ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

НН

Р5-99-255

Й.Джурина[1], Я.Буша[2], Э.А.Айрян[3]

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Направлено в журнал «Дифференциальные уравнения»

[1]Кафедра математического анализа, естественный факультет, университет П.Й.Шафарика, 041 54, Кошице, Словакия, e-mail: dzurina@kosice.upjs.sk
[2]Кафедра математики, факультет электротехники и информатики, Технический университет, 040 01, Кошице, Словакия, e-mail: busaj@tuke.sk
[3]E-mail: ayrjan@cv.jinr.ru
[4]Работа поддержана СГА, грант 1/4378/97 и РФФИ, грант 98-01-00190

1999

Введение

В настоящей работе рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка нейтрального типа:

$$\Big(r(t)\big(x(t)+p(t)x(t-\tau)\big)'\Big)'+q(t)f\Big(x\big(\sigma(t)\big)\Big)=0, \qquad t\geq t_0. \tag{1}$$

На протяжении всей работы будем предполагать выполнение следующих условий:

(а) τ положительная постоянная;
(б) $r,p,q\in C\big([t_0,\infty)\big)$, $\sigma\in C^1\big([t_0,\infty)\big)$;
(в) $r(t)>0$, $q(t)>0$, $0\leq p(t)\leq p<1$,
(г) $\sigma'(t)>0$, $\sigma(t)\leq t$, $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty$;
(д) $f\in C(\mathbb{R})$ не убывает, $f\in C^1(\mathbb{R}-\{0\})$ и $uf(u)>0$ для $u\neq 0$.

Далее обозначим и предположим

$$R(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{r(s)}\to\infty \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{2}$$

Под решением (1) будем подразумевать непрерывную вещественную функцию $x(t)$, определенную на $[T_x,\infty)$ для некоторого $T_x>t_0$, такую, что выражение $r(t)\big(x(t)+p(t)x(t-\tau)\big)'$ определено и непрерывно дифференцируемо и уравнение (1) справедливо для всех $t\geq T_x$. Мы рассматриваем только те решения (1), для которых $\sup\big\{|x(t)|;t\geq T\big\}>0$ для всех $T\geq T_x$. Мы предполагаем, что для (1) такое решение существует.

Будем говорить, что нетривиальное решение уравнения (1) является колеблющимся, если для любого $t^*>0$ на (t^*,∞) существует его нуль, в противном случае будем называть его неколеблющимся. Уравнение (1) будем называть осцилляционным, если все его решения колеблющиеся.

За последние годы появилось много работ по колеблемости решений дифференциальных уравнений нейтрального типа (смотри, например, [1–2] и [4–8]). Однако в немногих из них рассматриваются нелинейные уравнения и уравнения с переменными коэффициентами. Будинчевич [2] дополнил некоторые известные результаты и доказал, что уравнение (1) для $\sigma(t)=t-\sigma$, $\sigma>0$, является осцилляционным, если выполнено условие

$$\int^{\infty}q(s)\,ds=\infty.$$

Цель настоящей работы — показать, что если на функцию $f(u)$ наложить некоторые дополнительные условия, то мы можем получить признаки осцилляционности уравнения (1) даже для случая

$$\int^{\infty}q(s)\,ds<\infty.$$

Далее, для всех функциональных неравенств настоящей работы будем предполагать, что они имеют место для всех достаточно больших значений t.

Основные результаты

Далее установим осцилляционность уравнения (1) для различных видов функций $f(u)$.

Теорема 1. *Предположим, что существует такое $c > 0$, что*

$$f'(u) \geq c, \quad \text{для } u \neq 0 \tag{3}$$

и

$$\int^{\infty} \left[R\big(\sigma(t)\big)q(t) - \frac{\sigma'(t)}{4c(1-p)R\big(\sigma(t)\big)r\big(\sigma(t)\big)} \right] dt = \infty. \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) — осцилляционное.

Доказательство. Допустим противное. Предположим, что $x(t)$ является неколеблющимся решением уравнения (1). Не ограничивая общности, мы можем предположить, что $x(t) > 0$. (Случай $x(t) < 0$ можно доказать тем же способом.) Положим

$$z(t) = x(t) + p(t)x(t-\tau) > 0.$$

Тогда $z(t) > x(t)$ и из (1) следует, что

$$\big(r(t)z'(t)\big)' < 0.$$

Поэтому $r(t)z'(t)$ убывает и либо $z'(t) > 0$, либо $z'(t) < 0$. Но условие $r(t)z'(t) < 0$ вместе с (2) влечет за собой $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = -\infty$, что невозможно. Поэтому $z'(t) > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x(t) = z(t) - p(t)x(t-\tau) > z(t) - p(t)z(t-\tau) > \\ > z(t)(1-p(t)) > p^* z(t), \end{aligned}$$

где $p^* = 1 - p > 0$. На основе монотонности $f(u)$ получим $f\Big(x\big(\sigma(t)\big)\Big) \geq f\Big(p^* z\big(\sigma(t)\big)\Big)$ и также

$$\Big(r(t)z'(t)\Big)' + q(t)f\Big(p^* z\big(\sigma(t)\big)\Big) \leq 0. \tag{5}$$

Определим положительную функцию

$$w(t) = R\big(\sigma(t)\big)\,\frac{r(t)z'(t)}{f\Big(p^* z\big(\sigma(t)\big)\Big)}. \tag{6}$$

Тогда

$$w'(t) = \frac{\sigma'(t)}{r\big(\sigma(t)\big)}\frac{r(t)z'(t)}{f\Big(p^* z\big(\sigma(t)\big)\Big)} + R\big(\sigma(t)\big)\,\frac{\big(r(t)z'(t)\big)'}{f\Big(p^* z\big(\sigma(t)\big)\Big)} -$$

$$- R\big(\sigma(t)\big)\frac{r(t)z'(t)}{f\Big(p^* z\big(\sigma(t)\big)\Big)}\,\frac{f'\Big(p^* z\big(\sigma(t)\big)\Big)}{f\Big(p^* z\big(\sigma(t)\big)\Big)}p^* z'\big(\sigma(t)\big)\sigma'(t). \tag{7}$$

Заметим, что $r\big(\sigma(t)\big)z'\big(\sigma(t)\big) > r(t)z'(t)$ и, используя (6), (5), (3), приходим к

$$w'(t) \le \frac{\sigma'(t)}{R\big(\sigma(t)\big)r\big(\sigma(t)\big)}w(t) - R\big(\sigma(t)\big)q(t) - cp^*\frac{\sigma'(t)}{R\big(\sigma(t)\big)r\big(\sigma(t)\big)}w^2(t). \tag{8}$$

Так как полином $P(w) = w - cp^* w^2 \le 1/(4cp^*)$, то из предыдущего неравенства следует

$$w'(t) \le \frac{\sigma'(t)}{4cp^* R\big(\sigma(t)\big)r\big(\sigma(t)\big)} - R\big(\sigma(t)\big)q(t).$$

Интегрируя неравенство, рассмотренное выше, от t_1 до t, получим

$$w(t) \le w(t_1) - \int_{t_1}^{t}\left[R\big(\sigma(s)\big)q(s) - \frac{\sigma'(s)}{4cp^* R\big(\sigma(s)\big)r\big(\sigma(s)\big)}\right]ds.$$

При $t \to \infty$, $w(t) \to -\infty$, что противоречит положительности функции $w(t) \to -\infty$. Это противоречие завершает доказательство.

Замечание 1. Для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения без нейтрального члена, т. е. при $p(t) \equiv 0$, $f(u) = u$, $r(t) = 1$, $\sigma(t) = t$ теорема 1 устанавливает известный результат Кигурадзе и Чонтурии (смотри [3]).

Замечание 2. Теорему 1 можно применить к наиболее часто рассматриваемому виду уравнения (1) со следующим асимптотическим поведением $f(u)$:

$$f(u) \sim u.$$

Если ослабить условие (3), то результат теоремы 1 можно использовать для более широкого класса дифференциальных уравнений.

Следствие 1. *Предположим, что существуют $c > 0$ и $t^* > 0$ такие, что*

$$f'(u) \geq c, \quad u \in (-\infty, -t^*) \cup (t^*, \infty), \tag{9}$$

и выполнено условие (4). *Тогда уравнение* (1) — *осцилляционное.*

Доказательство. Пусть $x(t) > 0$ решение (1). Тогда так же, как и в доказательстве теоремы 1, получим равенство (7). Докажем, что $\lim_{t\to\infty} z(t) = \infty$. Для этого предположим, что $z(t) \to 2k$ при $t \to \infty$ и $0 < k < \infty$. Тогда из монотонности $z(t)$ следует, что $z(\sigma(t)) \geq k$ для всех достаточно больших значений t. Интегрируя неравенство (5) от t до ∞, получаем

$$r(t)z'(t) \geq \int_t^\infty q(s)f\Big(p^*z\big(\sigma(s)\big)\Big)\,ds \geq f(p^*k)\int_t^\infty q(s)\,ds.$$

Интегрирование предыдущего неравенства, деленного на $r(t)$, от t_1 до ∞ влечет за собой

$$2k \geq z(t_1) + f(p^*k)\int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(u)}\int_u^\infty q(s)\,dsdu =$$

$$= z(t_1) + \int_{t_1}^\infty \big(R(s) - R(t_1)\big)q(s)\,ds,$$

откуда следует $\int^\infty R(s)q(s)\,ds < \infty$. Это противоречит (4). Следовательно, $\lim_{t\to\infty} z(t) = \infty$. Поэтому $p^*z\big(\sigma(t)\big) > t^*$ для всех достаточно больших t, и мы получим неравенство (8). Далее доказательство повторяет все шаги доказательства теоремы 1 и может быть опущено.

Пример 1. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение нейтрального типа:

$$\Big(r(t)\big(x(t) + px(t-\tau)\big)'\Big)' + q(t)\frac{x^2\big(\sigma(t)\big)}{1 + \big|x\big(\sigma(t)\big)\big|}\operatorname{sgn} x\big(\sigma(t)\big) = 0.$$

Простое вычисление показывает, что для $f(u) = u^2/(1 + |u|)\operatorname{sgn} u$ имеем $f'(u) \geq 1 - \lambda$, где $\lambda > 0$ достаточно маленькая постоянная. Тогда из следствия 1 вытекает осцилляционность рассматриваемого уравнения при условии

$$\int^\infty \left[R\big(\sigma(t)\big)q(t) - \frac{\sigma'(t)}{4(1-\lambda)(1-p)R\big(\sigma(t)\big)r\big(\sigma(t)\big)}\right] dt = \infty$$

для некоторого положительного $\lambda \in (0,1)$.

Замечание 3. Следствие 1 можно применить к уравнению (1) часто рассматриваемого вида, с асимптотическим поведением

$$f(u) \sim |u|^\alpha \operatorname{sgn} u, \quad \alpha \geq 1.$$

Следствие 2. *Пусть $\alpha > 1$ и условие (4) справедливо для некоторого $c > 0$. Тогда уравнение*

$$\Big(r(t)\big(x(t) + p(t)x(t-\tau)\big)'\Big)' + q(t)\big|x\big(\sigma(t)\big)\big|^{\alpha}\operatorname{sgn} x\big(\sigma(t)\big) = 0 \qquad (10)$$

осцилляционное.

Доказательство. Пусть $c > 0$ такое, что выполняется (4). Легко проверить, что условие (9) выполняется для всех достаточно больших t и осцилляционность (10) вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Пусть $\alpha > 1$. Предположим, что*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{R^2\big(\sigma(t)\big)r\big(\sigma(t)\big)q(t)}{\sigma'(t)} > 0. \qquad (11)$$

Тогда уравнение (10) — осцилляционное.

Доказательство. Из (11) следует существование достаточно большого $c > 0$ такого, что неравенство

$$\frac{R^2\big(\sigma(t)\big)r\big(\sigma(t)\big)q(t)}{\sigma'(t)} > \frac{1}{4cp^*} + \frac{1}{c} \qquad (12)$$

справедливо для всех достаточно больших t. Замечая, что из (12) следует (4), завершаем доказательство.

Теорема 2. *Пусть $f'(u)$ не убывает на $(-\infty, -t^*)$ и не возрастает на (t^*, ∞), $t^* \geq 0$. Предположим, что*

$$\int^{\infty} q(t) f\Big(M\,R\big(\sigma(t)\big)\Big)\,dt = \infty \quad \text{для всех } M > 0, \qquad (13)$$

$$\liminf_{t\to\infty} R\big(\sigma(t)\big) f'\Big(K\,R\big(\sigma(t)\big)\Big)\int_t^{\infty} q(s)\,ds > \frac{1}{1-p} \quad \text{для некоторого } K > 0. \qquad (14)$$

Тогда уравнение (1) — осцилляционное.

Доказательство. Предполагая противное, допустим, что $x(t)$ является положительным решением (1). Чтобы получить (7), можно поступить, как и при доказательстве теоремы 1. Пусть $K > 0$ такое, что выполнено (14). Прежде всего заметим, что из (г) и из предположений теоремы вытекает существование такого $L > 0$, что $f'(u) \leq L/2$ для всех $u > t^*$. Тогда $f(u) \leq Lu$ и из (13) вытекает

$$\int^{\infty} R\big(\sigma(t)\big)q(t)\,dt = \infty. \qquad (15)$$

Поэтому, точно так же как и в доказательстве следствия 1, можно показать, что $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Используя монотонность $r(t)z'(t)$ и интегрируя (5) от t до ∞, получаем

$$r\big(\sigma(t)\big)z'\big(\sigma(t)\big) \geq r(t)z'(t) \geq \int_t^\infty q(s)f\Big(p^*z\big(\sigma(s)\big)\Big)\,ds \geq$$
$$\geq f\Big(p^*z\big(\sigma(t)\big)\Big)\int_t^\infty q(s)\,ds = f\Big(p^*z\big(\sigma(t)\big)\Big)Q(t). \tag{16}$$

Сопоставив последние неравенства с равенством (7), находим

$$w'(t) \leq \frac{\sigma'(t)r(t)z'(t)}{r\big(\sigma(t)\big)f\Big(p^*z\big(\sigma(t)\big)\Big)}\Big[1-p^*R\big(\sigma(t)\big)f'\Big(p^*z\big(\sigma(t)\big)\Big)Q(t)\Big]-R\big(\sigma(t)\big)q(t). \tag{17}$$

Далее докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} r(t)z'(t) = 0$. Действительно, если бы $r(t)z'(t) \to 2L$ при $t \to \infty$, $0 < L < \infty$, то $r(t)z'(t) \geq 2L$ для всех больших t. Интегрируя последнее неравенство от t_1 до t, получаем

$$z(t) \geq z(t_1) + 2L\big(R(t) - R(t_1)\big) \geq L\,R(t).$$

Используя эту оценку и интегрируя (5) от t_1 до ∞, получаем

$$r(t_1)z'(t_1) \geq \int_{t_1}^\infty q(s)f\Big(p^*z\big(\sigma(s)\big)\Big)\,ds \geq \int_{t_1}^\infty q(s)f\Big(p^*L\,R\big(\sigma(s)\big)\Big)\,ds.$$

Это противоречит условию (13), и мы заключаем, что $r(t)z'(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Итак, для всех $\lambda > 0$ существует t_1 такое, что для любого $t \geq t_1$ справедливо $r(t)z'(t) \leq \lambda/2$. Тогда для любого $\lambda > 0$ очевидно

$$z\big(\sigma(t)\big) \leq z(t_1) + \frac{\lambda}{2}\Big(R\big(\sigma(t)\big) - R(t_1)\Big) \leq \lambda R\big(\sigma(t)\big).$$

Положив $\lambda = K/p^*$, комбинируя последнее неравенство с неравенством (17), приходим к

$$w'(t) \leq \frac{\sigma'(t)r(t)z'(t)}{r\big(\sigma(t)\big)f\Big(p^*z\big(\sigma(t)\big)\Big)}\Big[1-p^*R\big(\sigma(t)\big)f'\Big(K\,R\big(\sigma(t)\big)\Big)Q(t)\Big]-R\big(\sigma(t)\big)q(t),$$

откуда, согласно (14),

$$w'(t) \leq -R\big(\sigma(t)\big)q(t). \tag{18}$$

Используя (15) и интегрируя (18) от t_1 до t, получаем

$$w(t) \leq w(t_1) - \int_{t_1}^t R\big(\sigma(s)\big)q(s)\,ds \to -\infty \quad \text{при } t \to \infty.$$

Это противоречие доказывает теорему.

Следствие 4. *Пусть* $0 < \beta < 1$. *Пусть далее*

$$\liminf_{t\to\infty} R^\beta\big(\sigma(t)\big) \int_t^\infty q(s)\,ds > 0. \tag{19}$$

Тогда дифференциальное уравнение

$$\Big(r(t)\big(x(t)+p(t)x(t-\tau)\big)'\Big)' + q(t)\big|x\big(\sigma(t)\big)\big|^\beta \operatorname{sgn} x\big(\sigma(t)\big) = 0 \tag{20}$$

осцилляционное.

Доказательство. Убедимся, что из условия (19) следуют условия (13) и (14). Из (19) вытекает существование $\lambda > 0$ такого, что

$$R^\beta\big(\sigma(t)\big) \int_t^\infty q(s)\,ds \ge \lambda$$

для всех больших t. Пусть $K > 0$ такое, что $K^{1-\beta} < \lambda p^* \beta$. Тогда

$$R^\beta\big(\sigma(t)\big)\beta K^{\beta-1} \int_t^\infty q(s)\,ds > \frac{1}{p^*},$$

т. е. (14) выполнено для уравнения (20).

Покажем, что (19) влечет за собой (13). Если для некоторого $M > 0$

$$\int^\infty q(s) M^\beta R^\beta\big(\sigma(s)\big)\,ds < \infty,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty q(s) M^\beta R^\beta\big(\sigma(s)\big)\,ds = 0.$$

Используя следующую оценку:

$$0 < R^\beta\big(\sigma(t)\big) M^\beta \int_t^\infty q(s)\,ds \le \int_t^\infty q(s) M^\beta R^\beta\big(\sigma(s)\big)\,ds,$$

видим, что

$$\lim_{t\to\infty} R^\beta\big(\sigma(t)\big) \int_t^\infty q(s)\,ds = 0.$$

Это противоречие устанавливает справедливость (13) для уравнения (20).

Установим еще один признак осцилляционности уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть $f'(u)$ не возрастает на $(-\infty, -t^*)$ и не убывает на (t^*, ∞), $t^* \geq 0$. Тогда если*

$$\liminf_{t\to\infty} R(\sigma(t)) \int_t^\infty q(s)\, ds > \frac{1}{(1-p)f'(E)} \quad \text{для некоторого } E > t^*, \tag{21}$$

то уравнение (1) *— осцилляционное.*

Доказательство. Пусть $x(t) > 0$ является решением (1). Тогда имеет место (7). Заметим, что из (21) следует (15). Как и выше, мы можем убедиться в том, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = \infty$ и, следовательно, для любого $E > 0$ имеем $p^* z(\sigma(t)) \geq E$. Подставив это неравенство в (17), получим

$$w'(t) \leq \frac{\sigma'(t) r(t) z'(t)}{r(\sigma(t)) f\Big(p^* z(\sigma(t))\Big)} \Big[1 - p^* R(\sigma(t)) f'(E) Q(t)\Big] - R(\sigma(t)) q(t).$$

Используя (21), приходим к (18). Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству теоремы 2 и поэтому может быть опущена.

Следствие 5. *Пусть $\alpha > 1$ и*

$$\liminf_{t\to\infty} R(\sigma(t)) \int_t^\infty q(s)\, ds > 0. \tag{22}$$

Тогда уравнение (10) *— осцилляционное.*

Замечание 4. В настоящей работе мы установили некоторые новые признаки колеблемости всех решений уравнения (1). Мы усилили теоремы 1 и 2 работы [2] и теорему 1 работы [7]. С другой стороны, результаты настоящей работы можно использовать не только для уравнений типа (10) и (20), но также для других классов дифференциальных уравнений.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Big(r(t)\big(x(t) + p(t)x(t-\tau)\big)'\Big)' + q(t) \ln\Big(1 + x^2(\sigma(t))\Big) x(\sigma(t)) = 0,$$

с коэффициентами, удовлетворяющими (а)–(г). Легко убедиться в справедливости (д). Тогда, в силу теоремы 3, рассматриваемое уравнение осцилляционное при выполнении условия (22).

Литература

1. D.D. Bainov, D.P. Mishev, *Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay*, Adam Hilger, 1991.
2. M. Budincevic, *Oscillation of second order neutral nonlinear differential equations*, Novi Sad J. Math. **27** (1997), 49–56.
3. И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1990.
4. L.H. Erbe and Q. Kong, *Oscillation results for second order neutral differential equations*, Funk. Ekvacioj **35** (1992), 545–557.
5. S.R. Grace and B.S. Lalli, *Oscillation and asymptotic behavior of certain second order neutral differential equations*, Radovi Mat **5** (1989), 121–126.
6. I. Győri and G. Ladas, *Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
7. J.Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
8. P. Wang and Y. Yu, *Oscillation of second order neutral differential equations with deviating arguments*, Math. J. Toyama Univ. **21** (1998), 55–66.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 сентября 1999 года.

Джурина Й., Буша Я., Айрян Э.А. P5-99-255

Осцилляционные свойства функциональных дифференциальных уравнений второго порядка нейтрального типа

В работе рассмотрено дифференциальное уравнение второго порядка нейтрального типа с переменными коэффициентами и аргументами:

$$\left(r(t)\left(x(t) + p(t)x(t-\tau)\right)'\right)' + q(t)f\left(x\left(\sigma(t)\right)\right) = 0.$$

Обоснованы некоторые достаточные условия колеблемости всех решений данного уравнения.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Перевод авторов

Džurina J., Buša J., Ayrjan E.A. P5-99-255

Oscillatory Properties of Second Order Functional Neutral Differential Equations

We are concerned with the second order neutral differential equation with variable coefficients and arguments:

$$\left(r(t)\left(x(t) + p(t)x(t-\tau)\right)'\right)' + q(t)f\left(x\left(\sigma(t)\right)\right) = 0.$$

We provide some sufficient conditions for oscillation of all solutions of given equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1999