ISSN 0029-3865
BR0342510

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro

Notas de Física

CBPF-NF-068/01
dezembro 2001

Estados Coerentes em Mecânica Quântica

(Coherent States in Quantum Mechanics)

R. de Lima Rodrigues, Damásio Fernandes Júnior & Sheyla Marques Batista

MCT - Ministério da Ciência e Tecnologia

CBPF-NF-068/01

ESTADOS COERENTES EM MECÂNICA QUÂNTICA

(Coherent States in Quantum Mechanics)

*R. de Lima Rodrigues**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rua Dr. Xavier Sigaud, 150, CEP 22290-180, Rio de Janeiro-RJ, Brazil

Damásio Fernandes Júnior e Sheyla Marques Batista

Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande-PB

RESUMO

Apresentamos uma revisão sobre os Estados Coerentes em mecânica quântica não-relativística, analisando os osciladores quânticos nos estados coerentes. Os Estados Coerentes obtidos via atuação de um operador deslocamento sobre a função de onda do estado fundamental do oscilador e a conexão com a Óptica Quântica que foram implementadas por Glauber têm sido também consideradas. Uma possível generalização para a construção de novos Estados Coerentes é indicada.

ABSTRACT

We present a review work on the coherent states in non-relativistic quantum mechanics analysing the quantum oscillators in the coherent states. The coherent states obtained via a displacement operator that act on the wave function of ground state of the oscillator and the connection with Quantum Optics which were implementted by Glauber have also been considered. A possible generalization to the construction of new coherent states it is point out.

Key-words: Estados coerentes; Óptica quântica; Osciladores quânticos.

*Permanente endereço: Departamento de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, Cajazeiras – PB, 58.900-000 - Brazil-E-mail:reafaelr@cbpf.br ou rafael@cfp.ufpb.br

I. INTRODUÇÃO

Logo após Schrödinger postular a equação diferencial que governa a evolução no tempo da onda de matéria de de Broglie, culminando com o surgimento da mecânica quântica não-relativística em 1926 [1], ele investigou a possibilidade de se construir autofunções quânticas, para um oscilador harmônico simples, com as seguintes características: estados quânticos descritos por função de onda gaussiana geral, com a largura da gaussiana que descreve o estado fundamental, que tivessem momento linear e energia arbitrária, seguissem a trajetória de uma partícula clássica no potencial e não mudassem sua forma com o tempo. Tais estados foram denominados de estados quasi-clássicos devido ao fato de possuírem uma analogia clássica. Como as autofunções que descrevem esses estados são gaussianos, eles possuem incerteza mínima, conforme a relação de incerteza de Heisenberg. Quando se considera os Estados Coerentes na descrição de Schrödinger, vê-se que a probabilidade de encontrar o oscilador numa posição tem de fato um significado especial: ela é uma função gaussiana que depende do tempo e da posição, centrada num ponto que oscila de forma análoga à posição horária do oscilador harmônico simples em mecânica clássica [2].

A construção dessas autofunções na época serviu para desfazer a objeção de Lorentz em usar pacotes de ondas para representar partículas, porque os pacotes podiam se alargar com o tempo.

Com o surgimento do laser em dezembro de 1960, se iniciou uma série de trabalhos sobre a interação da matéria com o campo eletromagnético. Klauder [3] usou esses estados quasi-clássicos para mostrar a equivalência entre as descrições da mecânica semiclássica e da mecânica quântica de feixes de luz com estatística arbitrária, sem considerar os efeitos não-lineares. Por outro lado, Glauber (1963) [4,5] tinha o objetivo principal de mostrar uma descrição consistente para a teoria quântica da coerência óptica. Em outros artigos, Glauber consolidou a idéia de que os autoestados quânticos de um campo de radiação são exatamente os autoestados do operador de aniquilação dos quanta do campo eletromagnético (fótons). Ele mostrou que essas autofunções podem ser obtidas a partir da ação de um operador de deslocamento sobre o vácuo do campo eletromagnético livre. Mostrou também que essas duas definições são equivalentes aos estados de incerteza mínima descobertos por Schrödinger. Esses estados quânticos foram denominados pela primeira vez, por Glauber, de Estados Coerentes. Os Estados Coerentes possuem as duas importantes propriedades: não-ortogonalidade e completeza.

Esses trabalhos abriram uma nova área de pesquisa denominada de Óptica Quântica. Veja por exemplo os livros textos em [6,7] e uma coletânea de trabalhos sobre as propriedades e aplicações dos Estados Coerentes publicados até 1985 [8].

Estados coerentes são ingredientes bastante familiares a Físicos da área de Óptica Quântica, sendo suas ferramentas de trabalho do dia-a-dia. Este trabalho tem como objetivo principal levar os pesquisadores de outras áreas e o leitor que estudou mecânica quântica a se inteirarem da suma importância dos Estados Coerentes em Óptica Quântica e apontar possíveis generalizações. Excelentes trabalhos com abordagens diferentes sobre os Estados Coerentes para o oscilador quântico, dando ênfase às respectivas aplicações em Óptica Quântica, podem ser encontrados nos mini-cursos sobre "Teoria Quântica do Laser" nas Escolas de Verão Jorge André Swieca, seção de Óptica Quântica e Óptica Não-Linear, citando as referências [9–11]. Uma linha de pesquisa que tem sido destacada nestes eventos é o desenvolvimento de técnicas para controlar o movimento de átomos em laboratórios brasileiros, bem como em vários laboratórios em outros paises. Utilizando a pressão de radiação laser os átomos frios são aprisionados a temperaturas muito baixas, possibilitando o estudo de vários efeitos importantes [12].

Recentemente, foi elaborado um trabalho de revisão sobre a real necessidade de uma teoria quântica para a luz, destacando os efeitos não clássicos surgidos a partir da observação, em 1977, do efeito anti-agrupamento de fótons, listando muitas referências [13].

Este trabalho foi organizado da seguinte maneira: na seção II, construímos os Estados Coerentes como sendo as autofunções do operador de abaixamento dos níveis de energia do oscilador; na seção III, analisamos os Estados Coerentes obtidos via um operador deslocamento atuando sobre a função de onda do estado fundamental do oscilador; na seção IV, é mostrado que os Estados Coerentes são estados de incerteza mínima; na seção V, consideramos a interpretação física dos Estados Coerentes, abordando o procedimento de quantização canônica do campo eletromagnético. A conclusão é apresentada na seção VI, inclusive a análise de uma generalização para a construção de novos Estados Coerentes.

II. PROPRIEDADES DOS ESTADOS COERENTES

Nesta seção, abordamos algumas propriedades dos Estados Coerentes (EC) para o Oscilador Harmônico Simples (OHS). Como uma superposição das autofunções do oscilador harmônico simples, eles são definidos como sendo as autofunções do operador de abaixamento do OHS, ou seja, os EC satisfazem a equação de autovalor do operador de abaixamento dos níveis de energia do OHS. Utilizando a notação de bra-ket de Dirac e o sistema de unidades atômicas ($\hbar = \omega = m = 1$), obtém-se as seguintes propriedades do operador hamiltoniano que governa o OHS, na representação dos estados de números $|n>$:

$$H \mid n >= E_n \mid n >, \quad E_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

$$[a^-, a^+]_- = 1, \quad a^+ = (a^-)^\dagger, \tag{2}$$

$$[H, a^\pm]_- = \pm a^\pm, \tag{3}$$

onde o operador hamiltoniano pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}[a^-, a^+]_+ \\ &= \frac{1}{2}(a^+a^- + a^-a^+) = a^+a^- + \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Os operadores de abaixamento e levantamento dos níveis de energia do OHS, respectivamente, a^- e a^+ geram os autoestados de número, pois atuando-os sobre um ket $|n>$ obtém-se outro ket $|n \pm 1>$:

$$a^- \mid n >= \sqrt{n} \mid n - 1 >, \tag{5}$$

$$a^+ \mid n >= \sqrt{n+1} \mid n + 1 > . \tag{6}$$

Essas equações constituem a álgebra de Heisenberg-Weyl, as quais são encontradas nos livros textos como sendo denominadas de métodos de fatorização ou método de operador em mecânica quântica [2,21–23]. Os operadores escada $a^\pm$, na representação x (ou representação de coordenada), são definidos através de uma combinação linear dos operadores de momento linear e posição e, por sua vez, podem ser escritos em termos da parte espacial da função de onda do estado fundamental do OHS. De fato, o operador de abaixamento na representação de coordenada torna-se:

$$
\begin{aligned}
a^- &\equiv \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{i}{m\omega}\hat{p}_x + \hat{x}\right) \\
&= \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left[\frac{i}{m\omega}(-i\hbar\frac{d}{dx}) + x\right] \\
&= \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx} + x\right) \\
&= \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}\ell n\psi^{(0)}(x)\right), \quad a^+ = (a^-)^\dagger,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

onde $\beta^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$ e $\psi^{(0)}(x) =< x|0 >$ é a parte espacial da função de onda que descreve o estado fundamental do OHS, na representação x, a qual é proporcional a $\exp(-\frac{(\beta x)^2}{2})$. O operador hamiltoniano toma a seguinte forma na representação de coordenadas:

$$
H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{8}
$$

Note que, de acordo com a última expressão para a^-, podemos construir operadores de abaixamento e levantamento para outros sistemas quânticos, cujas relações de comutação não serão as mesmas do OHS. Retomaremos esta análise na conclusão.

Os Estados Coerentes são definidos pela seguinte equação de autovalor:

$$
a^- \mid \alpha >= \alpha \mid \alpha >, \tag{9}
$$

onde o autovalor α pode ser um número complexo, pois o operador de abaixamento é não hermitiano e, por sua vez, não pode representar uma medida física[†].

O produto escalar de duas autofunções do OHS resulta em um delta de Kronecker, ou seja, o bra-ket $< m|n >= \delta_{mn}$ é zero, quando m for diferente de n, ou é 1 quando m for igual a n, então os kets $|n >$ podem ser ortogonais ou ortonormais e, por sua vez, o conjunto $\{|n >\}$ é completo. Portanto, pelo teorema da expansão, os EC podem ser representados como uma combinação linear (superposição) dos autokets do OHS, a saber,

$$
\mid \alpha >= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mid n > . \tag{10}
$$

[†]Os observáveis em física quântica são representados por operadores lineares e hermitianos. Um operador hermitiano possui autovalores reais e autofunções ortogonais.

Neste caso, o lado esquerdo da equação de autovalor $a^- \mid \alpha >= \alpha \mid \alpha >$ pode ser escrito na forma abaixo:

$$
\begin{aligned}
a^- \mid \alpha > &= a^- \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mid n > \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^- \mid n > \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} \mid n-1 > .
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Manipulando o índice dessa última equação ($n \rightarrow m+1$), podemos ainda escrevê-la como

$$
\begin{aligned}
a^- \mid \alpha > &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+1} \sqrt{m+1} \mid m > \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} \mid n > .
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Usando a superposição de autokets de número em (10), e comparando as equações (9) e (12) encontramos a seguinte relação de recorrência dada por:

$$
c_{n+1} = \frac{\alpha c_n}{\sqrt{n+1}}, \tag{13}
$$

onde, por indução, podemos expressar c_n em termos de c_0, isto é;

$$
c_n = \frac{\alpha^n c_0}{\sqrt{n!}}. \tag{14}
$$

Portanto, os autokets do operador de abaixamento do OHS, $\mid \alpha >$, são representados segundo a expressão abaixo:

$$
\mid \alpha >= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mid n > . \tag{15}
$$

Aplicando agora a condição de normalização $< \alpha|\alpha >= 1$, e lembrando-se que os autokets de número $\mid n >$ formam um conjunto ortonormal ($< n \mid n >= 1$), obtém-se o valor da constante c_0 que será dada por:

$$
< \alpha \mid \alpha >= 1 \Rightarrow c_0 = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2). \tag{16}
$$

Substituindo, finalmente, o valor de c_0 na equação (15), obtemos os EC normalizados:

$$| \alpha >= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} | n > . \tag{17}$$

O bra ($< \alpha |$) de um EC é dado por:

$$| \alpha >^*= exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n'}}{\sqrt{n'!}} < n' | . \tag{18}$$

Uma propriedade importante para os Estados Coerentes $| \alpha >$ é que eles são não-ortogonais, ou seja, o produto escalar entre dois EC é não-nulo:

$$|< \alpha | \alpha' >|^2= \exp(-|\alpha - \alpha'|^2). \tag{19}$$

Como seria esperado, pois eles são autokets de um operador não-hermitiano.

Os EC são um conjunto supercompleto, pois é possível expressar qualquer autoket de um estado quântico do OHS em termos dos EC, inclusive dele próprio. Agora faremos a demonstração da propriedade de completeza. De fato, seja $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, então temos:

$$\int |\alpha >< \alpha|d^2\alpha = \int_0^{\infty} |\alpha|d|\alpha| \int_0^{2\pi} d\phi|\alpha >< \alpha|.$$

Usando a expansão (17), obtemos

$$\int |\alpha >< \alpha|d^2\alpha = \sum_{n,n'} \int_0^{\infty} |\alpha|d|\alpha| \frac{|\alpha|^{n+n'}}{\sqrt{n!n'!}} e^{-|\alpha|^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(n-n')}|n >< n'|$$

$$= 2\pi \sum_n \int_0^{\infty} d|\alpha|e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n+1}}{n!}|n >< n| = \pi \sum_n |n >< n| = \pi,$$

e, portanto,

$$\frac{1}{\pi} \int | \alpha >< \alpha | d^2\alpha = 1. \tag{20}$$

Vimos que para deduzirmos esta relação de completeza dos EC utilizamos (a correspondente relação dos autokets de número) $\sum_{n=0}^{n=\infty} |n >< n| = \mathbf{1}$. Devemos dizer também que usamos o delta de Kronecker

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(n-n')} = \delta_{n,n'} \tag{21}$$

para eliminar um somatório.

III. ESTADOS COERENTES VIA OPERADOR DESLOCAMENTO

Utilizando a equação (3) com sinal positivo, vemos que o n-ésimo autoestado excitado do OHS é obtido a partir do autoestado fundamental atuando o operador de levantamento n-vezes, a saber:

$$| n >= \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n \mid 0 > . \tag{22}$$

Substituindo essa última expressão na equação (17) obtemos um resultado genérico para $| \alpha >$:

$$| \alpha >= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^+)^n}{n!} \mid 0 >= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \exp(\alpha a^+) \mid 0 > . \tag{23}$$

Este operador atuando sobre o autoestado fundamental é um operador deslocamento e unitário. De fato, utilizando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, para dois operadores cujo comutador é um número ($[A, B]$ = constante),

$$\exp(-\frac{1}{2}[A, B]) \exp(A) \exp(B) = \exp(A + B),$$

obtemos:

$$| \alpha >= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+} \mid 0 >= e^{\alpha a^+ - \alpha^* a^-} \mid 0 >\equiv D(\alpha) \mid 0 > . \tag{24}$$

Neste caso, os Estados Coerentes para o OHS são definidos como sendo aqueles autoestados obtidos pela atuação de um operador deslocamento sobre o autoestado fundamental $| \alpha >\equiv D(\alpha) \mid 0 >$, onde α pode assumir valores complexos.

As propriedades do operador $D(\alpha)$ são as seguintes:

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a^-), \quad D^{-1}(\alpha) = D^\dagger(\alpha) \tag{25}$$

$$D^{-1}(\alpha) a^- D(\alpha) = a^- + \alpha \tag{26}$$

$$D^{-1}(\alpha) a^+ D(\alpha) = a^+ + \alpha^* . \tag{27}$$

Por isso $D(\alpha)$ é chamado de operador deslocamento. Note que até aqui vimos duas definições equivalentes para os Estados Coerentes.

IV. ESTADOS COERENTES COMO ESTADOS QUASI-CLÁSSICOS

Na representação de coordenada (denominada também de representação de Schrödinger) os Estados Coerentes são funções gaussianas [2] e, consequentemente, satisfazem a relação de incerteza mínima de Heisenberg. Pois, todos os estados quânticos descritos por funções de onda gaussianas satisfazem à incerteza mínima:

$$\Delta x = \Delta p_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2} = \frac{1}{2}, \quad \hbar = 1 \tag{28}$$

onde as variâncias na posição e no momento linear, Δx e Δp_x, são calculadas nos Estados Coerentes, segundo as expressões abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta x &= < x^2 >_{|\alpha>} - < x >^2_{|\alpha>} \\ \Delta p_x &= < p_x^2 >_{|\alpha>} - < p_x >^2_{|\alpha>} . \end{aligned} \tag{29}$$

Para se calcular os valores esperados de x^2 nos estados coerentes, utilizando as suas definicões em termos dos operadores escada, obtém-se,

$$\begin{aligned} < x^2 > &= \beta^2 < (a^- + a^+)^2 > = \beta^2\{< (a^-)^2 > + < (a^+)^2 > +2 < a^+a^- > -1\} \\ &= \beta^2\{\alpha^2 + (\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 - 1\} = \beta^2\{4Re(\alpha)^2 - 1\}. \end{aligned} \tag{30}$$

É importante observar que apesar das médias de x e p_x sobre os autokets do operador de número serem nulas,

$$< x >_{|n>} = < n \mid \hat{x} \mid n > = < p_x >_{|n>} = 0, \tag{31}$$

para os Estados Coerentes temos que $< x >_{|\alpha>}$ é proporcional a uma função cosseno, que é o análogo clássico da função periódica do OHS:

$$< x(t) >_{|\alpha>} = x_0 \alpha e^{-i\omega t} + x_0 \alpha^* e^{i\omega t} = C \cos(\omega t - \phi), \tag{32}$$

onde a constante C é dada por

$$C = 2x_0\sqrt{\alpha\alpha^*} = 2x_0 \mid \alpha|. \tag{33}$$

A equação (32) nos indica que o valor esperado de $x(t)$ nos Estados Coerentes $\mid \alpha >$ é proporcional a uma função cosseno, assim como na Mecânica Clássica, só que com uma amplitude C diferente do caso clássico. C é proporcional ao módulo do autovalor complexo do operador de abaixamento a^-.

O operador de número N, tem um significado importante quando calculamos o valor esperado do número de quanta nos Estados Coerentes:

$$< N >_{|\alpha>} = < \alpha|N|\alpha > = < \alpha \mid a^+ a^- \mid \alpha > = < \alpha \mid \alpha^* \alpha \mid \alpha > = |\alpha|^2, \tag{34}$$

ou seja, $< N >_{|\alpha>}$ é o módulo quadrado de α, partindo do princípio de que os Estados Coerentes são normalizados ($< \alpha \mid \alpha > = 1$). Note que usamos a definição de estados coerentes canônicos ($a^- \mid \alpha > = \alpha \mid \alpha >$) e o fato de que $a^\pm$ são operadores mutuamente adjuntos ($(a^-)^\dagger = a^+, \quad (a^+)^\dagger = a^-$).

A probabilidade de encontrar o oscilador no n-ésimo nível nos estados coerentes $\mid \alpha >$ é

$$P_n(\alpha) = \mid < n|\alpha > \mid^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = \exp(- < n >_{|\alpha>}) \frac{< n >^n_{|\alpha>}}{n!}. \tag{35}$$

Essa distribuição de probabilidade é uma distribuição de Poisson que também expressa a distribuição do número de quantum nas ondas clássicas.

V. INTERPRETAÇÃO FÍSICA PARA OS ESTADOS COERENTES

Iniciamos esta seção mostrando que a hamiltoniana do campo de radiação livre é formalmente análoga à soma de um número infinito de hamiltonianos do tipo-OHS, de modo que podemos aplicar os resultados da seção anterior para a quantização do campo.

Usando as equações de Maxwell, para os campos elétrico ($\vec{E}$) e magnético ($\vec{B}$) na presença de uma densidade de carga e uma densidade de corrente, no vácuo, obtém-se:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{36}$$

onde o operador nabla em coordenadas cartesianas (x, y, z) é dado por $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$, ϕ e $\vec{A}$ são, respectivamente, denominados

de potencial escalar e potencial vetor (ou campo eletromagnético).

O campo eletromagnético é dito estar no gauge (calibre) de Coulomb quando o potencial vetor satisfaz a seguinte condição:

$$\vec{\nabla} . \vec{A} = 0. \tag{37}$$

Considerando o campo eletromagnético numa região do espaço em que a componente transversal da densidade de corrente $\vec{J}$ é nula,

$$\vec{J}_T = \vec{0}, \tag{38}$$

obtém-se a seguinte equação de onda:

$$-\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{39}$$

onde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$=3x$10^8\frac{m}{s}$, é a velocidade da luz no vácuo. Esta expressão nos indica que a luz é de natureza puramente eletromagnética (sendo μ_0 e ϵ_0, respectivamente, a constante de permeabilidade magnética e a constante de permessividade elétrica, ambas no vácuo). Lembre-se que estamos considerando o campo em cada região do espaço como sendo livre.

Agora, prepararemos o cenário para usar o procedimento de quantização canônica. A equação do campo eletromagnético quântico resulta da substituição do potencial vetor clássico $\vec{A}$ por um operador da mecânica quântica $\hat{\vec{A}}$. A manipulação final para ser executada no campo clássico leva a uma forma das equações clássicas em que a transição para a quantização do campo livre é direta.

Vamos trabalhar com uma região cúbica do espaço de lado L. Consideramos a cavidade meramente como uma região do espaço, sem quaisquer fronteiras reais. E também trabalhamos com o potencial vetor em lugar do campo elétrico ou campo magnético.

A partir de todas essas considerações, o potencial vetor numa cavidade (caixa cúbica) pode ser expandido em uma série de Fourier, cuja solução real ($\vec{A} = \vec{A}^*$) satisfaz a condição periódica dentro da caixa, a saber:

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}}\{\vec{A}_{\vec{k}}(t)\exp(i\vec{k}\,.\,\vec{r}) + \vec{A}^*_{\vec{k}}(t)\exp(-i\vec{k}\,.\,\vec{r})\}, \tag{40}$$

onde as componentes do vetor número de onda (que indica a propagação de onda) $\vec{k}$ tornam-se:

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \tag{41}$$

com

$$n_x, n_y, n_z = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots . \tag{42}$$

A condição do gauge de Coulomb (37) é satisfeita se

$$\vec{k}\,.\,\vec{A}_{\vec{k}}(t)=\vec{k}\,.\,\vec{A}^{*}_{\vec{k}}(t)=0, \tag{43}$$

ou seja, as componentes de Fourier são perpendiculares ao vetor número de onda $\vec{k}$ (dizemos que $\vec{A}_{\vec{k}}(t)$ é transverso). Consequentemente, há duas direções independentes de $\vec{A}_{\vec{k}}(t)$, cujas componentes são rotuladas por $A_{\vec{k}\alpha}(\alpha=1,2)$ para cada $\vec{k}$. As diferentes componentes de Fourier para $\vec{A}$ são independentes e satisfazem separadamente a equação de campo (39). Portanto,

$$k^2\vec{A}_{\vec{k}}(t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_{\vec{k}}(t)}{\partial t^2}=0, \tag{44}$$

com

$$\vec{A}_{\vec{k}}=\sum_{\alpha}\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}A_{\vec{k}\alpha},$$

onde $\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha},\alpha=1,2$ são os vetores de polarização unitários, tais que $\vec{k}\,.\,\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}=0$, com $\vec{\epsilon}_{\vec{k}1}$ e $\vec{\epsilon}_{\vec{k}2}$ perpendiculares entre si, ou seja, $\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}\cdot\vec{\epsilon}_{\vec{k}\beta}=0$, quando α for diferente de β. $\vec{A}^{*}_{\vec{k}}(t)$ satisfaz a mesma equação (44). Os coeficientes de Fourier, portanto, satisfazem a uma equação formalmente análoga ao oscilador harmônico simples clássico

$$\frac{\partial^2\vec{A}_{\vec{k}}(t)}{\partial t^2}+\omega_k^2\vec{A}_{\vec{k}}(t)=0, \tag{45}$$

onde

$$\omega_k=c\,k. \tag{46}$$

Logo, o campo eletromagnético é quantizado pela conversão da equação (45) para uma equação formalmente análogo àquela do oscilador harmônico da mecânica quântica. Para ver como isso pode ser feito, é aconselhável expressar a equação (45) tipo-oscilador clássico em termos de uma posição e momento efetivos associados ao modo da cavidade.

Para isso, vamos avaliar a energia clássica do modo normal da cavidade especificada pelo vetor $\vec{k}$ que está na direção da propagação da onda eletromagnética. A solução da equação (45) pode ser expressa por:

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t)=\vec{A}_{\vec{k}}\exp(-i\omega_k t), \tag{47}$$

e o potencial vetor completo (40) torna-se:

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \{\vec{A}_{\vec{k}} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k}\,.\,\vec{r}) + \vec{A}^*_{\vec{k}} \exp(i\omega_k t - i\vec{k}\,.\,\vec{r})\}. \tag{48}$$

A energia média de um único modo k contida em um ciclo do campo eletromagnético é:

$$\bar{\mathcal{E}}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \bar{\vec{E}}^2_{\vec{k}} + \frac{1}{\mu_0} \bar{\vec{B}}^2_{\vec{k}} \right) dV, \tag{49}$$

onde as barras denotam uma média em um ciclo, $\vec{E}_{\vec{k}}$ e $\vec{B}_{\vec{k}}$ são os campos elétrico e magnético associados ao modo, que resulta em:

$$\bar{\mathcal{E}}_{\vec{k}} = 2\epsilon_0 V \omega^2_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}} \,.\, \vec{A}^*_{\vec{k}}, \tag{50}$$

onde $V = L^3$ é o volume da cavidade.

Os modos $\vec{A}_{\vec{k}}$ e $\vec{A}^*_{\vec{k}}$ podem ser substituídos por um modo de posição da coordenada $Q_{\vec{k}}$ e um modo de momento $P_{\vec{k}}$ de acordo com as transformações abaixo:

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega^2_{\vec{k}}}} (\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}} + iP_{\vec{k}}) \vec{\epsilon}_{\vec{k}} \tag{51}$$

e

$$\vec{A}^*_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega^2_{\vec{k}}}} (\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}} - iP_{\vec{k}}) \vec{\epsilon}_{\vec{k}}. \tag{52}$$

As coordenadas $Q_{\vec{k}}$ e $P_{\vec{k}}$ são quantidades escalares e $\vec{\epsilon}_{\vec{k}}$ é um vetor de polarização unitário.

A equação para a energia de um único modo (50) é transformada pelas equações (51) e (52) em

$$\bar{\mathcal{E}}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}(P^2_{\vec{k}} + \omega^2_{\vec{k}} Q^2_{\vec{k}}). \tag{53}$$

Essa é a forma usual da energia para o oscilador harmônico clássico. O problema de um campo eletromagnético associado ao modo de cavidade é, portanto, equivalente ao problema de um oscilador harmônico clássico, como já havíamos afirmado. A hamiltoniana clássica completa para a cavidade é construída fazendo-se o somatório em $\vec{k}$ da expressão (53), ou seja,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (P^2_{\vec{k}} + \omega^2_{\vec{k}} Q^2_{\vec{k}}). \tag{54}$$

Vemos dessa expressão para H que, a energia do campo eletromagnético livre pode ser colocada na forma da hamiltoniana de um conjunto de osciladores desacoplados.

Portanto, os Estados Coerentes para o oscilador harmônico simples têm grande importância na Óptica Quântica. Eles são análogos aos estados coerentes de um único modo do campo eletromagnético quantizado.

A. A QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO LIVRE

O campo eletromagnético é agora quantizado através da associação de um oscilador harmônico quântico com modo $\vec{k}$ do campo de radiação. O modo ao qual um operador da mecânica quântica se refere é indicado por um subscrito; então $a_{\vec{k}}^{+}$ e $a_{\vec{k}}^{-}$ são operadores que criam e destroem, respectivamente, um quantum de energia $\hbar\omega_{\vec{k}}$ no modo de cavidade do campo eletromagnético do vetor número de onda $\vec{k}$. Esses quanta são denominado de fótons. O número de fótons excitados na cavidade é determinado pelo autovalor $n_{\vec{k}}$ do operador de número $\hat{N}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}^{+}\hat{a}_{\vec{k}}^{-}$, e tem os possíveis valores $0, 1, 2, \ldots$. O nível de excitação de um modo da cavidade $\vec{k}$ é determinado pelo seu autoket $|n_{\vec{k}}>$. Os operadores de criação e aniquilação para o modo $\vec{k}$ aplicados ao ket $|n_{\vec{k}}>$ proporcionam outros autokets:

$$\hat{a}_{\vec{k}}^{-} \mid n_{\vec{k}} >= \sqrt{n_{\vec{k}}} \mid n_{\vec{k}} - 1 >; \qquad \hat{a}_{\vec{k}}^{+} \mid n_{\vec{k}} >= \sqrt{n_{\vec{k}} + 1} \mid n_{\vec{k}} + 1 >, \tag{55}$$

os quais atuam sobre o autoket quântico da partícula bosônica (o fóton) e, por sua vez, pelo teorema de spin-estatística satisfazem as seguintes relações de comutação canônica:

$$[\hat{a}_{\vec{k}}^{-}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{+}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}; \qquad [\hat{a}_{\vec{k}}^{-}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{-}] = [\hat{a}_{\vec{k}}^{+}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{+}] = 0. \tag{56}$$

Os estados quânticos do campo de radiação total podem ser especificados pelo número de fótons $n_{\vec{k}1}, n_{\vec{k}2}, \cdots$ excitados num conjunto completo dos modos de cavidade $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \ldots$. É importante lembrar que nós adotamos um único símbolo $\vec{k}$ para o vetor número de onda e o vetor de polarização $\vec{\epsilon}_{\vec{k}}$ de um modo.

O estado quântico de campo eletromagnético total é escrito como $|n_{\vec{k}1}, n_{\vec{k}2}, \cdots >$. Considerando que os diferentes modos da cavidade são independentes, o autoket do campo total pode ser escrito como um produto de autokets dos modos individuais:

$$|n_{\vec{k}1}, n_{\vec{k}2}, \ldots >= |n_{\vec{k}1} > |n_{\vec{k}2} > \ldots. \tag{57}$$

Assumimos sempre que os autokets dos modos individuais são normalizados, e disto segue que o autoket total do campo (57) é também normalizado. Um operador que se refere a um modo normal particular $\vec{k}_i$ afeta somente os fótons naquele modo particular, por exemplo,

$$\hat{a}^-_{\vec{k}i}|n_{\vec{k}1}, n_{\vec{k}2}, \ldots, n_{\vec{k}i}, \ldots >= \sqrt{n_{\vec{k}i}}|n_{\vec{k}1}, n_{\vec{k}2}, \ldots, n_{\vec{k}i} - 1, \ldots > \tag{58}$$

e

$$\hat{a}^+_{\vec{k}i}|n_{\vec{k}1}, n_{\vec{k}2}, \ldots, n_{\vec{k}i}, \ldots >= \sqrt{n_{\vec{k}i} + 1}|n_{\vec{k}1}, n_{\vec{k}2}, \ldots, n_{\vec{k}i} + 1, \ldots >, \tag{59}$$

que são uma aplicação das regras (55) ao produto de autokets da equação (57).

Para não carregar muito a notação (57), preferimos denotar os autokets do campo total por:

$$|\{n_{\vec{k}}\} >= |n_{\vec{k}1} > |n_{\vec{k}2} > \ldots. \tag{60}$$

Os símbolos $\{|\{n_{\vec{k}}\} >\}$ denotam um conjunto completo de números que especificam os níveis de excitação de todos os osciladores harmônicos associados com os modos da cavidade. Há sempre um número infinito de osciladores.

Os potenciais vetores clássicos $\vec{A}_{\vec{k}}$ e $\vec{A}^*_{\vec{k}}$ para o modo da cavidade são expressos em termos de $P_{\vec{k}}$ e $Q_{\vec{k}}$ e são convertidos em operadores da mecânica quântica $\hat{p}_{\vec{k}}$ e $\hat{q}_{\vec{k}}$ por substituições diretas:

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega^2_{\vec{k}}}}(\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}} + iP_{\vec{k}})\vec{\epsilon}_{\vec{k}} \downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega^2_{\vec{k}}}}(\omega_{\vec{k}} \hat{q}_{\vec{k}} + i\hat{p}_{\vec{k}})\vec{\epsilon}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}}\hat{a}^-_{\vec{k}}\vec{\epsilon}_{\vec{k}} \tag{61}$$

e

$$\vec{A}^*_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega^2_{\vec{k}}}}(\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}} - iP_{\vec{k}})\vec{\epsilon}_{\vec{k}} \downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega^2_{\vec{k}}}}(\omega_{\vec{k}} \hat{q}_{\vec{k}} - i\hat{p}_{\vec{k}})\vec{\epsilon}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}}\hat{a}^+_{\vec{k}}\vec{\epsilon}_{\vec{k}}, \tag{62}$$

onde usamos as relações (51) e (52) nos últimos passos dessas equações.

A transição da mecânica clássica para a mecânica quântica, portanto, consiste na substituição dos coeficientes clássicos de Fourier $\vec{A}_{\vec{k}}$ e $\vec{A}^*_{\vec{k}}$ pelo operador de aniquilação $\hat{a}^-_{\vec{k}}$ e o operador de criação $\hat{a}^+_{\vec{k}}$, multiplicados por um fator numérico e um vetor unitário. A expressão da mecânica quântica para o potencial vetor é obtida pela substituição das equações (61) e (62) na equação (48).

$$\hat{\vec{A}} = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}} \{ \hat{a}^-_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\,.\,\vec{r}) + \hat{a}^+_{\vec{k}} \exp(i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\,.\,\vec{r}) \}. \tag{63}$$

Note que o potencial vetor é agora um operador.

Os resultados correspondentes para os operadores de campos elétrico $\hat{\vec{E}}_{\vec{k}}$ e magnético $\hat{\vec{B}}_{\vec{k}}$ associados com o modo $\vec{k}$ são expressos através das seguintes equações:

$$\hat{\vec{E}}_{\vec{k}} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}} \{ \hat{a}^-_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\,.\,\vec{r}) - \hat{a}^+_{\vec{k}} \exp(i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\,.\,\vec{r}) \}, \tag{64}$$

$$\hat{\vec{B}}_{\vec{k}} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} \vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}} \{ \hat{a}^-_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\,.\,\vec{r}) - \hat{a}^+_{\vec{k}} \exp(i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\,.\,\vec{r}) \}. \tag{65}$$

Os operadores para os campos elétrico e magnético transversais são então:

$$\hat{\vec{E}} = \sum_{\vec{k}} \hat{\vec{E}}_{\vec{k}}, \tag{66}$$

$$\hat{\vec{B}} = \sum_{\vec{k}} \hat{\vec{B}}_{\vec{k}}. \tag{67}$$

Como um primeiro cálculo que usa os operadores $\hat{\vec{E}}_{\vec{k}}$ e $\hat{\vec{B}}_{\vec{k}}$, consideremos a energia eletromagnética contida num modo $\vec{k}$ para o estado quântico onde $n_{\vec{k}}$ fótons são excitados. A equação clássica (49) para a energia do campo $\mathcal{E}_{\vec{k}}$ torna-se os seguintes autovalores:

$$\mathcal{E}_{n_{\vec{k}}} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 < n_{\vec{k}} | \hat{\vec{E}}_{\vec{k}} \,.\, \hat{\vec{E}}_{\vec{k}} | n_{\vec{k}} > + \frac{1}{\mu_0} < n_{\vec{k}} | \hat{\vec{B}}_{\vec{k}} \,.\, \hat{\vec{B}}_{\vec{k}} | n_{\vec{k}} > \right) dV. \tag{68}$$

Continuando os cálculos, obtém-se o seguinte resultado para a energia do campo:

$$\mathcal{E}_{n_{\vec{k}}} = (n_{\vec{k}} + \frac{1}{2})\hbar\omega_{\vec{k}}. \tag{69}$$

Esse último resultado é a expressão usual para a energia do oscilador harmônico. A energia $\mathcal{E}_, = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ é denominada energia de ponto zero.

O halmiltoniano para o campo eletromagnético total na cavidade consiste no somatório de infinito termos de hamiltoniano de osciladores, que denotamos por $\hat{H}_R$:

$$\hat{H}_R = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}}(\hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}^-_{\vec{k}} + \frac{1}{2}), \tag{70}$$

o qual é obtido substituindo os operadores de campos elétrico e magnético na densdade de energia. Subtraindo o termo constante (e infinito) deste hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado, obtemos:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}}\hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}^-_{\vec{k}}. \tag{71}$$

A enegia total da radiação para o auto-estado $|\{n_{\vec{k}}\} >$ torna-se:

$$\mathcal{E} = \sum_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} (n_{\vec{k}} + \frac{1}{2})\hbar\omega_{\vec{k}}, \tag{72}$$

que é o somatório das contribuições de um único modo da equação (69). Portanto, a energia total do campo eletromagnético é a soma do número de fótons multiplicada pela energia de cada fóton adicionada de infinitos termos $\frac{1}{2}\hbar\omega_{\vec{k}}$, o que resulta numa energia total divergente. Como na prática o que se mede é a diferença de energia total, então a energia de ponto zero deve ser subtraída de modo que o resultado da diferença de energia será finito.

Os operadores $\hat{a}^+_{\vec{k}}$ e $\hat{a}^-_{\vec{k}}$ são chamados respectivamente de operadores de criação e aniquilação de fótons e são escritos em termos do vetor de polarização $\epsilon_{\alpha\vec{k}}$ que é rotulado por $\alpha = 1, 2$,

$$\hat{a}^{\pm}_{\vec{k}} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha\vec{k}}\hat{a}^{\pm}_{\alpha\vec{k}} = \epsilon_{1\vec{k}}\hat{a}^{\pm}_{1\vec{k}} + \epsilon_{2\vec{k}}\hat{a}^{\pm}_{2\vec{k}}. \tag{73}$$

Nessa abordagem um quantum é denominado de fóton e, por sua vez, os autokets do operador de número têm um valor bem definido para os fótons em cada modo $\vec{k}$.

Note que o hamiltoniano do campo eletromagnético livre representa uma soma de hamiltonianos formalmente análogos ao do OHS. Logo, as propriedades dos estados de número desenvolvida na seção anterior podem ser estendidas para os vários modos do campo eletromagnético quantizado, com a substituição do ket $|n >$ por um produtório de kets que são representados por $|\{n_{\vec{k}}\} >$, os quais são conhecido como estado de Fock [5,6,8,7,9].

Vale a pena salientar que, em primeira quantização, para o oscilador harmônico simples os operadores de criação e aniquilação são uma combinação linear dos operadores de posição e de momento linear, enquanto que, em segunda quantização, para o campo eletromagnético eles não têm uma representação de coordenadas, mas fazem parte do próprio campo. Realmente, tais operadores de criação e aniquilação são os coeficientes dos termos oscilatórios do campo.

O valor esperado do campo elétrico nos autokets de Fock é nulo, isto é:

$$< \hat{\vec{E}}_{\vec{k}} >_{|n_{\vec{k}}>} = 0. \tag{74}$$

Portanto, o campo elétrico nesse estado não possui análogo clássico. Mas, para os Estados Coerentes no modo $\vec{k}$, temos:

$$< \hat{\vec{E}}_{\vec{k}} >_{|\alpha_{\vec{k}}>} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}}\exp(i\vec{K}\,.\,\vec{r})\alpha_{\vec{k}}\vec{\epsilon} + cc, \tag{75}$$

onde cc é o complexo conjugado.

Isto quer dizer que o valor esperado do campo elétrico nos Estados Coerentes, para um único modo, coincide com o valor clássico, a menos da amplitude de oscilação.

Uma propriedade Física muito importante dos Estados Coerentes é que o módulo quadrado de $\alpha_{\vec{k}}$ é o número médio de fótons no estado $|\alpha_{\vec{k}}>$:

$$< N > = < \alpha_{\vec{k}}|N|\alpha_{\vec{k}} > = < \alpha_{\vec{k}}|a^+a^-|\alpha_{\vec{k}} > = |\alpha_{\vec{k}}|^2. \tag{76}$$

Em outras palavras, o módulo quadrado de $\alpha_{\vec{k}}$ nos fornece o número médio de fótons naquele modo.

VI. CONCLUSÃO

Consideramos as principais características do oscilador quântico unidimensional (oscilador harmônico simples) nos Estados Coerentes (EC). Vimos que qualquer autofunção do espaço de Hilbert pode ser expandida numa base constituída de Estados Coerentes, $\{|\ \alpha >\}$, para o oscilador harmônico simples. Deduzimos a relação de completeza para os EC.

Mostramos também que os EC para o oscilador harmônico simples desempenham um papel muito importante em Óptica Quântica. Eles diagonalizam o hamiltoniano e são os autokets (autovetores) do operador de aniquilação associados a um único modo do campo eletromagnético [3–7,9,10].

Os Estados Coerentes para o oscilador harmônico unidimensional satisfazem as três definições equivalentes: (i) autofunções do operador de abaixamento; (ii) obtidos via um operador deslocamento atuando sobre a função de onda do estado fundamental do oscilador e (iii) estados de incerteza mínima.

Observamos a importância Física dos Estados Coerentes quando trabalhamos com o campo eletromagnético utilizando a analogia com as equações para o oscilador harmônico simples. Vimos que nos estados de Fock o valor esperado do campo elétrico é nulo e, por sua vez, não tem analogia clássica, enquanto que nos Estados Coerentes o valor esperado do campo elétrico tem o seu análogo clássico. Vimos ainda uma propriedade física muito importante dos Estados Coerentes, a saber: o número médio de fótons nos Estados Coerentes de um único modo ($|\alpha >$) é igual ao módulo quadrado de α. Isso quer dizer que basta encontrar o ket $|\alpha >$ para saber o número médio de fótons nesse estado quântico, calculando o valor de $|\alpha|^2$ [5-10].

Finalizamos este trabalho analisando a generalização para a construção de novos Estados Coerentes [24]. Vimos que podemos expressar o operador de abaixamento em termos da função de onda que descreve o estado fundamental do oscilador harmônico simples, o que nos proporciona uma generalização para se construir novos Estados Coerentes. Obviamente, na respectiva generalização, os operadores de levantamento e abaixamento não satisfazem às mesmas relações de comutação do oscilador harmônico simples, pois teríamos outra função de onda descrevendo o estado fundamental do respectivo sistema quântico.

De fato, considere um hamiltoniano cuja relação de comutação com os operadores de levantamento (A^+) e abaixamento (A^-) resulta respectivamente em $\pm n\hbar\omega A^{\pm}$, onde n é um número inteiro. Os novos estados coerentes são autofunções do respectivo operador de abaixamento. Eventualmente, pode ocorrer que em tais casos as definições de Estados Coerentes não sejam equivalentes. Por exemplo, quando $n = 2$ obtemos a relação de comutação escada para o oscilador harmônico unidimensional adicionado de uma barreira de potencial centrífugo $\left(H_{ob} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}\right)\right)$, onde λ pode assumir qualquer valor real.

Neste caso, pode ser demonstrado que as definições de Estados Coerentes não serão equivalentes, ou seja, os EC como autofunções do operador de abaixamento são diferentes dos EC obtidos via um operador deslocamento atuando sobre a autofunção do estado fundamental de H_{ob} [20]. Devemos enfatizar que os níveis de energia de H_{ob} são igualmente espaçados, cuja diferença entre dois níveis adjacentes resulta em dois quanta. Lembre-se que no caso do OHS essa diferença é um quantum.

Como uma informação complementar a esse trabalho de revisão, vale a pena ressaltar algumas generalizações: Em 1971, Barut e Girardello generalizaram a definição de Estados Coerentes como sendo aqueles que diagonalizavam o operador de aniquilação de um grupo não-compacto [14]. Eles estudaram abstratamente em detalhes o grupo SO(2,1), ou seja, eles não consideraram aplicação alguma e, por isso, construíram estados que são autokets do operador de criação também, mas obviamente tais autokets são diferentes daqueles do operador de aniquilação. De fato, quando efetuamos uma realização dos elementos da álgebra vemos que não é possível se construir autokets simultâneos de ambos operadores de criação e aniquilação, uma vez que estes operadores não comutam. Os Estados Coerentes de Barut e Girardello foram abordados sob uma análise crítica, por Basu [15]. Outra generalização foi acerca da definição de Glauber [4,5] via operador deslocamento atuando sobre o autoket do estado fundamental. De acordo com a

prescrição de Perelemov, um operador unitário, elemento de um grupo de simetria qualquer, atuando sobre o autoket do estado fundamental, gera Estados Coerentes [16].

Num método análogo ao empregado por Schrödinger para construir os Estados Coerentes com Incerteza Mínima, Nieto et al resgataram a questão de se construírem tais estados para potenciais mais gerais [17], e mostraram que nem sempre as três definições são equivalentes [18].

Existem também outras generalizações associadas às álgebras graduadas de Lie, como por exemplo, as álgebras de Wigner-Heisenberg e supersimetria em mecânica quântica não-relativística. Porém estas generalizações estão fora do escopo deste trabalho. Para os leitores interessados em tais abordagens veja as referências [19,20,24], que faz a conexão entre essas duas superálgebras.

Para os leitores interessados em estudar os operadores de abaixamento e levantamento que geram as autofunções de energia do oscilador harmônico simples sugerimos a leitura das referências [2,21–23].

Recentemente, tem surgido aplicações dos estados coerentes em computação quântica, citando as referências [25,26]. Na ref. [25], o autor construiu os estados coerentes generalizados e comentou sobre as respectivas aplicações em computação quântica.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor deste trabalho agradece as comissões organizadoras das cinco últimas Escolas de Óptica Quântica, realizada no Brasil, pelo apoio em suas participações. Os autores agradecem aos Departamentos de Física da Universidade Federal da Paraíba dos Campi I e II, e ao Departamento de Ciências Exatas e da Natureza do Campus V, pelo apoio. DFJ e SMB agradecem ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)* pelo auxílio financeiro parcial, através de bolsas de estudo de iniciação científica do PIBIC/UFPB/CNPq. Os autores gostariam de registrar também seus agradecimentos a PRPG da UFPB, pelo apoio. RLR agradece ao CNPq pela bolsa de estudo na modalidade de pós-doutorado.

REFERENCES

[1] E. Schrödinger, *Naturwiss*, **14**, 664, (1926)

[2] P. M. Mathews e K. Venkatesan, **A Text Book of Quantum Mechanics**, Tata McGraw. Hill, New Delhi (1987), página 113. (Este livro tem algumas vantagens em ser adquirido: abrange a mecânica quântica não-relativística e relativística, é muito didático, inclusive com um inglês fácil de ler; é um livro texto de baixo custo.)

[3] J. R. Klauder, *Ann. Phys.* **11**, 123, (1960)

[4] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **130**, 2529, (1963)

[5] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2765, (1963); Phys. Rev. Lett. **10**, 84, (1963)

[6] H. M. Nussenzveig, **Introduction to Quantum Optics** (Gordon and Breach, N. Y., (1973).

[7] R. Loudon, **The Quantum theory of light** - second edition, Oxford University Press, New York (1983); C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg, InterEditions/Editions du CNRS, **Processus d'interaction entre photons et atomes**, Paris (1988).

[8] J. R. Klauder and Bo-Sture Skagerstam, **Coherent States**, World Scientific (1985).

[9] Luiz Davidovich, **Introdução à Eletrônica Quântica**, II Escola de Verão Jorge André Swieca, seç ão de Óptica Quântica e Óptica Não-Linear, realizada em São Carlos-SP, 1990.

[10] F. A. M. de Oliveira, **Introduction to Quantum Optics**, III Escola de Verão Jorge André Swieca, seç ão de Óptica Quântica e Óptica Não-Linear, realizada no Recife-PE, fevereiro de 1992.

[11] A VII Escola de Verão Jorge André Swieca, seç ão de Óptica Quântica e Óptica Não-Linear, será realizada no período de 07 a 18 de janeiro de 2002, na UNICAMP, em Campinas-SP.

[12] V. S. Bagnato , **Átomos Frios: produção e aplicação**, IV Escola de Verão Jorge André Swieca, seç ão de Óptica Quântica e Óptica Não-Linear, realizada em Campinas-SP, 23 de janeiro a 5 de fevereiro de 1994.

[13] B. Baseia, *Rev. Bras. de Ens. de Física*, **17**, 1, (1995).

[14] A. O. Barut e L. Girardello, *Commun. Math. Phys.* **21**, 41, (1971).

[15] D. Basu, *J. Math. Phys.* 33, 114, (1992).

[16] A. M. Perelomov, *Commun. Math. Phys.* **26**, 222, (1972).

[17] M. M. Nieto and L. M. Simmons, Jr. , *Phys. Rev.* **D20**, 1332, (1979).

[18] V. P.Gutshick, M. M. Nieto and L. M. Simmons, Jr. , *Phys. Lett.* **76A**, 15, (1980).

[19] J. Jayaraman and R. L. Rodrigues, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 3123, (1990); J. Jayaraman, R. de Lima Rodrigues e A. N. Vaidya, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 6643 (1999).

[20] R. de Lima Rodrigues, A. N. Vaidya e J. Jayaraman, *quatro trabalhos, no formato de mini-artigo, sobre os Estados Coerentes via as álgebras de Wigner-Heisenberg e supersimetria em mecânica quântica* publicados em formato de mini-artigo nos proceedings do XII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu-MG, setembro de 1991.

[21] I. Infeld e T. E. Hell, *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 21, (1950) (Este artigo aborda várias aplicações do método de fatorização em Mecânica Quântica.); Stephen Gasiorowicz, **Quantum Physics**, John Wiley & Sons, New York (1974). (O leitor pode encontrar este livro em quase todas as bibliotecas de física uma tradução deste livro em português.)

[22] R. L. Liboff, **Introductory Quantum Mechanics**, Addison Wesley, 2nd edition, 1992. (Um excelente livro sobre a mecânica quântica não-relativística, tratando inclusive de sistemas físicos recentes.)

[23] R. de Lima Rodrigues, **Mecânica Quântica na Descrição de Schrödinger**, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. **19**, N$^{\underline{o}}$ 1, 68 (1997).

[24] R. de Lima Rodrigues, A. F de Lima, K. de Araújo Ferreira e A. N. Vaidya, "Quantum oscillator in the canonical coherent states," preprint Notas de Física, CBPF-NF-66/01(2001), a ser submetido a um periódico internacional (Dez./2001).

[25] K. Fujii, *Mod. Phys. Lett.* **16A**, 1277 (2001) e as referências contidas neste trabalho.

[26] S. Mancini and V. I. Man'ko, *Deformed versus undeformed cat states encoding qubit*, quant-ph/0111128, 24 novembro de 2001.

NOTAS DE FÍSICA é uma pré-publicação de trabalho original em Física. Pedidos de cópias desta publicação devem ser enviados aos autores ou ao:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4º andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brasil
E-mail: socorro@cbpf.br/valeria@cbpf.br

NOTAS DE FÍSICA is a preprint of original unpublished works in Physics. Requests for copies of these reports should be addressed to:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – 4º andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brazil
E-mail: socorro@cbpf.br/valeria@cbpf.br