CERTAINES FONCTIONS MAXIMALES SUR LES VARIÉTÉS CUSPIDALES

Hong-Quan LI

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Décembre 2002

IHES/M/02/88

Certaines fonctions maximales sur les variétés cuspidales

Hong-Quan LI
IHES, 35, route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette Cedex
Courriel : lihq@ihes.fr

Résumé. Dans cet article, nous nous proposons d'étudier deux types des fonctions maximales sur les variétés cuspidales. D'une part, nous considérons la fonction maximale non centrale dans le cadre de certaines variétés cuspidales, nous établissons des résultats analogues à ceux de [16] et [17]. D'autre part, nous montrons que sur les variétés cuspidale à base compacte, la fonction maximale associée au noyau de la chaleur est de type faible $(1, 1)$.

1 Introduction et énoncé du résultat

Si X est une variété riemannienne de dimension N, avec un bord $\partial \mathrm{X}$ (on admet $\partial \mathrm{X} = \emptyset$), on définit Cusp(X) comme étant l'espace $\mathbb{R}^+ \times \mathrm{X}$ muni de la métrique riemannienne $r^{-2}(dr^2 + g_{\mathbf{X}})$, où $g_{\mathbf{X}}$ est la métrique riemannienne sur X. Par exemple, si X est l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, alors Cusp(X) est l'espace hyperbolique réel de dimension $N + 1$. On note d_{X} (resp. d) la distance riemannienne induite sur X (resp. Cusp(X)), $d\mu$ (resp. $d\mu_{\mathrm{X}}$) la mesure riemannienne induite sur Cusp(X) (resp. X), Δ le laplacien sur Cusp(X) et p_t ($t > 0$) le noyau de la chaleur sur Cusp(X). Notons $B(Y, r)$ ($Y \in \mathrm{Cusp(X)}$, $r > 0$) la boule géodésique de centre Y et de rayon r, et $|B(Y, r)|$ son volume. Dans la suite, pour simplifier les notations, on note $Y = (y, x), Y' = (y', x') \in \mathrm{Cusp(X)}$, $d = d(Y, Y')$, $d_{\mathrm{X}} = d_{\mathrm{X}}(x, x')$ et $K_n(t, \eta)(n \geq 2, t > 0, \eta \geq 0)$ le noyau de la chaleur sur l'espace hyperbolique réel de dimension n ; on pose

$$K_1(t, r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{r^2}{4t}}, \quad \forall t > 0, r \geq 0.$$

Rappelons que (voir la proposition 2 de [20])

$$d(Y, Y') = \operatorname{arc\,cosh} \frac{y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2}{2yy'}, \quad \forall Y, Y' \in \mathrm{Cusp(X)} \tag{1.1}$$

La difficulté particulière des variétés cuspidales tient à ce que la courbure de Ricci n'est pas toujours minorée, que le rayon d'injectivité peut être nul et que le volume des boules est à croissance exponentiel. Pour d'autres informations sur les variétés cuspidales, on pourra se reporter par exemple aux [18] et [21].

Dans [21], on a considéré la fonction maximale de Hardy-Littlewood sur les variétés cuspidales. Dans cet article, on se propose d'étudier deux autres types des fonctions maximales : la fonction maximale non centrale et la fonction maximale associée au noyau de la chaleur. Avant de donner les résultats principaux, on a besoin de quelques définitions et notations:

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathrm{Cusp(X)})$, on note $M_* f$, la fonction maximale non centrale de f, définie par

$$M_* f(Y) = \sup_{Y \in B(Z,r)} |B(Z, r)|^{-1} \int_{B(Z,r)} |f(Y')| \, d\mu(Y'), \qquad Y \in \mathrm{Cusp(X)}.$$

La fonction maximale associée au noyau de la chaleur de f, Pf, est définie par

$$Pf(Y) = \sup_{t>0} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} p_t(Y, Y')|f(Y')|\, d\mu(Y'), \quad Y \in \mathrm{Cusp(X)}.$$

Dans [16] et [17], A. Ionescu a étudié la continuité L^p de la fonction maximale non centrale dans le cadre des espaces symmétriques. L'un de deux buts de cet article est d'établir des résultats analogues à ceux de [16] et [17] sur certaines variétés cuspidales. En bréf, on a le :

THÉORÈME 1.1 *Lorsque* X *est compacte, ou lorsque* X *est non compacte, et il existe une constante $C > 1$ telle que :*

$$C^{-1}r^N \leq |B_{\mathrm{X}}(x, r)| \leq Cr^N, \quad \forall x \in \mathrm{X},\ r > 0;$$

la fonction maximale non centrale est bornée sur $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ pour tout $2 < p \leq +\infty$ et non borné sur $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ si $1 \leq p \leq 2$.

En effet, comme ce qu'on voit dans le cadre des espaces symmétriques de rang 1 (voir le théorème B de [17] et la section 4 de [16]), on peut montrer que sous les hypothèses du théorème 1.1, l'opérateur M_* est borné de l'espace de Lorentz $L^{2,u}(\mathrm{Cusp(X)})$ dans $L^{2,v}(\mathrm{Cusp(X)})$ $(1 \leq u, v \leq +\infty)$ s.s.i. $(u, v) = (1, +\infty)$ (voir les théorèmes 2.1 et 2.2 de cet article; pour la définition des espaces de Lorentz et leurs propriétés, on peut se reporter au Chapitre V de [24]). Dans [16] et [17], A. Ionescu utilise des propriétés des groupes de Lie semi-simples pour montrer ses résultats; dans notre situattion, on voit que les propositions 2 et 3 de [20] nous permettent de montrer notre résultat. On rappelle que sous les hypothèses du théorème 1.1, la fonction maximale de Hardy-Littlewood est bornée de $L^1(\mathrm{Cusp(X)})$ dans $L^{1,\infty}(\mathrm{Cusp(X)})$ et de $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ dans $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ pour tout $1 < p \leq +\infty$, voir le théorème 1 de [20]. Dans le cas général, même si X est une variété riemannienne complète, non compacte à courbure de Ricci positive ou nulle, l'auteur n'arrive pas à obtenir des résultats sur les fonctions maximales.

L'autre but de cet article est d'étudier la fonction maximale associée au noyau de la chaleur sur les variétés cuspidales à base compacte. Dans [23] (Ch. III), la continuité L^p $(1 < p \leq +\infty)$ de la fonction maximale associée au noyau de la chaleur est établie dans une situation très générale. On sait aussi que la fonction maximale associée au noyau de la chaleur est de type faible $(1, 1)$ dans le cadre des espaces symétriques ou dans certain cadre des groupes de Lie, voir par exemple [22], [1], [8], [2] et [3]. Dans cet article, on montre que dans le cadre des variétés cuspidales à base compacte, la fonction maximale associée au noyau de la chaleur est de type faible $(1, 1)$. Autrement dit, on a le théorème :

THÉORÈME 1.2 *Si* X *est une variété compacte, sans bord et de dimension $N \geq 2$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda > 0$ et toute $f \in L^1(\mathrm{Cusp(X)})$, on a :*

$$\mu\Big\{Y; Pf(Y) > \lambda\Big\} \leq C\frac{1}{\lambda} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} |f(Y')|\, d\mu(Y').$$

Pour montrer le théorème 1.2, on a besoin des estimations supérieures de p_t très précises; malheureusement, les estimations connues (voir [18], [11] et [21]) sont insuffisantes pour montrer le théorème 1.2. Remarquons que dans [21], en utilisant le résultat de [15] et [14], on obtient l'estimation supérieure de $p_t(Y, Y)$ pour déduire celle de $p_t(Y, Y')$. Dans cet article, on utilisera des techniques plus efficaces que celles de [21] pour obtenir de meilleures estimations; plus précisement, on a le :

THÉORÈME 1.3 *Soit* X *une variété compacte, sans bord et de dimension* $N \geq 2$. *Soit* $0 < \omega \leq 1$. *Alors, il existe une constante* $C(\omega) > 0$ *telle que pour tout* $t > 0$ *et tous* $Y, Y' \in$ Cusp(X), *on a :*

$$p_t(Y,Y') \leq C(\omega)\Big\{(yy')^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{N^2}{4}t}K_1(t,d) + K_{N+1}(t,d)\Big(1+\frac{d}{t}\Big)^{\frac{N-1}{2}+\omega}\Big\}. \tag{1.2}$$

Remarque. Si on suppose de plus que X est de courbure de Ricci positive ou nulle, alors, par la proposition 1 de [20], le résultat de [6] et l'estimation (5.3), on en déduit qu'il existe une constante $C_* > 0$ telle que :

$$p_t(Y,Y') \geq C_*\Big[(yy')^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{N^2}{4}t}K_1(t,d) + K_{N+1}(t,d)\Big], \quad \forall t > 0, Y, Y' \in \mathrm{Cusp(X)}.$$

En générale, on se demande si

$$p_t(Y,Y') \sim (yy')^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{N^2}{4}t}K_1(t,d) + K_{N+1}(t,d), \quad \forall t > 0, Y, Y' \in \mathrm{Cusp(X)}.$$

Rappelons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que (voir [18], p.199) :

$$p_t((y,x),(y',x')) = C(yy')^{\frac{N-1}{2}}e^{-\frac{N^2-1}{4}t}\int_0^{+\infty} K_2 \cos\tau\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}}\,d\tau(x,x'), \tag{1.3}$$

où

$$K_2 = K_2(t, \operatorname{arc\,cosh}\frac{y^2+y'^2+\tau^2}{2yy'}).$$

Pour montrer le théorème 1.3, on utilise la paramétrice de l'équation des ondes (voir par exemple [5]), les propriétés de K_n (voir par exemple [12]), l'idée de la démonstration du Lemma 5 de [10] et le fait que $\cos\tau\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}}$ a la propriété de propagation à vitesse 1.

On donne une application du théorème 1.3 :

PROPOSITION 1.4 *Soit* X *une variété riemannienne compacte, sans bord et de dimension* $N \geq 2$. *Soit* $R : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *satisfaisant*

$$\frac{R(t)}{\sqrt{t}} \longrightarrow +\infty \qquad \textit{quand } t \longrightarrow +\infty,$$

on a alors

$$\sup_{Y\in\mathrm{Cusp(X)}}\int_{Nt-R(t)\leq d\leq Nt+R(t)} p_t(Y,Y')\,d\mu(Y') \longrightarrow 1, \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Dans cet article, j'étudie aussi les estimations gaussiennes inférieures de p_t, j'obtiens des résultats partiels, voir les estimations (5.3), (5.4) et (5.5) de cet article. En particulier, l'estimation (5.5) nous permet de prouver la :

PROPOSITION 1.5 *Soit* X *une variété riemannienne compacte, sans bord et de dimension* $N \geq 2$. *Notons* $e^{t\triangle}$ $(t > 0)$ *le semi-groupe de la chaleur sur* Cusp(X). *Soient* $1 \leq p \neq q \leq +\infty$. *Alors, pour tout* $t > 0$, *on a :*

$$\sup\{\|e^{t\triangle}f\|_p; \|f\|_q = 1\} = +\infty.$$

Cet article est organisé de la façon suivante : dans la section 2, on donne la preuve du théorème 1.1; le théorème 1.2 est donné dans la section 3 en supposant que le théorème 1.3 est montré. On montre les propositions 1.4 et 1.5 dans la section 4. La démonstration du théorème 1.3 est donné dans la section 5.

Dans toute la suite, C, C_*, C^*, etc. désigneront des constantes universelles qui dépendent peut-être des propriétés de X. Celles-ci pourront changer d'une ligne à une autre.

Remerciements. Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe d'Analyse Harmonique d'Orsay pour leur soutien constant. Mes remerciements vont également à Professeur Jean Pierre Bourguignon pour son invitation à l'IHES, Professeurs Laurent Clozel et Laurent Lafforgue pour leur aide. Je voudrais remercier aussi Professeur Thierry Coulhon pour m'avoir indiqué les travaux d'A. Ionescu.

2 Preuve du théorème 1.1

On se propose de montrer le théorème 1.1 dans cette section. Puisque l'opérateur M_* est borné de $L^\infty(\mathrm{Cusp(X)})$ dans $L^\infty(\mathrm{Cusp(X)})$, par les résultats de [24] (voir §3 du Chapitre V), il suffit de montrer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 2.1 *Lorsque* X *est compacte, ou lorsque* X *est non compacte, et il existe une constante* $C > 1$ *telle que :*

$$C^{-1}r^N \leq |B_{\mathrm{X}}(x,r)| \leq Cr^N, \quad \forall x \in \mathrm{X},\ r > 0;$$

M_* *est borné de l'espace de Lorentz* $L^{2,1}(\mathrm{Cusp(X)})$ *dans* $L^{2,\infty}(\mathrm{Cusp(X)})$.

THÉORÈME 2.2 *Sous l'hypothèse du théorème 2.1,* M_* *n'est pas borné de* $L^{2,\alpha}(\mathrm{Cusp(X)})$ *dans* $L^{2,\infty}(\mathrm{Cusp(X)})$ *pour aucun* $\alpha > 1$.

Les idées principales des démonstrations des théorèmes précédents viennent de [16] et [17]. On commence par donner **la preuve du théorème 2.1** :

Pour f convenable, notons

$$M_*^0 f(Y) = \sup_{Y \in B(Z,r), r \leq 1} |B(Z,r)|^{-1} \int_{B(Z,r)} |f(Y')|\, d\mu(Y'), \quad \forall Y \in \mathrm{Cusp(X)},$$

$$M_*^1 f(Y) = \sup_{Y \in B(Z,r), r \geq 1} |B(Z,r)|^{-1} \int_{B(Z,r)} |f(Y')|\, d\mu(Y'), \quad \forall Y \in \mathrm{Cusp(X)},$$

$$M_{\mathrm{X}} f(y,x) = \sup_{r>0} |B_{\mathrm{X}}(x,r)|^{-1} \int_{B_{\mathrm{X}}(x,r)} |f(y,x')|\, d\mu_{\mathrm{X}}(x'), \quad \forall (y,x) \in \mathrm{Cusp(X)},$$

$$\widetilde{M_*} f(Y) = \sup_{r \geq 1} |B(Y,r)|^{-\frac{1}{2}} \int_{B(Y,r)} |f(Y')|\, d\mu(Y'), \quad \forall Y \in \mathrm{Cusp(X)}.$$

Sous l'hypothèse du théorème 2.1, d'après la proposition 3 de [20], on sait que M_*^0 est borné de $L^1(\mathrm{Cusp(X)})$ dans $L^{1,\infty}(\mathrm{Cusp(X)})$ et de $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ dans $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ pour tout $1 < p \leq +\infty$. Donc, d'après les théorèmes 3.11 et 3.15 de [24] (p.192 et p.197), pour achever la preuve du théorème 2.1, il nous reste à montrer que l'opérateur M_*^1 est borné de $L^{2,1}$ dans $L^{2,\infty}$.

1. On considère d'abord le cas où X n'est pas compacte. Dans ce cas-là, par la proposition 3 de [20], il existe une constante $C>0$ telle que :

$$M_*^1 f(Y) \leq C\widetilde{M}_* f(Y), \quad \forall Y \in \mathrm{Cusp}(\mathrm{X}).$$

Il nous reste à montrer que l'opérateur $\widetilde{M}_*$ est borné de $L^{2,1}$ dans $L^{2,\infty}$:

Par les propositions 2 et 3 de [20], on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_* f(y,x) &\leq C \sup_{r\geq 1} e^{-\frac{N}{2}r} \int_{ye^{-r}}^{ye^r} \Big[\int_{d_{\mathrm{X}}(x,x')<\sqrt{2yy'\cosh r-(y^2+y'^2)}} |f(y',x')|\, d\mu_{\mathrm{X}}(x')\Big] y'^{-N-1}\, dy' \\
&\leq C_* \sup_{r\geq 1} e^{-\frac{N}{2}r} \int_{ye^{-r}}^{ye^r} \Big[\int_{d_{\mathrm{X}}(x,x')<\sqrt{2yy'}e^{\frac{r}{2}}} |f(y',x')|\, d\mu_{\mathrm{X}}(x')\Big] y'^{-N-1}\, dy' \\
&\leq C \sup_{r\geq 1} e^{-\frac{N}{2}r} \int_{ye^{-r}}^{ye^r} [\sqrt{2yy'}e^{\frac{r}{2}}]^N M_{\mathrm{X}} f(y',x) y'^{-N-1}\, dy' \\
&\leq C_N y^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} M_{\mathrm{X}} f(y',x) y'^{-\frac{N}{2}-1}\, dy'.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $\lambda>0$, on a

$$\begin{aligned}
&\mu\Big\{(y,x)\in \mathrm{Cusp}(\mathrm{X}); y^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} M_{\mathrm{X}} f(y',x) y'^{-\frac{N}{2}-1}\, dy' > C_N^{-1}\lambda\Big\} \\
\leq\ & \frac{C_N^2}{\lambda^2} \int_{\mathrm{X}} \Big[\int_0^{+\infty} M_{\mathrm{X}} f(y',x) y'^{-\frac{N}{2}-1}\, dy'\Big]^2 d\mu_{\mathrm{X}}(x);
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{M}_* f\|^2_{L^{2,\infty}(\mathrm{Cusp(X)})} &= \sup_{\lambda>0} \lambda^2 \mu\Big\{(y,x)\in \mathrm{Cusp}(\mathrm{X}); \widetilde{M}_* f(y,x) > \lambda\Big\} \\
&\leq C \int_{\mathrm{X}} \Big[\int_0^{+\infty} M_{\mathrm{X}} f(y',x) y'^{-\frac{N}{2}-1}\, dy'\Big]^2 d\mu_{\mathrm{X}}(x) \\
&\leq C' \int_{\mathrm{X}} \|M_{\mathrm{X}} f(\cdot,x)\|^2_{L^{2,1}(\mathbb{R}^+, y'^{-N-1}dy')}\, d\mu_{\mathrm{X}}(x) \quad \text{par le Lemma 3 de [17]} \\
&\leq C\|M_{\mathrm{X}} f(y,x)\|^2_{L^{2,1}(\mathbb{R}^+\times \mathrm{X}, y^{-N-1}dyd\mu_{\mathrm{X}}(x))}\, d\mu_{\mathrm{X}}(x) \quad \text{par le Lemma 5 de [17]} \\
&= C\|M_{\mathrm{X}} f\|^2_{L^{2,1}(\mathrm{Cusp(X)})} \leq C'\|f\|^2_{L^{2,1}(\mathrm{Cusp(X)})},
\end{aligned}$$

dans la dernière line, on a utilisé le fait que l'opérateur M_{X} est borné de $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ dans $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ pour tout $1<p\leq +\infty$ et le théorème 3.15 de [24] (p.197).

2. On considère maintenant le cas où X est compacte. Notons

$$\begin{aligned}
M_*^1 f(y,x) &= M_*^1 f(y,x)\chi\{(y,x); 0<y\leq 1\} + M_*^1 f(y,x)\chi\{(y,x); y>1\} \\
&= M_*^{1,1} f(y,x) + M_*^{1,2} f(y,x),
\end{aligned}$$

où χ désigne la fonction caractéristique des sous-ensembles de Cusp(X).

$M_*^{1,2}$ est évidemment borné dans $L^\infty(\text{Cusp(X)})$, il est aussi borné de L^1 dans $L^{1,\infty}$ puisqu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$M_*^{1,2} f(y,x) \le C y^N \|f\|_1 \chi\{(y,x); y > 1\}, \quad \forall (y,x) \in \text{Cusp(X)},\ f \in L^1(\text{Cusp(X)}).$$

D'après les théorèmes 3.15 et 3.13 de [24] (p.197 et p.192), $M_*^{1,2}$ est borné de $L^{2,1}$ dans $L^{2,\infty}$.

Pour montrer que $M_*^{1,1}$ est borné de $L^{2,1}$ dans $L^{2,\infty}$, on voit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$M_*^{1,1} f(Y) \le C \widetilde{M}_* f(Y) \chi\{(y,x); 0 < y \le 1\}, \quad \forall Y \in \text{Cusp(X)},$$

grâce à la proposition 3 de [20]. Comme dans le cas précédent, en utilisant la proposition 3 de [20], on a :

$$\|\widetilde{M}_* f(Y) \chi\{(y,x); 0 < y \le 1\}\|_{L^{2,\infty}} \le C \|f\|_{L^{2,1}}, \quad \forall f \in L^{2,1}.$$

Ceci achève la preuve du théorème 2.1. ■

Preuve du théorème 2.2 :

Soit $\alpha > 1$ fixé. Fixons $Y_o = (1, x_o) \in \text{Cusp(X)}$ et $1 > \beta > \frac{1}{\alpha}$. Posons

$$g_\beta(Y) = e^{-\frac{N}{2} d(Y,Y_o)} \Big(1 + d(Y,Y_o)\Big)^{-\beta}, \quad \forall Y \in \text{Cusp(X)}.$$

On a $g_\beta \in L^{2,\alpha}$, puisque son réarrangement décroissant $g_\beta^* : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ a les propriétés suivantes (voir aussi [16]) :

$$g_\beta^*(t) \sim 1 \text{ quand } t \in]0,1], \quad g_\beta^*(e^{Nt}) \sim e^{-\frac{N}{2}t} (1+t)^{-\beta} \text{ si } t \ge 0.$$

On va montrer que $g_\beta \notin L^{2,\infty}(\text{Cusp(X)})$. En effet, par (1.1), on a

$$E_k = [3e^{-k}, 4e^{-k}] \times B_{\text{X}}(x_o, 1) \subset B(Y_o, k) \quad \text{si } k \gg 1;$$
$$|E_k| = |B_{\text{X}}(x_o,1)| \int_{3e^{-k}}^{4e^{-k}} y^{-N-1}\, dy = C(N, x_o) e^{Nk}.$$

Soit $Y = (y,x) \in E_k$ ($k \gg 1$), notons $Y_{(k)} = (e^{-\frac{k}{2}}, x)$ et

$$E(k,Y) = \{(y',x'); e^{-(\frac{k}{2}+2)} e^{-k} < y' < 1,\ d_{\text{X}}(x,x') < \sqrt{2e^{-\frac{k}{2}} y' \cosh(\frac{k}{2}+2) - (e^{-k} + y'^2)}\},$$

$$E'(k,Y) = \{(y',x'); e^{-k} < y' < e^{-\frac{k}{2}},\ d_{\text{X}}(x,x') < \sqrt{e^2 y' - (e^{-k} + y'^2)}\} \subset E(k,Y).$$

Par (1.1), on a $E(k,Y) \subset B(Y_{(k)}, \frac{k}{2}+2)$ et $d(Y, Y_{(k)}) < \frac{k}{2}+2$, donc,

$$\begin{aligned} M_* g_\beta(Y) &\ge |B(Y_{(k)}, \frac{k}{2}+2)|^{-1} \int_{B(Y_{(k)}, \frac{k}{2}+2)} g_\beta(Y')\, d\mu(Y') \\ &\ge C e^{-\frac{Nk}{2}} \int_{B(Y_{(k)}, \frac{k}{2}+2)} g_\beta(Y')\, d\mu(Y') \quad \text{par la proposition 3 de [20]} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq C'k^{-\beta}e^{-\frac{Nk}{2}}\int\int_{E(k,Y)}\Big(\frac{2y'}{1+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2(x,x')}\Big)^{\frac{N}{2}}y'^{-N-1}\,dy'd\mu_{\mathrm{X}}(x')\\
&\geq Ck^{-\beta}e^{-\frac{Nk}{2}}\int\int_{E'(k,Y)}y'^{-N-1}\Big(\frac{2y'}{1+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2(x,x')}\Big)^{\frac{N}{2}}\,dy'd\mu_{\mathrm{X}}(x')\\
&\geq C(N)k^{-\beta}e^{-\frac{Nk}{2}}\int_{e^{-k}}^{e^{-\frac{k}{2}}}y'^{-\frac{N}{2}-1}\Big|B_{\mathrm{X}}(x,\sqrt{y'})\Big|\,dy'\\
&\geq C_N k^{1-\beta}e^{-\frac{Nk}{2}}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s>0} s\Big|\{Y\in \mathrm{Cusp(X)}; M_*g_\beta(Y)>s\}\Big|^{\frac{1}{2}}\\
\geq\ &\sup_{k\gg 1}\frac{C_N}{2}k^{1-\beta}e^{-\frac{N}{2}k}\Big|\{Y\in\mathrm{Cusp(X)}; M_*g_\beta(Y)>\frac{C_N}{2}k^{1-\beta}e^{-\frac{N}{2}k}\Big|^{\frac{1}{2}}\\
\geq\ &\sup_{k\gg 1}\frac{C_N}{2}k^{1-\beta}e^{-\frac{N}{2}k}|E_k|^{\frac{1}{2}}=+\infty\quad\text{puisque } \beta<1.
\end{aligned}
$$

Autrement dit, $M_*g_\beta\notin L^{2,\infty}(\mathrm{Cusp(X)})$.
Ceci achève la preuve du théorème 2.2. ■

Comme dans le cadre des espaces symétriques de rang 1 (voir le Corollary 6 de [17]), d'après la relation entre le lemme de couverture et la continuité L^p de l'opérateur maximal non central (voir [7]), on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.3 *Si* X *est une variété compacte, ou bien* X *n'est pas compacte et il existe une constante* $C>1$ *telle que :*

$$C^{-1}r^N\leq |B_{\mathrm{X}}(x,r)|\leq Cr^N,\quad \forall x\in \mathrm{X},\ r>0.$$

Soit $\{B_i; i\in I\}$ *une collection des boules dans* Cusp(X) *satisfaisante* $|\cup B_i|<+\infty$*; alors, on peut choisir un sous-ensemble fini* $J\subset I$ *tel que :*

$$|\cup_{i\in I}B_i|\leq C_*|\cup_{j\in J}B_j|;\quad \|\sum_{j\in J}\chi_{B_j}\|_{L^{2,\infty}(\mathrm{Cusp(X)})}\leq C_*|\cup_{i\in I}B_i|^{\frac{1}{2}},$$

où C_* *est une constante universelle.*

De plus, sous l'hypothèse du corollaire 2.3, par la terminologie de [7], la famille des boules géodésiques dans Cusp(X) a la propriété de couverture V_q s.s.i. $1\leq q<2$.

3 Preuve du théorème 1.2

Dans cette section, on montre le théorème 1.2 en supposant que le théorème 1.3 est prouvé :

Puisque

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 1}(yy')^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{N^2}{4}t}K_1(t,d) &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(yy')^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{N}{2}d} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(yy')^{\frac{N}{2}}\Big(\frac{2yy'}{y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}} \leq Cy^N,\\
\sup_{t\geq 1}K_{N+1}(t,d)\Big(1+\frac{d}{t}\Big)^{\frac{N}{2}} &\leq C\sup_{t\geq 1}e^{-\frac{N}{2}d}e^{-\frac{N^2}{4}t-\frac{d^2}{4t}}\Big(1+\frac{d}{t}\Big)^{\frac{N}{2}}\\
&\leq C_*e^{-Nd} \leq Cy^N\Big(\frac{y'}{y'^2+d_{\mathrm{X}}^2(x,x')}\Big)^N,
\end{aligned}$$

donc, par le théorème 1.3 (choisissons $\omega = \frac{1}{2}$), il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sup_{t\geq 1}p_t(Y,Y') \leq Cy^N\Big[1+\Big(\frac{y'}{y'^2+d_{\mathrm{X}}^2(x,x')}\Big)^N\Big], \quad \forall Y,Y' \in \mathrm{Cusp(X)}.$$

Quand $0 < t < 1$, d'après la proposition 3 et la remarque 1 du théorème 2 de [20], on en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{Cusp(X)}} p_t(Y,Y')|f(Y')|\,d\mu(Y')\\
&= \int_{d\leq\sqrt{t}} p_t(Y,Y')|f(Y')|\,d\mu(Y') + \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{j\sqrt{t}<d\leq(j+1)\sqrt{t}} p_t(Y,Y')|f(Y')|\,d\mu(Y')\\
&\leq C\Big[\frac{\int_{d\leq\sqrt{t}}|f(Y')|\,d\mu(Y')}{|B(Y,\sqrt{t})|} + \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{|B(Y,(j+1)\sqrt{t})|}{|B(Y,\sqrt{t})|}e^{-\frac{j^2}{8}}\frac{\int_{d\leq(j+1)\sqrt{t}}|f(Y')|\,d\mu(Y')}{|B(Y,(j+1)\sqrt{t})|}\Big]\\
&\leq C'Mf(Y)\Big[1+C_1\sum_{j=1}^{+\infty}e^{C_2(j+1)}e^{-\frac{j^2}{8}}\Big]\\
&\leq CMf(Y), \quad \forall Y \in \mathrm{Cusp(X)}, f \in L^1(\mathrm{Cusp(X)}),
\end{aligned}$$

où Mf désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood de f.

Donc, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in L^1$ et tout $Y \in \mathrm{Cusp(X)}$, on a :

$$\begin{aligned}
Pf(Y) &\leq \sup_{0<t\leq 1}\int_{\mathrm{Cusp(X)}} p_t(Y,Y')|f(Y')|\,d\mu(Y') + \int_{\mathrm{Cusp(X)}}\sup_{t\geq 1}p_t(Y,Y')|f(Y')|\,d\mu(Y')\\
&\leq C\Big\{Mf(Y) + y^N\|f\|_1 + y^N\int_{\mathrm{Cusp(X)}}\Big(\frac{y'}{y'^2+d_{\mathrm{X}}^2(x,x')}\Big)^N|f(Y')|\,d\mu(Y')\Big\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $\lambda > 0$ et toute $f \in L^1(\mathrm{Cusp(X)})$, en utilisant le théorème 1 de [20], on a :

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big\{Y \in \mathrm{Cusp(X)}; Pf(Y) > \lambda\Big\}\Big|\\
&\leq \Big|\Big\{Y \in \mathrm{Cusp(X)}; Mf(Y) > \frac{\lambda}{3C}\Big\}\Big| + \Big|\Big\{(y,x) \in \mathrm{Cusp(X)}; y^N\|f\|_1 > \lambda\Big\}\Big|\\
&+ \Big|\Big\{(y,x) \in \mathrm{Cusp(X)}; y^N\int_{\mathrm{Cusp(X)}}\Big(\frac{y'}{y'^2+d_{\mathrm{X}}^2(x,x')}\Big)^N|f(Y')|\,d\mu(Y') > \lambda\Big\}\Big|\\
&\leq C_*\frac{\|f\|_1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.2. ■

4 Preuve des propositions 1.4 et 1.5

Dans cette section, on donne les preuves des propositions 1.4 et 1.5 en supposant que le théorème 1.3 et l'estimation (5.5) sont prouvés :

Avant de donner la démonstration de la proposition 1.4, on remarque que d'après les propositions 2.3 et 2.4 de [21], du théorème 2 de [4], on déduit que :

$$\int_{Nt-R(t)\le d\le Nt+R(t)} p_t(Y,Y')\, d\mu(Y') \longrightarrow 1, \quad t\longrightarrow +\infty,\ \forall Y\in \mathrm{Cusp(X)}.$$

Preuve de la proposition 1.4 :

Il suffit de montrer que

$$\sup_Y \Big[\int_{d\le Nt-R(t)} p_t(Y,Y')\, d\mu(Y') + \int_{d\ge Nt+R(t)} p_t(Y,Y')\, d\mu(Y')\Big] \longrightarrow 0^+, \text{ quand } t\longrightarrow +\infty.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $Nt > R(t)$. D'après le théorème 1.3 (en posant $\omega = \frac{1}{2}$), on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{d\le Nt-R(t)} p_t(Y,Y')\, d\mu(Y') + \int_{d\ge Nt+R(t)} p_t(Y,Y')\, d\mu(Y')\\
\le\ & C\Big[\int_{d\le Nt-R(t)} + \int_{d\ge Nt+R(t)}\Big]\Big((yy')^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{N^2}{4}t} K_1(t,d) + K_{N+1}(t,d)(1+\frac{d}{t})^{\frac{N}{2}}\Big)\, d\mu(Y').
\end{aligned}$$

Pour $s\in\mathbb{R}$, notons $[s]$ la partie entière de s; on a :

$$\begin{aligned}
&\sup_Y \int_{d\le Nt-R(t)} (yy')^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{N^2}{4}t} K_1(t,d)\, d\mu(Y')\\
\le\ & \sup_Y \sum_{j=0}^{[Nt-R(t)]} \int_{j<d\le j+1} (yy')^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{N^2}{4}t} K_1(t,d) y'^{-N-1}\, dy' d\mu_{\mathrm{X}}(x')\\
\le\ & \sup_Y e^{-\frac{N^2}{4}t} \sum_{j=0}^{[Nt-R(t)]} K_1(t,j) \int_{d\le j+1} (\frac{y}{y'})^{\frac{N}{2}} y'^{-1}\, dy' d\mu_{\mathrm{X}}(x')\\
\le\ & \sup_Y e^{-\frac{N^2}{4}t} \sum_{j=0}^{[Nt-R(t)]} K_1(t,j) |\mathrm{X}| \int_{|\ln\frac{y}{y'}|\le j+1} (\frac{y}{y'})^{\frac{N}{2}} y'^{-1}\, dy' \text{ par } (1.1)\\
\le\ & C e^{-\frac{N^2}{4}t} \sum_{j=0}^{[Nt-R(t)]} K_1(t,j) e^{\frac{N}{2}j}\\
\le\ & C_*\Big[e^{-\frac{N^2}{4}t}\int_0^{Nt-R(t)} K_1(t,r) e^{\frac{N}{2}r}\, dr + e^{-\frac{N^2}{4}t} K_1(t,0)\Big]\\
=\ & C_*\Big[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{N}{2}\sqrt{t}}^{-\frac{1}{2}\frac{R(t)}{\sqrt{t}}} e^{-s^2}\, ds + e^{-\frac{N^2}{4}t}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\Big] \longrightarrow 0^+ \quad \text{quand } t\longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

De la même façon, on peut montrer que :

$$\sup_Y \int_{d\geq Nt+R(t)} (yy')^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{N^2}{4}t} K_1(t,d)\, d\mu(Y') \longrightarrow 0^+ \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Enfin, pour montrer

$$\sup_Y \Big[\int_{d\leq Nt-R(t)} + \int_{d\geq Nt+R(t)} \Big] K_{N+1}(t,d)(1+\frac{d}{t})^{\frac{N}{2}}\, d\mu(Y') \longrightarrow 0^+ \text{ quand } t \longrightarrow +\infty,$$

il suffit d'utiliser la proposition 3 de [20] et l'estimation (5.7). ■

On donne maintenant la **Preuve de la proposition 1.5 :**

Quand $q = +\infty$, choisissons $f \equiv 1$, alors, pour $1 \leq p < +\infty$ et $t > 0$, on a :

$$\|e^{t\triangle} f\|_p = \|f\|_p = +\infty.$$

Dans le cas où $q \neq +\infty$, on peut supposer que $q < p$ (sinon, il suffit de montrer que $e^{t\triangle}$ n'est pas borné de $L^{p'}$ dans $L^{q'}$ avec $1/p' = 1 - 1/p$). Fixons $t > 0$ et $x_o \in \mathrm{X}$, choisissons f_n $(n \geq 1)$ comme la fonction caractéristique de $B((n, x_o), \min(1, \sqrt{t}))$. Remarquons que $\|f_n\|_1 \sim n^{-N}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ (voir la proposition 3 de [20]) et que $s_* \sim n$ si $(s_*, x_*) \in B((n, x_o), \min(1, \sqrt{t}))$ $(n \gg 1)$ en utilisant (1.1). D'après (5.5), on en déduit qu'il existe une constante $C(t) > 0$ telle que :

$$e^{t\triangle} f_n(Y) \geq C(t) n^N \|f_n\|_1, \quad \forall Y \in B((n, x_o), \min(1, \sqrt{t})).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\|e^{t\triangle} f_n\|_p}{\|f_n\|_q} &\geq C(t) n^N \|f_n\|_1 \|f_n\|_p \|f_n\|_q^{-1} = C(t) n^N \|f_n\|_1^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\ &\geq C_*(t) n^{N(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \longrightarrow +\infty \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la proposition. ■

Remarque. Ce serait intéressant d'étudier la norme de $e^{t\triangle}$ de L^p dans L^p.

5 Preuve du théorème 1.3

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 1.3. Dans toute la suite, on suppose que X est une variété riemannienne compacte, sans bord et de dimension $N \geq 2$. Notons ρ son rayon d'injectivité et $|\mathrm{X}|$ son volume. Pour montrer le théorème 1.3, on distingue les 4 cas suivants : (1) $Y, Y' \in \mathrm{Cusp(X)}$ satisfont $d_{\mathrm{X}}(x, x') \leq \delta < \rho$ avec $\delta \geq \frac{\rho}{4}$ fixé; (2) Y, Y' satisfont $d_{\mathrm{X}}(x, x') \geq \frac{\rho}{2}$; (3) Y, Y' satisfont

$$\frac{1+d}{1+d+t} \Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)} \Big)^{\frac{N}{2}} \ll 1;$$

et (4) Y, Y' satisfont $d_{\mathrm{X}}(x, x') \leq \delta < \rho$ avec $\delta \geq \frac{\rho}{4}$ fixé et

$$\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}} \gg 1.$$

Plus précisement, on a les résultats suivants :

THÉORÈME 5.1 *Soit* X *une variété compacte, sans bord et de dimension $N \geq 2$. Alors, pour tout $\frac{\rho}{4} \leq \delta < \rho$ fixé, il existe une constante $C(\delta) > 0$ telle que pour tous $Y, Y' \in \mathrm{Cusp}(\mathrm{X})$ satisfaisants $d_{\mathrm{X}}(x, x') \leq \delta$, on a :*

$$p_t(Y,\, Y') \leq C(\delta) \cdot \Big\{(yy')^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{N^2}{4}t} K_1(t, d) + K_{N+1}(t, d)\Big\}. \tag{5.1}$$

THÉORÈME 5.2 *Sous l'hypothèse du théorème 5.1. Soit $0 < \omega \leq 1$. Alors, il existe une constante $C(\omega) > 0$ telle que pour tous $Y, Y' \in \mathrm{Cusp}(\mathrm{X})$ satisfaisants $d_{\mathrm{X}}(x, x') \geq \frac{\rho}{2}$, on a :*

$$p_t(Y, Y') \leq C(\omega)(yy')^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{N^2}{4}t} K_1(t, d)\Big[1 + \frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{N-\frac{1}{2}+\omega}\Big]. \tag{5.2}$$

THÉORÈME 5.3 *Sous l'hypothèse du théorème 5.1, il existe une constante $C > 0$ telle qu'on a (uniformément) :*

$$p_t(Y, Y') = \frac{C}{|\mathrm{X}|}(yy')^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{N^2}{4}t} K_1(t, d)\Big(1 + o(1)\Big) \tag{5.3}$$

quand Y, Y' satisfont

$$\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}} \ll 1.$$

THÉORÈME 5.4 *Sous l'hypothèse du théorème 5.1, pour tout $\frac{\rho}{4} \leq \delta < \rho$ fixé, quand Y, Y' satisfont $d_{\mathrm{X}}(x, x') \leq \delta$ et*

$$\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}} \gg 1,$$

on a (uniformément) :

$$p_t(Y, Y') = \xi u_o(x, x') K_{N+1}(t, d)\Big(1 + o(1)\Big), \tag{5.4}$$

où $\xi > 0$ est une constante et $u_o(x, x')$ est définie comme dans [5] ((10), p. 252).

Remarque. 1. En utilisant l'estimation de K_{N+1} (voir par exemple le theorem 3.1 de [12]), dans l'estimation (5.1), on peut remplacer $K_{N+1}(t, d)$ par

$$(yy')^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{N^2}{4}t} K_1(t, d) \frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}}.$$

2. Sous les hypothèses du théorème 5.1, les estimations (5.1) et (5.2) permettent de retrouver directement les estimations supérieures de p_t obtenues dans [18], [11] et [21].

L'estimation (5.3) permet d'obtenir :

COROLLAIRE 5.5 *Si* X *est une variété compacte, sans bord et de dimension* $N \geq 2$. *Pour tout* $\epsilon > 0$ *fixé, il existe une constante* $C(\epsilon) \geq 1$ *telle que :*

$$C(\epsilon)^{-1}(yy')^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{N^2}{4}t}K_1(t,d) \leq p_t(Y,Y') \leq C(\epsilon)(yy')^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{N^2}{4}t}K_1(t,d), \tag{5.5}$$

pour tout $(t,Y,Y') \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{Cusp(X)} \times \mathrm{Cusp(X)}$ *satisfaisant* $\min\{t, yy'\} \geq \epsilon$.

Preuve. Il suffit de considérer les quatre cas suivants : (1) $t \geq \epsilon$ et $yy' \longrightarrow +\infty$; (2) $t \longrightarrow +\infty$ et il existe deux constantes $\sigma, C > 0$ telles que $\sigma \leq y, y' \leq C$; (3) $\max\{y,y'\} \longrightarrow +\infty$ et il existe deux constantes $\sigma, C > 0$ telles que $\sigma \leq yy' \leq C$ et $t \geq \sigma$; (4) il existe deux constantes $\sigma, C > 0$ telles que $\sigma \leq t, y, y' \leq C$. ■

Remarque. Par (1.1), on peut remplacer le facteur $K_1(t,d)$ par $K_1(t, |\ln \frac{y}{y'}|)$ dans l'estimation (5.5).

Cette section est organisée de la façon suivante : dans la section 5.1, on rappelle les propriétés de K_n et donne les lemmes dont on a besoin dans cette section. La preuve de l'estimation (5.2) ainsi que celle de l'estimation (5.3) sous l'hypothèse que $d_{\mathrm{X}} \geq \frac{\rho}{2}$ sont données dans la section 5.2. Dans la section 5.3, on montre les autres estimations.

5.1 Quelques propriétés des K_n et des lemmes préliminaires

Rappelons les propriétés suivantes de K_n (voir par exemple [12]) :

$$K_{n+2}(t,r) = -\frac{e^{-nt}}{2\pi \sinh r}\frac{\partial K_n(t,r)}{\partial r}, \quad K_n(t,r) = \sqrt{2}e^{\frac{2n-1}{4}t}\int_r^{+\infty}\frac{K_{n+1}(t,\lambda)\sinh\lambda}{\sqrt{\cosh\lambda - \cosh r}}d\lambda, \tag{5.6}$$

$$K_{n+1}(t,r) \sim t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{n^2}{4}t-\frac{r^2}{4t}}\frac{1+r}{1+r+t}\Big(\frac{1+r+t}{t\cosh r}\Big)^{\frac{n}{2}}, \quad \forall t > 0, r \geq 0 \ (n \geq 1). \tag{5.7}$$

Dans la suite, pour simplifier les notations, on définit les trois fonctions $\rho(\cdot)$, $\eta(\cdot)$ et $\rho.$ comme suit :

$$\rho(s) = \operatorname{arc\,cosh}\frac{y^2+y'^2+s^2}{2yy'}, \ \rho_s = \operatorname{arc\,cosh}\frac{y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2+s}{2yy'}, \ \forall s \geq 0; \tag{5.8}$$

$$\eta(s) = \sqrt{2yy'\cosh s - (y^2+y'^2)}, \ \forall s \geq |\ln\frac{y}{y'}|.$$

En particulier, par (1.1), on a $d = \rho(d_{\mathrm{X}}) = \rho_0$.

Pour $m \in \mathbb{N}$ fixé, d'après (5.6), on en déduit que

$$\frac{\partial^m}{\partial h^m}K_2(t,\rho_h) = (-\pi)^m(yy')^{-m}e^{m(m+1)t}K_{2+2m}(t,\rho_h), \tag{5.9}$$

et qu'il existe des constantes $C(m,k) \in \mathbb{N}$ ($k = [\frac{m+1}{2}], \cdots, m$) telles que :

$$\frac{\partial^m}{\partial\tau^m}K_2(t,\rho(\tau)) = \sum_{k=[\frac{m+1}{2}]}^{m} C(m,k)(-\frac{2\pi}{yy'})^k e^{k(k+1)t}\tau^{2k-m}K_{2(k+1)}(t,\rho(\tau)). \tag{5.10}$$

Dans cet article, on a besoin aussi des lemmes suivants :

LEMME 5.6 *Pour tous $\xi \geq 0$ et $\gamma > 1$, on a :*

$$\frac{\sqrt{yy'}}{2} K_1(t, \rho(\gamma\xi)) e^{-\frac{t}{4}} \Big(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{\gamma}\Big) \leq \int_{\xi}^{+\infty} K_2 \, d\tau \leq \frac{\sqrt{yy'}}{2} K_1(t, \rho(\xi)) e^{-\frac{t}{4}}. \tag{5.11}$$

Preuve. Rappelons que

$$K_2 = K_2(t, \rho(\tau)) = \sqrt{2}(4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{4}} \int_{\rho(\tau)}^{+\infty} \frac{s e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{\cosh s - \cosh \rho(\tau)}} \, ds.$$

Pour $\xi \geq 0$, on remarque que :

$$\int_{\xi}^{+\infty} \Big[\int_{\rho(\tau)}^{+\infty} \frac{s e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{\cosh s - \cosh \rho(\tau)}} \, ds \Big] \, d\tau = \int_{\rho(\xi)}^{+\infty} s e^{-\frac{s^2}{4t}} \Big[\int_{\xi}^{\eta(s)} \frac{d\tau}{\sqrt{\cosh s - \cosh \rho(\tau)}} \Big] \, ds.$$

Or,

$$\int_{\xi}^{\eta(s)} \frac{d\tau}{\sqrt{\cosh s - \cosh \rho(\tau)}} = \sqrt{2yy'} \int_{\xi}^{\eta(s)} \frac{d\tau}{\sqrt{\eta^2(s) - \tau^2}} = \sqrt{2yy'} \Big[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\xi}{\eta(s)} \Big].$$

Par conséquent, d'une part, on a :

$$\int_{\xi}^{+\infty} K_2 \, d\tau \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{2yy'} \cdot \sqrt{2}(4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{4}} \int_{\rho(\xi)}^{+\infty} s e^{-\frac{s^2}{4t}} \, ds = \frac{\sqrt{yy'}}{2} K_1(t, \rho(\xi)) e^{-\frac{t}{4}}.$$

D'autre part, pour tout $\gamma > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{+\infty} K_2 \, d\tau &\geq \sqrt{2}(4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{4}} \int_{\rho(\gamma\xi)}^{+\infty} s e^{-\frac{s^2}{4t}} \Big[\int_{\xi}^{\eta(s)} \frac{d\tau}{\sqrt{\cosh s - \cosh \rho(\tau)}} \Big] \, ds \\ &\geq 2(4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{4}} \sqrt{yy'} \Big(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\xi}{\gamma\xi} \Big) \int_{\rho(\gamma\xi)}^{+\infty} s e^{-\frac{s^2}{4t}} \, ds \\ &= \frac{\sqrt{yy'}}{2} K_1(t, \rho(\gamma\xi)) e^{-\frac{t}{4}} \Big(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{\gamma}\Big). \end{aligned}$$

D'où le lemme. ■

LEMME 5.7 *Pour $s_o > 0$ et $j \geq 1$ fixés, il existe une constante $C(s_o, j) \geq 0$ telle que pour tout $s \geq s_o$, on a :*

$$\int_{s}^{+\infty} e^{j(j+1)t} K_{2(j+1)}(t, \rho(\tau)) \Big(\frac{\tau}{yy'}\Big)^j \, d\tau \leq C(s_o, j) \sum_{\beta=1}^{j} e^{\beta(\beta-1)t} K_{2\beta}(t, \rho(s)) \Big(\frac{s}{yy'}\Big)^{\beta-1}. \tag{5.12}$$

Preuve. En effet, quand $j - 1 \geq 0$, par (5.6), on a :

$$\int_{s}^{+\infty} e^{j(j+1)t} K_{2(j+1)}(t, \rho(\tau)) \Big(\frac{\tau}{yy'}\Big)^j \, d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_s^{+\infty} e^{j(j+1)t}\Big(\frac{\tau}{yy'}\Big)^{j-1}(-2\pi e^{2jt})^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau}K_{2j}(t,\rho(\tau))\,d\tau \\
&= (-2\pi)^{-1}e^{j(j-1)t}\int_s^{+\infty}\Big(\frac{\tau}{yy'}\Big)^{j-1}dK_{2j}(t,\rho(\tau)) \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{j(j-1)t}K_{2j}(t,\rho(s))\Big(\frac{s}{yy'}\Big)^{j-1}+\frac{j-1}{2\pi}\int_s^{+\infty}e^{j(j-1)t}K_{2j}\frac{1}{yy'}\Big(\frac{\tau}{yy'}\Big)^{j-2}d\tau \\
&\le \frac{1}{2\pi}e^{j(j-1)t}K_{2j}(t,\rho(s))\Big(\frac{s}{yy'}\Big)^{j-1}+\frac{j-1}{2\pi s}\int_s^{+\infty}e^{j(j-1)t}K_{2j}\Big(\frac{\tau}{yy'}\Big)^{j-1}d\tau.
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient le lemme . ■

LEMME 5.8 *Pour $m \ge 2$ fixé, on a :*

$$\int_0^{+\infty} K_m(t,\rho_h)h^{-\frac{1}{2}}\,dh = (yy')^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{2m-3}{4}t}K_{m-1}(t,d). \tag{5.13}$$

Preuve : La preuve est élémentaire, il suffit d'utiliser (5.6). ■

LEMME 5.9 *Soient $d_{\mathrm{X}} \ge \frac{\rho}{2}$, $\epsilon = \frac{\rho}{4}(1+\frac{1+d}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)})^{-1}$, $\mathrm{diam(X)} = \sup_{x,x'\in \mathrm{X}} d_{\mathrm{X}}$ et $\beta \ge 2$. Alors, il existe une constante $C(\beta,\mathrm{diam(X)}) > 0$ telle que :*

$$\int_{d_{\mathrm{X}}-\epsilon}^{d_{\mathrm{X}}} K_\beta(t,\rho(\tau))\,d\tau \le C(\beta,\mathrm{diam(X)})K_\beta(t,d)\epsilon. \tag{5.14}$$

Preuve. En effet, quand $\frac{d_{\mathrm{X}}}{2} \le d_{\mathrm{X}}-\epsilon \le \tau \le d_{\mathrm{X}}$, en utilisant le fait que $d=\rho(d_{\mathrm{X}})$, d'après (5.7) et la définition de $\rho(\tau)$, on a :

$$K_\beta(t,\rho(\tau)) \le C(\beta)K_\beta(t,d)e^{\frac{d^2-\rho^2(\tau)}{4t}}.$$

Quand $0 \le s \le \epsilon$, on remarque que :

$$\begin{aligned}
0 \le \frac{d^2-\rho^2(d_{\mathrm{X}}-s)}{4t} &= \frac{1}{4t}s\cdot 2\xi\frac{1}{\sinh\xi}\frac{\sigma}{yy'} \quad \text{où } \xi=\rho(\sigma) \text{ et } d_{\mathrm{X}}-s\le\sigma\le d_{\mathrm{X}} \\
&\le \frac{1}{4t}2\sigma\frac{1+\xi}{yy'\cosh\xi}s \le \frac{1}{4t}2d_{\mathrm{X}}\frac{1+d}{\frac{y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2}{2\times 2}}s \\
&\le 2\mathrm{diam(X)}\frac{1+d}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}s.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Donc

$$\int_{d_{\mathrm{X}}-\epsilon}^{d_{\mathrm{X}}} e^{\frac{d^2-\rho^2(\tau)}{4t}}\,d\tau = \int_0^{\epsilon} e^{\frac{d^2-\rho^2(d_{\mathrm{X}}-s)}{4t}}\,ds \le \int_0^{\epsilon} e^{2\mathrm{diam(X)}\frac{1+d}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}s}\,ds \le C(\mathrm{diam(X)})\epsilon$$

puisque $2\mathrm{diam(X)}\frac{1+d}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\epsilon \le (\mathrm{diam(X)})^2$.

D'où le lemme. ■

LEMME 5.10 *Soient* $\frac{\rho}{4} \le \delta < \rho$, $\delta_1 = \delta + \frac{\rho-\delta}{4}$ *et* $\alpha > 0$ *fixés. Alors, si* $d_{\mathrm{X}} \le \delta$, *on a :*

$$\frac{1+\rho(\delta_1)}{1+\rho(\delta_1)+t}\Big(\frac{1+\rho(\delta_1)+t}{t(y^2+y'^2+\delta_1^2)}\Big)^{\alpha} \longrightarrow 0^+ \quad \text{quand } \frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}} \longrightarrow 0^+. \tag{5.16}$$

Preuve. En utilisant (1.1), on peut montre ce lemme. ■

LEMME 5.11 *Soient* $\frac{\rho}{4} \le \delta < \rho$ *et* $\delta_1 = \delta + \frac{\rho-\delta}{4}$ *fixés. Alors, pour tout* $\beta \ge 2$, *il existe une constante* $C(\beta,\delta,\rho) > 0$ *telle que :*

$$e^{\frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}-1)t} K_\beta(t,\rho(\delta_1))(yy')^{1-\frac{\beta}{2}} \le C(\beta,\delta,\rho) K_1(t,d) e^{-\frac{t}{4}}\sqrt{yy'}, \tag{5.17}$$

pour tous $Y, Y' \in \mathrm{Cusp(X)}$ *satisfaisants* $d_{\mathrm{X}} \le \delta$.
De plus, lorsque $d_{\mathrm{X}} \le \delta$ *et* $\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}} \longrightarrow 0^+$, *on a :*

$$e^{\frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}-1)t} K_\beta(t,\rho(\delta_1))(yy')^{1-\frac{\beta}{2}} = o\Big(K_1(t,d) e^{-\frac{t}{4}}\sqrt{yy'}\Big). \tag{5.18}$$

Preuve. On commence par montrer l'estimation (5.17). D'après l'estimation (5.7), il suffit de montrer qu'il existe une constante $C_*(\beta,\delta,\rho) > 0$ telle que :

$$\frac{1+\rho(\delta_1)}{1+\rho(\delta_1)+t}\Big(\frac{1+\rho(\delta_1)+t}{t(y^2+y'^2+\delta_1^2)}\Big)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}} \le C_*(\beta,\delta,\rho)\exp\big(\frac{\rho^2(\delta_1)-d^2}{4t}\big), \quad \forall d_{\mathrm{X}} \le \delta.$$

En effet, en rappelant la définition de $\rho(\cdot)$ (voir (5.8)), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\rho^2(\delta_1)-d^2}{4t} &\ge \frac{\rho^2(\delta_1)-\rho^2(\delta)}{4t} = \frac{1}{4t}(\delta_1-\delta)2\xi\frac{1}{\sinh\xi}\frac{\gamma}{yy'} \quad \text{où } \delta \le \gamma \le \delta_1 \text{ et } \xi = \rho(\gamma)\\
&\ge \frac{\delta}{8}(\rho-\delta)\frac{1}{tyy'}\frac{\xi}{\sinh\xi}\\
&\ge \frac{\delta}{8}(\rho-\delta)\frac{1}{tyy'}\frac{\rho(\delta_1)}{\sinh\rho(\delta_1)} \quad \text{puisque } \tfrac{h}{\sinh h} \text{ est décroissante par rapport à } h>0\\
&\ge C\frac{\delta}{8}(\rho-\delta)\frac{1}{tyy'}\frac{1+\rho(\delta_1)}{\cosh\rho(\delta_1)} \quad \text{puisque } \tfrac{h}{\sinh h} \sim \tfrac{1+h}{\cosh h}, \forall h>0.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{1+\rho(\delta_1)}{1+\rho(\delta_1)+t}\Big(\frac{1+\rho(\delta_1)+t}{t(y^2+y'^2+\delta_1^2)}\Big)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}} &\le \Big(\frac{1}{2tyy'}\frac{1+\rho(\delta_1)}{\cosh\rho(\delta_1)} + \frac{1}{y^2+y'^2+\delta_1^2}\Big)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}\\
&\le C_*(\beta,\delta,\rho)\exp\Big(\frac{\rho^2(\delta_1)-d^2}{4t}\Big).
\end{aligned}$$

Par (5.7) et (5.16), on obtient (5.18). ■

5.2 Démonstration de l'estimation (5.2)

Le but de cette section est de montrer l'estimation (5.2) et l'estimation (5.3) sous l'hypothèse que $d_{\mathrm{X}} \geq \frac{\rho}{2}$:

Notons λ_1 la première valeur propre non nulle du laplacien sur X. Quand Y, Y' satisfont $d_{\mathrm{X}} \geq \frac{\rho}{2}$, posons

$$\epsilon = \epsilon(Y, Y') = \frac{\rho}{4}\Big(1 + \frac{1+d}{t(y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{-1}, \quad \Phi(\tau) = \Phi_{(Y,Y')}(\tau) = \eta(\frac{\tau - d_{\mathrm{X}}}{\epsilon}) \ (\tau \in \mathbb{R}),$$

$$\Psi(\xi) = \Psi_{(t,Y,Y')}(\xi) = \kappa(\xi) \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) K_2 \cos \tau\xi \, d\tau, \quad \Psi_{(\alpha)}(\xi) = (1+\xi^2)^\alpha \Psi(\xi) \ (\alpha > \frac{N}{2}, \xi \in \mathbb{R}),$$

où $\eta, \kappa \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfont $0 \leq \eta, \kappa \leq 1$,

$$\eta(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -1, \\ 1 & \text{si } s \geq 0, \end{cases} \quad \text{et } \kappa(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq |\xi| \leq \frac{\sqrt{\lambda_1}}{4}, \\ 1 & \text{si } |\xi| \geq \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2}. \end{cases} \tag{5.19}$$

Comme $\cos t\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}}$ a la propriété de propagation à vitesse 1, on a donc :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} K_2 \cos \tau \sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}} \, d\tau(x, x') = \int_0^{+\infty} \Phi K_2 \cos \tau \sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}} \, d\tau(x, x') \\ = & \ \frac{1}{|\mathrm{X}|} \int_0^{+\infty} \Phi K_2 \, d\tau + \Psi(\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}})(x, x') = I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{5.20}$$

D'après la définition de Φ, on a :

$$\frac{1}{|\mathrm{X}|} \int_{d_{\mathrm{X}}}^{+\infty} K_2 \, d\tau \leq I_1 \leq \frac{1}{|\mathrm{X}|} \int_{d_{\mathrm{X}}-\epsilon}^{+\infty} K_2 \, d\tau.$$

D'une part, par (5.11) et (5.15), on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \Big[\frac{\sqrt{yy'}}{2} e^{-\frac{t}{4}} K_1(t, d)\Big]^{-1} \int_{d_{\mathrm{X}}-\epsilon}^{+\infty} K_2 \, d\tau \leq \exp\Big(\frac{d^2 - \rho^2(d_{\mathrm{X}} - \epsilon)}{4t}\Big) \\ = & \ \Big[1 + 0\Big(\frac{1+d}{t(y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)}\Big(1 + \frac{1+d}{t(y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{-1}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

D'autre part, quand

$$\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{N/2} \longrightarrow 0^+,$$

en remarquant que

$$\frac{1+d}{t(y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)} \leq 2^{\frac{2}{N}} \Big[\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}}\Big]^{\frac{2}{N}},$$

par (5.11) avec $\gamma = (\frac{1+d}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)})^{-\frac{1}{3}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Big[\frac{\sqrt{yy'}}{2}e^{-\frac{t}{4}}K_1(t,d)\Big]^{-1}\int_{d_{\mathrm{X}}}^{+\infty} K_2\,d\tau &\geq \Big(1-\frac{2}{\pi}\arcsin\gamma^{-1}\Big)\exp\Big(-\frac{\rho^2(\gamma d_{\mathrm{X}})-\rho^2(d_{\mathrm{X}})}{4t}\Big)\\
&\geq \Big(1-\frac{2}{\pi}\arcsin\gamma^{-1}\Big)\exp\Big(-(\gamma-1)d_{\mathrm{X}}\times\frac{2\gamma d_{\mathrm{X}}}{4tyy'}\times\frac{d}{\sinh d}\Big)\\
&\geq \Big(1-\frac{2}{\pi}\arcsin\gamma^{-1}\Big)\exp\Big(-\gamma^2 d_{\mathrm{X}}^2\frac{1+d}{2tyy'\cosh d}\Big)\\
&= \Big(1+0(\gamma^{-1})\Big)\Big(1+0(\gamma^{-1})\Big)\\
&= \Big(1+0\Big\{\Big[\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}}\Big]^{\frac{2}{3N}}\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_1 \leq C\frac{\sqrt{yy'}}{2|\mathrm{X}|}e^{-\frac{t}{4}}K_1(t,d), \tag{5.21}$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{yy'}}{2|\mathrm{X}|}e^{-\frac{t}{4}}K_1(t,d)(1+o(1)) \text{ quand } \tfrac{1+d}{1+d+t}\big(\tfrac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\big)^{\frac{N}{2}} \longrightarrow 0^+. \tag{5.22}$$

Pour estimer I_2, on peut utiliser l'idée de la démonstration du Lemma 5 de [10]. Plus précisement, parce que $\Psi(\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}})(x_1,x_2)\in C(\mathrm{X}\times\mathrm{X})$ et que l'opérateur $(I-\triangle_{\mathrm{X}})^{-\frac{\alpha}{2}}$ $(\alpha>\frac{N}{2})$ est borné de $L^1(\mathrm{X})$ dans $L^2(\mathrm{X})$ et aussi de $L^2(\mathrm{X})$ dans $L^\infty(\mathrm{X})$, on a donc

$$\begin{aligned}
&|I_2| \leq \|\Psi(\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}})\|_{L^1(\mathrm{X})\longrightarrow L^\infty(\mathrm{X})}\\
\leq\;& \|(I-\triangle_{\mathrm{X}})^{-\frac{\alpha}{2}}\Psi_{(\alpha)}(\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}})(I-\triangle_{\mathrm{X}})^{-\frac{\alpha}{2}}\|_{L^1\longrightarrow L^\infty}\\
\leq\;& \|(I-\triangle_{\mathrm{X}})^{-\frac{\alpha}{2}}\|_{L^1\longrightarrow L^2}\cdot\|\Psi_{(\alpha)}(\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}})\|_{L^2\longrightarrow L^2}\cdot\|(I-\triangle_{\mathrm{X}})^{-\frac{\alpha}{2}}\|_{L^2\longrightarrow L^\infty}\\
\leq\;& C_\alpha\|\Psi_{(\alpha)}(\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}})\|_{L^2\longrightarrow L^2}\leq C_\alpha\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\Psi_{(\alpha)}(\xi)|,
\end{aligned}$$

en particulier, si on choisit $\alpha=\frac{N+\omega}{2}$ avec $0<\omega\leq 1$, alors

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq C'_\omega\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\Big|(1+\xi^2)^{\frac{N+\omega}{2}}\kappa(\xi)\int_0^{+\infty}\Phi K_2\cos\tau\xi\,d\tau\Big|\\
&\leq C_\omega\sup_{\xi\geq\frac{\sqrt{\lambda_1}}{4}}\Big|\xi^{N+\omega}\int_0^{+\infty}\Phi K_2\cos\tau\xi\,d\tau\Big|.
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\Big|\xi^{N+\omega}\int_0^{+\infty}\Phi K_2\cos\tau\xi\,d\tau\Big|\leq\xi^{\omega-1}\int_0^{+\infty}\Big|\frac{\partial^{N+1}}{\partial\tau^{N+1}}(\Phi K_2)\Big|\,d\tau.$$

Mais

$$\int_0^{+\infty}\Big|\frac{\partial^{N+1}}{\partial\tau^{N+1}}(\Phi K_2)\Big|\,d\tau$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_* \sum_{j=0}^{N+1} \int_0^{+\infty} |\Phi^{(j)}| \Big| \frac{\partial^{N+1-j}}{\partial \tau^{N+1-j}} K_2 \Big| \, d\tau \\
&\leq C \sum_{j=1}^{N+1} \epsilon^{-j} \int_{d_{\mathrm{X}}-\epsilon}^{d_{\mathrm{X}}} \Big| \frac{\partial^{N+1-j}}{\partial \tau^{N+1-j}} K_2 \Big| \, d\tau + C_* \int_0^{+\infty} \Phi \Big| \frac{\partial^{N+1}}{\partial \tau^{N+1}} K_2 \Big| \, d\tau.
\end{aligned}$$

D'une part, d'après (5.10) et (5.14), on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N+1} \epsilon^{-j} \int_{d_{\mathrm{X}}-\epsilon}^{d_{\mathrm{X}}} \Big| \frac{\partial^{N+1-j}}{\partial \tau^{N+1-j}} K_2 \Big| \, d\tau \\
\leq\ & C \sum_{j=1}^{N+1} \epsilon^{-j} \sum_{\beta \leq N+1-j} \int_{d_{\mathrm{X}}-\epsilon}^{d_{\mathrm{X}}} K_{2(\beta+1)}(t, \rho(\tau)) e^{\beta(\beta+1)t} (yy')^{-\beta} \, d\tau \\
\leq\ & C^* \sum_{j=1}^{N+1} \epsilon^{1-j} \sum_{\beta \leq N+1-j} K_{2(\beta+1)}(t, d) e^{\beta(\beta+1)t} (yy')^{-\beta} \\
\leq\ & C_* K_1(t,d) e^{-\frac{t}{4}} (yy')^{\frac{1}{2}} \frac{1+d}{1+d+t} \Big[\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)} \Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)} \Big)^{N+\frac{1}{2}} \Big],
\end{aligned}$$

puisque $d_{\mathrm{X}} \geq \frac{\rho}{2}$, $\epsilon = \frac{\rho}{4}(1 + \frac{1+d}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)})^{-1}$ et $K_{2(\beta+1)}$ satisfont l'estimation (5.7).

D'autre part, par (5.10), (5.12) et (5.14), on en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \Phi \Big| \frac{\partial^{N+1}}{\partial \tau^{N+1}} K_2 \Big| \, d\tau \\
\leq\ & C \sum_{\beta=[\frac{N+2}{2}]}^{N+1} e^{\beta(\beta+1)t} \int_{d_{\mathrm{X}}-\epsilon}^{+\infty} K_{2(\beta+1)}(t, \rho(\tau)) \Big(\frac{\tau}{yy'} \Big)^{\beta} d\tau \\
=\ & C \sum_{\beta=[\frac{N+2}{2}]}^{N+1} e^{\beta(\beta+1)t} \Big[\int_{d_{\mathrm{X}}-\epsilon}^{d_{\mathrm{X}}} + \int_{d_{\mathrm{X}}}^{+\infty} \Big] \\
\leq\ & C_* \sum_{\beta=[\frac{N+2}{2}]}^{N+1} \Big[e^{\beta(\beta+1)t} (yy')^{-\beta} K_{2(\beta+1)}(t,d) \epsilon + \sum_{j=1}^{\beta} e^{j(j-1)t} K_{2j}(t,d) (yy')^{1-j} \Big] \\
\leq\ & C \sum_{j=1}^{N+1} e^{j(j-1)t} K_{2j}(t,d) (yy')^{1-j} + e^{(N+1)(N+2)t} (yy')^{-(N+1)} K_{2(N+2)}(t,d) \epsilon \\
\leq\ & C_* K_1(t,d) e^{-\frac{t}{4}} (yy')^{\frac{1}{2}} \frac{1+d}{1+d+t} \Big[\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)} \Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)} \Big)^{N+\frac{1}{2}} \Big],
\end{aligned}$$

puisque $d_{\mathrm{X}} \geq \frac{\rho}{2}$, $\epsilon = \frac{\rho}{4}(1 + \frac{1+d}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)})^{-1}$ et $K_{2(\beta+1)}$ satisfont l'estimation (5.7).

Donc,

$$\Big[\sqrt{yy'} K_1(t,d) e^{-\frac{t}{4}} \frac{1+d}{1+d+t} \Big]^{-1} \Big| \xi^{N+\omega} \int_0^{+\infty} \Phi K_2 \cos \tau\xi \, d\tau \Big|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C'\xi^{\omega-1}\Big[\sqrt{yy'}K_1(t,d)e^{-\frac{t}{4}}\frac{1+d}{1+d+t}\Big]^{-1}\int_0^{+\infty}\Big|\frac{\partial^{N+1}}{\partial\tau^{N+1}}(\Phi K_2)\Big|\,d\tau\\
&\leq C\xi^{\omega-1}\Big[\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{N+\frac{1}{2}}\Big].
\end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned}
&\Big[\sqrt{yy'}K_1(t,d)e^{-\frac{t}{4}}\frac{1+d}{1+d+t}\Big]^{-1}\Big|\xi^{N+\omega}\int_0^{+\infty}\Phi K_2\cos\tau\xi\,d\tau\Big|\\
&\leq C'\Big[\sqrt{yy'}K_1(t,d)e^{-\frac{t}{4}}\frac{1+d}{1+d+t}\Big]^{-1}\xi^{\omega}\int_0^{+\infty}\Big|\frac{\partial^{N}}{\partial\tau^{N}}(\Phi K_2)\Big|\,d\tau\\
&\leq C\xi^{\omega}\Big[\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{N-\frac{1}{2}}\Big].
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\Big|\xi^{N+\omega}\int_0^{+\infty}\Phi K_2\cos\tau\xi\,d\tau\Big|\\
&\leq C\Big[\xi^{\omega-1}\int_0^{+\infty}\Big|\frac{\partial^{N+1}}{\partial\tau^{N+1}}(\Phi K_2)\Big|\,d\tau\Big]^{1-\omega}\times\Big[\xi^{\omega}\int_0^{+\infty}\Big|\frac{\partial^{N}}{\partial\tau^{N}}(\Phi K_2)\Big|\,d\tau\Big]^{\omega}\\
&\leq C\sqrt{yy'}K_1(t,d)e^{-\frac{t}{4}}\frac{1+d}{1+d+t}\Big[\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{N-\frac{1}{2}+\omega}\Big].
\end{aligned}$$

Autrement dit, quand $d_{\mathrm{X}}\geq\frac{\rho}{2}$, on a :

$$|I_2|\leq C_\omega\sqrt{yy'}K_1(t,d)e^{-\frac{t}{4}}\frac{1+d}{1+d+t}\Big[\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{N-\frac{1}{2}+\omega}\Big]. \tag{5.23}$$

Par (1.3), (5.20), (5.21) et (5.23), on obtient l'estimation (5.2).
On montre maintenant l'estimation (5.3) sous l'hypothèse que $d_{\mathrm{X}}\geq\frac{\rho}{2}$:
Quand $\sigma>0$ fixé et $d_{\mathrm{X}}\geq\frac{\rho}{2}$, on voit facilement que :

$$\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}}\longrightarrow 0^+\Longrightarrow\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\sigma}\longrightarrow 0^+.$$

Par conséquent, par (1.3), (5.20), (5.22) et (5.23), on obtient :

$$p_t(Y,Y')=\frac{C}{|\mathrm{X}|}(yy')^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{N^2}{4}t}K_1(t,d)\Big(1+o(1)\Big)\text{ quand }\frac{1+d}{1+d+t}\big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\big)^{\frac{N}{2}}\longrightarrow 0^+.$$

5.3 Démonstration de l'estimation (5.1)

Dans cette section, on va montrer les estimations (5.1) et (5.4), on montre aussi l'estimation (5.3) sous l'hypothèse que $d_{\mathrm{X}}\leq\frac{\rho}{2}$. Dans toute la suite, on suppose que $\frac{\rho}{4}\leq\delta<\rho$ et que $x,x'\in\mathrm{X}$ sont fixés tels que $d_{\mathrm{X}}\leq\delta$.

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} K_2 \cos\tau\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}}\, d\tau(x,x') \\
= &\int_0^{+\infty} \psi(\tau) K_2 \cos\tau\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}}\, d\tau(x,x') + \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) K_2 \cos\tau\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}}\, d\tau(x,x') \\
= &\int_0^{+\infty} \psi(\tau) K_2 \cos\tau\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}}\, d\tau(x,x') + \frac{1}{|\mathrm{X}|}\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) K_2\, d\tau + \Psi_\delta(\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}})(x,x'), \\
= &\; I_3 + I_1 + I_2, \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

où

$$\psi(s) = \psi_*(s^2),\ \varphi(s) = 1 - \psi(s) (s \in \mathbb{R}),\ \Psi_\delta(\xi) = \kappa(\xi) \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) K_2 \cos\tau\xi\, d\tau\ \ (\xi \in \mathbb{R})$$

avec la fonction κ qui est définie par (5.19) et

$$0 \le \psi_* \le 1,\ \psi_* \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \psi_*(s) = \psi_*(-s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \le \delta_1^2 = (\delta + \frac{\rho-\delta}{4})^2, \\ 0 & \text{si } |s| \ge \delta_2^2 = (\delta + \frac{\rho-\delta}{2})^2. \end{cases}$$

On commence par estimer I_1. En effet, les estimations (5.21) et (5.22) restent valables pour I_1 si on répète les mêmes techniques que dans la section précédente.

En utilisant la méme méthode d'estimer $|\Psi(\sqrt{-\triangle_{\mathrm{X}}})(x,x')|$ que dans la section 5.2, on a :

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le C \int_0^{+\infty} \Big|\frac{\partial^{N+1}}{\partial\tau^{N+1}}(\varphi K_2)\Big|\, d\tau \\
&\le C_* \Big[\int_{\delta_1}^{+\infty} \Big|\frac{\partial^{N+1}}{\partial\tau^{N+1}} K_2\Big|\, d\tau + \sum_{j=1}^{N+1} \|\varphi^{(j)}\|_\infty \int_{\delta_1}^{\delta_2} \Big|\frac{\partial^{N+1-j}}{\partial\tau^{N+1-j}} K_2\Big|\, d\tau\Big] \\
&\le C(\delta) \sum_{j=1}^{N+2} \exp\left(j(j-1)t\right) K_{2j}(t, \rho(\delta_1))(yy')^{1-j}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, par le lemme 5.11 et l'estimation (5.7), on a :

$$|I_2| \le C(\delta,\rho,N) K_1(t,d) e^{-\frac{t}{4}} \sqrt{yy'}, \qquad (5.25)$$

$$|I_2| = o\Big(K_1(t,d) e^{-\frac{t}{4}} \sqrt{yy'}\Big) \text{quand } \tfrac{1+d}{1+d+t}\Big(\tfrac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}} \longrightarrow 0^+, \qquad (5.26)$$

$$|I_2| = o\Big(K_{N+1}(t,d) e^{\frac{N^2-1}{4}t} (yy')^{\frac{1-N}{2}}\Big), \text{ quand } \tfrac{1+d}{1+d+t}\Big(\tfrac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}} \longrightarrow +\infty. \qquad (5.27)$$

Pour achever la démonstration, il nous reste à montrer les estimations suivantes :

$$|I_3| \le C(\delta)\Big[K_2(t,d) + K_{N+1}(t,d) e^{\frac{N^2-1}{4}t} (yy')^{\frac{1-N}{2}}\Big], \qquad (5.28)$$

$$I_3 = \zeta' u_o(x,x') K_{N+1}(t,d) e^{\frac{N^2-1}{4}t} (yy')^{\frac{1-N}{2}} (1+o(1)),\ \tfrac{1+d}{1+d+t}\big(\tfrac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\big)^{\frac{N}{2}} \longrightarrow +\infty (5.29)$$

$$I_3 = o\Big(K_1(t,d) e^{-\frac{t}{4}} \sqrt{yy'}\Big), \quad \text{quand } \tfrac{1+d}{1+d+t}\big(\tfrac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\big)^{\frac{N}{2}} \longrightarrow 0^+, \qquad (5.30)$$

où $\zeta' \neq 0$ (on a donc $\zeta' > 0$ puisque $p_t > 0$).

En effet, d'après les résultats de [5] (pp. 252-258), il existe une constante $\zeta \neq 0$ telle que pour tout $0 < s \leq \delta_2$ et tout $m \neq m_* \in \mathrm{X}$, on a :

$$\cos s\nu(x,x') = \zeta \sum_{k=0}^{K} u_k(x,x') s \frac{(s^2 - d_{\mathrm{X}}^2)_+^{k-l}}{\Gamma(k-l+1)}\Big|_{l=\frac{N+1}{2}} + sC_K(s,x,x'),$$

où $u_k(x,x') \in C^\infty(\mathrm{X}\times\mathrm{X})$ et il existe une constante $C(\delta_2) > 0$ telle que $u_0(x,x') \geq C(\delta_2)$ quand $d_{\mathrm{X}} \leq \delta < \rho$ (voir pp.251-254 de [5]), et où $\frac{(s^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{k-l}}{\Gamma(k-l+1)}\Big|_{l=\frac{N+1}{2}}$ a le sens du §3.4. de [13]; $C_K(s,x,x') \in C^2([0,\,\delta_2]\times\mathrm{X}\times\mathrm{X})$ (si on choisit K assez grand) et $C_K(s,x,x') = 0$ quand $d_{\mathrm{X}} > s$. Notons

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{+\infty} \psi(\tau)K_2\tau C_K(\tau,x,x')\,d\tau + \sum_{[\frac{N+1}{2}]}^{K} \zeta u_k(x,x') \int_0^{+\infty} \psi(\tau)K_2\tau \frac{(\tau^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{k-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{N-1}{2})}\,d\tau \\ &+ \sum_{k=0}^{[\frac{N-1}{2}]} \zeta u_k(x,x') \int_0^{+\infty} \psi(\tau)K_2\tau \frac{(\tau^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{k-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{N-1}{2})}\,d\tau = I_{31}+I_{32}+I_{33}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Parce que $\rho(d_{\mathrm{X}}) = d$ et que $K_2(t,\rho(s))$ est décroissante par rapport à $s \geq 0$, on a donc :

$$|I_{31}| \leq C\int_{d_{\mathrm{X}}}^{\delta_2} K_2(t,\rho(\tau))\tau\,d\tau \leq C(\delta_2)K_2(t,d).$$

Il nous reste à estimer $I_{32}+I_{33}$.

Or, pour $m \in \mathbb{N}$, d'après la définition de ψ, on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \psi(\tau)K_2\tau \frac{(\tau^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{k-l}}{\Gamma(k-l+1)}\Big|_{l=\frac{N+1}{2}}\,d\tau \\ =\;& (-1)^m \int_0^{+\infty} \frac{\partial^m}{\partial h^m}\Big[\psi_*(d_{\mathrm{X}}^2+h)K_2(t,\rho_h)\Big] \frac{h^{k+m-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k+m-\frac{N+1}{2})}\,dh, \end{aligned}$$

où $\rho_h = \operatorname{arc\,cosh}\frac{y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2+h}{2yy'}$.

On considère deux cas :

I. Dans le cas où $\frac{N+1}{2} \in \mathbb{N}$:

D'une part, d'après la définition de ψ_*, le fait que $d_{\mathrm{X}} \leq \delta < \delta_1$ et (5.9), on a :

$$\begin{aligned} I_{33} &= \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \zeta u_k(x,x')(-1)^{\frac{N-1}{2}-k} \frac{\partial^{\frac{N-1}{2}-k}}{\partial h^{\frac{N-1}{2}-k}}\Big|_{h=0}\Big[\psi_*(d_{\mathrm{X}}^2+h)K_2(t,\rho_h)\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \zeta u_k(x,x')(-1)^{\frac{N-1}{2}-k} \sum_{\beta=0}^{\frac{N-1}{2}-k} C^{\beta}_{\frac{N-1}{2}-k}\psi_*^{(\beta)}(d_{\mathrm{X}}^2) \frac{\partial^{\frac{N-1}{2}-k-\beta}}{\partial h^{\frac{N-1}{2}-k-\beta}}\Big|_{h=0} K_2(t,\rho_h) \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \zeta u_k(x,x')\pi^{\frac{N-1}{2}-k}(yy')^{k-\frac{N-1}{2}} K_{2+2(\frac{N-1}{2}-k)}(t,d)e^{(\frac{N-1}{2}-k)(\frac{N+1}{2}-k)t}. \end{aligned}$$

D'autre part, on voit facilement que :

$$|I_{32}| \leq C(K,\delta_2)\int_{d_{\mathrm{X}}}^{\delta_2} K_2\tau \, d\tau \leq C'(K,\delta_2)K_2(t,d).$$

Par conséquent, en utilisant l'estimation (5.7) et le fait que

$$\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big[\frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}}\Big]^{\frac{1}{N}} \longrightarrow 0^+$$

$$\text{quand } \frac{1+d}{1+d+t}\Big(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)}\Big)^{\frac{N}{2}} \longrightarrow 0^+,$$

on a donc les estimations (5.28), (5.29) et (5.30).

II. Dans le cas où $\frac{N+1}{2} \notin \mathbb{N}$:

En remarquant que $K_2(t,s)$ est décroissante par rapport à $s \geq 0$, on a :

$$|I_{32}| \leq C(K,\delta_2)\int_0^{+\infty} \psi(\tau)K_2\tau(\tau^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{-\frac{1}{2}} \, d\tau \leq C_*(K,\delta_2)K_2(t,d).$$

Notons

$$\begin{aligned} I_{33} &= \zeta \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \int_0^{+\infty} \psi(\tau)K_2\tau \frac{(\tau^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{k-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{N-1}{2})} \, d\tau u_k(x,x') \\ &+ \zeta u_o(x,x')\int_0^{+\infty} \psi(\tau)K_2\tau\frac{(\tau^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})} \, d\tau = I_{331}+I_{332}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Par la définition de ψ et ψ_*, (5.9) et (5.13), on en déduit que :

$$\begin{aligned} |I_{331}| &\leq C\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\Big|(-1)^{\frac{N}{2}-k}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^{\frac{N}{2}-k}}{\partial h^{\frac{N}{2}-k}}\Big[\psi_*(d_{\mathrm{X}}^2+h)K_2(t,\rho_h)\Big]\frac{h^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,dh\Big| \\ &\leq C_*\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-k}\Big|\int_0^{+\infty}\psi_*^{(\frac{N}{2}-k-j)}(d_{\mathrm{X}}^2+h)\frac{\partial^j}{\partial h^j}\Big[K_2(t,\rho_h)\Big]\frac{h^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,dh\Big| \\ &\leq C(\delta)\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\Big[K_2(t,d)+\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-k}(yy')^{\frac{1}{2}-l}e^{(l^2-\frac{1}{4})t}K_{2l+1}(t,d)\Big] \\ &\leq C_*(\delta)\Big[K_2(t,d)+\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1}(yy')^{\frac{1}{2}-l}e^{(l^2-\frac{1}{4})t}K_{2l+1}(t,d)\Big]. \end{aligned}$$

Il nous reste à estimer I_{332}. En utilisant (5.9), on a :

$$\int_0^{+\infty}\psi(\tau)K_2\tau\frac{(\tau^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})}\Big|\,d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^{\frac{N}{2}}}{\partial h^{\frac{N}{2}}} \Big[\psi_*(d_{\mathrm{X}}^2+h) K_2(t,\rho_h)\Big] \frac{h^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\, dh \\
&= (-1)^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} C_{\frac{N}{2}}^{j} \psi_*^{(\frac{N}{2}-j)}(d_{\mathrm{X}}^2+h) \frac{\partial^j}{\partial h^j} K_2(t,\rho_h) \frac{h^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\, dh \\
&= (-1)^{\frac{N}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} C_{\frac{N}{2}}^{j} (-\pi)^j e^{j(j+1)t} (yy')^{-j} \int_0^{+\infty} \psi_*^{(\frac{N}{2}-j)}(d_{\mathrm{X}}^2+h) K_{2+2j}(t,\rho_h) \frac{h^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\, dh.
\end{aligned}
$$

D'après la définition de ψ_* et le fait que les $K_m(t,\rho_h)$ sont décroissantes en fonction de $h \geq 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{j(j+1)t} (yy')^{-j} \Big| \int_0^{+\infty} \psi_*^{(\frac{N}{2}-j)}(d_{\mathrm{X}}^2+h) K_{2+2j}(t,\rho_h) \frac{h^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\, dh \Big| \\
\leq\ & C(\delta_1,\delta_2) \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{j(j+1)t} (yy')^{-j} \|\psi_*^{(\frac{N}{2}-j)}\|_\infty K_{2+2j}(t,d) \\
\leq\ & C'(\delta_1,\delta_2) \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}} e^{l(l-1)t} (yy')^{1-l} K_{2l}(t,d).
\end{aligned}
$$

De plus, d'une part, par (5.13), on a :

$$
\int_0^{+\infty} \psi_*(d_{\mathrm{X}}^2+h) K_{2+N}(t,\rho_h) h^{-\frac{1}{2}}\, dh \leq \int_0^{+\infty} K_{2+N}(t,\rho_h) h^{-\frac{1}{2}}\, dh = (yy')^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2N+1}{4}t} K_{N+1}(t,d),
$$

d'autre part, quand $\frac{1+d}{1+d+t}(\frac{1+d+t}{t(y^2+y'^2+d_{\mathrm{X}}^2)})^{N/2} \longrightarrow +\infty$, d'après la définition de ψ_* et (5.17), on voit que :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \psi_*(d_{\mathrm{X}}^2+h) K_{2+N}(t,\rho_h) h^{-\frac{1}{2}}\, dh \\
\geq\ & \int_0^{+\infty} K_{2+N}(t,\rho_h) h^{-\frac{1}{2}}\, dh - \int_{\delta_1^2-d_{\mathrm{X}}^2}^{+\infty} K_{2+N}(t,\rho_h) h^{-\frac{1}{2}}\, dh \\
=\ & \int_0^{+\infty} K_{2+N}(t,\rho_h) h^{-\frac{1}{2}}\, dh - \int_0^{+\infty} K_{N+2}(t, \operatorname{arc\,cosh} \frac{y^2+y'^2+\delta_1^2+s}{2yy'}) s^{-\frac{1}{2}}\, ds \\
=\ & (yy')^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2N+1}{4}t} \Big[K_{N+1}(t,d) - K_{N+1}(t,\rho(\delta_1))\Big] = (yy')^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2N+1}{4}t} K_{N+1}(t,d)(1+o(1)).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, quand $\frac{N+1}{2} \notin \mathbb{N}$, on a encore les estimations (5.28), (5.29) et (5.30). Cecei achève la démonstration.

References

[1] J.-P. Anker, Sharp estimates for some functions of the Laplacian on noncompact symmetric spaces, Duke Mathematical Journal 65 (1992) 257-297.

[2] J.-P. Anker, E. Damek, C. Yacoub, Spherical Analysis on Harmonic AN Groups, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. IV. Sen. 23 (1996) 643-679.

[3] J.-P. Anker, Lizhen Ji, Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces, Geom. Funct. Anal. 9 (1999) 1035-1091.

[4] J.-P. Anker, A. G. Setti, Asymptotic finite propagation speed for heat diffusion on certain Riemannian manifolds. J. Funct. Anal. 103 (1992) 50–61.

[5] P. Bérard, On the Wave Equation on Riemannian Manifold without Conjugate Points, Math. Z., 155 (1977) 249-276.

[6] J. Cheeger, S.-T. Yau, A lower bound for the heat kernel. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981) 465–480.

[7] A. Cordoba, R. Fefferman, A geometric proof of the strong maximal theorem, Ann. Math. 102 (1975) 95-100.

[8] M. G. Cowling, G. I. Gaudry, S. Giulini, G. Mauceri, Weak type $(1,1)$ estimates for heat kernel maximal functions on Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991) 637-649.

[9] T. Coulhon, H.-Q. Li, Estimations inférieures du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et transformées de Riesz. En préparation.

[10] E. B. Davies, Kernel estimates for functions of second order elliptic operators, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 39 (1988), no. 153, 37–46.

[11] E. B. Davies, N. Mandouvalos, Heat kernel bounds on manifolds with cusps, J. Funct. Anal. 75 (1987) 311-322.

[12] E. B. Davies, N. Mandouvalos, Heat kernel bounds on hyperbolic space and Kleinian groups, Proc. London Math. Soc 57 (1988) 182-208.

[13] Gelfand I. M., Shilov G., *Generalized Functions I*, Academic Press, New York and London, 1960.

[14] A. Grigor'yan, Heat kernel upper bounds on a complete non-compact manifold, Rev. Mat. Iberoamericana 10 (1994) 395-452.

[15] Grigor'yan A., Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitray manifolds, J. Differential Geometry 45 (1997) 33-52.

[16] Ionescu A., A maximal operator and a covering lemma on non-compact symmetric spaces, Math. Res. Lett. 7 (2000) 83-93.

[17] Ionescu A., An endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon and related maximal operators, Ann. of Math. 152 (2000) 259-275.

[18] W. Müller, Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula, Math. Nachr. 111 (1983) 197-288.

[19] H.-Q. Li, Estimations du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et ses applications, Bull. Sci. Math. 124 (2000) 365-384.

[20] H.-Q. Li, Analyse sur les variétés cuspidales, C. R. Acad. Sci. Paris, 331 (2000) 553-556.

[21] H.-Q. Li, Analyse sur les variétés cuspidales. A paraître au Math. Ann.

[22] N. Lohoué, F.-L. Zhu, Estimation faible de certaines fonctions maximales, C. R. Acad. Sci. Paris 302 (1986) 303-305.

[23] E. M. Stein, Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory, Ann. of Math. Stud. 63, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[24] E. M. Stein, G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.