

# INHALT

## I. DIFFERENTIALRECHNUNG IN BANACHRÄUMEN

1. <i>Wiederholung von Begriffen über Banachräume und stetige lineare Abbildungen</i> . . . . .	11
1.1. Normierte Vektorräume . . . . .	11
1.2. Beispiele von Banachräumen . . . . .	13
1.3. Normal konvergente Reihen in Banachräumen . . .	16
1.4. Stetige lineare Abbildungen . . . . .	17
1.5. Zusammensetzung stetiger linearer Abbildungen .	20
1.6. Isomorphismen normierter Vektorräume; äquivalente Normen auf einem normierten Vektorraum .	21
1.7. Beispiele von Räumen $\mathcal{L}(E; F)$ . . . . .	24
1.8. Stetige multilineare Abbildungen . . . . .	30
1.9. Die natürliche Isometrie $\mathcal{L}(E, F; G) \approx \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$	33
2. <i>Differenzierbare Abbildungen</i> . . . . .	34
2.1. Definition einer differenzierbaren Abbildung . . .	34
2.2. Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion	39
2.3. Linearität der Ableitung . . . . .	40
2.4. Ableitungen spezieller Funktionen . . . . .	
2.5. Funktionen mit Werten in einem Produkt von Banachräumen . . . . .	46
2.6. Der Fall einer offenen Menge $U$ in einem Produkt von Banachräumen . . . . .	49
2.7. Kombination der in 2.5 und 2.6 behandelten Fälle	51
2.8. Schlußbemerkung: Vergleich zwischen R-Differenzierbarkeit und C-Differenzierbarkeit . . . . .	52

3. Satz vom endlichen Zuwachs; Anwendungen . . . . .	54
3.1. Wortlaut des Hauptsatzes . . . . .	54
3.2. Spezialfälle des Hauptsatzes . . . . .	57
3.3. Satz vom endlichen Zuwachs, wenn die Variable in einem Banachraum läuft . . . . .	58
3.4. Nochmals der Satz vom endlichen Zuwachs . . . . .	63
3.5. Eine Liste von Übungsaufgaben . . . . .	64
3.6. Erste Anwendung des Satzes vom endlichen Zuwachs: Konvergenz einer Folge differenzierbarer Funktionen . . . . .	65
3.7. Zweite Anwendung des Satzes vom endlichen Zuwachs: eine Beziehung zwischen partieller Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	68
3.8. Dritte Anwendung des Satzes vom endlichen Zuwachs: Begriff einer strikt differenzierbaren Funktion . . . . .	70
4. Lokale Umkehrbarkeit einer Abbildung von der Klasse $C^1$ . Satz von den impliziten Funktionen . . . . .	72
4.1. Diffeomorphismen der Klasse $C^1$ . . . . .	72
4.2. Der Satz von der lokalen Umkehrbarkeit . . . . .	75
4.3. Beweis des Satzes von der lokalen Umkehrbarkeit: erste Reduktion . . . . .	76
4.4. Beweis von Proposition 4.3.1 . . . . .	77
4.5. Beweis von Satz 4.4.1 . . . . .	78
4.6. Satz von der lokalen Umkehrbarkeit im endlich- dimensionalen Fall . . . . .	80
4.7. Satz von den impliziten Funktionen . . . . .	81
5. Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	85
5.1. Die zweite 'Ableitung . . . . .	85
5.2. Der Fall eines Produktes $E = E_1 \times \dots \times E_n$ . . . . .	89
5.3. Höhere Ableitungen . . . . .	92
5.4. Beispiele $n$ -mal differenzierbarer Funktionen . . . . .	95
5.5. Taylorsche Formel: ein Spezialfall . . . . .	99
5.6. Taylorsche Formel: der allgemeine Fall . . . . .	101

6. Polynome .....	105
6.1. Homogene Polynome vom Grade $n$ .....	105
6.2. Nicht notwendig homogene Polynome .....	108
6.3. Die höheren „Differenzen“ eines Polynoms .....	111
6.4. Der Fall normierter Vektorräume $E$ und $F$ .....	115
7. Endliche Entwicklungen .....	117
7.1. Definitionen .....	117
7.2. Der Fall einer im Punkte $a$ $n$ -mal differenzierbaren Funktion $f$ .....	121
7.3. Operationen mit endlichen Entwicklungen .....	122
7.4. Komposition von zwei endlichen Entwicklungen ..	123
7.5. Berechnung der höheren Ableitungen einer zusammengesetzten Funktion .....	126
8. Relative Maxima und Minima .....	127
8.1. Erste notwendige Bedingung für ein relatives Minimum .....	127
8.2. Bedingungen zweiter Ordnung für ein relatives Minimum .....	129
8.3. Eine hinreichende Bedingung für ein starkes relatives Minimum .....	131
ÜBUNGSAUFGABEN .....	135

## II. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. Definitionen und fundamentale Sätze .....	145
1.1. Differentialgleichungen erster Ordnung .....	145
1.2. Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung .....	147
1.3. Näherungslösungen .....	148
1.4. Beispiel: lineare Differentialgleichungen .....	153
1.5. Der Fall mit Lipschitzbedingung: das Fundamentallemma .....	155

1.6.	Anwendung des Fundamentallemmas: Eindeutigkeitsatz . . . . .	159
1.7.	Existenzsatz, wenn eine Lipschitzbedingung erfüllt ist . . . . .	159
1.8.	Der Fall einer Funktion $f$ mit lokaler Lipschitzbedingung . . . . .	161
1.9.	Der Fall einer linearen Differentialgleichung . . .	164
1.10.	Abhängigkeit vom Anfangswert . . . . .	165
1.11.	Der Fall einer von einem Parameter abhängigen Differentialgleichung . . . . .	168
2.	<i>Lineare Differentialgleichungen</i> . . . . .	170
2.1.	Die Gestalt der allgemeinen Lösung . . . . .	170
2.2.	Studium der homogenen linearen Differentialgleichung . . . . .	170
2.3.	Der Fall eines endlich-dimensionalen Raumes $E$ .	173
2.4.	Die inhomogene lineare Differentialgleichung . . .	176
2.5.	Fall einer linearen homogenen Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung . . . . .	177
2.6.	Inhomogene lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung . . . . .	181
2.7.	Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	183
2.8.	Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: der Fall eines endlich-dimensionalen Raumes $E$ . . . . .	185
2.9.	Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	188
3.	<i>Verschiedene Fragestellungen</i> . . . . .	190
3.1.	Einparametrische Transformationsgruppen . . . . .	190
3.2.	Keime einparametrischer Gruppen . . . . .	192
3.3.	Differenzierbarkeitsfragen . . . . .	194
3.4.	Differenzierbarkeitsfragen (Fortsetzung): Differenzierbarkeit nach dem Anfangswert $u$ . . . . .	195
3.5.	Beweis von Satz 3.4.2 . . . . .	199

3.6.	Differenzierbarkeit nach einem Parameter, von dem die Differentialgleichung abhängt . . . . .	201
3.7.	Differenzierbarkeit höherer Ordnung . . . . .	203
3.8.	Der Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung . . . . .	204
3.9.	Differentialgleichungen, die nicht die Variable enthalten . . . . .	206
3.10.	„Implizite“ Differentialgleichungen . . . . .	210
4.	<i>Erste Integrale und lineare partielle Differentialgleichungen</i> . . . . .	215
4.1.	Definition des ersten Integrales eines Differentialgleichungssystems . . . . .	215
4.2.	Existenz von Vorintegralen . . . . .	218
4.3.	Inhomogene, lineare partielle Differentialgleichungen . . . . .	220
4.4.	Beispiele . . . . .	222
	ÜBUNGSAUFGABEN . . . . .	224
	INDEX . . . . .	233