

MESURE DE L'EMITTANCE D'UN FAISCEAU PRIMAIRE

C. Bovet , G. Guignard

MESURE DE L'EMITTANCE D'UN FAISCEAU PRIMAIRE

C. Bovet, G. Guignard

1. Méthode générale

A la sortie d'un synchrotron, la distribution de densité des particules dans les plans de phase transversaux présente des ellipses d'équidensité données par les invariants de Courant et Snyder¹⁾. Ces ellipses peuvent s'écrire :

$$\alpha y^2 + \beta y'^2 + 2\gamma y y' = \text{const.} \quad (1)$$

où les paramètres α , β et γ sont définis dans la référence²⁾, et qui sont liés à l'émittance du faisceau par la relation (10).

La densité de particules dans le plan de phase est donc représentée d'une façon générale par :

$$\rho(y, y') = f(\alpha y^2 + \beta y'^2 + 2\gamma y y') \quad (2)$$

et la densité mesurable de particules ou profil du faisceau est :

$$P(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha y^2 + \beta y'^2 + 2\gamma y y') dy'. \quad (3)$$

L'équation (3) est une relation fonctionnelle entre P et f, qui permet de déterminer f par une mesure de P, si α , β et γ sont connus; dans ce cas, $\rho(y, y')$ est alors déterminé.

Par ailleurs, si la forme de la fonction f est connue, on peut connaître celle de P , définir ensuite l'enveloppe et la dimension du faisceau. Ainsi, si α , β et γ sont inconnus, on pourra déterminer tous les paramètres au moyen de plusieurs mesures du profil $P_i(y)$ dans des conditions optiques connues.

On aura alors une série de relations du type :

$$P_i(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f[g_i(\alpha, \beta, \gamma, y, y')] dy' \quad (4)$$

où les fonctions g_i représentent les transformées des ellipses données par l'équation (1), dans les différents plans de phase où s'effectuent les mesures $P_i(y)$.

Des relations (4), peuvent se déduire des relations liant la dimension du faisceau \hat{y}_i dans les différents plans de phase aux paramètres α, β, γ :

$$\hat{y}_i = \hat{y}_i(\alpha, \beta, \gamma) . \quad (5)$$

On peut montrer que, quelle que soit la forme de la fonction f , trois mesures de \hat{y} suffisent à la détermination des 3 paramètres α, β, γ .

2. Développement analytique

La méthode esquissée ci-dessus est générale, mais on voit bien que la fonction f n'apparaît explicitement ni dans le système (4), ni dans le système (5). Pour obtenir une solution analytique, nous choisirons pour f la fonction exponentielle, qui caractérise valablement les faisceaux primaires²⁾. La validité de cette hypothèse pourra d'ailleurs

être vérifiée a posteriori lors de chaque mesure de profil. Soit :

$$f(x) = k \exp(-x). \quad (6)$$

Ceci donne pour la densité $\rho(y, y')$, compte tenu du nombre total de particules N et de la normalisation :

$$\rho(y, y') = N \frac{\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}}{\pi} \exp [- (\alpha y^2 + \beta y'^2 + 2\gamma y y')] \quad (7)$$

La densité transversale des particules du faisceau s'en déduit par intégration sur y' :

$$P(y) = N \sqrt{\frac{\alpha - \gamma^2/\beta}{\pi}} \exp [- (\alpha - \gamma^2/\beta)y^2] \quad (8)$$

Soit η le pourcentage des particules que contient la surface d'émittance. L'ellipse d'émittance s'écrit alors²⁾ :

$$\alpha y^2 + \beta y'^2 + 2\gamma y y' = - \ln(1 - \eta) \quad (9)$$

La surface d'émittance vaut ainsi :

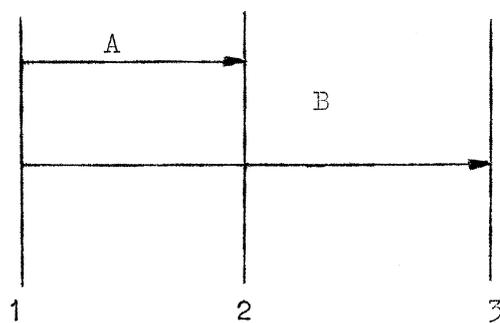
$$E = \frac{-\pi \ln(1 - \eta)}{\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}}. \quad (10)$$

L'extremum de cette ellipse (9) donne la dimension du faisceau selon y :

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{-\beta \ln(1 - \eta)}{\alpha\beta - \gamma^2}}. \quad (11)$$

Partant de la relation (11) et sachant qu'un élément de transport linéaire transforme linéairement les paramètres α, β, γ sans modifier la forme analytique de \hat{y} , nous constatons que la détermination de ces 3 paramètres nécessite trois mesures de la dimension du faisceau selon y , en trois points différents d'un système de transfert.

Définissons un tel système de transfert par les matrices unitaires :



$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Pour un élément linéaire tel que :

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} \qquad (13)$$

nous avons les relations suivantes entre les paramètres :

$$\begin{cases} \beta_2 = b^2 \alpha_1 + a^2 \beta_1 - 2ab\gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 - \gamma_2^2 = \alpha_1 \beta_1 - \gamma_1^2 \end{cases} \qquad (14)$$

De la même façon, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \beta_3 = f^2\alpha_1 + e^2\beta_1 - 2ef\gamma_1 \\ \alpha_3\beta_3 - \gamma_3^2 = \alpha_1\beta_1 - \gamma_1^2 \end{cases} \quad (15)$$

Il est alors facile d'exprimer les dimensions $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$ du faisceau aux points correspondants, en fonction des paramètres α, β, γ au point 1.

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= \sqrt{\frac{-\beta_1 \ln(1-\eta)}{\alpha_1\beta_1 - \gamma_1^2}} \\ \hat{y}_2 &= \sqrt{\frac{-(b^2\alpha_1 + a^2\beta_1 - 2ab\gamma_1)\ln(1-\eta)}{\alpha_1\beta_1 - \gamma_1^2}} \\ \hat{y}_3 &= \sqrt{\frac{-(f^2\alpha_1 + e^2\beta_1 - 2ef\gamma_1)\ln(1-\eta)}{\alpha_1\beta_1 - \gamma_1^2}} \end{aligned} \quad (16)$$

En résolvant ce système et en éliminant la solution banale, ($\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$), nous obtenons :

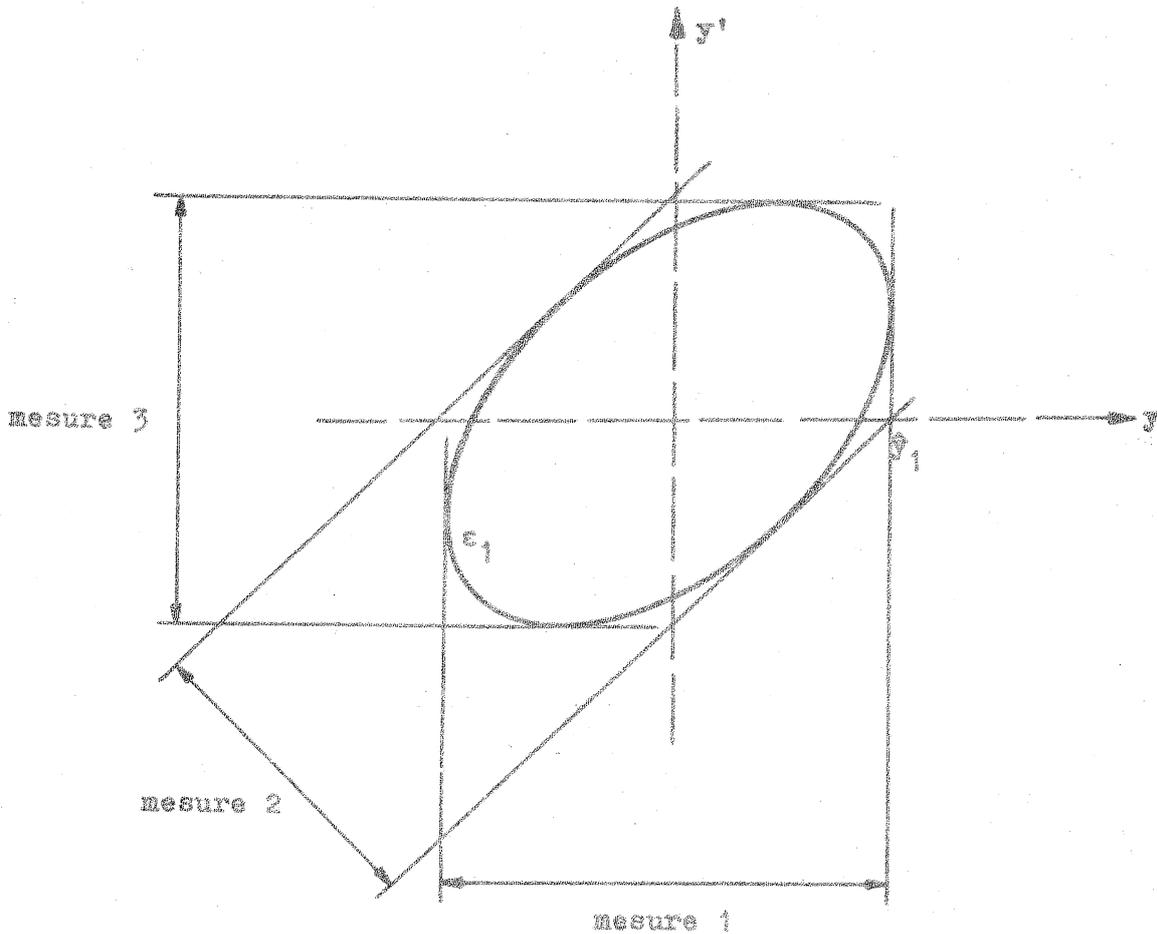
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2ab\lambda + p - a^2}{b^2} \beta_1 \\ \beta_1 &= \frac{-\ln(1-\eta)}{\hat{y}_1^2 \left[\frac{p - a^2 + 2ab\lambda}{b^2} - \lambda^2 \right]} \\ \gamma_1 &= \lambda\beta_1 \end{aligned} \quad (17)$$

avec :
$$\lambda = \frac{(be + af)(af - be) - p(f^2 - b^2q)}{2bf(af - be)}$$

$$p = \left(\frac{\hat{y}_2}{\hat{y}_1} \right)$$

$$q = \left(\frac{\hat{y}_3}{\hat{y}_2} \right)$$

Dans le plan de phase correspondant au point 1 l'ellipse d'émittance ε_1 est ainsi déterminée par les équations (9) et (17). Ramenées à ce plan de phase, les trois mesures de dimension du faisceau $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$ dessinent 3 paires de droites parallèles circonscrites à l'ellipse ε_1 .



Pour que la solution soit précise, les droites représentées ci-dessus ne doivent pas faire entre elles des angles trop petits, mais au contraire des angles voisins de 45° . Il convient donc de choisir, dans chaque cas particulier, des matrices de transfert A et B vérifiant cette condition, c'est-à-dire produisant respectivement un déphasage bétatronique de 45° et de 90° .

Exemples d'application

- 1) Pour effectuer de bonnes mesures de profil, il est souhaitable que le faisceau ait des dimensions semblables aux trois points de mesure. De plus, on peut désirer mesurer E_H et E_V en même temps. Le système optique ressemble donc à deux mailles d'accélérateur avec $\mu_H = \mu_V = \pi/4$.
- 2) Si le faisceau est adopté aux ellipses invariantes de l'accélérateur nos paramètres α, β, γ sont proportionnels aux paramètres de Courant et Snyder; une seule mesure de dimension est alors nécessaire pour déterminer la constante de proportionnalité par (11).

Références

- 1) E.D. Courant et H.S. Snyder, Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron, Annals of Physics, Vol. 3, p. 1-48, 1958.
- 2) C. Bovet, Optique des faisceaux primaires, CERN 66-25.

Distribution (ouverte)

SI Scientific Staff
MPS Scientific Staff