый* касательный вектор поверхности есть вектор скорости некоторой кривой на поверхности. Значит, мы получили операцию дифференцирования векторного поля по любому касательному вектору $\mathbf{w}$ поверхности: $(m_j^i\mathbf{r}_i + m^i\Gamma_{ij}^k\mathbf{r}_k)w^j$.

Чтобы отличить новую операцию, которую мы ввели, от обычного дифференцирования в объемлющем пространстве, введем обозначение $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{m}(u,\,v)$ (читается: “набла”):

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{m}(u,\,v) = (m_j^i\mathbf{r}_i + m^i\Gamma_{ij}^k\mathbf{r}_k)w^j.$$

Мы назвали ее ковариантным дифференцированием (касательного) векторного поля $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ по (касательному) вектору $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ в данной точке $\mathbf{x} \in M^2$. Если за $\mathbf{m}$ взят вектор скорости $\dot{\gamma}$ данной кривой γ, то будем писать также $\nabla_t\mathbf{m} = \nabla_{\dot{\gamma}}\mathbf{m}$; дифференцирование по j-ой координате, т.е. по вектору $\mathbf{r}_j$, будем обозначать через $\nabla_j\mathbf{m}$.

Таким образом, мы можем определить, как и в обычном анализе, производную $\nabla_t\mathbf{m}$ векторного поля $\mathbf{m}$ по вектору $(\dot{x}^j) = \dot{\gamma}$ по аналогии с формулой ($+$), т.е. $\nabla_t\mathbf{m} = \nabla_j\mathbf{m}\,\dot{x}^j$. При этом частные ковариантные производные $\nabla_j\mathbf{m}$ также определяются обычным вычислением по формуле ($++$), но производные $\mathbf{r}_{ij}$ мы заменяем “укороченными” выражениями $\Gamma_{ij}^k\mathbf{r}_k$: $\nabla_j\mathbf{m} = m_j^i\mathbf{r}_i + m^i\Gamma_{ij}^k\mathbf{r}_k$.

Повторим определение ковариантной производной в обратном порядке: сперва мы определяем ковариантные производные $\nabla_j \mathbf{r}_i = \nabla_{\mathbf{r}_j} \mathbf{r}_i$ — *производные координатного вектора* $\mathbf{r}_i(x)$ *по координатному вектору* $\mathbf{r}_j$ в данной точке. При этом мы используем выражения $(\times\times)$:

$$\nabla_j \mathbf{r}_i = \Gamma^k_{ij} \mathbf{r}_k, \qquad (\times\times\times)$$

т.е., берется покоординатное дифференцирование в $\mathbb{R}^3$ с последующей проекцией на касательную плоскость. Кристоффели являются координатами производной в данном репере. *Их заданием определяется операция.* Далее мы можем определить частные ковариантные производные $\nabla_j \mathbf{m}$ от каждого векторного поля в данной карте с помощью правила Лейбница, т.е. по формуле $(++)$, но с использованием $(\times\times\times)$ вместо $(\times)$ для дифференцирования координатных полей (и обычного дифференцирования для скалярных коэффициентов):

$$\nabla_j \mathbf{m}(x) = \nabla_j (m^i \mathbf{r}_i) = \frac{\partial\, m^i}{\partial\, x^j} \mathbf{r}_i + m^k \nabla_j \mathbf{r}_k = m^i_j \mathbf{r}_i + m^i \Gamma^k_{ij} \mathbf{r}_k = m^i_j \mathbf{r}_i + m^p \Gamma^i_{pj} \mathbf{r}_i = (m^i_j + m^p \Gamma^i_{pj}) \mathbf{r}_i.$$

(Мы поменяли индекс суммирования, чтобы вынести $\mathbf{r}_i$ за общую скобку.)

Наконец, мы можем определить ковариантную производную векторного поля $\mathbf{m}(u, v)$ по вектору $\mathbf{w}$ с координатами w^j в данной точке формулой аналогичной обычной:

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{m} = \nabla_j \mathbf{m}\, w^j.$$

В частности, производная $\nabla_{\dot\gamma} \mathbf{m}$ по вектору скорости $\dot\gamma$ параметризованной кривой γ есть

$$\nabla_1 \mathbf{m}(x(t))\, \dot u(t) + \nabla_2 \mathbf{m}(x(t)\, \dot v(t))$$

. Мы будем обозначать ее также $\nabla_t \mathbf{m}$ или $\frac{\mathcal{D}\, m}{d\, t}$ (чтобы отличить от дифференцирования по параметру кривой в $\mathbb{R}^3$).

Теперь соберем это определение дифференцирования в одну формулу

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{m} = \nabla_{w^j \mathbf{r}_j} (m^i \mathbf{r}_i) = \nabla_j (m^i \mathbf{r}_i) w^j = (m^i_j + m^p \Gamma^i_{pj}) \mathbf{r}_i w^j = \left(\frac{\partial m^i}{\partial u^j} + m^p \Gamma^i_{pj} \right) \mathbf{r}_i w^j.$$

Выражение в скобках есть i-ая координата *частной ковариантной производной* векторного поля по j-ой координате.

9.4 Свойства ковариантного дифференцирования.

Утверждение 1. *Ковариантная производная векторного поля по вектору в данной точке является вектором.* □

(Иными словами, при переходе от одной карты к другой координаты производной заменяются с помощью матрицы Якоби.) В самом деле, операции покоординатного дифференцирования и ортогонального проектирования на касательную плоскость переводят векторы в векторы и не зависят от выбора карты на поверхности.

Линейность этой операции очевидна из определения. Правило Лейбница для произведения скалярной функции на векторное поле

$$\nabla_{\mathbf{w}} (f\mathbf{m}) = \nabla_{\mathbf{w}} (f) \mathbf{m} + f \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{m}$$

, где $\nabla_{\mathbf{w}} f = \frac{\partial f}{\partial x^i} w^i$, выполнено непосредственно в силу определения:

$((fm)^i_j + (fm)^p \Gamma^i_{pj}) w^j = (\frac{\partial f}{\partial x^j} m^i + f m^i_j + f m^p \Gamma^i_{pj}) w^j = \nabla_{\mathbf{w}} f m^i + f(m^i_j + m^p \Gamma^i_{pj}) w^j.$

Замечание. Мы приняли, что действие оператора $\nabla_{\mathbf{w}}$ на функции совпадает с дифференцированием функции по вектору. В самом деле, в этом случае не имеет значения, рассматриваем ли мы дифференцирование функции только на поверхности или в трехмерном пространстве.

Утверждение 2. *Правило Лейбница для дифференцирования скалярного произведения векторных полей выполнено в следующей ковариантной форме:* $\frac{d\,(\mathbf{a},\,\mathbf{b})}{d\,\mathbf{w}} = (\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{a},\, \mathbf{b}) + (\mathbf{a},\, \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{b})$.

Доказательство. Равенство справедливо для обычных покоординатных производных в $\mathbb{R}^3$, но скалярное произведение вектора $\mathbf{u}$ на вектор $\mathbf{v}$, лежащий в данной плоскости, равно скалярному произведению с вектором $\mathbf{v}$ проекции $\mathbf{u}$ на эту плоскость. □

Заметим, что если бы вместо ортогонального мы выбрали бы какое-нибудь косое проектирование при нашем определении ковариантной производной на поверхности, то утверждение 2 потеряло бы силу, т.е. операция дифференцирования оказалась бы не согласованной с метрикой на поверхности.

Если нам дано *векторное поле* $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, то мы можем дифференцировать другое векторное поле $\mathbf{v}(x)$ по вектору $\mathbf{w}$ в каждой точке. В результате получится новое векторное поле, которое мы также обозначаем $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$. Мы получаем линейный оператор, переводящий векторные поля в векторные поля. Эта операция будет также линейна по $\mathbf{w}$, что сразу следует из определяющей ее формулы. Но линейность по $\mathbf{w}$ будет более сильной, чем по $\mathbf{v}$: в качестве коэффициентов можно брать функции:

Утверждение 3. Для любых гладких функций f, g имеет место тождество

$$\nabla_{f\mathbf{w}_1+g\mathbf{w}_2}\mathbf{v} = f\nabla_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v} + g\nabla_{\mathbf{w}_2}\mathbf{v}.$$

Доказательство прямо следует из определения. □

Следующее свойство введенной операции особенно важно. Мы сейчас покажем, что коэффициенты Кристоффеля полностью определены первой квадратичной формой. Это значит, что если две карты φ_i двух поверхностей M_1^2 и M_2^2 параметризованы точками одной и той же плоской области V и во всех соответствующих точках (т.е. с теми же значениями параметров) коэффициенты первых квадратичных форм совпадают, то совпадают и символы Кристоффеля в соответствующих точках. Иначе говоря, символы Кристоффеля сохраняются, когда одна поверхность получается из другой (в пределах данных карт) с помощью *изгибания* (т.е. с сохранением длин кривых, без растяжений, сжатий или разрывов).

Утверждение 4. *Символы Кристоффеля выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы и их первые производные: обозначая через* (g^{lk}) *матрицу обратную к матрице* (g_{ij}) $(g^{lk}g_{kj} = \delta^l_j)$*, имеем*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial\, g_{jl}}{\partial\, x^i} + \frac{\partial\, g_{il}}{\partial\, x^j} - \frac{\partial\, g_{ij}}{\partial\, x^l}\right). \qquad (!)$$

(Первый нижний индекс i кристоффеля соответствует номеру дифференцируемого базисного вектора, второй нижний индекс j – переменной, по которой производится дифференцирование, верхний индекс – номеру базисного вектора в разложении правой части в $(\times\times\times)$.) Переменные x^1 и x^2 в правой части в нашем случае совпадают соответственно с координатами u и v.

Доказательство. Возьмем уравнения $(\times)$, выражающие производные базисных векторов $\mathbf{r}_j$ в сокращенной форме $\mathbf{r}_{ji} = \Gamma^s_{ji}\mathbf{r}_s$. Умножим скалярно это равенство на $\mathbf{r}_l$. Мы получим $(\mathbf{r}_{ji}, \mathbf{r}_l) = \Gamma^s_{ji}g_{ls}$. Но

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = \frac{\partial\langle\mathbf{r}_j,\,\mathbf{r}_l\rangle}{\partial x^i} = \langle\mathbf{r}_{ji},\mathbf{r}_l\rangle + \langle\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_{li}\rangle = \Gamma^s_{ji}g_{ls} + \Gamma^s_{li}g_{js}.$$

Возьмем еще два таких равенства, меняя индексы в циклическом порядке:

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} = \Gamma^s_{lj}g_{is} + \Gamma^s_{ij}g_{ls}$$
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \Gamma^s_{il}g_{js} + \Gamma^s_{jl}g_{is}.$$

Беря полусумму этих трех равенств, два первых с плюсом, третье с минусом, получаем, используя симметрию кристоффелей по нижним индексам, *тождества Кристоффеля 1-го рода*:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, g_{jl}}{\partial\, x^i} + \frac{\partial\, g_{li}}{\partial\, x^j} - \frac{\partial\, g_{ij}}{\partial\, x^l}\right) = g_{ls}\Gamma^s_{ij}.$$

Умножим это матричное равенство (при каждой паре i, j) на обратную матрицу (g^{lk}) (т.е. умножим на g^{lk} и просуммируем по l). Справа мы получим произведение $\delta^k_s\Gamma^s_{ij}$. Здесь δ^k_s – единичная матрица, и это произведение означает просто, что мы можем поменять индекс s на k (при $s \neq k$ получается нуль). Мы пришли к требуемому равенству (!), которое называют *тождествами Кристоффеля 2-го рода.* □

Утверждение 5. *При переходе от локальной системы координат* (x^i) *к локальной системе* $\bar{x}^i$ *символы Кристоффеля преобразуются по следующему правилу:*

$$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^r_{pq}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j} + \frac{\partial\bar{x}k}{\partial x^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^j}.$$

Мы оставим доказательство этого утверждения до следующего семестра (или в качестве упражнения).

Заметим. что это преобразование *не тензорное*: во-первых, оно не однородное, и во-вторых, в него входит матрица вторых производных преобразования координат, помимо матрицы Якоби. Если преобразование аффинное, то второе слагаемое становится равным нулю, и преобразование оказывается тензорным, определяемым только произведениями элементов матрицы Якоби (коэффициенты изменяются как коэффициенты формы, но не квадратичной, а третьей степени).

Замечание 1. Хотя наше определение дифференцирования на поверхности использовало дифференцирование в объемлющем пространстве, оно принадлежит внутренней геометрии поверхности и не зависит от ее расположения в пространстве. Конечно, в нашем случае метрика индуцирована из стандартной метрики пространства, но любая риманова метрика задает по полученным формулам свои символы Кристоффеля, и, значит, свою операцию дифференцирования векторных полей по вектору, которая будет иметь такие же формальные свойства, даже если метрика была введена на поверхности независимо от ее вложения в $\mathbb{R}^3$.

Итак, мы решили важную задачу — построено дифференцирование векторных полей на поверхности в трехмерном пространстве, которое не зависит от изометричного вложения этой поверхности в пространство. Это значит, что всякая изометрия, т.е. диффеоморфизм между двумя поверхностями, который сохраняет риманову метрику (первую квадратичную форму), будет переводить (ковариантную) производную векторного поля в ковариантную производную его образа.

Замечание 2. В наших рассуждениях о символах Кристоффеля мы перешли от обозначения переменных u, v к индексным обозначениям. Это удобно хотя бы потому, что записи становятся компактнее. Например, четверка деривационных уравнений (в ковариантной форме $(\times\times)$) записывается равенством:

$$\nabla_{\mathbf{r}_i}\mathbf{r}_j = \Gamma^k_{ji}\mathbf{r}_k. \qquad (\times\times\times)$$

Однако, польза от такой записи не ограничивается удобством. Важно, что позволяяя индексам меняться от 1 до какого-нибудь заданного m, мы автоматически перенесем наши результаты на случай m-мерной поверхности (подмногообразия) в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданной, например, параметрически векторной функцией $\mathbf{r}(u_1, \ldots, u_m)$.

Действительно, по стандартной метрике в $\mathbb{R}^n$ мы определяем метрику $g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$ на поверхности, по метрике уравнениями (!) определяем кристоффели, а с помощью $(\times\times\times)$ — ковариантное дифференцирование базисных координатных полей, которое дальше распространяется на все поля по линейности и с помощью правила Лейбница.

Для подмногообразия коразмерности 1 (т.е. $m = n-1$) мы можем также определить вторую квадратичную форму той же формулой $\langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n} \rangle = b_{ij}$ и отождествить с ее помощью окаймляющие элементы деривационных уравнений. Ситуация в общем случае, конечно, сложнее трехмерной (характеристический многочлен пары форм имеет много корней!), и мы не будем ее обсуждать (см. Громов...)

Подробное изучение ковариантного дифференцирования в многомерном случае мы оставляем до следующего семестра, теперь же вернемся к случаю поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

9.5 Теорема Гаусса. Первое доказательство.

Мы докажем теперь теорему Гаусса, сформулированную выше, выразив кривизну поверхности через символы Кристоффеля и их производные, используя утверждение 4. предыдущего пункта.

Точнее говоря, нам достаточно выразить через кристоффели определитель второй квадратичной формы, т.к. кривизна, как мы знаем из п.7 главы 7, есть отношение определителей второй и первой квадратичных форм.

Но этот определитель легко выделяется с помощью деривационных уравнений (в исходной форме $(\times)$). Выразим двумя способами $\langle \mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{22} \rangle - \langle \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12} \rangle$. Во-первых:

$$\langle \mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{22} \rangle - \langle \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12} \rangle = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 + \Gamma^k_{11}\Gamma^l_{22}g_{kl} - \Gamma^k_{12}\Gamma^l_{12}g_{kl}.$$

Теперь надо разность в левой части выразить через первую форму. Мы имеем:

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^l} = \frac{\partial^2 \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle}{\partial x^k\,\partial x^l} = \langle \mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_{jl} \rangle + \langle \mathbf{r}_{il}, \mathbf{r}_{jk} \rangle + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jkl} \rangle + \langle \mathbf{r}_{ikl}, \mathbf{r}_j \rangle,$$

откуда легко подсчитать, что

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\,\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\,\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\,\partial x^1} = \langle \mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{22} \rangle - \langle \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12} \rangle.$$

В результате мы получаем требуемое выражение кривизны K поверхности в данной точке:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\,\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\,\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\,\partial x^1} - g_{kl}\left(\Gamma_{11}^k\Gamma_{22}^l - \Gamma_{12}^k\Gamma_{12}^l\right)\right).$$

В этом выражении K все величины выражаются через элементы матрицы первой квадратичной формы и ее производные до второго порядка включительно (см. (!)). □

Это доказательство достаточно прозрачно, хотя требует некоторых вычислений, а само выражение кривизны мало удобно. Мы ниже укажем более простое выражение и, кроме того, дадим доказательство этой важной теоремы на основе геометрических соображений.

Чтобы получить более удобную для вычислений формулу кривизны, рассмотрим доказательство теоремы Гаусса, выбрав карту с ортогональными координатными линиями.

9.6 Теорема Гаусса в ортогональном репере.

Ортогональные координаты. Начнем с напоминания (см. п. 9 Глава 6) возможности ввести в окрестности каждой точки A поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ ортогональную систему координат (u, v), т.е. такую, что в каждой точке окрестности координатные линии $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ ортогональны (т.е. ортогональны их касательные векторы).

Упражнение. Вспомните, как строится ортогональная система координат.

Метрика в ортогональной системе. Если координатные линии данной локальной координатной системы ортогональны в каждой точке, то второй коэффициент $F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ первой квадратичной формы равен нулю, и метрика имеет вид

$$ds^2 = A(u,v)^2du^2 + B(u,v)^2dv^2$$

(коэффициенты положительны, они выражают квадраты длин координатных векторов в касательной плоскости и поэтому их можно представить квадратами.)

Итак, допустим, что в данной локальной карте $\varphi : W \to U \subset M^2 \subset \mathbb{R}^3$ $(W \subset R^2)$ метрика имеет указанный вид. Обозначим, как обычно, радиус-вектор точки поверхности через $\mathbf{r}(u, v)$. Тогда: $|\mathbf{r}_u| = A$, $|\mathbf{r}_v| = B$.

Введем специальные ортонормированные реперы в точках окрестности U. Орты $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ реперов возьмем касательными к координатным кривым. Тогда $\mathbf{h}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{A}$ и $\mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{B}$. Третий орт $\mathbf{n}$ возьмем по нормали к поверхности так, чтобы тройка $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{n}$ оказалась положительной.

Построенные специальные реперы назовем *нормальными*. (Их можно назвать реперами Дарбу по аналогии с реперами Френе, поскольку впервые систематически такое поле реперов рассматривал Дарбу (а неявно еще Эйлер).

Замечание. Репер $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ *не является координатным* для данной системы кординат, т.е. эти векторы не являются векторами скорости координатных кривых в их естественной параметризации. Более того, вообще говоря, он не является координатным ни для какой системы координат, поскольку скобка Ли этих векторов не обязательно нулевая.

Задача. Скобка Ли этих векторов нулевая, только если A и B постоянны вдоль соответствующих (каких?) координатных кривых. (Посчитайте координаты скобки Ли. Что можно сказать о метрике в этом случае?)

Деривационные уравнения. Напишем теперь деривационные уравнения в этой координатной системе. При перемещении точки по гладкой кривой на поверхности возникает кривая в пространстве реперов и постольку, поскольку мы построили *ортонормированные* реперы, их производные будут выражаться кососимметрическими матрицами, если производные выражать в самом репере в данной точке. Поэтому можно сразу написать:

$$\left(\begin{array}{rcccccc}
\mathbf{h}_{1u} = & 0 & + & p\,\mathbf{h}_2 & + & b_1\mathbf{n} \\
\mathbf{h}_{2u} = & -p\,\mathbf{h}_1 & + & 0 & + & b_2\mathbf{n} \\
\mathbf{n}_u = & -b_1\mathbf{h}_1 & - & b_2\mathbf{h}_2 & + & 0 \\
\\
\mathbf{h}_{1v} = & 0 & + & q\,\mathbf{h}_2 & + & c_1\mathbf{n} \\
\mathbf{h}_{2v} = & -q\,\mathbf{h}_1 & + & 0 & + & c_2\mathbf{n} \\
\mathbf{n}_v = & -c_1\mathbf{h}_1 & - & c_2\mathbf{h}_2 & + & 0
\end{array}\right)$$

Выражение коэффициентов. Наша первая задача, как и ранее, — выразить коэффициенты этих уравнений через коэффициенты двух квадратичных форм и их производные.

Очевидно, $p = \langle \mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_2\rangle = -\langle \mathbf{h}_{2u}, \mathbf{h}_1\rangle$ и аналогично $q = \langle \mathbf{h}_{1v}, \mathbf{h}_2\rangle = -\langle \mathbf{h}_{2v}, \mathbf{h}_1\rangle$.

Но $\mathbf{h}_{2u} = (\frac{\mathbf{r}_v}{B})_u = \frac{\mathbf{r}_{uv}}{B} + (\frac{1}{B})_u\mathbf{r}_v$ и, значит, $-(\mathbf{h}_{2u}, \mathbf{h}_1) = -\frac{\langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u\rangle}{AB} = -\frac{\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle_v}{2AB} = -\frac{(A^2)_v}{2AB} = -\frac{2AA_v}{2AB} = -\frac{A_v}{B}$.

В результате $p = -\frac{A_v}{B}$ и аналогично $q = \frac{B_u}{A}$. Далее: $b_1 = \langle \mathbf{h}_{1u}, \mathbf{n}\rangle$ и $b_2 = \langle \mathbf{h}_{2u}, \mathbf{n}\rangle$ и, также, $c_1 = \langle \mathbf{h}_{1v}, \mathbf{n}\rangle$ и $c_2 = \langle \mathbf{h}_{2v}, \mathbf{n}\rangle$.

Аналогично предыдущему: $\mathbf{h}_{1u} = (\frac{\mathbf{r}_u}{A})_u = \frac{\mathbf{r}_{uu}}{A} + (\frac{1}{A})_u\mathbf{r}_u$, $\mathbf{h}_{2u} = \frac{\mathbf{r}_{vu}}{B} + (\frac{1}{B})_u\mathbf{r}_v$, откуда $b_1 = \frac{L}{A}$, $b_2 = \frac{M}{B}$ и также $c_1 = \frac{M}{A}$, $c_2 = \frac{N}{B}$. Итак,

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{h}_{1u} & = -\frac{A_v}{B}\mathbf{h}_2 + \frac{L}{A}\mathbf{n} & \mathbf{h}_{1v} & = \frac{B_u}{A}\mathbf{h}_2 + \frac{M}{A}\mathbf{n} \\
\mathbf{h}_{2u} & = \frac{A_v}{B}\mathbf{h}_1 + \frac{M}{B}\mathbf{n} & \mathbf{h}_{2v} & = -\frac{B_u}{A}\mathbf{h}_1 + \frac{N}{B}\mathbf{n}.
\end{array} \qquad (*)$$

Разумеется, этот результат можно получить и с помощью кристоффелей. Например:

$$\mathbf{r}_{uu} = \Gamma_{uu}^u\mathbf{r}_u + \Gamma_{uu}^v\mathbf{r}_v; \quad \Gamma_{uu}^u = \frac{1}{2A^2}\left(\frac{\partial A^2}{\partial u}\right) = \frac{A_u}{A},\ \Gamma_{uu}^v = \frac{1}{2B^2}\left(-\frac{\partial A^2}{\partial v}\right) = -\frac{AA_v}{B^2}.$$

$$\left(\frac{\mathbf{r}_u}{A}\right)_u = \frac{\mathbf{r}_{uu}}{A} - \frac{A_u\mathbf{r}_u}{A^2} = \frac{\Gamma_{uu}^u\mathbf{r}_u + \Gamma_{uu}^v\mathbf{r}_v}{A} - \frac{A_u\mathbf{r}_u}{A^2} = \left(\frac{\Gamma_{uu}^u}{A} - \frac{A_u}{A^2}\right)\mathbf{r}_u + \frac{\Gamma_{uu}^vB}{A}\frac{\mathbf{r}_v}{B}.$$

Первая скобка равна нулю. Мы видим, что $p = \frac{\Gamma_{uu}^v B}{A} = -\frac{A_v}{B}$, как и должно быть, согласно предыдущему.

Доказательство теоремы Гаусса в ортогональном репере. Наша задача, как мы помним, — выразить детерминант $\Delta = LN - M^2$ через коэффициенты E, F, G и их производные. Из полученных выражений $(*)$ видно, что детерминант Δ выделится, если взять, так сказать, скалярный детерминант $(\mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_{2v}) - (\mathbf{h}_{1v}, \mathbf{h}_{2u})$ этих векторов. Эта разность равняется $\frac{\Delta}{AB}$. Вспомним, что гауссова кривизна K равняется отношению двух определителей $K = \frac{\Delta}{g}$. В нашем случае определитель $g = EG - F^2$ равен A^2B^2. Таким образом, получаем $KAB = \frac{\Delta}{AB}$. Возвратимся к выражению для Δ:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_{2v} \rangle \quad &= \langle \mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_2 \rangle_v - \langle \mathbf{h}_{1uv}, \mathbf{h}_2 \rangle = p_v - \langle \mathbf{h}_{1uv}, \mathbf{h}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{h}_{2u}, \mathbf{h}_{1v} \rangle \quad &= \langle \mathbf{h}_{1v}, \mathbf{h}_2 \rangle_u - \langle \mathbf{h}_{1uv}, \mathbf{h}_2 \rangle = q_u - \langle \mathbf{h}_{1uv}, \mathbf{h}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда $KAB = \frac{\Delta}{AB} = \langle \mathbf{h}_{1u}, \mathbf{h}_{2v} \rangle - \langle \mathbf{h}_{2u}, \mathbf{h}_{1v} \rangle = \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}$ и, окончательно,

$$K = \frac{p_v - q_u}{AB} = -\frac{(\frac{B_u}{A})_u + (\frac{A_v}{B})_v}{AB}. \qquad (**)$$

Это доказывает теорему Гаусса и дает более удобное выражение для кривизны. □

9.7 Формулы Петерсона – Кодацци. Теорема Бонне.

Мы вывели симметрию символов Кристоффеля из равенства смешанных производных $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$. Из симметрии высших производных выводятся дальнейшие соотношения. Оказывается, достаточно рассмотреть лишь соотношения, полученные следующим дифференцированием. Остальные будут их следствиями. Эти соотношения накладывают ограничения на выбор двух квадратичных форм в качестве первой и второй формы некоторой поверхности в $\mathbb{R}^3$ (см. ниже формулировку теоремы Бонне).

Перепишем деривационные уравнения в матричном виде (по аналогии с уравнениями Френе), полагая A_i – две матрицы деривационных уравнений

$$A_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{i1}^1 & \Gamma_{i1}^2 & b_{11} \\ \Gamma_{i2}^1 & \Gamma_{i2}^2 & b_{12} \\ -b_i^1 & -b_i^2 & 0 \end{pmatrix}:$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}.$$

В силу симметрии смешанных производных, имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix},$$

что приводит к системе векторных уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x^2} A_1 - (A_1 A_2 - A_2 A_1) \right) \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

и поскольку тройка векторов $(\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_2\, \mathbf{n})$ образует базис, мы получаем матричное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x^2} A_1 = [A_1, A_2]. \qquad (*)$$

Здесь $[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$ есть *коммутатор в алгебре матриц.*

Это равенство дает 9 соотношений (*условия интегрируемости*, т.е. условия существования тройки $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$, служащей решением системы дифференциальных уравнений) на коэффициенты деривационных уравнений (т.е. на коэффициенты двух форм и их производные). Мы не приводим доказательства достаточности этих соотношений. Только три из них существенны, остальные их следствия.

Одно из этих соотношений приводит к выражению определителя второй квадратичной формы через коэффициенты первой, т.е. к теореме Гаусса:

$$K = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g} = \frac{1}{g} g_{1p} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^p}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^p}{\partial x^2} + \Gamma_{s1}^p \Gamma_{22}^s - \Gamma_{s2}^p \Gamma_{21}^s \right). \qquad (**)$$

Это более простое выражение может быть получено из выведенного в п.4 подстановкой выражений производных коэффициентов 1-ой формы через символы Кристоффеля.

Еще два соотношения, называемые уравнениями Кодацци (D. Codazzi), имеют вид ($k = 1, 2$):

$$\frac{\partial b_{k2}}{\partial x^1} + b_{i1}\Gamma^i_{k2} = \frac{\partial b_{k1}}{\partial x^2} + b_{i2}\Gamma^i_{k1}.$$

Уравнения Кодацци называются также уравнениями Петерсона и Майнарди. (К.М. Петерсон первый нашел их в 1853 году, Майнарди (G. Mainardi) в 1856, а Кодацци переоткрыл их в 1867 г.)

Приведем теперь формулировку теоремы, которая дает необходимое и достаточное условие существования поверхности с двумя данными квадратичными формами. Мы не приводим ее доказательства (см. книгу Новикова – Тайманова или, подробнее, лекции Дынникова на сайте кафедры). (Напомним, что область односвязна, если она связна и два пути с общими концами деформируются в области друг в друга при неподвижных концах.)

Теорема Бонне. (J. Bonnet) *Пусть $g_{ij}(u^1, u^2)$, $b_{ij}(u^1, u^2)$, $i, j = 1, 2$, – набор гладких функций в односвязной замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условиям: матрицы $G = (g_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ симметричны для всех точек $(u^1, u^2) \in \Omega$, причем матрица G положительно определена.*

1. *Тогда и только тогда существует в $\mathbb{R}^3$ поверхность M^2 с регулярной параметризацией $\varphi : \Omega \to M^2$, для которой первая и вторая фундаментальные формы равны $I = g_{ij} d\,u^i\,d\,u^j$, $II = b_{ij} d\,u^i\,d\,u^j$, когда функции g_{ij}, $b_{ij} (i, j = 1, 2)$ удовлетворяют уравнениям (*), в которых коэффициенты (Γ^k_{ij}) выражены через (g_{ij}) по формулам (!) (п.4, стр.70);*

2. *если поверхность с такими фундаментальными формами существует, то она единственна с точностью до движения всего пространства $\mathbb{R}^3$.*

-=-=-=-

Примеры

1. Подсчитаем символы Кристоффеля и гауссову кривизну в конформной метрике, положим $E = G = b^2$, $F = 0$:

$$ds^2 = b^2(du^2 + dv^2)$$

В этой метрике матрица метрики имеет вид $\begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, ее обратная $\begin{pmatrix} 1/b^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}$.

Коэффициенты Кристоффеля нетрудно подсчиать:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2b^2}\frac{\partial b^2}{\partial u} = \frac{b_u}{b};\ \Gamma^1_{12} = \frac{b_v}{b};\ \Gamma^1_{22} = -\frac{b_u}{b};\quad \Gamma^2_{11} = -\frac{b_v}{b};\ \Gamma^2_{12} = \frac{b_u}{b};\ \Gamma^2_{22} = \frac{b_v}{b} = -(\ln b)_v.$$

Кривизна K по формуле $(**)$ ($p = 1$):

$$K = \frac{1}{b^4} b^2 \left(-(\ln b)_{uu} - (\ln b)_{vv} - \left(\frac{b_u}{b}\right)^2 - \left(\frac{b_v}{b}\right)^2 + \left(\frac{b_u}{b}\right)^2 + \left(\frac{b_v}{b}\right)^2 \right) = -\frac{\triangle \ln b}{b^2}$$

Например, если $b = \frac{1}{u}$ (конформная метрика плоскости Лобачевского), кривизна постоянна и отрицательна:

$$K = -u^2 \left(\ln \frac{1}{u}\right)_{uu} = u^2 (\ln u)_{uu} = u^2 \left(\frac{1}{u}\right)_u = -u^2 \frac{1}{u^2} = -1.$$

2. Посчитаем кривизну (единичной) сферы в сферических координатах (с метрикой $du^2 + \sin^2 u\, dv^2$):

$$\Gamma^1_{11} = 0 = \Gamma^1_{12};\ \Gamma^1_{22} = -\frac{(\sin^2 u)_u}{2} \quad \Gamma^2_{22} = 0 = \Gamma^2_{22};\ \Gamma^2_{12} = \frac{(\sin^2 u)_u}{2\sin^2 u}.$$

Воспользуемся формулой из п.9.5:

$$K = \frac{1}{\sin^2 u} \left(-\frac{(\sin^2)_{uu}}{2} + \sin^2 u \left(\frac{(\sin^2 u)_u}{2\sin^2 u}\right)^2 \right) = -\frac{\cos^2 u - \sin^2 u}{\sin^2 u} + \frac{4\sin^2 u \cos^2 u}{4 \sin^4 u} = 1$$

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 10. Параллельный перенос и геодезические

10.1 Параллельный перенос.

Определение. Пусть в некоторой окрестности кривой γ на поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^2$ задано гладкое векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Мы скажем, что это поле параллельно вдоль кривой γ, если ковариантная производная $\nabla_{\dot\gamma}\mathbf{v}$ равна нулю в каждой точке кривой. При этом, если выделена какая-либо точка $\mathbf{x}_0$ кривой, мы скажем, что поле является параллельным перенесением вектора из точки $\mathbf{x}_0$ *вдоль кривой.* Если выделены какие-то две точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ кривой, то мы можем сказать также, что поле $\mathbf{v}$, рассматриваемое только в точках кривой, является параллельным перенесением вектора $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в вектор $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ вдоль кривой γ.

(Векторы, заданные вдоль кривой в пространстве $\mathbb{R}^3$, параллельны, если их координаты одинаковы, или если производная этого векторного поля по параметру нулевая. Наше определение является естественным перенесением на поверхности понятия параллельности.)

Замечание. Мы потребовали, чтобы поле было определено в окрестности кривой, а не только в точках самой кривой, чтобы иметь возможность говорить о гладкости поля. Как мы сейчас увидим, параллельность поля вдоль кривой зависит только от значений его в точках самой кривой: при любом продолжении его на окрестность оно останется параллельным вдоль этой кривой, если оно параллельно при каком-либо одном продолжении.

Уравнение параллельности. По определению, поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ параллельно, если $\nabla_{\dot\gamma}\mathbf{v} = 0$. Распишем это уравнение в координатах:

$$(\nabla_{\dot\gamma}\mathbf{v})^i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k\Gamma^i_{kj}\right)\dot x^j = \frac{d\,v^i}{d\,t} + v^k\Gamma^i_{kj}\dot x^j = 0. \tag{§}$$

Мы записали наше уравнение в двух формах. В первой форме это система уравнений в частных производных для нахождения функций v^i в окрестности кривой. Во второй форме это – линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $v^i(t)$.

Заметим, что хотя в первой форме требуется, чтобы наше векторное поле было определено в окрестности кривой γ (иначе не определены частные производжные), во второй форме нам нужно только знать производные координат векторов по параметру t, т.е надо знать значения функций $\Gamma^i_{kj}(\mathbf{x}(t))$ в точках кривой, решение не зависит от того, какие значения имеют кристоффели вне кривой.

В силу теоремы существования и единственности мы получаем такое

Утверждение 1. *Для заданного в некоторой точке гладкой кривой γ вектора $\mathbf{v}_0$ символы Кристоффеля, определенные в точках γ, однозначно определяют параллельный перенос этого вектора вдоль кривой γ.* □

В силу того, что система уравнений параллельного переноса линейна, мы получаем, что параллельный перенос определяет линейные изоморфизмы касательного пространства в исходной точке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ на касательные плоскости во всех остальных точках кривой. Более того, так как дифференцирование ∇ удовлетворяет правилу Лейбница, мы получаем:

Утверждение 2. *Параллельный перенос сохраняет скалярное произведение.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\frac{d\,(\mathbf{v},\,\mathbf{u})}{d\,t} = 0$, если векторы $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ переносятся параллельно. Но

$$\frac{d\,(\mathbf{v},\,\mathbf{u})}{d\,t} = (\nabla_t\mathbf{v},\ \mathbf{u}) + (\mathbf{v},\ \nabla_t\mathbf{v}) = 0.$$ □

Таким образом,

Теорема. *Параллельный перенос определяет изометрию касательных плоскостей в точках γ.* □

Параллельный базис. Возьмем в касательной плоскости τ_A в точке A данной кривой базис $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ и разнесем его векторы параллельно в остальные точки кривой. Согласно сказанному, мы получим в касательной плоскости каждой точки кривой базис $\mathbf{m}_1(t), \mathbf{m}_2(t)$. Мы скажем, что вдоль кривой задан параллельный базис.

Утверждение 3. *При параллельном переносе вектора его координаты в параллельном базисе не меняются.*

Доказательство. Это очевидное следствие теоремы. □

Наконец, в силу того, что коэффициентами уравнения служат кристоффели, которые выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные, мы получаем, что это уравнение принадлежит внутренней геометрии поверхности. Иными словами,

Утверждение 4. *При изометрическом отображении одной поверхности на другую параллельный перенос векторов переходит в параллельный перенос их образов.* □

Важный пример. Параллельный перенос на развертывающейся поверхности можно получить, развернув ее на плоскость и взяв там обычный параллельный перенос на плоскости.

Контрольный вопрос. Рассмотрим круглый конус с углом разворота (угол между осью и образующей) α. Рассмотрим вектор, который в некоторой точке образующей отличной от вершины направлен по ней. На какой угол повернется этот вектор после параллельного переноса по окружности, плоскость которой ортогональна оси?

Заметьте, что при параллельном переносе вектора на плоскости по любой кривой он, очевидно, должен вернуться в исходное положение. Противоречие с ответом на приведенный вопрос разрешается тем, что конус является развертывающейся *локально* поверхностью в окрестности любой своей точки, кроме вершины, а в нашем случае окружность как раз обходит вокруг вершины.

Утверждение 5. *Если две поверхности касаются друг друга в точках некоторой кривой, то параллельные переносы векторов вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадают.*

Доказательство. Поверхности касаются в общей для них точке, если их касательные плоскости в этой точке совпадают. Поэтому вектор, касательный к одной из них в этой точке будет касательным и к другой. Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой получается, как мы знаем, в два шага: сначала берется обычная производная в объемлющем трехмерном пространстве и затем результат проектируется на касательную плоскость. Но обе эти операции совпадают, если совпадают касательные плоскости поверхностей. □

Это утверждение также выглядит с первого взгляда противоречивым, так как параллельный перенос определяется кристоффелями, а кристоффели выражаются через производные метрической формы, причем производные берутся в картах разных поверхностей и не обязаны совпадать.

Упражнение. Найти, на какой угол повернется вектор касательный к единичной сфере в точке с долготой α и направленный по меридиану к северному полюсу после параллельного переноса по окружности, плоскость которой ортогональна оси север – юг. [Воспользоваться утверждением 5.]

10.2 Геодезические.

Геодезические это самые важные кривые на поверхности. Они являются аналогами прямых линий на плоскости. Основными являются два свойства: геодезические являются (локально) *кратчайшими* и с другой стороны *прямейшими*. Первое свойство означает, что длина этих кривых наименьшая среди всех кривых соединяющих данные две точки. Это условие должно быть выполнено локально, т.е. для кривых, соединяющих точки отстоящие друг от друга не более, чем на некоторое ϵ (расстояние можно брать в терминах карты). (Экватор сферы, конечно, надо считать геодезической – прямой линией на сфере, но кратчайшим его обход между близкими точками будет в одну сторону и не будет в другую.)

Второе условие означает, что геодезическая не искривлена с точки зрения внутренней геометрии поверхности. Мы должны будем уточнить это важное понятие.

Первое свойство мы выясним позже. Его решение состоит в том, что уравнение геодезической является условием минимума функционала длины — эти вопросы изучаются в функциональном анализе, но мы обойдемся более элементарными средствами.

Обратимся ко второму свойству.

Пусть дана кривая γ на поверхности M^2. Напомним, что кривизна этой кривой в $\mathbb{R}^3$ это модуль производной ее вектора скорости по натуральному параметру. Сам этот вектор называется *вектором кривизны* кривой в данной точке, его называют иногда абсолютным вектором кривизны.

Проекция этого вектора на касательную плоскость, как мы знаем, есть ковариантная производная векторного поля векторов скорости кривой (касательных ортов), мы назвали его модуль *геодезической кривизной* (см. п.4 глава 7 и также п.5 глава 8). Проекция на нормальный вектор к поверхности называется вектором нормальной кривизны, длина его есть *нормальная кривизна*.

Определение. *Вектором геодезической кривизны* кривой $\gamma \subset M^2$ в данной точке x называется проекция (абсолютного) вектора кривизны этой кривой в точке x на касательную плоскость в этой точке, а *геодезической кривизной* k_g длина этой проекции.

Пусть $\boldsymbol{\nu}_g$ – единичный вектор в касательной плоскости ортогональный орту кривой $\boldsymbol{\tau}$, направление которого совпадает с направлением вектора геодезической кривизны. Тогда вектор геодезической кривизны есть $k_g\boldsymbol{\nu}_g$. Очевидно, $k_g\boldsymbol{\nu}_g = \nabla_l \boldsymbol{\tau}(l)$, где l – натуральный параметр кривой.

Правая часть принадлежит внутренней геометрии поверхности. Беря модули, получаем:

Утверждение 1. *Геодезическая кривизна не меняется при изгибаниях.* □

Контрольный вопрос. Докажите, что квадрат кривизны кривой на поверхности в данной точке равен сумме квадратов ее нормальной и геодезической кривизн в этой точке.

(Название геодезическая кривизна было введено Гауссом в связи с проводившимися им геодезическими работами по измерениям земной поверхности. В этом случае поверхность Земли рассматривалась безотносительно к ее вложению в трехмерное пространство. И геодезическая кривизна кривых рассматривалась как величина, которую можно измерить непосредственно на поверхности.)

Вспомним, что прямые на плоскости выделяются тем, что их кривизна в каждой точке равна нулю.

Определение. *Геодезической кривой* на поверхности или просто *геодезической* называется кривая, геодезическая кривизна которой равна нулю в каждой точке.

Исходя из сказанного, мы сразу заключаем, что

Утверждение 2. *Главная нормаль геодезической совпадает с нормалью к поверхности в каждой ее точке, и это свойство характеризует геодезические.* □

10.3 Уравнение геодезических.

Условие равенства нулю геодезической кривизны, и значит вектора геодезической кривизны, означает, что ковариантная производная поля касательных ортов вдоль кривой равна нулю в каждой точке. Это условие записывается уравнением

$$\frac{d\,\dot{x}^i}{d\,t} + \dot{x}^k \Gamma^i_{kj} \dot{x}^j = 0,$$

которое получено из уравнения параллельного переноса подстановкой вместо вектора $\mathbf{v}$ касательного орта $\boldsymbol{\tau} = (\dot{x}^i)$. Параметром служит нормальный параметр кривой. Каноническая запись этого уравнения:

$$\frac{d^2\,x^i}{d\,t^2} + \Gamma^i_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j = 0. \qquad (\S\S)$$

В этом уравнении (точнее, системе), в отличие от уравнения параллельного переноса, неизвестными являются координаты не векторов, а точек кривой. Это уравнение, во-первых, имеет второй порядок и, во-вторых, в отличие от уравнения параллельного переноса, из которого оно получено, не линейное. (Некоторой аналогией тут служит то, как из би*линейной* формы от двух переменных в алгебре получается *квадратичная* форма от одного переменного.)

Тот факт, что геодезические служат решениями обыкновенного дифференциального уравнения, дает сразу несколько результатов.

Утверждение 1. *Координаты $x^1(t), x^2(t)$ точек геодезической кривой с параметром t тогда и только тогда удовлетворяют уравнению геодезической, когда параметр t линейно зависит от натурального.*

(Заменяя параметр в дифференциальном уравнении, мы изменим уравнение, хотя решение останется той же самой кривой, хотя и иначе параметризованной.)

Доказательство. Мы предполагаем, что $\nabla_t \mathbf{v}(t) = 0$, где $\mathbf{v}(t)$ – вектор скорости. Но тогда $(\mathbf{v},\,\mathbf{v})^{\cdot} = \nabla_t(\mathbf{v},\,\mathbf{v}) = 2(\nabla_t\mathbf{v}(t),\,\mathbf{v}) = 0$, т.е. длина вектора скорости постоянна, т.е. $\frac{d\,s}{d\,t} = |\mathbf{v}| = \mathrm{const}$ и $t = cs + d$ (где c и d константы). Если же в уравнении геодезической сделать линейную замену параметра, то уравнение не изменится (оба слагаемых умножатся на $\frac{1}{c^2}$). □

Дальше воспользуемся теоремой существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений. Из нее следует, что через каждую точку поверхности в каждом направлении проходит в точности одна геодезическая. Но уравнение геодезической есть на самом деле система двух уравнений второго порядка относительно двух неизвестных функций. Решения такой системы образуют четырехпараметрическое семейство. В нашем случае три параметра очевидны: точка на поверхности, отвечающая нулевому значению t дает (локально) два параметра, еще один параметр — это наклон орта в этой точке – задает направление.

Четвертый параметр дается предыдущим утверждением.

Геодезические на сфере. Мы отмечали, что экватор сферы "очевидно" нужно считать аналогом прямой на сфере, т.е. геодезической. Мы теперь можем это установить, даже не решая уравнения.

Для любого большого круга на сфере вектор кривизны направлен к центру и его направление совпадает с направлением нормали к сфере. Значит, геодезическая кривизна равна нулю и большой круг является геодезической. Других геодезических нет, т.к. через каждую точку в каждом направлении можно провести большой круг.

С другой стороны мы можем рассуждать иначе.

Геодезические переходят в геодезические при изометриях, т.к. они принадлежат внутренней геометрии поверхности. В частности, это так при симметриях поверхности. Но каждый большой круг определяет отражение сферы в плоскости этого круга. Если бы в направлении круга проходила через данную точку геодезическая отличная от круга, то при этом отражении она перешла бы в отличную от нее геодезическую с тем же направлением, чего быть не может по теореме единственности.

10.4 Геодезические поверхностей вращения. Теорема Клеро.

Предыдущее рассуждение показывает более общим образом, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими.

Контрольный вопрос. Когда окружность, ортогональная оси, будет геодезической?

Вообще, для геодезических кривых поверхности вращения справедлива

Теорема Клеро. Для точек геодезической на поверхности вращения произведение расстояния от точки до оси вращения на синус угла кривой с меридианом постоянно.

Доказательство. Рассмотрим, вообще, поверхность, метрика которой может быть приведена к виду $ds^2 = du^2 + h(u)dv^2$. В нашем случае поверхности вращения $h = \eta(u)$ есть квадрат расстояния ρ от точки кривой до оси вращения (см.п.11 Глава 6). Заметим, что для кривых $v = \text{const}$ параметр u натуральный ($dv = 0$ и $du^2 = ds^2$). Подсчитаем символы Кристоффеля по известной формуле. Мы получим, что ненулевыми являются только символы $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}h'$ и $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2h}h'$, причем $h' = \frac{dh}{du}$.

Запишем уравнения геодезических:

$$\begin{aligned}
&\ddot{u} = -\Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = \tfrac{1}{2}h'\dot{v}^2\\
&\ddot{v} = -\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} - \Gamma^2_{21}\dot{v}\dot{u} = -\tfrac{1}{h}h'\dot{u}\dot{v} = -\tfrac{1}{h}\dot{h}\dot{v}.
\end{aligned}$$

Нам удобнее считать косинус, а не синус. Поэтому введем угол φ между направлением геодезической и параллелью. Координаты направляющего вектора параллели $(0, 1)$, а его длина $\sqrt{h}$, координаты направляющего вектора геодезической – $(\dot{u},\, \dot{v})$, длина равна 1, т.к. параметр геодезической нормальный. Используя выражение косинуса через скалярное произведение, получаем

$$\cos\varphi = \frac{h\dot{v}}{\sqrt{h}} = \sqrt{h}\,\dot{v}$$

и

$$(\rho\cos\varphi)^{\boldsymbol{\cdot}} = (\sqrt{h}\cos\varphi)^{\boldsymbol{\cdot}} = (h\dot{v})^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{h}\dot{v} + h\ddot{v},$$

что равно нулю, благодаря второму уравнению геодезических. □

Контрольный вопрос. Верно ли обратное?

Упражнение. Используя метрику $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$ сферы, воспользуйтесь выведенными уравнениями, чтобы показать, что экватор сферы является геодезической. (В надлежащих сферических координатах каждый большой круг есть экватор ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Поэтому геодезические на сфере – большие круги и только они.)

Приведем еще одно доказательство (из лекций И.А. Дынникова) теоремы Клеро, оно не опирается на подсчет кристоффелей.

Доказательство. Пусть $\mathbf{q}(l)$ – натуральная параметризация геодезической на поверхности вращения. Считая, что начало $\mathbb{O}$ находится на оси вращения, разложим радиус-вектор $\mathbf{q}$ в сумму $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$ векторов, первый из которых параллелен оси поверхности, а второй – перпендикулярен. Тогда расстояние $\rho(\mathbf{q}(s))$ от точки $\mathbf{q}(s)$ до оси равно $|\mathbf{q}_2|$, а касательная параллели, проходящей через эту точку, имеет своим направляющим вектором векторное произведение $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]$. Так как параметризация рассматриваемой геодезической натуральна, мы имеем $\langle\mathbf{q}'', \mathbf{q}'\rangle = 0$. Кроме того, так как кривая $\mathbf{q}(s)$ является геодезической, вектор ускорения $\mathbf{q}''$ (который в натуральной параметризации совпадает с вектором кривизны) ортогонален всей касательной плоскости в соответствующей точке, в частности, направляющему вектору параллели, т.е. $\langle \mathbf{q}'', [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] \rangle = 0$. Отсюда

$$\begin{aligned}(\rho\cos\varphi)' = \quad & \left(|\mathbf{q}_2| \frac{\langle \mathbf{q}', [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]\rangle}{|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]|}\right)' = \left(\frac{(\mathbf{q}', \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}{|\mathbf{q}_1|}\right)' = \left(\mathbf{q}', \frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_1}, \mathbf{q}_2\right)' = \\ & = \left(\mathbf{q}'', \frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_1}, \mathbf{q}_2\right) + \left(\mathbf{q}', \left(\frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_1}\right)', \mathbf{q}_2\right) + \left(\mathbf{q}_1', \frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_1}, \mathbf{q}_2'\right) + \left(\mathbf{q}_2', \frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_1}, \mathbf{q}_2'\right).\end{aligned}$$

Мы уже выяснили, что первое слагаемое в этой сумме равно нулю. Второе слагаемое равно нулю, поскольку вектор $\mathbf{q}_1/|\mathbf{q}_1|$ является единичным направляющим вектором оси поверхности, а значит, он постоянен. Третье слагаемое равно нулю, так как вектор $\mathbf{q}_1'$ коллинеарен $\mathbf{q}_1$, а последнее – поскольку дважды содержит $\mathbf{q}_2'$. Таким образом, $(\rho\cos\varphi)' = 0$, т.е. $\rho\cos\varphi$ – постоянная величина. $\square$

Задача. Покажите непосредственно (не опираясь на единственность), что кривые, удовлетворяющие условию Клеро, являются геодезическими.

[**Указание.** Пусть $\rho\sin\theta = c$, θ угол геодезической и меридиана. Тогда вектор скорости геодезической (единичный) есть $\boldsymbol{\tau} = (\dot{u}, \dot{v}) = (\cos\theta, \frac{\sin\theta}{\rho}) = (\frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho}, \frac{c}{\rho^2})$. Нужно проверить, что $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяет уравнениям геодезической.]

10.5 Полугеодезические координаты. Геодезические как кратчайшие.

Мы теперь должны выяснить второе основное свойство геодезических — показать, что это *кратчайшие* кривые. Иными словами, эти кривые минимизируют (локально) функционал длины, т.е. служат точками минимума для функции длины на бесконечномерном пространстве кривых, соединяющих две данные (близкие) точки. Естественный подход к доказательству этого факта лежит через вариационное исчисление — уравнение геодезической служит уравнением Эйлера – Лагранжа для функционала длины (это уравнение в функциональном анализе является аналогом условия равенства нулю производной в стационарных точках для обычных функций). Однако в рамках дифференциальной геометрии предпочитают обходиться своими средствами, не прибегая к бесконечномерному анализу. Так мы и поступим. Но для этого нам нужно ввести и рассмотреть специальный тип координат.

Как мы знаем, система координат, в которой средний коэффициент $g_{12} = F$ первой квадратичной формы обращается в нуль, имеет важное свойство: координатные линии ортогональны.

Мы встречались с координатами, в которых, кроме этого условия, было выполнено также условие конформности: $g_{11} = g_{22}$ $(E = G)$. В этом случае углы между кривыми на поверхности те же, что и у их прообраза в координатной плоскости.

Введем еще другой интересный пример ортогональной системы координат, в которой выполнено условие $g_{11} = 1$.

Определение. *Полугеодезической* называется система координат, в которой метрика имеет вид

$$ds^2 = du^2 + g_{22}(u, v)\, dv^2.$$

Частным случаем является метрика, которая была введена для поверхностей вращения. В ней g_{22} не зависило от v.

Задача. Подсчитать символы Кристоффеля в полугеодезической системе.

[**Решение.** (Ср. п. 10.4) Обозначим элемент $g_{22} = G$ здесь через b^2 (т.е. $b = |\mathbf{r}_v||$). Заметим, во-первых, что обратная матрица к матрице метрики будет $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{pmatrix}$. Из частных производных от g_{ij}, через которые выражаются кристоффели, остаются только $\frac{\partial b^2}{\partial x^i}$, где x^i есть u или v. В выражении для Γ^1_{ij} оба индекса могут быть только 2 и остается только $-\frac{\partial b^2}{\partial u}$. Таким образом, $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial b^2}{\partial u}$. В выражении для Γ^2_{ij} отпадает случай $i = j = 1$. Если оба индекса равны 2, то мы получаем $\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2b^2}\frac{\partial b^2}{\partial v} = \frac{\partial \ln b}{\partial v}$. Если индексы различны, то $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2b^2}\frac{\partial b^2}{\partial u} = \frac{1}{b}b_u = \frac{\partial \ln b}{\partial u}$.]

Задача. Показать, что гауссова кривизна поверхности в полугеодезической системе равна $K = -\frac{\partial^2 b}{\partial u^2}/b$.

[**Решение.** Воспользуемся выражением кривизны, полученным в п.3 главы 9 (определитель 1-ой формы есть b^2):

$$K = \frac{1}{b^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b^2}{\partial u^2} + b^2\left(\frac{b_u}{b}\right)^2\right) = \frac{1}{b^2}(-b_u^2 - bb_{uu} + b_u^2) = -\frac{b_{uu}}{b}.]$$

Контрольный вопрос. Проверьте, что эта формула дает правильную кривизну сферы радиуса R.

Легко получается следующее свойство:

Утверждение 1. *В полугеодезической системе координат (u, v) длины дуг координатных линий $v = const$ между любой парой координатных линий $u = u_1$ и $u = u_2$ все равны $u_2 - u_1$.*

Доказательство. Действительно, на координатной линии $v = \mathrm{const}$ мы имеем $dv = 0$ и $ds = du$. Иными словами, u является натуральным параметром на каждой кривой $v = \mathrm{const}$. $\square$

Возьмем какую-либо кривую $u = \mathrm{const} = u_0$ в качестве начальной и заменим переменные: $(u,\, v) \mapsto (u - u_0,\, v)$. Очевидно, мы не изменим при этом вид метрики и координатные линии, а точки на начальной линии будут иметь первую координату $u = 0$. В таком случае для любой точки $(u,\, v)$ в области нашей координатной системы первая координата будет выражать длину дуги координатной линии $v = \mathrm{const}$ от этой точки до начальной кривой.

Второе свойство полугеодезических координат состоит в том, что дуги кривых $v = \mathrm{const}$ имеют следующее свойство минимальности. Грубо говоря, длина дуги такой кривой меньше длины любой другой кривой, соединяющей ее концы. Однако, тут имеется небольшая тонкость, которая прояснится по ходу доказательства, из-за которой нам приходится ввести дополнительное требование на малость такой дуги.

Утверждение 2. *Пусть имеется область U на поверхности, в которой введены полугеодезические координаты $(u,\, v)$. Пусть λ – отрезок кривой $v = const = v_0$, длина которого меньше расстояния от λ до границы U.* (Под расстоянием можно понимать стандартное расстояние в $\mathbb{R}^3$.)

Тогда длина λ меньше длины любой другой дуги, соединяющей ее концы.

Доказательство. Пусть μ дуга, соединяющая концы p и q дуги λ. Если μ выходит за пределы U, то ее длина больше длины λ. Пусть она целиком лежит в U. Тогда ее длина, согласно нашему условию на вид метрики, есть

$$\int_p^q \sqrt{1 + g_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du.$$

Ясно, что поскольку $g_{22} > 0$, это выражение не меньше, чем $\int_p^q du$, т.е. длина λ. При этом равенство возможно, если и только если $\frac{dv}{du} = 0$, т.е. $v = \mathrm{const}$. $\square$

Теперь мы объясним, почему система координат с таким свойством называется полугеодезической. Дело в том, что кривые $v = \mathrm{const}$ на самом деле являются геодезическими:

Утверждение 3. *В полугеодезической системе координат с метрикой $ds^2 = du^2 + g_{22}\, dv^2$ координатные кривые $v = const$ являются геодезическими.*

Например, меридианы поверхности вращения являются геодезическими.

Доказательство. Мы видели, что параметр u является натуральным на кривых $v = \mathrm{const}$. Поэтому орт касательной к координатной кривой $v = \mathrm{const}$ является также ее вектором скорости $\boldsymbol{\tau}(u)$ с координатами $(1, 0)$. Нам надо показать, что эти кривые удовлетворяют уравнению геодезической $\frac{d\,\boldsymbol{\tau}^i}{d\,u} + \boldsymbol{\tau}^k \Gamma^i_{kj} \boldsymbol{\tau}^j = 0$.

Выше (в решении задачи) мы подсчитали символы Кристоффеля в полугеодезической системе и убедились, что отличные от нуля символы имеют хотя бы один нижний индекс 2. Таким образом левая часть уравнения равна нулю: первое слагаемое – поскольку координаты $\boldsymbol{\tau}$ постоянны, а остальные слагаемые, т.к. ненулевые кристоффели умножаются на нулевую координату $\boldsymbol{\tau}$. $\square$

Замечание. Пример большого круга на сфере показывает необходимость введения условия того типа, которое мы приняли в утверждении 2. Если для точки на этом круге взять маленькую окрестность, то в остальной части сферы можно ввести карту, в которой дуга круга не будет иметь минимальную длину среди кривых, которые соединяют ее концы и лежат в дополнении к выбранной малой окрестности.

Итак, полугеодезическая система координат определена однопараметрическим семейством геодезических, второе семейство координатных кривых определено как семейство ортогональных кривых к первому. Обратно, такая пара семейств кривых определяет полугеодезическую систему координат, если на геодезических в качестве координатного параметра выбрать натуральный параметр. На самом деле для второго семейства достаточно потребовать, чтобы только одна его кривая была ортогональна семейству геодезических. Тогда это будет верно и для остальных:

Утверждение 4. *Пусть в данной системе локальных координат $(u,\, v)$ семейство кривых $v =$ const состоит из геодезических, причем натуральным параметром для них служит u. Пусть также координатная кривая $u = 0$ ортогональна геодезическому семейству. В таком случае это — полугеодезическая система координат.*

Доказательство. Ясно, что $g_{11} = 1$, поскольку параметр u натуральный и, значит, вектор скорости вдоль координатных кривых $v =$ const является ортом. Нужно показать, что $g_{12} = 0$, т.е., что все кривые $u =$ const ортогональны геодезическому семейству. Из условия, что кривая $u = 0$ ортогональна геодезическому семейству, следует, что в точках этой кривой $g_{12} = 0$.

Т.к. g_{11} постоянно, непосредственно видно, что $\Gamma^1_{11} = g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u}$.

По условию, линии $v =$ const геодезические, т.е. $\nabla_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\tau} = 0$. По определению кристоффелей Γ^1_{11} есть первая координата этого вектора. Таким образом, $g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u} = 0$.

Но $g^{12} = \frac{g_{12}}{g}$, где g – детерминант матрицы первой формы. Значит, либо $g_{12} = 0$ (что и требуется), либо g_{12} постоянно. Однако в точках начальной кривой $g_{12} = 0$ и утверждение доказано. □

Построение полугеодезической системы координат. Мы показали, что координатные кривые полугеодезической системы образуют два семейства, одно из которых состоит из геодезических (утверждение 3), причем их натуральный параметр является координатой (утверждение 1), а другое состоит из кривых ортогональных кривым первого семейства. И обратно, если для данной системы координат одно семейство координатных кривых состоит из геодезических, натуральный параметр которых служит координатой, причем хотя бы одна кривая второго семейства ортогональна кривым первого, то в силу утверждения 4 все кривые второго семейства будут ортогональны кривым первого, а система координат будет полугеодезической.

Отсюда видно, как построить полугеодезическую систему координат в окрестности данной точки $A \in M^2$. Нужно провести через эту точку дугу λ регулярной кривой, и взять на ней произвольный (регулярный) параметр v. Затем через каждую точку λ нужно провести геодезическую γ в направлении ортогональном λ. На каждой построенной геодезической γ_v, отвечающей какому-либо значению v, возьмем натуральный параметр u в качестве координаты, считая, что в точке пересечения γ_v с λ он равен нулю. Тогда пары $(u,\, v)$ будут служить регулярными координатами в малой окрестности A (т.к. в точках λ кривые ортогональны), причем кривые $u =$ const будут ортогональны построенному семейству геодезических во всех своих точках и наша система координат будет полугеодезической, т.е. первая квадратичная форма будет иметь требуемый вид.

Геодезические как кратчайшие. Теперь мы можем обосновать второе основое свойство геодезических. Любую геодезическую γ, проходящую через точку A, мы можем включить в координатное семейство полугеодезической системы координат. Нужно только в описанном только что построении начать с регулярной кривой, ортогональной γ в точке A. Отсюда и из утверждения 2 следует:

Теорема. *Для некоторой окрестности A дуга геодезической, соединяющая A с любой другой точкой B этой окрестности, имеет длину меньшую, чем длина любой другой дуги, соединяющей A и B.* □

Мы однако еще не доказали, что точку A можно соединить с любой точкой из некоторой ее окрестности геодезической дугой. Для этого нам нужно рассмотреть еще одну конструкцию.

10.6 Экспоненциальное отображение.

Мы знаем, что в каждом направлении через данную точку может быть проведена ровно одна геодезическая, натуральный параметр которой имеет в данной точке значение нуль.

Придадим этому утверждению более формальный и более полный характер. Нам дана поверхность M^2 с римановой метрикой, имеющей в данной окрестности запись $(g_{ij}) :\ ds^2 = g_{11}\, du^2 + 2\, g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2$. Она задает скалярное произведение в касательной плоскости в каждой точке этой окрестности.

Утверждение 1. *Рассмотрим касательную плоскость $\tau_A M^2$ в точке A поверхности M^2. Для каждого орта $\mathbf{e}$ в $\tau_A M^2$ обозначим через $\gamma_{\mathbf{e}}$ геодезическую, проходящую через A так, что натуральный параметр точки A есть 0 и вектор скорости в натуральной параметризации в точке A есть $\mathbf{e}$.*

Отобразим прямую $t\mathbf{e} \in \tau_A$ на $\gamma_{\mathbf{e}}$, сопоставив точке $\mathbf{x} = t\mathbf{e}$ этой прямой точку $\mathbf{y} \in \gamma_{\mathbf{e}}$ с натуральным параметром t.

Мы получим диффеоморфное отображение некоторой окрестности V точки A в $\tau_A M^2$ на окрестность U этой точки в M^2, которое обозначается $\exp\colon V \to U \subset M^2$.

Это отображение называется *экспоненциальным* и обозначается exp.

Мы отождествили точку A поверхности с началом в ее касательной плоскости, что, конечно, не может привести к недоразумениям.

Доказательство. Заметим, что взяв на прямой $t\mathbf{e}$ какой-либо вектор $\mathbf{v}$ в качестве образующей, мы получим параметризацию $\bar{t}\mathbf{v}$ той же прямой с параметром $\bar{t}$ пропорциональным исходному: $\bar{t}\mathbf{v} = t\mathbf{e}$, $\bar{t} = \pm\frac{t}{|\mathbf{v}|}$. Принимая $\bar{t}$ за параметр точки $\exp(t\mathbf{e})$, мы получим параметризацию геодезической с параметром пропорциональным натуральному и с вектором скорости $\mathbf{v}$.

Утверждение 1 непосредственно вытекает из следующего:

Утверждение $1'$**.** Дифференциал $\check{g}$ в точке A есть тождественное отображение.

Это утверждение требует такого пояснения. Хотя в образе и прообразе мы рассматриваем разные многообразия, но сейчас у нас в прообразе линейное пространство $\tau_A M^2$, а для линейного пространства его касательное пространство в каждой точке и, в частности, в начале, естественным образом отождествляется с ним самим. (Можно написать $\boldsymbol{\tau}_A(M^2) = \boldsymbol{\tau}_A(\boldsymbol{\tau}_A(M^2))$.) Поэтому дифференциал в точке A нашего отображения действует из $\tau_A M^2$ в $\tau_A M^2$, т.е. в себя, и утверждение, что он есть тождественное отображение, имеет смысл.

Доказательство. Чтобы проверить это утверждение, удобно рассматривать векторы как векторы скорости кривых, и нам нужно показать для каждого вектора $\mathbf{v}$, что какая-либо кривая в $\tau_A M^2$ с вектором скорости $\mathbf{v}$ переходит в кривую в M^2 также с вектором скорости $\mathbf{v}$. Но в качестве кривой в $\tau_A M^2$ мы можем взять прямую $t\mathbf{v}$, а ее образ, как мы видели, есть геодезическая кривая, параметризованная так, что ее вектор скорости есть $\mathbf{v}$. $\square$

Итак, отображение $\check{g}$ переводит окрестность A в касательной плоскости в многообразие M^2 с тождественным дифференциалом в точке A. По теореме об обратном отображении эта окрестность диффеоморфно отображается на некоторую окрестность A в M^2. Иными словами, точку A можно соединить геодезической с каждой точкой в малой окрестности A.

Теперь усилим наш результат.

Теорема. *Для любой окрестности $\widetilde{U}$ точки $A \in M^2$ имеется такая окрестность $U(A)$, что* ***любые*** *две точки из U соединимы единственной геодезической, лежащей в $\widetilde{U}$.*

Доказательство. Воспользуемся теперь теоремой о неявной функции в усиленной форме. Она утверждает, что если нам дано отображение $\mathbf{z} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — точки многомерных пространств, причем матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}$ квадратная и невырожденная в окрестности точки $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, то для некоторой окрестности $\widetilde{U}$ точки $\mathbf{z}_0 = F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ и некоторой окрестности U точки $\mathbf{x}_0$ имеется окрестность W точки $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ такая, что для каждой ее точки $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ мы имеем: $\mathbf{x} \in U$, и если $W_{\mathbf{x}'}$ обозначает подмножество точек $(\mathbf{x}', \mathbf{y})$ в W с фиксированной координатой $\mathbf{x}'$, то F диффеоморфно отображает $W_{\mathbf{x}'}$ на $\widetilde{U}$. (Иными словами, W представляется прямым произведением U и $\widetilde{U}$, а F оказывается проекцией этого прямого произведения на сомножитель $\widetilde{U}$.)

В нашем случае $\mathbf{z} = \exp(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ – конец отрезка геодезической, проведенной из точки $\mathbf{x}$ с вектором скорости $\mathbf{v}$; минор $(\frac{\partial \exp(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}})$ матрицы Якоби не нуль в окрестности $(A, \mathbf{0})$, т.к. он равен 1 в этой точке. U и $\widetilde{U}$ — это окрестности в M^2 точки $\mathbf{x}_0 = A$, и мы получаем, согласно нашему определению отображения, что каждую точку U можно соединить с каждой точкой $\widetilde{U}$ геодезической. Поскольку при стремлении этих точек к A геодезическая стремится также совпасть с A (иначе будет противоречие с теоремой п.10.5), мы видим, что если точки берутся в малой окрестности, то соединяющая их геодезическая будет лежать целиком в $\widetilde{U}$. Ясно также, что такая геодезическая (лежащая целиком в $\widetilde{U}$) единственна. $\square$

Продолжаемость геодезических. Поверхность называется полной, если каждую геодезическую можно определить для всех значений (натурального) параметра от $-\infty$ до $+\infty$. В силу сказанного о существовании и единственности соединения близких точек геодезическими, следующее утверждение можно оставить в качестве задачи:

Задача. Показать, что для компактного многообразия каждая геодезическая может быть продолжена до максимальной (т.е. если дана геодезическая определенная для нормального параметра в некотором интервале, то она лежит в большей геодезической, определенной для нормального параметра на всей числовой прямой).

Замечание. Известная теорема Хопфа – Ринова утверждает, что в полном многообразии M (т.е. в многообразии, в котором расстояние, определенное римановой метрикой, превращает M в полное метрическое пространство) любые две точки (а не только достаточно близкие) можно соединить геодезической (см. Дж. Милнор. «Теория Морса».)

10.7 Метрика постоянной кривизны.

Допустим, что гауссова кривизна K данной поверхности одна и та же во всех точках. Мы хотим показать, что этим полностью определена риманова метрика поверхности.

Построим полугеодезическую систему координат, как выше.

Проведем через начальную точку A две геодезические γ_1 и γ_2 под прямым углом в этой точке. Пусть u – натуральный параметр на γ_1, v – на γ_2. Оба параметра отсчитываются от точки A. Через каждую точку γ_2 с параметром v проведем геодезическую γ_v, ортогональную γ_2.

Метрика поверхности в этой системе координат имеет вид:

$$ds^2 = du^2 + b^2(u, v)\, dv^2.$$

Выражение для гауссовой кривизны в такой системе координат (см.п.5) есть $K = -b_{uu}/b$, т.е. мы имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$b_{uu} + Kb = 0.$$

с постоянным коэффициентом K и параметром v. Вид его решения зависит от знака K.

В случае $K = \frac{1}{a^2} > 0$

$$b = f_1(v)\cos\frac{u}{a} + f_2(v)\sin\frac{u}{a}.$$

Здесь функции $f_i(u)$ выражают зависимость решения от начальных данных.

Аналогично, в случае $K = -\frac{1}{a^2} < 0$

$$b = f_1(v)\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a} + f_2(v)\,\mathrm{sh}\,\frac{u}{a}.$$

Если $K = 0$ имеем

$$b = f_1(v) + f_2(v)u.$$

Во всех трех случаях при $u = 0$ точка лежит на геодезической γ_2, причем v есть ее натуральный параметр. Поэтому $b^2|_{u=0} = 1$ (как квадрат модуля касательного орта).

Обозначим касательный орт кривой γ_2 через $\boldsymbol{\tau}(v)$. Его координаты в построенной системе координат в каждой точке кривой равны $(0, 1)$. Согласно уравнению геодезической, $\nabla_{\boldsymbol{\tau}(v)}\boldsymbol{\tau}(v) = 0$. Запишем в координатах уравнение, отвечающее первой координате:

$$\nabla_v\boldsymbol{\tau}(v) = \frac{\partial\boldsymbol{\tau}^1}{\partial v} + \boldsymbol{\tau}^1\Gamma^1_{12}\boldsymbol{\tau}^2 + \boldsymbol{\tau}^2\Gamma^1_{22}\boldsymbol{\tau}^2 = 0.$$

В точках кривой $\boldsymbol{\tau}^1 = 0$, и поэтому первые два слагаемых равны нулю. Вторая координата $\boldsymbol{\tau}$ равна 1, и мы получаем, что в точках кривой $\Gamma^1_{22} = 0$. Но в нашем случае $\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial b^2}{\partial u}$, и мы получаем $b_u|_{u=0} = 0$.

Подстановка этих значений дает во всех трех случаях

$$f_1(v) = 1;\ f_2(v) = 0.$$

В результате первая квадратичная форма поверхности постоянной кривизны в построенной системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + \cos^2\tfrac{v}{a}\, dv^2, && \text{если } K = 1/a^2 > 0;\\ ds^2 &= du^2 + \mathrm{ch}^2\tfrac{u}{a}\, dv^2, && \text{если } K = -1/a^2 < 0;\\ ds^2 &= du^2 + dv^2, && \text{если } K = 0. \end{aligned}$$

Локальная изометрия поверхностей постоянной кривизны.

Утверждение. *Две поверхности постоянной кривизны локально изометричны, если и только если их кривизны равны.*

Доказательство. Равенство кривизн для локально изометричных поверхностей следует из теоремы Гаусса. Если же две поверхности M_1 и M_2 имеют одинаковую постоянную кривизну K, то, согласно доказанному, в окрестностях точек $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$ можно ввести локальные карты, параметризованные одной и той же областью плоскости и такие, что в соответственных точках метрика в обеих картах будет задаваться одной и той же формулой, принадлежащей к одному из трех указанных типов в зависимости от знака K. □

Поверхности постоянной кривизны в $\mathbb{R}^3$. Для каждого числа $K \in \mathbb{R}$ имеется поверхность постоянной кривизны K, которую можно построить в $\mathbb{R}^3$. Для $K = 0$ это плоскость, а также любая развертывающаяся поверхность. Для положительного K это сфера радиуса $1/\sqrt{K}$. Для отрицательных K такая поверхность также может быть реализована в $\mathbb{R}^3$, т.е. в $\mathbb{R}^3$ есть поверхность, на которой стандартная метрика индуцирует метрику с постоянной отрицательной кривизной. Такова рассмотренная нами псевдосфера Бельтрами (см. также п.9.9).

Задача нахождения поверхностей постоянной кривизны (в форме графика) решалась в 30-х годах прошлого века работавшим в России (в Дерптском университете) и ставшим позже почетным членом Российской АН Ф. Миндингом, учеником Гаусса. В общем виде она сводится к уравнению в частных производных, которое задается формулой, определяющей полную кривизну. Миндинг рассмотрел случай обобщенных винтовых поверхностей и, в частности, поверхностей вращения. Этот последний случай требует решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, задающего меридиан функцией $r(z)$, где z – координата по оси вращения, а r – расстояние точки меридиана до оси вращения. (Напишите это уравнение в качестве упражнения!) Решение его представляется интегралом

$$z = \int \sqrt{\frac{1}{c^2 - Kr^2} - 1}\, dr.$$

Здесь c – произвольная постоянная.

Трудно заметить, что поверхность с таким меридианом при $K > 0$ локально изометрична сфере.

Миндинг доказал, что поверхности вращения с равной постоянной кривизной будут взаимно наложимы, но не обратил внимания на то, что дифференциал длины имеет в случае отрицательной кривизны тот же вид, что и на плоскости Лобачевского (основная статья которого была опубликована в том же журнале, что и статья Миндинга, двумя годами ранее). Этот факт был замечен и использован Риманом в его лекции 1854 года. Но его лекция оставалась неизвестной до 1868 года. В этом году вышла статья Бельтрами, где было указано явным образом, что внутренняя геометрия поверхности вращения трактрисы совпадает (локально) с геометрией плоскости Лобачевского. Этот факт послужил окончательному признанию неевклидовой геометрии. Однако изометрического и гладкого вложения всей плоскости Лобачевского в трехмерное пространство не существует, что было доказано Гильбертом в 1900 году.

10.8 Псевдоевклидово пространство и псевдосфера

Мы уже говорили, что представляет интерес обобщение евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$ и, соответственно, римановой метрики на поверхностях, состоящее в том, чтобы рассматривать в качестве скалярного произведения не обязательно положительно определенную квадратичную форму (но сохраняя свойства симметрии и невырожденности). Для такого *псевдоскалярного произведения* имеются ортонормированные базисы: их попарные произведения должны быть нулевыми, но их скалярные квадраты могут быть отрицательными. Число отрицательных квадратов не зависит от выбора базиса – в этом состоит известный из курса алгебры *закон инерции*.

Пространство $\mathbb{R}^n$, в котором задана в качестве (псевдо)скалярного произведения невырожденная симметричная билинейная форма h_{ij} с индексом инерции p называется, если $p > 0$ псевдоевклидовым пространством типа (n, p) и обозначается $\mathbb{R}^n_p$ или $\mathbb{R}^{n-p,p}$ (p – число отрицательных квадратов).

Векторы в таком пространстве делятся на положительные, мнимые и нулевые, в зависимости от того, является ли скалярный квадрат вектора положительным, отрицательным или нулевым. Нулевые векторы образуют конус $h_{ij} = 0$, который разделяет область положительных и область мнимых векторов.

Особое значение имеют псевдоевклидовы пространства R^n_1. Для $n = 4$ это пространство специальной теории относительности, о которой можно прочитать, в частности, в книге Рашевского.

Для нас имеет значение пространство $\mathbb{R}^3_1$ (или $\mathbb{R}^{1,2}$) со скалярным произведением $-u^1v^1-u^2v^2+u^0v^0$ (в этом случае принято последнюю координату снабжать индексом 0). Оказывается, псевдоевклидова метрика этого пространства индуцирует на некоторой поверхности положительно определенную метрику, кривизна которой постоянна и отрицательна. На этой поверхности может быть реализована целиком вся плоскость Лобачевского (не только локально). (Следует иметь в виду, что эта поверхность, рассматриваемая как подмножество трехмерного пространства с евклидовой метрикой, получает другую метрику, уже с непостоянной кривизной и к тому же положительной.)

В области внутри конуса нулевых векторов (она распадается на две компоненты: в одной $u^0 > 0$, в другой $u^0 < 0$) удобно ввести псевдосферические координаты:

$$u^0 = \rho\,\mathrm{ch}\chi, \quad u^1 = \rho\,\mathrm{sh}\chi\cos\varphi, \quad u^2 = \rho\,\mathrm{sh}\chi\sin\varphi.$$

В этой системе координат наша псевдоевклидова метрика записывается (в дифференциальной форме) в следующем виде:

$$dl^2 = d\rho^2 - \rho^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi\, d\varphi^2).$$

Определение *Псевдосферой радиуса* R называется поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, определенная уравнением

$$-(u^1)^2 - (u^2)^2 + (u^0)^2 = R^2.$$

С обычной евклидовой точки зрения это – двуполостный гиперболоид. Нам важна одна половина этого гиперболоида: мы возьмем ту, в которой $\rho = R > 0$.

Псевдосфера выделяется условием постоянства координаты $\rho = R$, следовательно, $d\rho = 0$ и на этой поверхности индуцируется метрика

$$-dl^2 = R^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi\, d\varphi^2).$$

Заменяя переменную χ на $R\chi$, мы придем к полугеодезической системе координат, и вспоминая выражение кривизны в такой системе из п. 9.8 ($b_{uu} = -Kb$), мы получаем в нашем случае, что кривизна псевдосферы радиуса R постоянна, отрицательна и равна $-\frac{1}{R^2}$.

В случае $R = 1$ псевдосфера является плоскостью Лобачевского, т.к. ее геодезические удовлетворяют условиям геометрии Лобачевского.

Псевдосфера с кривизной $-\frac{1}{R^2}$ локально отождествляется (изометрична) с псевдосферой Бельтрами с той же кривизной, в виду доказанной теоремы о единственности поверхности с данной постоянной кривизной.

Упражнение: Приведите метрику псевдосферы к конформному виду (изометричному метрике поверхности Бельтрами, выведенной в п. 6.11).

Задача. Показать, что в конформной метрике $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ плоскости Лобачевского в модели на полуплоскости $y > 0$ геодезическими служат ортогональные оси абсцисс полупрямые и полуокружности, опирающиеся на нее в концах .

Задача. Рассмотрим псевдоевклидову метрику $ds^2 = -dx^2 - dy^2 + dz^2$ во внешней области, ограниченной конусом $-x^2 - y^2 + z^2 = 0$. Покажите, что эта метрика индуцирует на однополостном гиперболоиде $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ псевдориманову метрику с индексом инерции 1 и положительной кривизной.

(Аналогичное построение в пятимерном пространстве приводит к известной модели общей теории относительности, принадлежащей У. де Ситтеру и описанной, например, в книге Э. Шредингера, переведенной в виде второй части книги «Пространственно-временная структура вселенной»).

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

ГЛАВА 11. Вращение векторного поля вдоль кривой и теорема Гаусса – Бонне

11.1 Внутреннее определение ковариантной производной

Покажем, что ковариантная производная $\nabla_t\mathbf{v}(t) = \frac{D\mathbf{v}}{dt}$ векторного поля $\mathbf{v}(t)$, заданного вдоль кривой, может быть с помощью операции параллельного переноса определена предельным переходом без обращения к внешнему пространству. При этом параллельный перенос определяется через символы Кристоффеля только на основе первой квадратичной формы. Конечно, у нас первая форма, т.е. риманова метрика поверхности, была определена с помощью стандартной метрики в объемлющем пространстве. Но римнову метрику можно определять и независимо от вложения в евклидово пространство.

Наша задача показать, что при этом сохраняется возможность определить дифференцирование одного векторного поля по другому.

Рассмотрим поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ и кривую $\mathbf{r}(t)$ на ней. Пусть вдоль кривой дано касательное поле $\mathbf{v}(t)$ и фиксирована точка $A = \mathbf{r}(t_0)$.

Перенесем параллельно вектор $\mathbf{v}(t_0 + h)$ в точку A. Полученный вектор в точке A обозначим $\mathbf{v}_h(t)$.

Теорема. Ковариантная производная поля $\mathbf{v}(t)$ в точке $\mathbf{r}(t_0)$ равна

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt}\Big|_{t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{v}_h(t_0) - \mathbf{v}(t_0)}{h}.$$

Доказательство. Заметьте, что векторы в числителе берутся в одной и той же касательной плоскости и разность их определена. Фиксируем в касательной плоскости τ_A базис $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$, который перенесем параллельно в касательные плоскости во всех точках кривой. Тогда $\mathbf{v}(t) = v^i \mathbf{m}_i(t)$ и

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{dv^i}{dt}\mathbf{m}_i(t_0).$$

(Т.к. базис параллелен, производные базисных векторов нулевые.)

С другой стороны $\mathbf{v}(t_0 + h) = v^i(t_0 + h)\mathbf{m}_i$. Координаты в параллельном базисе не меняются при параллельном переносе, так что $\mathbf{v}_h(t_0) = v^i(t_0 + h)\mathbf{m}_i$ и тогда

$$\lim_{h\to 0} \frac{v^i(t_0 + h) - v^i(t_0)}{h}\mathbf{m}_i(t_0) = \frac{dv^i}{dt}\mathbf{m}_i(t_0).$$

Это доказывает требуемое равенство. □

11.2 Вращение векторного поля вдоль кривой.

Пусть теперь даны два векторных поля $\mathbf{v}(t)$ и $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ с векторами единичной длины, поле $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ параллельно вдоль кривой $\mathbf{r}(t)$, причем $\tilde{\mathbf{v}}(t_0) = \mathbf{v}(t_0)$.

Обозначим через $\triangle\varphi$ величину изменения угла между параллельным полем и полем $\mathbf{v}(t)$. Считая поверхность M ориентированной, берем $\triangle\varphi$ со знаком: угол поворота от $\tilde{\mathbf{v}}$ до $\mathbf{v}(t)$ в положительном направлении (он же от $\tilde{\mathbf{v}}(t_0)$ до $\mathbf{v}_h(t_0)$).

Теорема. $|\frac{D\mathbf{v}}{dt}| = |\dot{\varphi}|$.

Доказательство. Применяя обозначения предыдущего пункта, имеем в точке $\mathbf{r}(t_0)$:

$$\left|\frac{D\mathbf{v}}{dt}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\tilde{\mathbf{v}}_h(t) - \mathbf{v}(t)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\tilde{\mathbf{v}}_h(t) - \mathbf{v}(t)}{\triangle\varphi}\right| \cdot \left|\frac{\triangle\varphi}{h}\right|.$$

Первый множитель стремится к 1 как отношение длины хорды к длине дуги окружности, а второй и есть $|\dot{\varphi}|$. □

Таким образом, *ковариантная производная – это скорость отклонения векторного поля от параллельного.*

В каждой точке $\mathbf{x}$ кривой выберем вектор $\mathbf{b} \in \tau_{\mathbf{x}}$ такой, что $|\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{b}(t) \perp \mathbf{v}(t)$, и пара $(\mathbf{v}, \mathbf{b})$ положительно ориентирована. Поле $\mathbf{b}(t)$ может быть получено процессом ортогонализации из $\mathbf{v}(t)$ и любого неколлинеарного с $\mathbf{v}(t)$ гладкого поля, так что $\mathbf{b}(t)$ – гладкое поле. Имеем

$$|\dot{\varphi}| = \left|\frac{D\mathbf{v}}{dt}\right|, \quad \dot{\varphi} = \left\langle \frac{D\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{b}\right\rangle,$$

(поскольку $|\mathbf{b}| = 1$ и $\frac{D\mathbf{v}}{dt} \parallel \mathbf{b}$, т.к. $\frac{D\mathbf{v}}{dt} \perp \mathbf{v}$).

Получаем формулу для отклонения векторного поля от параллельного переноса $\mathbf{v}(t_0)$:

$$\triangle\varphi = \int_{t_0}^{t} \left\langle \frac{D\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{b}\right\rangle dt = \int_{t_0}^{t} \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{b}\right\rangle dt$$

Последнее равенство следует из того, что $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ – производная в $\mathbb{R}^3$ – есть $\frac{D\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}'$, где $\mathbf{v}'$ ортогонален поверхности, и при скалярном умножении на $\mathbf{b}$ дает 0. Заметим, что $\triangle\varphi$, выражаясь через внутреннее дифференцирование $\frac{D}{dt}$, не зависит от способа изометричного вложения M в $\mathbb{R}^3$.

Одновременно имеем $\dot{\varphi} = \left\langle \frac{D\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{b} \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{b} \right\rangle$.

В частном случае, когда $t = s$ и $\mathbf{v}(s) = \boldsymbol{\tau}(s)$, $\frac{D\boldsymbol{\tau}}{ds} = k_g b$ и $\triangle\varphi = \int\limits_{s_0}^{s} k_g\, ds$ – угол отклонения траектории от "прямого" движения.

11.3 Обнос вектора вдоль замкнутого контура

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ – замкнутая кривая на поверхности, $\mathbf{v}$ – некоторый единичный вектор, касающийся поверхности в точке $A_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}$ – результат параллельного переноса $\mathbf{v}$ после одного оборота, $\triangle\omega$ – угол от $\mathbf{v}$ до $\tilde{\mathbf{v}}$. Считаем, что поверхность ориентирована. Положительным направлением обхода считаем то, для которого репер из касательного вектора и вектора, направленного внутрь контура, задает нужную ориентацию. Будем рассматривать контуры, ограничивающие малые области. По соображениям непрерывности $\triangle\omega$ мало отличается от нуля для малых контуров.

Полезные наблюдения:

1. $\triangle\omega$ не зависит от выбора вектора $\mathbf{v}$ в точке A_0, так как можно обнести всю касательную плоскость как жесткое целое (см. теорему п.10.1)

2. $\triangle\omega$ не зависит и от выбора точки A_0, так как если после первого обхода перенести векторы $\mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{v}}$ дальше, в точку A_0', угол не изменится.

3. При смене направления обхода $\triangle\omega$ заменится на $-\triangle\omega$ (так как $\tilde{x\mathbf{v}}$ перейдет в $\mathbf{v}$). Поэтому раз и навсегда будем рассматриваить только положительные обходы.

4. $\triangle\omega$ не зависит от ориентации поверхности, ибо при смене ориентации хотя и изменяется направление отсччта углов от вектора до вектора, но одновременно изменится на обратное и направление обхода контура.

Рассмотрим для ясности пример: пусть $\mathbf{v}$ касается экватора. Так как экватор и меридианы – геодезические на сфере, то после обнесения $\mathbf{v}$ по экватору на угол $\frac{\pi}{2}$, затем до полюса по меридиану, а затем по другому меридиану в исходную точку, получим вектор $\tilde{\mathbf{v}}$, направленный по меридиану, так что $\triangle\omega = \frac{\pi}{2}$, что есть площадь треугольника, охваченного обходом.

Важное замечание. Поскольку параллельный перенос определяется операцией внутреннего дифференцирования, $\triangle\omega$ не зависит от способа вложения поверхности M в $\mathbb{R}^3$.

Теорема. *Сумма углов геодезического треугольника на M^2 равна* $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \triangle\omega$

Доказательство. В самом деле, пусть α, β, γ – углы геодезического треугольника ABC, $\mathbf{v}$ – единичный вектор, касающийся дуги AB в точке $\mathbf{x}$. При его параллельном обнесении по контуру треугольника (от A к B, затем к C и снова к A), считая, что обход нужной ориентации, получился бы вектор $\tilde{\mathbf{v}}$, с углом от $\mathbf{v}$, равным $\triangle\omega$. Условимся, однако, что в точке B сделан разворот $\mathbf{v}$ на угол $\pi - \beta$, после которого вектор будет касаться BC. Аналогично в точке C сделаем разворот на угол $\pi - \gamma$, затем в точке A – на угол $\pi - \alpha$, в результате чего получим снова $\mathbf{v}$, т.е. к $\triangle\omega$ добавились углы такие, что $\triangle\omega + \pi - \beta + \pi - \gamma + \pi - \alpha = 2\pi$. □

11.4 Вычисление $\triangle\omega$.

Пусть поле $\mathbf{v}(u^1(t), u^2(t))$ – произвольное (гладкое) продолжение вектора $\mathbf{v}$ в точке A_0 на весь контур такое, что $|\mathbf{v}(t)| = 1$, $\mathbf{b}$ – ортогональное к $\mathbf{v}$ векторное поле, $|\mathbf{b}| = 1$, ориентация репера $\mathbf{v}, \mathbf{b}$ положительна.

Теорема. $\triangle\omega = -\oint\langle\frac{D\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{b}\rangle = -\oint\langle\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{b}\rangle$.

Доказательство – следствие формулы п.11.2 для $\triangle\varphi$. Знак минус объясняется тем, что $\triangle\varphi$ – угол от параллельного вектора $\tilde{\mathbf{v}}$ до $\mathbf{v}$, а $\triangle\omega$ – наоборот, угол от $\mathbf{v}$ до $\tilde{\mathbf{v}}$. □

В частности, возьмем в качестве $\mathbf{v}$ в точке A_0 касательный орт $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, в качестве $\mathbf{v}(t)$ – векторы $\boldsymbol{\tau}$ по всему контуру. В этом случае

$$\triangle\omega = -\oint k_g ds.$$

11.5 Интегральная формула угла отклонения. Теорема Гаусса – Бонне

В качестве $\mathbf{v}$ в точке A_0 контура можно взять любой единичный вектор. Пусть u^1, u^2 – криволинейные координаты в области M^2, содержащей контур, $\mathbf{m}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \mathbf{r}_i$. Пусть $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{m}_1}{|\mathbf{m}_1|}$, $\mathbf{b}$ – гладкие векторные поля, получающиеся в результате процесса ортогонализации (и нормирования) полей $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$. Считаем, что $\mathbf{r}(t) = (u^1(t), u^2(t))$ – параметризация контура.

Подчеркнем, что в этом случае поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}$ даны в координатной окрестности, содержащей всю область S, ограниченную контуром.

Теорема. *Для ортонормированной пары векторных полей* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{b}$ *положительной ориентации в содержащей контур карте* (u^1, u^2):

$$\triangle\omega = \int\int_S \left[\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial n^2}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u^1}\right\rangle\right] du^1\, du^2.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt}$$

Следовательно, в силу предыдущего пункта,

$$\triangle\omega = -\oint \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{b}\right\rangle dt = -\oint \left[\left\langle \frac{d\mathbf{v}}{du^1}, \mathbf{b}\right\rangle du^1 + \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{du^2}, \mathbf{b}\right\rangle du^2\right].$$

Применяя формулу Грина к ограниченной кривой области S, получаем

$$\triangle\omega = -\int\int_S \left[\frac{d}{du^1}\left\langle \frac{d\mathbf{v}}{du^2}, \mathbf{b}\right\rangle du^1 du^2 - \frac{d}{du^2}\left\langle \frac{d\mathbf{v}}{du^1}, \mathbf{b}\right\rangle du^1 du^2\right].$$

После выполнения операций дифференцирования $\frac{d}{du^1}$, $\frac{d}{du^2}$ скалярных произведений получим окончательно формулу $\triangle\omega = \int\int_S \left[\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial n^2}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u^1}\right\rangle\right] du^1\, du^2$. □

Подинтегральная функция умножается на якобиан перехода при замене кординатной системы. Умножим и разделим ее на $\sqrt{g}$ ($\sqrt{g}\, du^1\, du^2 = d\sigma$ – элемент площади). Получим:

$$\triangle\omega = \int\int_S \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u^2}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u^1}\right\rangle\right]\sqrt{g}\, du^1\, du^2 = \int\int_S \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u^2}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u^1}\right\rangle\right] d\sigma.$$

Теперь подинтегральная функция не зависит от системы координат, как и площадь. Обозначим ее $K(A)$. Она не зависит также от выбра полей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}$: если при разных выборах мы получим разные функции K_1 K_2, скажем, $K_1 > K_2$ в окрестности некоторой точки, то при интегрировании по этой окрестности мы получим неравные интегралы. Но $\triangle\omega$ имеет инвариантный смысл. □

Эта функция называется *интегральной кривизной* (Гаусс называл ее полной кривизной.)

Рассмотрим теперь контур $\mathbf{r}(u_1(t), u_2(t))$, лежащий в пределах некоторой карты на поверхности, репер $\mathbf{v}, \mathbf{b}$, полученный ортонормализацией координатного репера в этой области, и касательный орт $\boldsymbol{\tau}(t)$ вдоль контура.

При обходе контура вектор $\mathbf{v}$ повернется относительно параллельного перенесения, согласно предыдущему, на угол $\Delta\omega_1 = \int\int_S K\, d\sigma$. Поворот $\boldsymbol{\tau}(t)$ относительно паралельного перенесения равен $\Delta\omega_2 = -\oint_{\gamma=\partial\sigma} k_g\, ds$. Поворот касательного вектора $\boldsymbol{\tau}$ относительно координатного орта $\mathbf{v}$ равен 2π.

Мы можем продеформировать малый контур в пределах координатной области в окружность, для которой этот поворот равен 2π, но при регулярной деформации (с непрерывно меняющимся ненулевым вектором скорости) число оборотов (целое число) не меняется.)

Первый угол равен сумме второго и третьего.

В итоге мы получаем важную формулу

$$\int\int_S K\, d\sigma + \oint_{\gamma=\partial\sigma} k_g\, ds = 2\pi.$$

Она называется *формулой Гаусса – Бонне.*

11.6 Инвариантность гауссовой кривизны. Второе доказательство теоремы Гаусса.

Теорема. В случае двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ функция $K(A)$ совпадает с гауссовой кривизной.

Воспользуемся формулой для $K(A)$, полученной в п.11.5. Вычислим функцию K в каждой точке A. Сдвинем начало координат в точку A и повернем координаты так, что плоскость $\mathbb{O}xy$ станет касательной, а направления $\mathbb{O}x$, $\mathbb{O}y$ – главными. Тогда поверхность можно задать как $z = f(u^1, u^2)$, где мы приняли: $u^1 = x, u^2 = y$. Вычислим функцию $K(A)$ в точке $A = (0, 0)$. Имеем $\mathbf{m}_1 = (1, 0, f'_x)$, $\mathbf{m}_2 = (0, 1, f'_y)$. Поскольку плоскость $\mathbb{O}xy$ касается поверхности, то в этой точке $f'_x = f'_y = 0$ и $\det G = 1$. Теперь выберем векторные поля. Положим

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{m}_1}{|\mathbf{m}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2}}(1, 0, f'_x),$$

а векторное поле $\mathbf{b}$ получим с помощью ортогонализации векторов $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$.

Приступим к вычислению $K(A)$. Поскольку $f'_x(A) = 0$, а $f''_{xx}(A) = k_1$, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^1} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2}}\right)'_x (1, 0, f'_x) + \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2}}(0, 0, f''_{xx}) = (0, 0, f''_{xx}) = (0, 0, k_1).$$

Так как направления $\mathbb{O}x$ и $\mathbb{O}y$ главные, то $f''_{xy} = 0$ (см. п.7.7). Имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0 + \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2}}(0, 0, f''_{xy}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u^1} \right\rangle = 0.$$

Остается найти третью координату вектора $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y}$. Имеем $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{m}_1 + \beta \mathbf{m}_2$, где α, β – функции, зависящие от точки. Имеем

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} = \alpha'_y \mathbf{m}_1 + \alpha \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial y} + \beta'_y \mathbf{m}_2 + \beta \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial y}.$$

Нас интересует третья координата вектора, но третьи координаты $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ нулевые, а $\frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial y} = 0$, так как $f_{xy} = 0$ (координатные оси главные). Значит, $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y}(A) = \beta\,(*, *, f''_{yy})) = \beta\,(*, *, k_2)$, и нам надо найти коэффициент β в точке A. Но в этой точке $\mathbf{b} = \mathbf{m}_2$ и $\beta(A) = 1$. В результате $K(A) = k_1\, k_2 = K$.

11.7 Следствия.

1. Гауссова кривизна K – внутренний инвариант поверхности M (т.е. не зависит от способа вложения M в пространство), хотя главные кривизны k_1, k_2 этим свойством не обладают. Для поверхностей, изометричных плоскости (и только для них, см. п. 8.5), $K = 0$.

2. Для поверхностей, у которых $K = K(A) = \text{const}$, $\triangle\omega = KS$, где S – площадь внутри контура.

3. На сфере радиуса 1 $K = 1$, поэтому сумма углов геодезического треугольника есть $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + S$. Кривизна плоскости Лобачевского в каждой точке -1, и на ней $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi - S$

4. При обходе по замкнутому контуру на сфере радиуса 1 в силу формулы Гаусса-Бонне касательный вектор повернется на угол $\triangle\omega = \oint k_g ds = 2\pi - S$. Чем больше радиус обхода, тем меньше $\triangle\omega$ На плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ при аналогичных обходах $\triangle\omega = \oint k_g ds = 2\pi + S$. Чем больше радиус обхода, тем больше окажется вращение касательного вектора за один обход.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

Дополнения.

1. Отображения постоянного ранга

Задача. Пусть $f : H \to \mathbb{R}^N$ – гладкое отображение постоянного ранга r области $H \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что образ малой окрестности каждой точки $x \in H$ — гладкое r-мерное подмногообразие $\mathbb{R}^N$.

[*Решение.* Фиксируем точку $\mathbf{x}_0$ и с помощью линейной замены координат добьемся, чтобы матрица Якоби в точке $\mathbf{x}_0$ имела стандартный вид: единичная $r \times r$-матрица в левом верхнем углу и нулевые элементы вне этой матрицы. Этим определено разложение в прямые произведения координатных плоскостей прообраза $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r_1 \oplus \mathbb{R}^{n-r}$ и образа $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^r_2 \oplus \mathbb{R}^{N-r}$. В этих координатах отображение f записывается в форме $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}),\, \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-r}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, где $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^r_2$, $\mathbf{v} = \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N-r}$ причем $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$, $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$.

В малой окрестности $\mathbf{x}_0$ отображение $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{u}$ имеет ранг r, причем невырожден минор $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}}\right)$. Значит, при каждом $\mathbf{q}$ близком к $\mathbf{q}_0$ отображение $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})$ является диффеоморфизмом малой окрестности P_q точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}$ в плоскости $\mathbb{R}^r_1 \times \mathbf{q}$ на окрестность U точки $\mathbf{u}_0$ в $\mathbb{R}^r_2$. Окрестность U можно взять одну и ту же для всех $\mathbf{q}$ из малой окрестности Q точки q_0, т.к. диффеоморфизм $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})$ непрерывно зависит от $\mathbf{q}$. Мы можем считать, что этот диффеоморфизм отображает P_q на U для каждого $\mathbf{q}$. Говоря иначе, имеется оокрестность W точки $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$, пересечение которой с каждой плоскостью $\mathbf{q} = const$ для $\mathbf{q}$ из некоторой окрестности V есть область P_q этой плоскости, которая диффеоморфно отображается на U. Это, очевидно, означает, что $W = V \times U$, что позволяет ввести в W криволинейные координаты $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{q}})$ преобразованием $\bar{\mathbf{u}} = \varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}), \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$ с ненулевым якобианом. В этой системе координат отображение $f(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{q}}) = f(\varphi_q(\mathbf{p}), \mathbf{q}) = (\varphi(\varphi_q^{-1}(\mathbf{u}), \mathbf{q})\, \psi(\mathbf{p},\mathbf{q})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ будет иметь матрицу Якоби, в которой левый верхний угол есть единичная $r \times r$-матрица, а элементы справа от этой матрицы нулевые.

В таком случае будут нулевыми и производные $\mathbf{v}$ по $\mathbf{q}$, иначе ранг матрицы Якоби отображения f был бы больше r. Но это означает, что отображение f в системе $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{q}})$ не зависит от $\mathbf{q}$. (Строго говоря, использование теоремы Лагранжа здесь требует, чтобы окрестность была выпуклой, что без труда можно получить.) В частности, координата v образа однозначно определяется координатой u, т.е. образ отображения f локально представляется графиком отображения области U в координатную плоскость $\mathbb{R}^{N-r}$ и, следовательно, является гладким подмногообразием. □

Контрольный вопрос. Привести с помощью замены координат в образе отображение к каноническому линейному виду (как указано вначале) в целой окрестности точки A.]

2. Третье доказательство теоремы Гаусса. Второе доказательство теоремы Гаусса можно сделать более геометрическим и более элементарным (без ссылки на теорему Грина и вычислений пункта 11.6). Именно, мы знаем, что гауссова кривизна есть предел отношений площадей малых областей на сфере и на поверхности. Площадь области на поверхности выражается с помощью первой квадратичной формы как интеграл от квадратного корня из ее определителя. Что касается площади области на (единичной) сфере, то элементарными рассуждениями показывается, что она равна углу поворота касательной плоскости при параллельном переносе ее по граничной кривой этой области. Но этот угол совпадает с углом поворота касательной плоскости на поверхности при параллельном переносе по границе соответствующей области. Этот угол также выражается с помощью первой квадратичной формы.

Задача 1. Пусть область $U \subset M^2 \subset \mathbb{R}^3$ диффеоморфно отображается при сферическом отображении на область V единичной сферы, и ее граничная кривая $\boldsymbol{\xi}(t)$ диффеоморфно отображается на граничную кривую $\boldsymbol{\eta}(t) = n(\boldsymbol{\xi}(t))$ области V (т.е. кривые имеют тот же параметр в соответствующих точках). Пусть $\mathbf{u}(t)$ касательное векторное поле на M^2 в точках $\boldsymbol{\xi}(t)$ и $\mathbf{v} = dn(\mathbf{u}(t))$ образ этого поля в точках $\boldsymbol{\eta}(t)$ при дифференциале сферического отображения.

Тогда, если поле $\mathbf{v}(t)$ параллельно, то и поле $\mathbf{u}(t)$ параллельно.

Элементаное доказательство того, что параллельный перенос по замкнутой кривой на единичной сфере дает площадь охваченной этой кривой области, см. Норден, стр.233-235. Начальным шагом служит следующая задача:

Задача 2. Докажите, что параллельный перенос вектора по малому геодезическому треугольнику на единичной сфере (его стороны – дуги больших кругов) дает сферическую площадь этого треугольника.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

Учебная литература:

1. А.П. Норден. Краткий курс дифференциальной геометрии.
2. А.С. Мищенко, А.Т.Фоменко. Курс дифференциальной геометрии и топологии.
3.С.П. Новиков, И.А. Тайманов. Современные геометрические структуры и поля.

Кафедральные лекции по дифференциальной геометрии (на сайте кафедры):

1. Е.Г. Скляренко.
2. В.М. Мануйлов
3. И. А. Дынников