

Einzelereignisanalyse von Pb+Pb-Stößen bei 158 GeV/Nukleon mit Waveletmomenten

Diplomarbeit
vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von

Markus D. Oldenburg

Frankfurt am Main 1998

... Doch seit den ersten Anfängen ihrer Kultur haben die Menschen es nie ertragen können, das unverbundene und unerklärliche Nebeneinander von Ereignissen hinzunehmen. Stets waren sie bemüht, die der Welt zugrunde liegende Ordnung zu verstehen. Nach wie vor haben wir ein unstillbares Bedürfnis zu wissen, warum wir hier sind und woher wir kommen. Das tiefverwurzelte Verlangen der Menschheit nach Erkenntnis ist Rechtfertigung genug für unsere fortwährende Suche. Und wir haben dabei kein geringeres Ziel vor Augen als die vollständige Beschreibung des Universums, in dem wir leben.

Stephen W. Hawking

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
1 Einleitung	3
2 Das Experiment NA49	7
2.1 Trigger	8
2.1.1 Čerenkov-Zähler	8
2.1.2 Strahlpositions-Detektoren	9
2.1.3 Szintillationszähler	10
2.1.4 Kalorimeter	11
2.2 Spurendriftkammern	11
2.2.1 Aufbau	11
2.2.2 Funktionsweise	12
2.2.3 Ausleseelektronik	14
2.3 Flugzeitwände	14
3 Methoden der Einzelereignisanalyse	17
3.1 Transformationen beliebiger Verteilungen in Gleichverteilungen	18
3.2 Wavelets	20
3.2.1 Integraltransformationen	21
3.2.2 Beispiel: Fourier-Transformationen	22
3.2.3 Wavelettransformationen	24
3.2.4 Faktorielle Waveletmomente und deren Normierung	31
3.2.5 Mehrdimensionale Wavelettransformationen	33
3.3 Analysekonzept	34
4 Simulationen	35
4.1 Beispiel einer Wavelettransformation	35
4.2 Simulierte Verteilungen	40
4.2.1 Flachverteilte Zufallseinträge unterschiedlicher Multiplizität	41
4.2.2 Gaußverteilungen variabler Breite	52
4.2.3 Gaußverteilte Zufallseinträge mit Untergrund	62
4.2.4 Zusammenfassung der durch Simulationen erhaltenen Erkenntnisse	66

5 Einzelereignis-Waveletanalyse	69
5.1 Qualitätskriterien der verwendeten Spuren	69
5.1.1 Nähe des Spurursprungs zum BPD-Vertex	69
5.1.2 Anzahl der gemessenen Punkte in der Main-TPC	70
5.1.3 Aufgebrochene Spuren	71
5.1.4 Verwendete Impuls- und Rapiditätsbereiche	72
5.1.5 Gesamtergebnis	73
5.2 Verteilungen der faktoriellen Waveletmomente	74
5.3 Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreiten	78
5.4 Sensitivität auf lokale dynamische Fluktuationen	80
6 Diskussion	83
6.1 Theoretische Überlegungen	83
6.2 Praktische Erfahrungen	84
6.3 Ausblick	86
A Gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$) mit Untergrund	89
B Graphische Darstellungen und Tabellen	91
B.1 Gleichverteilte Simulationen unterschiedlicher Multiplizität	92
B.1.1 Faktorielle Waveletmomente	92
B.1.2 Gaußanpassungen	100
B.1.3 Verteilungsbreiten in Abhängigkeit von der Multiplizität $\sigma(m)$	106
B.2 Gaußverteilte Simulationen unterschiedlicher Breite	110
B.2.1 Faktorielle Waveletmomente	110
B.2.2 Gaußanpassungen	132
B.2.3 Verteilungsbreiten in Abhängigkeit von den Ausgangsbreiten $\sigma(\sigma_G)$	135
B.3 Gaußverteilte Zufallseinträge mit Untergrund	136
B.3.1 Faktorielle Waveletmomente	136
B.3.2 Gaußanpassungen	152
B.3.3 Verteilungsbreiten in Abhängigkeit der Signalmultiplizität $\sigma(m_G)$	156
B.4 Experimentelle Daten und Kontrollverteilungen	158
B.4.1 Gaußanpassungen an experimentelle Daten	158
B.4.2 Gaußanpassungen an Kontrollverteilungen	160
B.4.3 Datenpunkte in simulierten Abhängigkeiten $\sigma(m)$	162
Tabellenverzeichnis	165
Abbildungsverzeichnis	171
Literaturverzeichnis	172

Zusammenfassung

Beim zentralen Stoß zweier ultrarelativistischer Schwerionen wird ein Zustand extremer Dichte und Temperatur erzeugt, der die Bildung des postulierten Quark-Gluon-Plasmas ermöglichen sollte. Diese neue Phase von Kernmaterie zeichnet sich dadurch aus, daß Quarks und Gluonen ohne den unter Normalbedingungen herrschenden Einschluß in Hadronen frei beweglich sind.

Das Experiment NA49 am CERN SPS untersucht Kollisionen von ^{208}Pb -Kernen. Dazu wird ein Bleistrahl mit einer Energie von 158 GeV/Nukleon auf ein im Laborsystem ruhendes Bleitarget geschossen. Das Detektorsystem ist auf den Nachweis des hadronischen Endzustands der Reaktion spezialisiert und erlaubt die Messung von mehr als 60% der etwa 2000 produzierten Hadronen. Diese große Zahl von meßbaren Teilchen macht die Untersuchung von Spektren einzelner Ereignisse möglich, die mit dem über alle Ereignisse gemittelten Spektrum verglichen werden können. Damit will man Fluktuationen von Ereignis zu Ereignis, sogenannte Einzelereignisfluktuationen, nachweisen.

Um eine von der Unterteilung der Spektren in Bins unabhängige Untersuchung durchführen zu können, wurden die Einzelverteilungen mit Hilfe von Wavelettransformationen in eine Vielskalendarstellung überführt. Durch die anschließende Berechnung von faktoriellen Momenten der Waveletkoeffizienten war daher eine Korrelationsanalyse auf verschiedenen Skalen möglich.

Es wurden breit angelegte Simulationen durchgeführt, die quantitative Aussagen über das Verhalten der faktoriellen Waveletmomente bei verschiedenen Arten der Eingangsverteilungen — als Beispiel seien hier flach- und gaußverteilte Spektren genannt — möglich machten. Die Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreite der faktoriellen Waveletmomente der Ordnung q von Ereignissen mit gleichverteilten Einträgen ergab sich so zu einer Gesetzmäßigkeit von der Form $\sigma_q(m) \sim m^{-\frac{q}{2}}$.

Die Untersuchungen der experimentell erhaltenen p_{\perp} -Spektren zeigten im Rahmen der statistischen Fehler auf keiner Skala eine signifikante Abweichung von den aus Simulationen mit rein zufälligen Einträgen erhaltenen Ergebnissen. Im Vergleich mit Simulationsrechnungen wurde eine obere Grenze für das Auftreten lokaler nicht-statistischer Fluktuationen gesetzt. Solche Fluktuationen werden z. B. in DCC-Modellen vorhergesagt. Die in der Analyse der Waveletmomente festgestellte Abwesenheit lokaler Fluktuationen steht in qualitativer Übereinstimmung mit der Analyse globaler Einzelereignisvariablen (z. B. $\langle p_{\perp} \rangle$), die ebenfalls auf ein System mit minimalem Korrelationsinhalt hinweisen.

1 Einleitung

Kernmaterie, wie man sie z. B. in Atomkernen vorfindet, setzt sich nach heutigem Wissen aus Quarks zusammen, zwischen denen die starke Wechselwirkung — vermittelt durch Gluonen als Austauschteilchen — herrscht. Dabei ist die der elektrischen Ladung in der Elektrodynamik entsprechende Größe die sogenannte Farbladung. Quarks können demnach *rot*, *grün*, *blau*, Antiquarks mit einer entsprechenden Antifarbe ‚geladen‘ sein. Eine Farbänderung eines Quarks kann nur durch die Vermittlung von Gluonen erfolgen, welche zwei Farbladungen tragen: eine Antifarbe, um die beim Quark vorhandene Farbe zu vernichten, und eine weitere, um dem Quark eine neue Farbe geben zu können. Alle beobachteten, stark wechselwirkenden Teilchen (Hadronen) sind farbneutral, wodurch sie aus mehreren Quarks zusammengesetzt sein müssen, deren Farben sich gegenseitig zu weiß addieren. Die bekanntesten Hadronen sind das Proton und das Neutron, welche jeweils aus drei Quarks mit der Farbkombination rot-grün-blau zusammengesetzt sind. Neben den aus drei Quarks bestehenden Baryonen gibt es auch noch Hadronen, die aus nur zwei Quarks aufgebaut sind. Die diese Mesonen aufbauenden Quarks müssen dann zwangsläufig eine Farbe und einer Antifarbe tragen, um die Farbneutralität nach außen hin zu gewährleisten.

Der Versuch, freie Quarks und damit freie, nicht-farbneutrale Teilchen zu erzeugen, scheitert, was theoretisch durch die mit zunehmendem Abstand wachsende Stärke der Wechselwirkung zwischen den Quarks erklärt wird. Im Zwischenraum zwischen zwei sich voneinander entfernenden Quarks wird demzufolge immer mehr Energie im Farbfeld deponiert, was schließlich zur Bildung neuer Quark-Antiquark-Paare führt. Diese fügen sich mit den ursprünglichen beiden Quarks erneut zu farbneutralen Hadronen zusammen. Mit anderen Worten können einzelne Quarks den Verband der Hadronen nicht verlassen. Man spricht von *confinement*.

Die Theorie der starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik, *QCD*) sagt für Kernmaterie bei hohen Temperaturen und/oder Dichten einen Phasenenübergang voraus [1]. Demnach sollten sich Quarks und Gluonen dann quasi-frei, ohne Einschluß in Hadronen, bewegen können (*deconfinement*). Diese Phase wird als Quark-Gluon-Plasma

bezeichnet. Zusätzlich könnte es zur Wiederherstellung der chiralen Symmetrie kommen [2], die bei niedrigen Temperaturen spontan gebrochen ist. Diese Brechung äußert sich dadurch, daß die verschiedenen Realisationen eines Isospin-Multipletts unterschiedliche Massen besitzen.

In der Natur existierte solch ein Zustand vermutlich kurz nach dem Urknall, bis die Temperatur so weit abgesunken war, daß sich aus dem Quark-Gluon-Plasma Hadronen bilden konnten (Hadronisierung).

Ziel der ultrarelativistischen Schwerionenphysik ist es, diesen Phasenübergang nachzuweisen und die thermodynamischen Eigenschaften stark wechselwirkender Materie in der Nähe des Phasenübergangs zu untersuchen. Dazu werden am CERN SPS ^{208}Pb -Kerne auf Energien von derzeit 158 GeV/Nukleon beschleunigt und mit einem zweiten, im Laborsystem ruhenden Bleikern zur Kollision gebracht. Die dabei im Schwerpunktsystem zur Verfügung stehende Energie beträgt etwa $\sqrt{s} = 17\text{ GeV}$ pro Nukleonpaar. Dadurch werden bei zentralen Stößen der beiden Kerne Dichten erzeugt, die um den Faktor 5–10 über der Grundzustandsdichte von Kernmaterie liegen [3]. Solche Dichten treten nur im Inneren von Neutronensternen durch natürliche Prozesse auf.

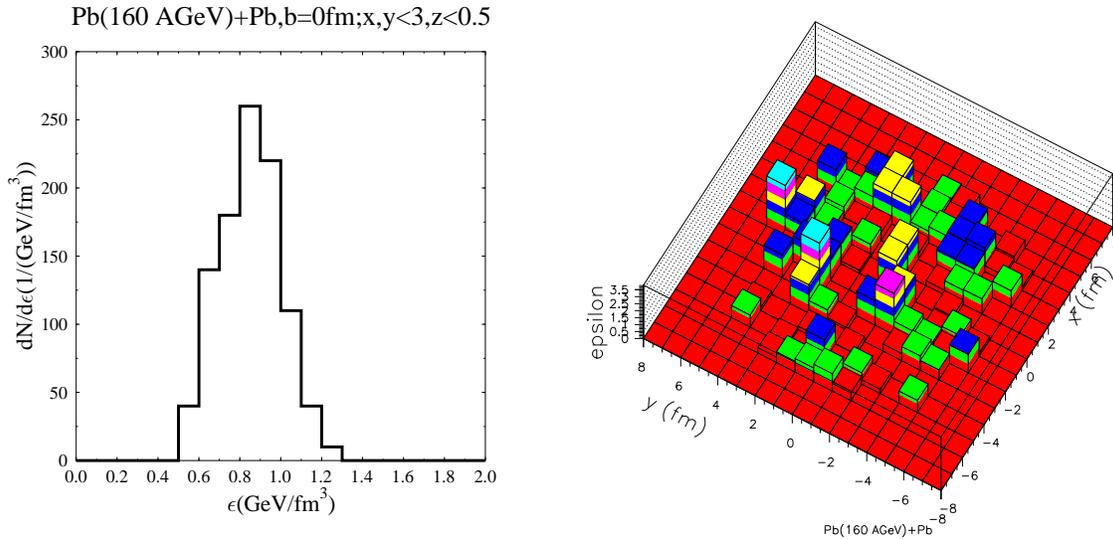


Abbildung 1.1 Fluktuationen der Energiedichte für 1000 Ereignisse (links) und im Ortsraum für ein Ereignis (rechts). Beide Simulationen wurden mit dem UrQMD-Modell durchgeführt [5].

Der in dieser heißen Kompressionszone nachzuweisende Zustand des Quark-Gluon-Plasmas ist experimentell nicht direkt zugänglich, da er nur ca. $\tau \simeq 10^{-23}\text{ s}$ andauert [4]. Dann ist die Temperatur schon wieder unter ihren kritischen Wert T_c bei etwa 160–200 MeV abgesunken, und die Hadronisierung setzt ein. Die neu gebildeten Hadronen verlassen nach weiteren Stößen untereinander die als Feuerball bezeichnete Reaktionszone und werden als hadronischer Endzustand im Detektorsystem registriert.

Möglicherweise wird aber die zur Bildung des Quark-Gluon-Plasmas benötigte Temperatur nicht in jedem Stoß erreicht. Modellrechnungen zeigen (siehe Abb. 1.1 links), daß die in einem Ereignis erreichte Energiedichte einer statistischen Schwankung unterworfen ist, die eventuell nur einigen Prozent der Reaktionen die Ausbildung des gesuchten Phasenübergangs erlaubt [5]. Daher wird mit Hilfe einer Einzelereignisanalyse (engl.: *Event-by-Event Analysis*) versucht, diejenigen Ereignisse, die den Phasenübergang erreicht haben, qualitativ und quantitativ von den als Referenz dienenden sonstigen Reaktionen auszusortieren.

Da bei einer Anzahl von einigen 10^6 detektierten Ereignissen die direkte Analyse aller Einzelspektren einer Einteilchenobservablen nicht möglich ist, müssen neue Meßgrößen definiert werden, die komplette Verteilungen eines Ereignisses charakterisieren können. Dazu wurden globale Observablen herangezogen, die einzelnen Ereignissen je einen Meßwert zuordneten. Die Auswertung des mittleren Transversalimpulses $\langle p_{\perp} \rangle$ und der mittleren Pionenrapidity $\langle y_{\pi} \rangle$ für etwa $3 \cdot 10^5$ Ereignisse ergab jedoch keine signifikanten Abweichungen von einer mit konventioneller Statistik zu erwartenden Verteilung (siehe Abb. 1.2) [6]. Demnach spielen sich die Fluktuationen von Ereignis zu Ereignis

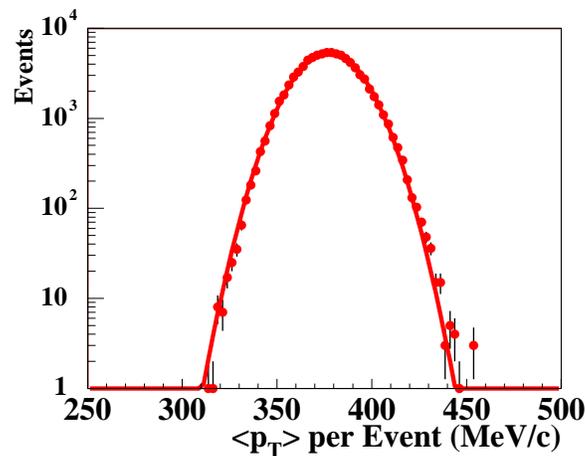


Abbildung 1.2 Fluktuationen des mittleren Transversalimpulses [6]. Es ist keine signifikante Abweichung von der aus konventioneller Statistik erhaltenen Verteilung zu erkennen. Die wenigen Ausreißer rechts sind mit einer zweiten Reaktion im Triggerfenster erklärbar.

nicht auf der größten Skala ab, so daß der Versuch, eine Verteilung nur anhand einer globalen Observablen (hier: des Mittelwertes) zu charakterisieren, offensichtlich mit zuviel Informationsverlust einhergeht.

Das Ergebnis einer weiteren Simulation in Abbildung 1.1 rechts impliziert das Vorhandensein von einigen Bereichen innerhalb der zentralen Stoßregion zweier Bleikerne, die die Energiedichte von Kernmaterie im Grundzustand bis zu einem Faktor von 20 übertreffen. Die mittlere Energiedichte liegt dagegen nahe des Mittelwertes der linken Verteilung. Dieses Szenario erlaubt die Annahme von *Hot Spots* innerhalb des Feuerballs,

so daß insbesondere die lokale Bildung von desorientierten chiralen Kondensaten (engl.: *Disoriented Chiral Condensates, DCCs*) möglich wird. Für die aus diesen Gebieten wiederhergestellter chiraler Symmetrie emittierten Pionen wird im niedrigen p_{\perp} -Bereich eine signifikante Abweichung des Anteils der ungeladenen Pionen vom üblichen Wert $\frac{\pi^0}{\pi^0 + \pi^+ + \pi^-} = \frac{1}{3}$ erwartet [7, 8]. Daher wird eine skalenabhängige Suche nach Einzelereignisfluktuationen notwendig, die zudem sensitiv auf Teilchenkorrelationen reagiert.

Mit Hilfe von Wavelettransformationen können Verteilungen in eine Vielskalendarstellung zerlegt werden. Dies macht die Durchführung einer skalenunabhängigen Analyse möglich, da in den Observablen auftretende Anomalien losgelöst von der Breite der Segmentierung der Verteilungen (der sogenannten Binbreite oder dem *Binning*) detektiert werden können. Die Betrachtung von aus den Waveletkoeffizienten gebildeten Momenten erlaubt dann zusätzlich die benötigte Korrelationsanalyse. Insgesamt stellen also die Waveletmomente ein dem Problem angepaßtes Werkzeug dar.

In dieser Arbeit wird nach einer kurzen Einführung in den Aufbau des Experiments NA49 auf die zur Durchführung einer Einzelereignisanalyse notwendigen mathematischen Methoden eingegangen. Diese werden im Anschluß anhand von umfangreichen Simulationen erprobt, die zusätzlich die Basis für einen Vergleich mit den experimentell erhaltenen p_{\perp} -Spektren darstellen, welcher in Kapitel 5 erfolgt. Abschließend werden die erhaltenen Ergebnisse kritisch diskutiert, und im Ausblick wird auf mögliche zukünftige Anwendungen der Wavelettransformationen in der ultrarelativistischen Schwerionenphysik hingewiesen.

2 Das Experiment NA49

Seit 1994 steht am Beschleuniger SPS (engl.: *Super-Proton-Synchrotron*) des Europäischen Kernforschungszentrums CERN¹ bei Genf ein $^{208}\text{Pb}^{82+}$ -Strahl für *fixed target*-Experimente zur Verfügung. Durch seine weltweit einzigartige, hohe Energie von 158 GeV/Nukleon können Materiezustände extrem hoher Dichte und Temperatur erzeugt werden, wodurch es möglich wird, die Entwicklung des frühen Universums, aber auch das Verhalten von Kernmaterie unter diesen außergewöhnlichen Bedingungen, zu untersuchen.

Beim zentralen Stoß zweier ultrarelativistischer Bleikerne entstehen etwa 2000 Hadronen, von denen 2/3 elektrische Ladung tragen. Ziel des Experiments NA49 ist die möglichst vollständige Detektion dieses hadronischen Endzustandes.

Zu diesem Zweck wurden vier großvolumige Spurendriftkammern (engl.: *Time Projection Chambers, TPCs*) hinter einem aus Bleifolie ausgebildeten Target aufgebaut, die die Registrierung der Flugbahnen der erzeugten geladenen Teilchen ermöglichen. Zwei der *TPCs* (*Vertex-TPC 1* und *2*) befinden sich innerhalb supraleitender Magnete, wodurch über die Krümmung der Teilchenspuren eine Impulsbestimmung möglich ist. Die beiden verbleibenden *Main-TPCs* erlauben durch Messung des spezifischen Energieverlusts geladener Teilchen im Gasmedium eine Teilchenidentifikation und über die Stärke der im Magnetfeld erfahrenen Ablenkung der Teilchen ebenfalls eine Impulsbestimmung. Zusätzlich decken Flugzeitwände einen kleinen Akzeptanzbereich ab, womit unter Berücksichtigung der Impulsinformation eine unabhängige Massenbestimmung durchgeführt werden kann. Schließlich bilden ein Vetokalorimeter und diverse Szintillationszähler die Grundlage für die Triggerung auf zentrale Stöße zweier Bleionen, wobei Strahlpositionsdetektoren den einlaufenden Pb-Strahl definieren.

Auf diese einzelnen Komponenten des Experimentaufbaus soll in diesem Kapitel eingegangen werden. Die Darstellung in Abbildung 2.1 zeigt das Experiment in der Übersicht.

¹ehemals franz.: *Centre Européenne pour la Recherche Nucléaire*, jetzt engl.: *European Organization for Nuclear Research*

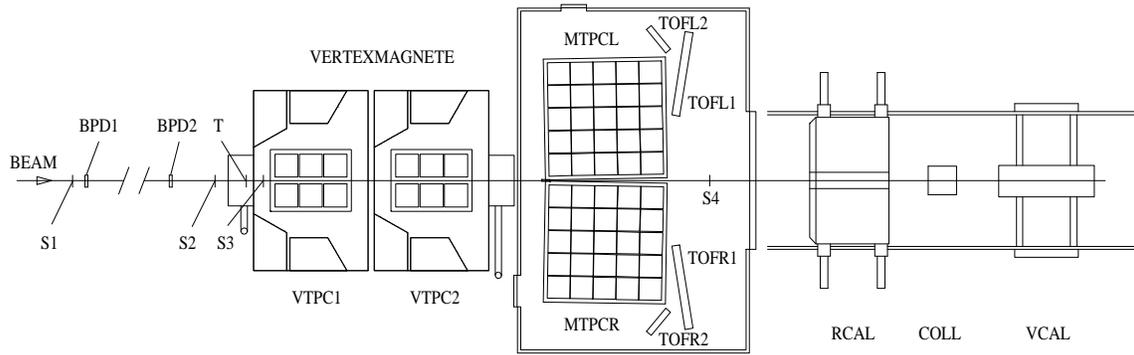


Abbildung 2.1 Aufbau des Experiments NA49. Der Bleistrah (*BEAM*) kommt von links und wird vor dem Auftreffen auf das Target (*T*) durch die Strahlpositionsdetektoren (hier abgebildet *BPD1* und *BPD2*) vermessen. Die Trigger *S1* bis *S4* ermöglichen zusammen mit den beiden Kalorimetern (*RCAL* und *VCAL*) die Auswahl von zentralen Ereignissen. Die eigentliche Vermessung des hadronischen Endzustands in Form von Teilchenspuren geladener Partikel geschieht in den vier Spurendriftkammern (*VTPC1/2* (im Magnetfeld) und *MTPCL/R*), wobei die Teilchenidentifikation durch vier Flugzeitwände (*TOF*) unterstützt wird.

2.1 Trigger

Mehrere Detektoren sind für die Auswahl von gültigen Ereignissen zuständig. Die meisten von ihnen werden instantan (d.h. *online*) ausgewertet. Erst die Koinzidenz von allen für eine gewisse Konfiguration notwendigen ‚gültig‘-Signalen gibt die eigentliche Datenaufnahme des Experiments frei. Im Gegensatz dazu gibt es Detektoren, deren Messungen nur während der Datenauswertung (also *offline*) zur nachträglichen Aussonderung von ungewollten Ereignissen verwendet werden. An dieser Stelle sei besonders auf die Strahlpositions-Detektoren (*BPDs*) verwiesen.

Im folgenden wird kurz auf die zumeist vor dem Target im Strahl stehenden Detektoren eingegangen, die für die Definition von gültigen Ereignissen notwendig sind. Eine Ausnahme bilden die beiden Kalorimeter, die sich am Ende des Experimentaufbaus befinden.

2.1.1 Čerenkov-Zähler

Die erste Messung zur Triggerung eines gültigen Ereignisses geschieht mit einem Čerenkov-Zähler, genannt *CEDAR*, der sich ca. 50 m vor dem Target befindet. Dieser 6 m lange, abgedunkelte Tubus besteht an dem dem Target zugewandten Ende aus einem Hohlspiegel mit einem Loch in der Mitte, damit der Strahl ungehindert passieren kann. Der Spiegel lenkt das von den geladenen Teilchen in der Gasfüllung erzeugte Čerenkov-Licht auf eine kreisförmige Blende am targetfernen Ende des Detektors. Da der Öffnungswinkel des Čerenkov-Lichts geschwindigkeitsabhängig und der sensitive Winkel

des *CEDAR* durch den Aufbau fest vorgegeben ist, kann nur Licht von Teilchen einer bestimmten Masse durch die Blende gelangen¹. Durch Änderung des Gasgemisches und damit des Brechungsindex im *CEDAR* kann man sich so z. B. der immer im Strahl vorhandenen Pionen entledigen.

2.1.2 Strahlpositions-Detektoren

Die Strahlpositions-Detektoren (engl.: *Beam Position Detectors, BPDs*) werden zur Bestimmung der Richtung des einfallenden Pb-Strahls und damit auch der Position des Strahls auf Höhe des Targets benötigt. Dies ermöglicht die genaue Messung des Vertex nicht nur im Mittel, sondern gerade auch für einzelne Ereignisse. Außerdem wird somit die Impulsrichtung des die Reaktion hervorrufenden Strahlteilchens bestimmt.

Um eine möglichst genaue Extrapolation der Vertex-Position und der Strahlrichtung zu erreichen, befinden sich seit der Strahlzeit im Herbst 1997 drei baugleiche *BPDs* im Strahl vor dem eigentlichen Experiment. Im NA49-Koordinatensystem, dessen Ursprung in der Mitte des 2. Magneten und damit in *Vertex-TPC 2* liegt, befinden sich diese bei $z_1 = -38.8$ m, $z_2 = -16.4$ m und $z_3 = -6.6$ m. Das Target sitzt bei $z_T = -5.8$ m.

Die *BPDs* funktionieren nach dem Prinzip der Vieldraht-Proportionalzählkammer mit Kathodenauslese [9]. Jeweils zwei um 90° gegeneinander gedrehte Ebenen von 16 senkrecht zum Beam aufgespannten Drähten erzeugen bei Strahldurchgang durch Drahtverstärkung ein Induktionssignal auf ebensoviele Detektorstreifen. Dadurch läßt sich in den meisten Fällen die Strahlposition für die beiden senkrecht zum Strahl gelegenen Richtungen auf 200 μ m genau bestimmen. Durch einfache Extrapolation dieser drei Werte für jede Achse, erhält man mit den bekannten Abständen der *BPDs* vom Target eine Vertex-Position, die ebenfalls auf etwa 200 μ m genau berechnet werden kann.

Die mit den *BPDs* erhaltenen Daten werden gespeichert und erst *offline* ausgewertet. So kann nachträglich noch eine Auswahl von Ereignissen mit gut über die *BPDs* definiertem Vertex gemacht werden².

Erweiterung des Vertex-Extrapolations-Clients

Seit Herbst 1997 wird eine von mir erweiterte und optimierte Routine zur Extrapolation der Vertex-Position und Strahlrichtung benutzt, die im Gegensatz zum vorherigen

¹Das SPS liefert Partikel mit einer festen Energie.

²Im Normalfall, also bei Pb+Pb-Stößen, erfolgt die Vertex-Bestimmung über die Rückextrapolation der Teilchenspuren zum Target. Der durch die *BPDs* errechnete Vertex dient also in diesem Fall nur zur Kontrolle. Im Fall von p + p- oder p+Kern-Ereignissen ist diese Rückextrapolation aber aufgrund der zu geringen Teilchenzahl nicht genau genug, wodurch die Vertex-Extrapolation mit Hilfe der *BPDs* an Bedeutung gewinnt (insbesondere durch die bei p + p-Stößen nicht genau bekannte Targetposition durch ein flüssiges Wasserstoff-Target).

Programm nicht nur zwei, sondern eine beliebige Anzahl von Ortsmessungen des Strahls verwendet. Dieses Verfahren berücksichtigt die nunmehr drei ständig betriebenen *BPDs* und ist offen für eventuell zusätzlich eingesetzte Detektoren. Auch kann bei fehlerhafter Messung einer Koordinate in einem Detektor die Extrapolation trotzdem mit den übrigen Detektoren durchgeführt werden (insbesondere die vollständige Extrapolation der anderen Koordinate).

2.1.3 Szintillationszähler

Die Trigger mit den Namen *S0*, *S1*, *S2*, *S3*, *S4* und *V0* geben das eigentliche Startsignal für die Datenaufnahme. *S* steht dabei für Szintillator und *V* für Veto.

Am weitesten strahlaufwärts befindet sich der *S0*-Trigger, der ein gesondertes Startsignal für die Flugzeitwände gibt. Der eigentliche Zähler besteht wie auch der *S1* aus Quarz, in dem die beim Durchgang der Bleiionen erzeugte Čerenkov-Strahlung über einen Photovervielfacher ausgelesen wird. Das Quarzplättchen ist mit $200\ \mu\text{m}$ besonders dünn, damit die Zeitauflösung des Detektors möglichst hoch ist.

Hinter dem *S0* folgen *S1* und *S2*, deren Signale in Koinzidenz geschaltet den eigentlichen Beam bzw. ein Teilchen im Strahl definieren. *S1* ist wie schon erwähnt baugleich mit *S0*, doch *S2* ist mit $0.5\ \text{mm}$ um den Faktor 2.5 dicker, um ein besseres Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu erreichen.

Hinter *S2* sitzt *V0*, der erste Vetotrigger im Strahl. Er ist als Blende ausgebildet, so daß ein Signal auf eine Reaktion im Strahl selbst hindeutet, da dieser durch etwaige gebildete Sekundärteilchen aufgeweitet wird. Folglich ist er in Antikoinzidenz zu *S1* und *S2* geschaltet.

Der *S3*-Trigger befindet sich zwischen dem Target und der *Vertex-TPC 1*. Er definiert, ob eine Interaktion des Strahlteilchens im Target stattgefunden hat. Da die Stärke des Signals quadratisch mit der Ladungszahl des einlaufenden Teilchens wächst (Bethe-Bloch-Formel), kann man leicht unterscheiden, ob nach dem Target noch das vollständige Bleiion mit 82 Protonen ($82^2 = 6724$) oder nur noch ein Fragment davon vorhanden ist. Insbesondere ergäbe sich selbst dann, wenn 1000 erzeugte Teilchen den Trigger treffen würden, nur ein Wert von $1000 \cdot 1^2 = 1000$. Schwieriger wird das Problem schon, wenn mit Protonen als Projektil gearbeitet wird, da dann zu viele Ereignisse aussortiert werden, weil ein nicht kollidiertes Proton ($Z = 1$) ein Triggersignal von gleicher Höhe wie jedes andere einfach geladene (erzeugte!) Teilchen produziert. Deshalb wird der *S3*-Trigger im Fall eines Proton-Strahls durch eine schmalere Variante ersetzt, die die Chance eines ungewollten Treffers durch ein erzeugtes Teilchen vermindert und somit die Zahl der gültigen Ereignisse erhöht.

Der *S4* wird in Ausnahmefällen — z. B. in Multi-Target-Runs — zwischen den beiden *Vertex-TPCs* in gleicher Weise wie der *S3* benutzt.

2.1.4 Kalorimeter

Das *Vetokalorimeter* befindet sich hinter dem sonstigen experimentellen Aufbau und dient zur schnellen Vetotriggerung von nicht-zentralen Stößen. Nicht an der Reaktion teilnehmende Projektilfragmente (Spektatoren) werden aufgrund ihres hohen Impulses im Feld der Vertex-Magneten kaum abgelenkt und gelangen dadurch fast geradlinig in das diesen Phasenraumbereich abdeckende Kalorimeter. Durch die Energiedeposition im Vetokalorimeter ist also ein Rückschluß auf die Zentralität des Ereignisses möglich [3].

Außerdem existiert noch das sogenannte *Ringkalorimeter*. Dieses liefert über die Messung der transversalen Energie von Hadronen und Photonen ein positives Triggersignal, falls die in ihm deponierte Energie einen Rückschluss auf einen zentralen Stoß zuläßt. Dabei sind die Signale von *Veto*- und *Ringkalorimeter* verständlicherweise antikorreliert, da jede zusätzliche Energiedeposition in der Reaktionszone, die durch weitere Partizipanden hervorgerufen wird, zu einer Zunahme des Energieinhaltes transversaler Freiheitsgrade führt. Die Daten für die vorliegende Arbeit wurden allerdings ohne diesen zusätzlichen Trigger aufgenommen.

2.2 Spurendriftkammern

Das Herzstück des NA49-Experimentes bilden die vier Spurendriftkammern (*TPCs*), durch die die Trajektorien der produzierten geladenen Teilchen vermessen werden können. Das Grundprinzip beruht darauf, daß geladene Teilchen, die sich durch ein Gas bewegen, dieses entlang ihres Weges ionisieren. Die dadurch erzeugten Ionisationspuren können dann elektronisch ausgelesen werden.

In diesem Abschnitt soll auf den Aufbau und die genaue Funktionsweise der *TPCs* eingegangen und die Ausleseelektronik angesprochen werden [12].

2.2.1 Aufbau

Die Spurendriftkammern bestehen jeweils aus einer Gasbox, die an den Seiten durch zwei $125\ \mu\text{m}$ dicke Folien gasdicht zur Umgebung abgeschlossen ist (siehe Abb. 2.2 links). Der Zwischenraum der beiden Folien wird mit Stickstoff gespült, um eine Kontamination des Zählgases¹ im Inneren der Box mit Sauerstoff und Wasserdampf zu verhindern. Da die einfallenden Teilchen möglichst geringe Wechselwirkungen in den Detektorwänden erfahren sollen, besteht die Wandfolie aus Mylar, einem Material mit einer sehr geringen Massenbelegung.

¹Das Zählgas besteht bei den *Vertex-TPCs* aus Neon und Kohlendioxyd im Verhältnis 9/1, in den *Main-TPCs* handelt es sich um Argon, Methan und Kohlendioxyd (90/5/5) [13].

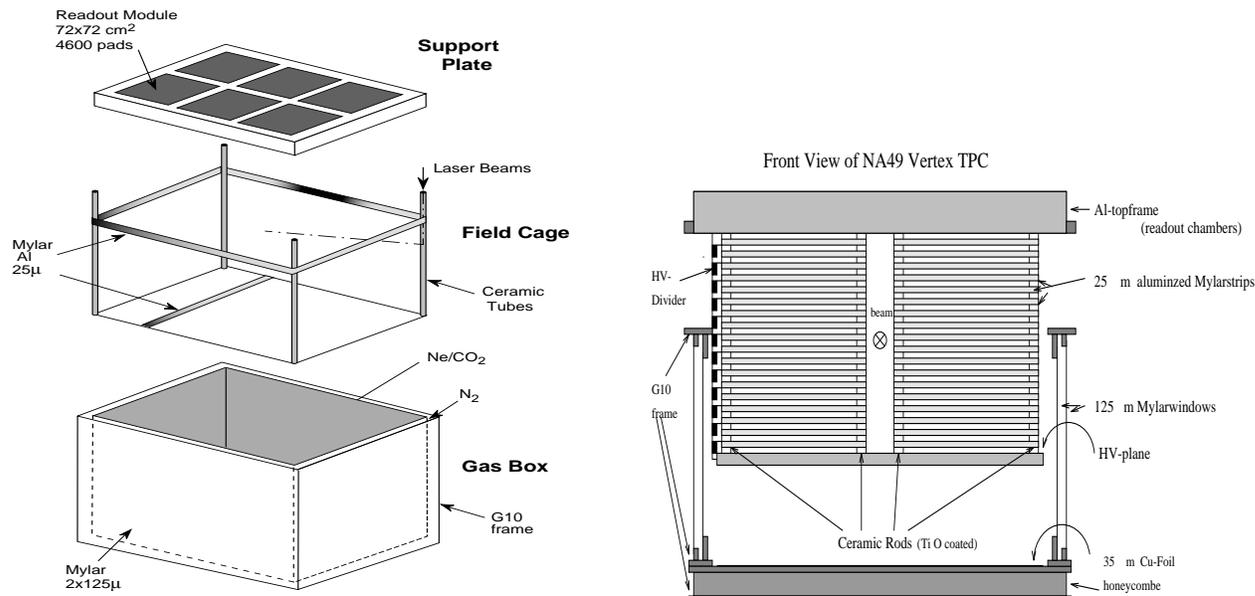


Abbildung 2.2 Schematischer Aufbau einer Vertex-TPC. In der Explosionszeichnung (links) sind die Gasbox, die Deckelplatte mit den Auslesemodulen und der Feldkäfig abgebildet [10]. In der Ansicht in Strahlrichtung (rechts) erkennt man zusätzlich die aluminiumbeschichteten Mylarstreifen, die durch eine Widerstandskette das homogene Feld in der Gasbox ermöglichen [11].

Stabilität erhält die Konstruktion durch einen glasfaserverstärkten Kunststoffrahmen (G10), der an einer Deckelplatte aus Aluminium aufgehängt ist. An dieser Platte ist außerdem die Ausseelektronik befestigt. Den unteren Abschluß der Gasbox bildet eine Bodenplatte, die zur Gewichtsersparnis bei gleichzeitig möglichst hoher Stabilität in einer wabenförmigen Sandwich-Bauweise ausgeführt ist.

Der Feldkäfig, der sich im Inneren der Gasbox befindet, besteht aus aluminiumbeschichteten, zwischen Keramikrohren aufgehängten Mylarstreifen. Diese sorgen bei Anlegung einer Hochspannung an die HV-Ebene am Boden des Feldkäfigs durch eine als Spannungsteiler ausgebildete Widerstandskette für ein auch an den Rändern des Käfigs homogenes Driftfeld.

2.2.2 Funktionsweise

Über der Kathodenebene an der Oberseite des Feldkäfigs sind drei Drahtebenen aufgespannt (siehe Abb. 2.3; die räumliche Orientierung im Experiment ist gerade umgekehrt). Die von einem durch den Feldkäfig fliegenden geladenen Teilchen aufgrund der elektromagnetischen Wechselwirkung im Detektorgas erzeugten Ladungsträger (Elektronen und Ionenrümpfe) driften entlang des homogenen Feldes, das zwischen der HV-Ebene am Boden und dem Frisch-Gitter angelegt ist. Dabei wandern die beweglicheren

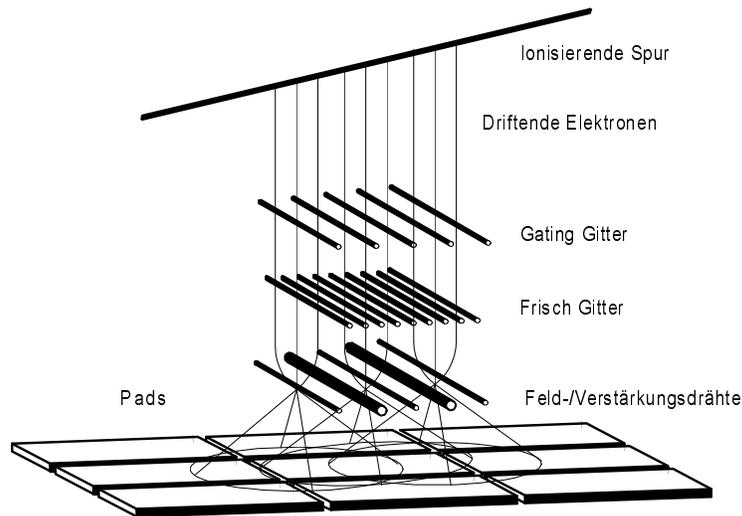


Abbildung 2.3 Driftstrecke der Elektronen, die durch ein das Zählgas durchquerendes, geladenes Teilchen erzeugt wurden [14]. Die einzelnen im Text erwähnten Drahtebenen sind ebenso wie die in Pads unterteilte Ausleseebene zu erkennen.

Elektronen wegen ihrer negativen Ladung in Richtung der Ausleseebene, die in *Pads* segmentiert ist. Das sogenannte *Gating Grid*, die am weitesten von den Auslesemodulen entfernte Drahtebene, ermöglicht eine triggergesteuerte Ereignisauswahl, indem die Einzeldrähte zur Sperrung der Datenaufnahme auf ein alternierendes Potential gelegt werden, wodurch die erzeugten Ladungsträger durch die entstehende Feldinhomogenität zum *Gating Grid* gelenkt und dort absorbiert werden. Soll ein Ereignis detektiert werden, wird die Spannung dieser Drähte dem sie umgebenden Hochspannungsfeld angepaßt, so daß die erzeugten Elektronen zur Ausleseebene passieren können. Zusätzlich verhindert diese Drahtebene eine Kontamination des Zählgases in der Gasbox durch von den Verstärkungsdrähten wegdriftende positive Ionenrümpfe.

Das schon erwähnte Frisch-Gitter liegt auf Null-Potential, wodurch nicht nur das Hochspannungsfeld erzeugt, sondern auch eine Beeinflussung des homogenen Driftfeldes im Feldekäfig durch die zwischen Frisch-Gitter und den Auslesemodulen gelegene Verstärkungsebene verhindert wird.

Die Verstärkungsebene besteht aus Verstärkungs- und Felddrähten, wobei die Verstärkungsdrähte auf einem hohen positiven Potential (1000 V), die Felddrähte auf 0 V gehalten werden. Die die beiden vorhergehenden Drahtebenen passierenden Elektronen werden zu den Verstärkungsdrähten hin stark beschleunigt, wobei sie lawinenartig neue Elektron-Ion-Paare erzeugen. Durch diese Vervielfachung wird das Signal der ursprünglich nur wenigen Elektronen meßbar. Die Felddrähte schirmen die einzelnen Verstärkungszonen voneinander ab, um jeweils eine Proportional-Verstärkung zu gewährleisten und Interferenzen zwischen den einzelnen Verstärkungsdrähten zu verhindern. Die neu erzeugten Elektronen fließen schließlich über die Verstärkungsdrähte ab, und zurück bleiben die positiv geladenen Ionenrümpfe, da sich diese aufgrund ihrer Mas-

se nur viel langsamer im Detektorgas bewegen können. Diese positiven Ladungsträger induzieren in der in *Pads* unterteilten Ausleseebene ein Signal, das somit eine zweidimensionale Ortsmessung eines Spurpunktes ermöglicht. Die Tiefe und damit gleichzeitig die dritte Ortskoordinate, aus der die driftenden Elektronen von der ursprünglichen Erzeugung durch das das Zählgas ionisierende Teilchen kamen, läßt sich durch die Driftzeit der Elektronen zur Ausleseebene berechnen.

Durch Proportional-Verstärkung der durch Ionisation erzeugten, ursprünglichen Ladungsmenge, ist außerdem ein Rückschluß auf den für eine Teilchenart spezifischen Energieverlust pro Wegstrecke beim Durchqueren eines Mediums möglich. Die oben beschriebene Messung eines einzelnen Spurpunktes ist dafür aber nicht ausreichend, da sie starken statistischen Schwankungen unterliegt. Die Mehrfachmessung eines Teilchens entlang seines Weges erlaubt aber die Bildung eines Mittelwertes (genauerer: eines *truncated mean*), so daß auf diese Weise Teilchenidentifizierung betrieben werden kann [15].

2.2.3 Ausleseelektronik

Die über 180000 Kanäle der vier *TPCs* erzeugen pro Ereignis ein Datenvolumen, das nur mit einer dieser Datenmenge angepaßten Ausleseelektronik bewältigt werden kann.

Die Signale von 16 *Pads*, die überdies in 512 Zeitschritten von 100 ns gesampelt werden, werden in je einem Chip auf einer sogenannten *Front End*-Karte entgegengenommen. Diese *Front End*-Karten, auf denen je zwei Chips die Daten digitalisieren, befinden sich direkt hinter der aus *Pads* gebildeten Ausleseebene und sind in der Aluminium-Deckelplatte befestigt. Jeweils 24 *Front End*-Karten schicken ihre Daten dann über Flachbandkabel zu den *Control and Transfer Boards*, welche den Datenstrom via Glasfaserkabel zu den im *Counting House* befindlichen *Receiver Boards* weiterleiten. Nachdem jedes *Receiver Board* die Daten von vier *Control and Transfer Boards* — nach Abzug des durch eine vorher stattgefundenen Messung bestimmten Sockelwertes — komprimiert hat, wird der nun noch etwa 10 Mbyte umfassende Datensatz eines Ereignisses auf ein SONY D1 Bandlaufwerk geschrieben.

2.3 Flugzeitwände

In einem kleinen Akzeptanzbereich wird die Teilchenidentifikation durch spezifischen Energieverlust durch die Messung der Flugzeit der jeweiligen Teilchen unterstützt. Mit Hilfe der gemessenen Spurlänge ist dadurch eine Bestimmung der Teilchengeschwindigkeit möglich, was durch den über die Spurkrümmung bekannten Impuls der Teilchen die Berechnung der jeweiligen Teilchenmasse und damit die Bestimmung der Teilchenart erlaubt.

Mittlerweile werden bei NA49 drei verschiedene Typen von Flugzeitwänden (engl.: *Time of Flight/TOF Walls*) eingesetzt. Insgesamt vier Wände befinden sich hinter den *Main-TPCs*, eine *PesTOF*-Wand zu Testzwecken für das zukünftige Experiment ALICE hinter der *Vertex-TPC 1*.

3 Methoden der Einzelereignisanalyse

Jedes Ereignis eines zentralen Pb + Pb-Stoßes bei 158 GeV/Nukleon besteht aus einem Satz von etwa 1000 gemessenen Teilchen, denen naturgemäß mehrere physikalische Observablen wie z. B. Impuls oder Masse zugeordnet sind¹. Die Analyse von einigen 10^6 Ereignissen dieser Art kann auf unterschiedliche Arten durchgeführt werden, wovon je nach Fragestellung der passende Ansatz gewählt werden muß.

Die klassische Methode nimmt dem einzelnen Ereignis seine Individualität und betrachtet nur Observablen aller produzierten Teilchen, unabhängig aus welchen Ereignis sie stammen. Die damit erzeugten *inkluisiven* Verteilungen beschreiben somit ein fiktives, mittleres Ereignis. Diese Vorgehensweise wird insbesondere zur detaillierten Untersuchung von Produktionsmechanismen und/oder Transversalimpuls- oder Rapiditätsspektren von Baryonen, die ein *strange*-Quark enthalten, wichtig (z. B., Λ , Ξ^- und Ξ^+), da deren Multiplizität in einem einzelnen Ereignis zu gering ist, um aussagekräftige Ergebnisse zu erzielen.

Da offensichtlich die einzelnen Ereignisse mehr oder weniger stark von dem eben definierten mittleren Ereignis abweichen werden, ist der logische nächste Schritt, jedes Ereignis getrennt zu betrachten, um dadurch eine Aussage über die Stärke der Fluktuation von Ereignis zu Ereignis zu ermöglichen. Durch die große Zahl an detektierten Ereignissen scheint es sinnvoll, einzelne Ereignisse durch möglichst wenige Maßzahlen zu charakterisieren. Als erstes bieten sich die Mittelwerte der Observablen an, die bei den inklusiven Verteilungen schon über das gesamte Ereignisensemble gemittelt wurden. Diese neu gewonnenen Maßzahlen machen *globale* Aussagen über jedes Ereignis und suchen daher nach globalen Fluktuationen.

Die Bildung des Mittelwertes ist eine sehr einfache Möglichkeit, um eine Verteilung zu klassifizieren. Es ist klar, daß man einerseits nur wenige Maßzahlen definieren will, andererseits die in die eigentliche Analyse herübertransportierte Information mit der Zahl der Maßzahlen wächst. Man muß also einen sinnvollen Kompromiß eingehen. Die

¹Im Rahmen dieser Untersuchung wird später insbesondere der Transversalimpuls p_{\perp} der Teilchen wichtig werden.

Eigenschaften der Maßzahlen richtet sich dabei nach der speziellen Analyse, die an den Daten vorgenommen werden soll.

Die Suche nach im niedrigen p_{\perp} -Bereich gehäuft auftretenden Pionen stellt an die besprochenen Meßwerte die folgenden Bedingungen: Zum einen sollen sie ein Maß für die Anzahl der Teilchen in einem bestimmten Intervall der Verteilung zur Verfügung stellen, zum anderen sollte die Breite des Intervalls wegen der unbekanntem Ausdehnung der in p_{\perp} korrelierten Pionen variabel sein.

Die zweite Bedingung gab den Anstoß, die Analyse mit Hilfe von Wavelettransformationen durchzuführen. Mit diesen Transformationen ist man in der Lage, eine Verteilung unabhängig von der ihr zugrundeliegenden Unterteilung der Abszisse (man spricht von der *Binbreite*) zu analysieren. Die Verteilung wird also in eine Darstellung transformiert, die gegenüber der ursprünglichen Verteilung von der Auflösung (oder der *Skala*) der gewählten Abszissenunterteilung weitgehend unabhängige Aussagen ermöglicht. Man sagt, es handele sich bei der Wavelettransformation um eine *skalenunabhängige* Repräsentation der ursprünglichen Verteilung, da der an die Abszisse der Eingangsverteilung angelegte Maßstab durch diese neue Darstellung keine feste Größe mehr hat, sondern innerhalb der Transformation mehrmals mit dem Faktor 2 skaliert wird.

Die erstgenannte Forderung nach einer Korrelationsanalyse wird durch die Berechnung der Momente der aus der Wavelettransformation erhaltenen Koeffizienten möglich. Die mathematischen Grundlagen der Wavelettransformation und die Berechnung ihrer Momente werden in Abschnitt 3.2 vorgestellt.

Zuvor wird in Abschnitt 3.1 noch auf ein weiteres Hilfsmittel eingegangen, das die Einzelereignisanalyse (engl.: *Event-by-Event Analysis*) erheblich erleichtert. Es handelt sich dabei um eine Transformation, die es ermöglicht, beliebige Verteilungen (in unserem Fall nur solche der Dimension 1) in eine Gleichverteilung umzuwandeln. Dies macht einerseits einen schnellen direkten Vergleich der Verteilungen von einzelnen Ereignissen mit der entsprechenden inklusiven Verteilung möglich, andererseits wird die Möglichkeit der Simulation von Kontrollverteilungen stark vereinfacht, da diese ebenfalls nur noch gemäß einer Gleichverteilung gefüllt werden müssen.

3.1 Transformationen beliebiger Verteilungen in Gleichverteilungen

Um entscheiden zu können, ob sich ein einzelnes Ereignis — dargestellt in einer Observable — signifikant anders verhält als vergleichbare Ereignisse des gleichen Ensembles, vergleicht man das Spektrum dieses Einzelereignisses mit dem inklusiven Spektrum des gesamten Ensembles. Es kann sich allerdings als Problem erweisen, den Vergleich mit einer schon komplizierten mittleren Verteilung durchzuführen — erst recht, wenn die Multiplizität der Einzelereignisse nur relativ gering ist.

Lieber möchte man in der Lage sein, schon *mit bloßem Auge* einer Einzelverteilung anzusehen, ob sie ‚besonders‘ ist oder nicht. Das wäre einfach, wenn man es mit einer im Mittel flachen Verteilung zu tun hätte, da dann die Ereignisse ohne vom Mittel abweichende Information ebenfalls eine flache Verteilung aufweisen sollten. Ein außergewöhnliches Ereignis hingegen ist dann alles andere als gleichverteilt. Es stellt sich also das Problem, eine beliebige Verteilung in eine Gleichverteilung zu transformieren [16].

Gegeben sei eine Verteilung $\rho(x) dx$, $x \in [a, b]$, die in eine andere Verteilung $h(y) dy$, $y \in \mathcal{R}$, überführt werden soll. Gesucht ist die Funktion f , die diese Operation bewerkstelligt:

$$\begin{aligned} \rho(x) &\xrightarrow{f} h(y) \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aufgrund der notwendigen Erhaltung der ursprünglichen Information muß

$$\rho(x) dx = h(y) dy \quad (3.2)$$

gelten. Dadurch erhält man

$$h(y) = \rho(x) \frac{dx}{dy} = \rho(x) \frac{1}{f'(x)} \equiv 1 \quad \text{bzw.} \quad (3.3)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \rho(x). \quad (3.4)$$

Schließlich ergibt eine einfache Umformung

$$y = f(x) = \int_a^x \rho(x') dx' \quad \text{mit } x \in [a, b]. \quad (3.5)$$

Um nun noch den Träger der Verteilung $h(y)dy$ auf das Intervall $[0,1]$ zu beschränken, erfolgt eine Normierung, so daß man schließlich folgende Form erhält:

$$y = f(x) = \frac{\int_a^x \rho(x') dx'}{\int_a^b \rho(x') dx'} \quad \text{mit } x \in [a, b], y \in [0, 1]. \quad (3.6)$$

Dadurch bekommt die Verteilung $h(y)dy$ folgendes Aussehen:

$$h(y)dy \equiv \begin{cases} 1 & y \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Für die praktische Durchführung bedeutet dies, daß man zuerst die über alle Ereignisse gemittelte (inklusive) Verteilung erzeugen muß. Will man nun ein einzelnes Ereignis transformieren, trägt man jeden Eintrag an der Stelle x der ursprünglichen Verteilung an der durch Gleichung 3.6 mit der gemittelten Verteilung errechneten Stelle

y ein. Gemittelt über viele Ereignisse des Ensembles ergibt sich so wieder annähernd eine Gleichverteilung¹. Die Werteverteilung eines einzelnen Ereignisses hingegen kann durchaus von einer Gleichverteilung abweichen, obwohl sie gemäß einer flachen Verteilung mit beschränkter Statistik belegt wird. Gehen diese Abweichungen über das durch statistische Schwankungen zu erwartende Maß hinaus, hat man es mit einiger Sicherheit mit einem besonderen Ereignis zu tun.

3.2 Wavelets

Bei Wavelets handelt es sich um ein orthogonales Funktionensystem, nach dem sich beliebige andere Funktionen entwickeln lassen. Charakteristisch für eine Wavelettransformation ist, daß ein scharfes Eingangssignal ebenfalls ein scharfes Ausgangssignal erzeugt, so daß man durch Rechenungenauigkeiten oder Schnitte im Koeffizientenraum nicht das gesamte Signal verfremdet, sondern nur lokal kleine Abweichungen auftreten. Außerdem werden bei einer solchen Entwicklung die Wavelets automatisch skaliert, was dazu führt, daß durch die Transformation eines Vektors von Datenpunkten in den Funktionenraum der Wavelets skalenunabhängige, sprich von der Bineinteilung der Abszisse losgelöste Aussagen über die Daten gemacht werden können. Damit gelingt es z. B., Selbstähnlichkeiten bei verschiedener Skalengröße (= Auflösung) oder Anomalien eines Spektrums, deren Skala nicht von vornherein bekannt sind, zu erkennen. Durch die anschließende Berechnung der Momente der aus der Transformation erhaltenen Koeffizienten wird zusätzlich eine Korrelationsanalyse möglich. Insgesamt erlaubt die Wavelettransformation also die Untersuchung von Mehrteilchenkorrelationen, unabhängig von der Skalengröße, mit der die verwendeten Observablen beobachtet werden.

Nach einer allgemeinen Einleitung über Integraltransformationen — der mathematischen Grundlage, aus der sich die Entwicklung einer Funktion nach einem orthogonalen Funktionensystem ergibt — wird dieses Konzept anhand der bekannten Fourier-Transformation erläutert, um dann, auf dieser Grundlage aufbauend, zu den Wavelettransformationen übergehen zu können.

¹Nur wenn man alle zur Mittelung herangezogenen Ereignisse verwendet, ergibt sich die Gleichverteilung exakt — es sei denn, alle Ereignisse sind identisch.

3.2.1 Integraltransformationen — Transformationen in Funktionenräumen

Integraltransformationen

Unter einer Integraltransformation im allgemeinen versteht man die mathematische Operation, die einer Originalfunktion $f(t)$ eine Bildfunktion $F(p)$ derart zuordnet, daß

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(p, t) f(t) dt \quad (3.8)$$

gilt. Mit Hilfe des im Hilbertraum der quadratintegriblen Funktionen L^2 üblichen Skalarprodukts

$$(g(t), h(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(t) h(t) dt \quad (3.9)$$

läßt sich eine Integraltransformation als Entwicklung einer Funktion nach einem anderen Funktionensystem verstehen. Um die Eindeutigkeit und die Umkehrbarkeit einer solchen Transformation zu gewährleisten, müssen die Funktionen $K(p, t)$, nach denen die Funktion $F(p)$ entwickelt werden soll, orthogonal zueinander sein. Mathematisch bedeutet dies

$$(K(p, t), K(p', t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{K}(p, t) K(p', t) dt = \delta_{pp'}. \quad (3.10)$$

Die für die Berechnung nötige Koeffizientenfunktion $f(t)$ läßt sich leicht mit Hilfe des gegebenen Funktionenbasissystems und der zu entwickelnden Funktion berechnen:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(p) K(p, t) dp = (F(p), K(p, t)). \quad (3.11)$$

In den bei uns relevanten Fällen ist die zu entwickelnde Funktion $F(p)$ eine physikalische Größe, so daß auf die Bildung der komplexen Konjugation verzichtet werden kann.

Diskretisierung von Integraltransformationen

Da gemessene Daten selten in Form einer kontinuierlichen Funktion, sondern meist als Datenpunkte vorliegen, muß man sich über die Übertragbarkeit des eben vorgestellten Konzeptes auf den diskreten, diskontinuierlichen Fall Gedanken machen. Es handelt sich bei einer Integraltransformation offensichtlich um eine lineare Transformation, weshalb die Matrizenrechnung als Lösungsmethode naheliegt.

Gegeben sei ein Datenvektor der Länge N , dessen Elemente mit Hilfe einer umkehrbar eindeutigen Operation in einen anderen Datenvektor überführt werden sollen. Die

eindeutige Umkehrbarkeit spielt insofern eine große Rolle, da man keine Information aus dem ursprünglichen Datenvektor verlieren möchte. Daraus folgt insbesondere, daß die Dimension des erzeugten Datenvektors genau gleich der Dimension des gegebenen Datenvektors sein muß. Die mathematische Formel einer solchen Transformation schreibt sich dann wie folgt:

$$\vec{F} = A \vec{f}, \quad (3.12)$$

wobei \vec{f} der Repräsentant des Original-Datenvektors und \vec{F} derjenige des neuen Datenvektors sei. A ist die lineare Abbildung, die zwischen den beiden Datenvektoren vermittelt, also eine $N \times N$ -Matrix. Die Abbildungsvorschrift sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Es hängt nun allein von den Matrixelementen a_{nk} ab, welche spezielle lineare Transformation durch obige Gleichung 3.13 erzeugt wird.

3.2.2 Beispiel: Fourier-Transformationen

Kontinuierliche Fourier-Transformationen

Das wohl bekannteste Beispiel einer Transformation in einen anderen Funktionenraum ist die Fourier-Entwicklung. Die Basisfunktionen, nach denen die ursprüngliche Funktion entwickelt wird, sind Sinus und Cosinus. Um die mathematische Konsistenz zu wahren, erhält man mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$K(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad p = i\omega. \quad (3.14)$$

Wie man leicht zeigt, erfüllt dieses Funktionensystem die Forderung nach Orthogonalität:

$$(K(\omega, t), K(\omega', t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt = \delta_{\omega\omega'}. \quad (3.15)$$

Die Koeffizientenfunktion $f(t)$ berechnet sich nach Gleichung 3.11 zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.16)$$

Diskrete Fourier-Transformationen

Will man ein diskretes, endliches Intervall von Funktionswerten Fourier-transformieren, benötigt man die Matrixelemente a_{nk} . Man erhält (siehe hierzu [17])

$$a_{nk} = e^{2\pi ink/N}. \quad (3.17)$$

Hierbei ist zu beachten, daß bei dieser Transformation ein Satz von N Datenpunkten

$$f_k \equiv f(t_k) \quad \text{mit} \quad t_k \equiv k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.18)$$

in einen transformierten Datensatz

$$F_n \equiv F(\omega_n) \quad \text{mit} \quad \omega_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, +\frac{N}{2} \quad (3.19)$$

überführt wird. Damit transformieren sich die Elemente des Datenvektors folgendermaßen:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi ink/N}. \quad (3.20)$$

Diese Gleichung läßt die Struktur einer Matrixgleichung schon sehr deutlich zu Tage treten, wenn auch zur korrekten Indizierung die Laufvariablen verändert werden müßten.

Da die Basisfunktionen — wie erwähnt — ein orthogonales System bilden, ist auch die Abbildung selbst und damit die Matrix orthogonal, woraus sofort folgt (siehe z. B. [18]), daß die Inverse der Matrix gerade ihre Transponierte ist:

$$A^t A = E \quad \text{bzw.} \quad A^{-1} = A^t. \quad (3.21)$$

Somit ist auch die Umkehrung — d. h. die Rückrechnung des erzeugten Datenvektors auf den ursprünglichen Datenvektor — einfach möglich. Es zeigt sich, daß der einzige Unterschied im anderen Vorzeichen des Exponenten und in der Division durch N des nach der Summierung erhaltenen Ergebnisses besteht:

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{2\pi ink/N}. \quad (3.22)$$

In der Anwendung hat die Fourier-Transformation eines endlichen Intervalls allerdings einen entscheidenden Nachteil: Die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ erstreckt sich streng genommen bis ins Unendliche. Offensichtlich bleibt aber die Anzahl der Funktionswerte bei einer orthogonalen Transformation konstant, so daß es zwangsläufig zum Abschneiden der transformierten Funktion $F(\omega)$ außerhalb des Bereichs $\pm \frac{N}{2}$ kommt.

3.2.3 Wavelettransformationen

Im folgenden wird eine weitere zwischen Funktionenräumen vermittelnde Transformation betrachtet. Es wird sich zeigen, daß auch in diesem Fall die Transformationsmatrix eine relativ einfache Struktur hat. Die Transformation an sich hat aber gegenüber der Fourier-Transformation einen entscheidenden Vorteil: Während bei der erstgenannten ein diskretes Zeitsignal ein unendlich ausgedehntes Frequenzsignal erzeugt (und umgekehrt), erhält man mit Hilfe der Wavelettransformation Informationen, die sowohl im Original- als auch im Abbildungsbereich lokalisiert sind.

Es ist klar, daß eine Wavelettransformation im kontinuierlichen Fall über eine Integraltransformation der Form von Gleichung 3.8 definiert ist. Hier wird aber nur auf den Fall von einer diskreten, endlichen Anzahl von Datenpunkten eingegangen, die mit Hilfe einer linearen Transformation in einen Satz von Koeffizienten von Wavelets oder Mutterfunktionen (so die Namen der Mitglieder des Funktionenbasissystems) transformiert werden sollen [19]. Dies hat seine Berechtigung darin, daß die später zu analysierenden Daten ebenfalls aus einer diskreten und endlichen Anzahl von Datenpunkten bestehen.

Die Wirkungsweise von Wavelettransformationen erklärt sich am leichtesten am Beispiel der Haar-Wavelets. Nach der Einführung dieses Grundkonzeptes lassen sich kompliziertere Wavelets als logische Fortsetzung des erkannten Prinzips verstehen.

Haar-Wavelets

Gegeben sei eine beliebige Funktion $\epsilon(x)$ im Definitionsbereich $[0, 1]$, welcher in 2^J Bins unterteilt sei. Die Funktion werde durch Kastenfunktionen

$$\phi_{Jk}^H(x) = \phi^H(2^J x - k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k 2^{-J} \leq x < (k+1)2^{-J} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.23)$$

angenähert, wobei $0 \leq x < 2^J$ (siehe Abb. 3.1 oben). Der Index H steht für „Haar“. Diese Kastenfunktionen sind orthogonal in Bezug auf den Index k :

$$\left(\phi_{Jk}^H, \phi_{Jk'}^H \right) = 2^{-J} \delta_{kk'}. \quad (3.24)$$

Die Funktion $\epsilon(x)$ schreibt sich dann mit Hilfe von ϕ_{Jk}^H mit der Auflösung J wie folgt:

$$\epsilon(x) \approx \epsilon^{(J)}(x) = \sum_{0 \leq k < 2^J} \epsilon_{Jk} \phi_{Jk}^H(x). \quad (3.25)$$

Man sagt, $\epsilon^{(J)}(x)$ sei die Monoskalendarstellung der Funktion $\epsilon(x)$, die in lokale Kastenfunktionen der Auflösung J zerlegt wird. Dabei bezieht sich der Ausdruck „lokal“ auf den kompakten Träger der Funktion (im Gegensatz zu den nicht-lokalen Fourier-Funktionen

$$\begin{aligned}
 & \epsilon(x) = \\
 & = \epsilon_{3,0} * \phi_{3,0} + \epsilon_{3,1} * \phi_{3,1} + \dots + \epsilon_{3,7} * \phi_{3,7} \\
 & = \epsilon_{2,0} * \phi_{2,0} + \epsilon_{2,1} * \phi_{2,1} + \dots + \epsilon_{2,3} * \phi_{2,3} + \\
 & \quad + \tilde{\epsilon}_{2,0} * \phi_{\tilde{2},0} + \tilde{\epsilon}_{2,1} * \phi_{\tilde{2},1} + \dots + \tilde{\epsilon}_{2,3} * \phi_{\tilde{2},3} \\
 & = \epsilon_{1,0} * \phi_{1,0} + \epsilon_{1,1} * \phi_{1,1} + \\
 & \quad + \tilde{\epsilon}_{1,0} * \phi_{\tilde{1},0} + \tilde{\epsilon}_{1,1} * \phi_{\tilde{1},1} + \\
 & \quad + \tilde{\epsilon}_{2,0} * \phi_{\tilde{2},0} + \tilde{\epsilon}_{2,1} * \phi_{\tilde{2},1} + \dots + \tilde{\epsilon}_{2,3} * \phi_{\tilde{2},3} \\
 & = \epsilon_{0,0} * \phi_{0,0} + \\
 & \quad + \tilde{\epsilon}_{0,0} * \phi_{\tilde{0},0} + \\
 & \quad + \tilde{\epsilon}_{1,0} * \phi_{\tilde{1},0} + \tilde{\epsilon}_{1,1} * \phi_{\tilde{1},1} + \\
 & \quad + \tilde{\epsilon}_{2,0} * \phi_{\tilde{2},0} + \tilde{\epsilon}_{2,1} * \phi_{\tilde{2},1} + \dots + \tilde{\epsilon}_{2,3} * \phi_{\tilde{2},3}
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.1 Multiskalenanalyse mit dem Haar-Wavelet [20].

Sinus und Cosinus). Der Übergang zur Multiskalendarstellung erfolgt durch die Ersetzung der Kastenfunktion ϕ_{Jk}^H zur Auflösung J durch eine Kastenfunktion ϕ_{J-1,k_2}^H zur Auflösung $J-1$ und einer Differenzfunktion,

$$\psi_{J-1,k_1}^H(x) = \psi^H(2^{J-1}x - k_1) = \begin{cases} +1 & \text{für } k_1 2^{-(J-1)} \leq x < (k_1 + \frac{1}{2})2^{-(J-1)} \\ -1 & \text{für } (k_1 + \frac{1}{2})2^{-(J-1)} \leq x < (k_1 + 1)2^{-(J-1)} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.26)$$

dem sogenannten Haar-Wavelet. Daraus läßt sich die ursprünglich feiner unterteilte Funktion leicht wieder erzeugen, nämlich durch Summierung bzw. Differenzbildung der gröber unterteilten Funktionen:

$$\begin{aligned} \phi_{J,2k}^H(x) &= \frac{1}{2} \left(\phi_{J-1,k}^H(x) + \psi_{J-1,k}^H(x) \right), \\ \psi_{J,2k+1}^H(x) &= \frac{1}{2} \left(\phi_{J-1,k}^H(x) - \psi_{J-1,k}^H(x) \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Offensichtlich werden zwei benachbarte Bins der Auflösung J zu einem gemittelten Bin bei der Auflösung $J-1$ zusammengefaßt; die Differenz zu diesem Mittelwert der einzelnen Bins wird in Form der Funktion $\psi_{Jk}^H(x)$ vermerkt. Somit bleibt die komplette Information erhalten. Die Funktion $\epsilon(x)$ erhält damit folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} \epsilon(x) \approx \epsilon^{(J)}(x) &= \sum_{0 \leq k < 2^J} \epsilon_{Jk} \phi_{Jk}^H(x) \\ &= \sum_{0 \leq k_2 < 2^{J-1}} \epsilon_{J-1,k_2} \phi_{J-1,k_2}^H(x) + \sum_{0 \leq k_1 < 2^{J-1}} \tilde{\epsilon}_{J-1,k_1} \psi_{J-1,k_1}^H(x) \\ &= \epsilon^{(J-1)}(x) + \tilde{\epsilon}^{(J-1)}(x). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Diese Schritte werden nun wiederholt, so daß jetzt die Kastenfunktion $\phi_{J-1,k}^H(x)$ der letzten Zerlegung abermals als Summe einer Kastenfunktion $\phi_{J-2,k_3}^H(x)$ und einer Differenzfunktion $\psi_{J-2,k_2}^H(x)$ aufgefaßt wird. Gleichung 3.28 wird somit zu:

$$\begin{aligned} \epsilon(x) \approx & \sum_{0 \leq k_3 < 2^{J-2}} \epsilon_{J-2,k_3} \phi_{J-2,k_3}^H(x) + \sum_{0 \leq k_2 < 2^{J-2}} \tilde{\epsilon}_{J-2,k_2} \psi_{J-2,k_2}^H(x) \\ & + \sum_{0 \leq k_1 < 2^{J-1}} \tilde{\epsilon}_{J-1,k_1} \psi_{J-1,k_1}^H(x) \\ & = \epsilon^{(J-2)}(x) + \tilde{\epsilon}^{(J-2)}(x) + \tilde{\epsilon}^{(J-1)}(x). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die Iteration wird so lange fortgesetzt, bis die Auflösung $J-J=0$ erreicht wird (Abb. 3.1 unten):

$$\begin{aligned} \epsilon(x) \approx & \sum_{0 \leq k < 1} \epsilon_{0,k} \phi_{0,k}^H(x) + \sum_{0 \leq k_J < 1} \tilde{\epsilon}_{0,k_J} \psi_{0,k_J}^H(x) + \sum_{0 \leq k_{J-1} < 2} \tilde{\epsilon}_{1,k_{J-1}} \psi_{1,k_{J-1}}^H(x) + \dots \\ & + \sum_{0 \leq k_2 < 2^{J-2}} \tilde{\epsilon}_{J-2,k_2} \psi_{J-2,k_2}^H(x) + \sum_{0 \leq k_1 < 2^{J-1}} \tilde{\epsilon}_{J-1,k_1} \psi_{J-1,k_1}^H(x) \\ & = \epsilon^{(0)}(x) + \tilde{\epsilon}^{(0)}(x) + \tilde{\epsilon}^{(1)}(x) + \dots + \tilde{\epsilon}^{(J-2)}(x) + \tilde{\epsilon}^{(J-1)}(x). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Im Gegensatz zur monoskalen Darstellung (Glg. 3.25) wurde nun eine orthogonale Multiskalenzerlegung erzeugt. Dabei wurde die Funktion $\epsilon(x)$ nicht nach den monoskalen Kastenfunktionen $\phi_{Jk}^H(x)$, sondern nach Differenzfunktionen $\psi_{Jk}^H(x)$, die auf verschiedenen Skalen $0 \leq j < J$, 'leben', entwickelt. Wie Gleichung 3.25 besteht auch die Darstellung Gleichung 3.30 aus 2^J Amplituden — $2^{J-1} + 2^{J-2} + \dots + 2 + 1 = 2^J - 1$ $\tilde{\epsilon}_{jk}$ -Amplituden und einer Amplitude $\epsilon_{0,0}$ für den Gesamtmittelwert — was eine notwendige Bedingung für Informationserhaltung ist. Außerdem ist die Entwicklung (Glg. 3.30) orthogonal, da

$$\begin{aligned} (\psi_{jk}^H, \psi_{j'k'}^H) &= \frac{1}{2^J} \delta_{jj'} \delta_{kk'} \text{ und} \\ (\phi_{0,0}^H, \psi_{jk}^H) &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Würde man bei jedem Iterationsschritt immer nur die gemittelten Amplituden ϵ_{jk} behalten, die Waveletamplituden $\tilde{\epsilon}_{jk}$ dagegen verwerfen, erhielte man denselben Datensatz mit immer größerer Auflösung, was offenbar einen Informationsverlust bedeuten würde. In Gleichung 3.30 dagegen wird keine Information von irgendeiner Auflösungsskala verworfen. Jedem Verlust an Information durch erneute Mittelung wird durch eine weitere Waveletamplitude Rechnung getragen:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}^{(j)}(x) &= \sum_{0 \leq k < 2^j} \tilde{\epsilon}_{jk} \psi_{jk}^H(x) = \epsilon^{(j+1)}(x) - \epsilon^{(j)}(x) \\ &= \sum_{0 \leq k_1 < 2^{j+1}} \epsilon_{j+1,k_1}(x) \phi_{j+1,k_1}^H(x) - \sum_{0 \leq k_2 < 2^j} \epsilon_{j,k_2}(x) \phi_{j,k_2}^H(x). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Allgemeine Wavelettransformationen

Nach dieser ersten Einführung anhand der Haar-Wavelets stellt sich die Frage, ob sich der obige Formalismus verallgemeinern läßt. Gibt es eventuell noch andere Mutterfunktionen, die dem Haar-Wavelet in seiner Wirkung bei der Funktionentransformation gleichen?

Um einen Einstieg zu bekommen, betrachtet man zunächst erneut Gleichung 3.28. Die Funktion $\epsilon^{(J)}(x)$, aufgelöst auf der Skala J mit den Kastenfunktionen $\phi_{Jk}^H(x)$, wird durch die gröbere Funktion $\epsilon^{(J-1)}(x)$ auf der Skala $J-1$ mit den Kastenfunktionen $\phi_{J-1,k}^H(x)$ und den Interskalenfunktionen $\tilde{\epsilon}^{(J-1)}(x)$ mit Hilfe der Differenzfunktionen $\psi_{J-1,k}^H(x)$ ausgedrückt. Wie man schon oben an Gleichung 3.32 sehen konnte, gilt

$$\epsilon^{(J)}(x) = \epsilon^{(J-1)}(x) + \tilde{\epsilon}^{(J-1)}(x) \quad (3.33)$$

und

$$(\epsilon^{(J-1)}, \tilde{\epsilon}^{(J-1)}) = \sum_{0 \leq k_1, k_2 < 2^{J-1}} \epsilon_{J-1,k_1} \tilde{\epsilon}_{J-1,k_2} (\phi_{J-1,k_1}^H, \psi_{J-1,k_2}^H) = 0. \quad (3.34)$$

Daher sind die Kastenfunktionen $\phi_{J-1,k_1}^H(x)$ wie auch die Differenzfunktionen $\psi_{J-1,k_2}^H(x)$ vollständig durch die feineren Kastenfunktionen $\phi_{J,k}^H(x)$ darstellbar. Das kann durch einfache Linearkombination geschehen, was soviel heißt wie:

$$\begin{aligned}\phi_{J-1,k_1}^H(x) &= \phi^H(2^{J-1}x - k_1) = \sum_k c_k \phi^H(2^J x - k) = \sum_k c_k \phi_{J,k}^H(x), \\ \psi_{J-1,k_2}^H(x) &= \psi^H(2^{J-1}x - k_2) = \sum_k d_k \phi^H(2^J x - k) = \sum_k d_k \phi_{J,k}^H(x).\end{aligned}\quad (3.35)$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit erhält man für den Fall $J = 1$, $k_1 = k_2 = 0$:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_m c_m \phi(2x - m), \\ \psi(x) &= \sum_m d_m \phi(2x - m).\end{aligned}\quad (3.36)$$

Der Index H wurde bereits weggelassen, da es sich hierbei um die grundlegenden Zweiskalengleichungen handelt. Alle Koeffizienten außer $c_0 = c_1 = d_0 = -d_1 = 1$ verschwinden für das Haar-Wavelet, wie man direkt an den Gleichungen 3.27 sieht.

Die glättende Funktion $\phi(x)$ und die Differenzfunktion $\psi(x)$ der Gleichungen 3.36 wird im ersten Fall *Scalingfunktion* und im zweiten — wie schon oben erwähnt — *Wavelet* genannt. Durch die Wahl von verschiedenen Koeffizienten c_m und d_m erhält man unterschiedliche Scalingfunktionen und Wavelets. Diese Koeffizienten müssen gewisse Voraussetzungen erfüllen, die in ihrer Gesamtheit in Referenz [21] nachzulesen sind. An dieser Stelle wird nur auf ihre wichtigsten Eigenschaften eingegangen.

Bedingungen an die Koeffizienten c_m und d_m

Durch Integration von Gleichung 3.36 bekommt man sofort

$$\sum_k c_k = 2. \quad (3.37)$$

Wie schon oben erwähnt, kommt es sehr auf die Orthogonalität der Funktionen $\phi(x)$ an, also $(\phi, \phi(x - m)) = \delta_{m0}$. In Bezug auf c_m und d_m bedeutet dies

$$\sum_k c_k c_{k-2m} = 2\delta_{m0}. \quad (3.38)$$

Andererseits muß das Wavelet die Eigenschaften einer Differenzfunktion aufweisen, $\int \psi(x) dx = 0$, was

$$\sum_k d_k = 0 \quad (3.39)$$

bedeutet. In Hinblick auf die Gleichungen 3.33 und 3.34 muß außerdem das Integral $(\psi, \phi(x - m)) = 0$ verschwinden, was zu

$$d_k = (-1)^k c_{1-k} \quad (3.40)$$

führt. Daraus folgt aber mit Gleichung 3.39:

$$\sum_k (-1)^k c_k = 0. \quad (3.41)$$

Allein diese Eigenschaften (Gln. 3.37–3.41) bewirken, daß

$$\left(\psi(x), \psi(2^j x - k)\right) = (\psi_{00}(x), \psi_{jk}(x)) = \delta_{j0} \delta_{m0} \quad (3.42)$$

gilt. Diese Bedingungen für die Koeffizienten c_m und d_m definieren also eine orthogonale Multiskalenanalyse.

Daubechies Wavelettransformationen

Durch weitere einschränkende Bedingungen an die Koeffizienten c_m und d_m kann man erreichen, daß Polynome der Ordnung p exakt reproduziert werden können [22]:

$$\sum_k (-1)^k k^m c_k = 0 \quad \text{mit } m = 0, 1, \dots, p. \quad (3.43)$$

Dadurch verschwinden zusätzlich die ersten $p + 1$ Momente des Wavelets:

$$(x^m, \psi(x)) = 0 \quad \text{mit } m = 0, 1, \dots, p. \quad (3.44)$$

Das einfache Haar-Wavelet $\psi^H(x)$ der Gleichung 3.26, welches zur Kastenfunktion $\phi^H(x)$ der Gleichung 3.23 gehört, reproduziert nur Polynome der Ordnung $p = 0$ richtig. In diesem Sinne bessere Eigenschaften hat das *DAUB₄*-Wavelet. Mit ihm werden Polynome der Ordnung $p = 1$ exakt wiedergegeben. Die Koeffizienten ergeben sich dabei zu

$$c_0 = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{3}), \quad c_1 = \frac{1}{4} (3 + \sqrt{3}), \quad c_2 = \frac{1}{4} (3 - \sqrt{3}), \quad c_3 = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3}). \quad (3.45)$$

Es zeigt sich, daß mit der Anzahl der nicht-verschwindenden Koeffizienten der kompakte Träger der Wavelets breiter, der Satz an Wavelets selbst zunehmend ‚glatter‘ wird.

Diskrete Wavelettransformationen

Es sind genau diese Koeffizienten c_k und $d_k = (-1)^k c_{1-k}$ die man zur numerischen Berechnung einer diskreten Wavelettransformation benötigt. Will man erneut — wie oben — eine diskrete Anzahl N von Funktionswerten f_i einer Transformation unterziehen, benötigt man die Transformationsmatrix A . Man sieht sofort, daß diese im Fall der

Haar-Wavelets folgendes Aussehen haben muß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Man erkennt das zugrundeliegende Prinzip, so daß sich die Matrix für die Koeffizienten folgendermaßen schreibt:

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & & & & & \\ c_1 & -c_0 & & & & & \\ & & c_0 & c_1 & & & \\ & & c_1 & -c_0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & c_0 & c_1 \\ & & & & & c_1 & -c_0 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Dies läßt sich einfach auf Wavelettransformationen mit mehr nicht-verschwindenden Koeffizienten erweitern. In solchen Fällen ist nur auf die Besonderheit bei den letzten $k - 1$ Zeilen der Matrix zu achten, wobei mit k der Index des letzten von Null verschiedenen Koeffizienten bezeichnet ist (die Zählung beginnt bei Null). Dies liegt daran, daß — wie auch schon bei der diskreten Fourier-Transformation — davon ausgegangen wird, daß sich der Datenvektor außerhalb des Definitionsbereiches periodisch wiederholt. Das führt bei mehr als 2 von Null verschiedenen Koeffizienten c_m dazu, daß die Matrix ihre diagonale Anordnung verliert, da die ‚letzten‘ Dateneinträge mit den (angenommenen) periodisch folgenden ‚ersten‘ Einträgen verrechnet werden müssen. Ansonsten verläuft das Befüllen aber ganz wie gewohnt von links oben nach rechts unten, indem in jeder ungeraden Zeile der Reihe nach die c_m und in jeder geraden Zeile die d_m (die sich aus den c_m ergeben) in umgekehrter Reihenfolge mit wechselndem Vorzeichen eingetragen

wobei im diskontinuierlichen Fall das Integral klarerweise wieder durch die Summe zu ersetzen ist:

$$\mu^q = \langle x^q \rangle = \sum_i \rho(x_i) x_i^q \Delta x. \quad (3.50)$$

Will man nun, wie in unserem Fall, eine Aussage über die Korrelation der Einträge machen, erkennt man schnell, daß dies eng mit den eben definierten Momenten zusammenhängt. Interessiert man sich für die Anzahl der Paare von Einträgen in zwei verschiedenen Bins x_1 und x_2 , hat man das Produkt $n_{x_1} \cdot n_{x_2}$ zu bilden. Die Anzahl der Paare von Einträgen in ein und demselben Bin x_i ist daher $n_{x_i} \cdot n_{x_i}$. Das entsprechende gilt für Korrelationen von mehreren Einträgen: Die Anzahl der q -Tupel von Einträgen in einem Bin errechnet sich als $n_{x_i}^q$. Will man nun die globale Aussage machen, wie oft q -Tupel von Einträgen in allen Bins vorhanden sind, muß man über alle Bins summieren (im kontinuierlichen Fall integrieren), und man erkennt, daß dies genau die Momente der Eingangsverteilung sind. Das Moment 1. Ordnung gibt also die mittlere Anzahl der Einträge pro Bin an, das Moment 2. Ordnung die mittlere Anzahl der Paare von Einträgen und so fort.

Wenn man es nicht mit einer sehr hohen Statistik zu tun hat, muß man allerdings zur faktoriellen Berechnung der Momente übergehen, da z. B. die Anzahl der Eintragspaare in einem Bin gar nicht mit $n_{x_i} \cdot n_{x_i}$ gleichzusetzen ist, sondern nur mit $n_{x_i} \cdot (n_{x_i} - 1)$. Das leuchtet auch ein, denn ein Eintrag kann nicht sein eigener Partner sein. Entsprechendes gilt für höhere Ordnungen.

Nun zurück zu den Waveletmomenten. Unter ihnen versteht man die eben beschriebenen Momente¹, allerdings summiert über nur eine bestimmte Skala j :

$$\mu_j^q = \sum_k \tilde{\epsilon}_{jk}^q = \langle \tilde{\epsilon}_{jk}^q \rangle. \quad (3.51)$$

Dabei bezeichnet q , wie gehabt, die Ordnung der Momente. Da aber gerade in unserem Fall nur eine endliche Statistik vorliegt (da Verteilungen einzelner Ereignisse betrachtet werden sollen), muß man zu den faktoriellen Waveletmomenten übergehen, also Faktoren wie $\tilde{\epsilon}_{jk}^2$ durch $\tilde{\epsilon}_{jk} \cdot (\tilde{\epsilon}_{jk} - 1)$ ersetzen. Somit wird μ_j^q zu:

$$M_j^q = \sum_k [\tilde{\epsilon}_{jk} \cdot (\tilde{\epsilon}_{jk} - 1) \cdots (\tilde{\epsilon}_{jk} - q + 1)] = \sum_k \tilde{\epsilon}_{jk}^{[q]} = \langle \tilde{\epsilon}_{jk}^{[q]} \rangle. \quad (3.52)$$

Was nun noch fehlt, ist eine adäquate Normierung, da man sonst die faktoriellen Waveletmomente zu verschiedenen Skalen aufgrund der jeweils um den Faktor 2 verschiedenen Binanzahl und -breite nicht vergleichen könnte. Daher normiert man mit der mittleren Zahl der Einträge $\langle N \rangle$ pro Bin, von denen es jeweils 2^j gibt. Die Mittelung erfolgt über alle Verteilungen des Ensembles. Man erhält also schließlich für die normierten

¹Aus dem vorangegangenen Abschnitt 3.2.3 wird klar, daß die potenzierten Waveletkoeffizienten, $\tilde{\epsilon}_{jk}^q$, bereits so etwas wie ein Produkt $\rho(x_i) x_i^q$ sind; die (konstante) Intervallbreite Δx wird in der Normierung berücksichtigt.

faktoriellen Waveletmomente:

$$FWM_j^q := \left(\frac{2^j}{\langle N \rangle} \right)^q \cdot \langle \tilde{\epsilon}_{jk}^{[q]} \rangle. \quad (3.53)$$

Die den faktoriellen Waveletmomenten zugrundeliegende Idee ist, daß man in Gruppen auftretende Einträgen auf verschiedenen Skalen erkennen kann. Sucht man also nach Korrelationseffekten in physikalischen Daten, speziell nach Mehrteilchenkorrelationen in p_\perp , weiß aber nicht, in welchem Skalenbereich der Verteilung sich solche Häufungen von Datenpunkten befinden werden, hat man mit den faktoriellen Waveletmomenten das passende Werkzeug gefunden.

3.2.5 Mehrdimensionale Wavelettransformationen

Das eben erläuterte Konzept der Wavelettransformation und speziell das der faktoriellen Waveletmomente läßt sich im Grunde mühelos auf mehrere Dimensionen erweitern. Einzig die Scalingfunktionen und die Wavelets müssen den neuen Anforderungen angepaßt werden.

Für die Haar-Wavelets kann man sich diese Erweiterung zumindest auf $d = 2$ Dimensionen noch bildlich vorstellen. Der Definitionsbereich ist nun eine Ebene, die in $(2^J)^2$ Bins unterteilt wird. Das Aussehen der Scalingfunktion ist klar: Es handelt sich dabei einfach um einen quadratischen Eintrag der Höhe 1 und der jeweiligen Kantenlänge 2^j . Etwas komplizierter ist jetzt aber schon die Form der Wavelets. Es zeigt sich, daß es drei voneinander linear unabhängige Varianten gibt, die einen eben beschriebenen Block einer Scalingfunktion in vier gleichgroße Quadranten unterteilen (Wavelets sind immer halb so breit wie die dazugehörige Scalingfunktion!). Dabei werden einmal zwei Diagonalquadranten mit 1 und die anderen beiden mit -1 belegt (Gesamtintegral = 0). Die beiden anderen Wavelets sind in je zwei benachbarten Bins mit 1 belegt, die anderen beiden Bins liegen bei -1. Dabei ist das eine Wavelet gegenüber dem anderen um 90° verdreht. Der Algorithmus zur Berechnung der Waveletkoeffizienten läuft nach demselben Schema wie oben ab, nur daß die Transformationsmatrix jetzt unhandlicher geworden ist, da sie nun viermal so viele Einträge besitzt.

Bei einer d -dimensionalen Verteilung wird der Definitionsbereich dementsprechend in $(2^J)^d$ Bins unterteilt. Die Entwicklung erfolgt nach einer Scalingfunktion (= Kastenfunktion) und $2^d - 1$ linear unabhängigen Wavelets.

Der Übergang zu beliebigen Wavelets ist mathematisch (bis auf die immer höher werdende Zahl von Koeffizienten) einfach, aber unanschaulich, da die Wavelets im allgemeinen bereits in einer Dimension schon sehr unansehnlich (im Fall der $DAUB_4$ -Wavelets z. B. gezackt) sind. Sind die Koeffizienten $\tilde{\epsilon}_{jk}$ aber erst einmal bekannt, läuft die Berechnung der Waveletmomente wieder nach dem bekannten Rezept ab, so daß schließlich pro Ausgangsverteilung beliebiger Dimension nur ein Zahlenwert pro Moment der

Ordnung q und der Skala j übrig bleibt. Die unanschauliche Informationsvielfalt einer mehrdimensionalen Verteilung kann auf diese Art auf wenige Werte reduziert werden.

3.3 Analysekonzept

Um Wavelettransformationen im praktischen Einsatz nutzbar zu machen, wurden zuerst die einzelnen Verteilungen nach dem in Abschnitt 3.1 vorgestellten Prinzip im Mittel in eine Gleichverteilung transformiert. Der Vorteil liegt neben der oben genannten besseren Anschaulichkeit außerdem darin, daß es sehr leicht ist, Referenzverteilungen ohne Korrelationen zu erzeugen, indem man Einträge gemäß einer flachen Zufallsverteilung in das betreffende Intervall würfelt. Achtet man zusätzlich darauf, daß die Verteilung der Anzahl der Einträge solcher Zufallsverteilungen dem Vergleichsdatensatz entspricht, hat man sehr leicht eine Methode entwickelt, die unkorrelierte Monte-Carlo-Verteilungen erzeugt.

Die mit diesem Verfahren gewonnenen, im Mittel flachen Verteilungen wurden unter Zuhilfenahme der Wavelettransformation nach Haar und der anschließenden Bestimmung ihrer faktoriellen Waveletmomente ausgewertet.

Die weiteren Kapitel beschäftigen sich nun mit simulierten Daten (Kapitel 4) und schließlich mit der Analyse experimenteller Meßwerte (Kapitel 5). Deren Eigenschaften sollen anhand der beschriebenen Vorgehensweisen und nach ausgiebiger Arbeit mit Simulationen verstanden werden.

4 Simulationen

Zum besseren Verständnis der Methode der Waveletanalyse wurden umfangreiche Tests durchgeführt. Diese bestanden darin, die vorgestellten Methoden auf künstlich erzeugte Testfunktionen und -verteilungen anzuwenden. Die Wirkungsweise der Transformation und ihre Anwendbarkeit wurden damit eindrucksvoll demonstriert.

4.1 Beispiel einer Wavelettransformation

Ein besonders in der heutigen Informationsgesellschaft auftretendes Problem ist das der beständig zunehmenden Datenmengen, die bearbeitet und gespeichert werden sollen. Abhilfe schafft man, indem Daten komprimiert abgelegt werden.

In vielen Fällen ist es zwingend notwendig, daß sich die komprimierten Daten wieder komplett restaurieren lassen — die Komprimierung muß also ohne Verlust erfolgen. Es gibt dagegen aber auch Anwendungen, in denen der Datenbestand dadurch verkleinert werden kann, daß man unwesentliche Datenmerkmale (unwiederbringlich) entfernt. Als Beispiel sei hier die Komprimierung von Bildern und Filmen genannt.

Eines der gängigen Verfahren bedient sich des Algorithmus der Wavelettransformation, was im folgenden beschrieben werden soll¹. Es wurde eine Eingangsfunktion nach der Formel

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-299)^2}{1000}} & 0 < x < 300 \\ \frac{1}{1+0.1 \cdot (x-299)} & 300 \leq x \leq 512 \end{cases} \quad (4.1)$$

erzeugt. Ihre Verteilung ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Wie man schon aus dem Definitionsbereich der Formel 4.1 sieht, wurden 512 Bins verwendet (die das Intervall

¹**Anmerkung:** Natürlich ist es für eine Anwendung in der Datenauswertung, wie sie in Kapitel 5 besprochen wird, im allgemeinen nicht erlaubt, Teile der Eingangsdaten zu vernichten. Hierbei kommt es dagegen auf den Charakter der Multiskalendarstellung anhand von Wavelets an. Die folgenden Ausführungen geben also nur einen Überblick über den sonstigen Anwendungsbereich der Wavelettransformationen und demonstrieren überdies die Funktionsfähigkeit der entwickelten Software.

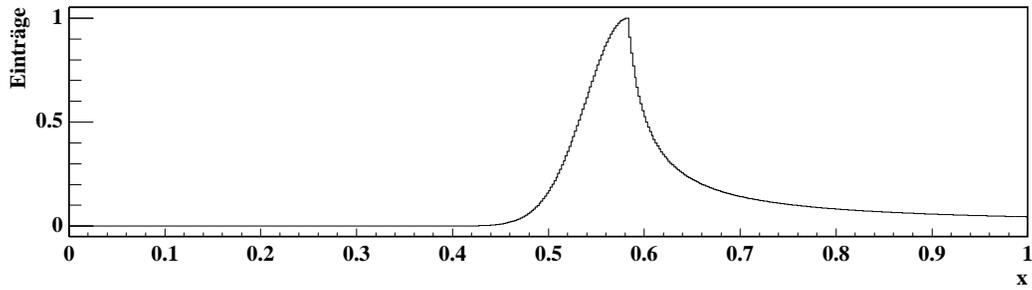


Abbildung 4.1 Testfunktion. Das Intervall $[0, 1]$ wurde in 512 Bins unterteilt und die einzelnen Bins gemäß Gleichung 4.1 gefüllt.

$[0, 1]$ überdecken), was die Berechnung von Waveletkoeffizienten bis zur Skala $j = 8$ ermöglicht. Die aus der Wavelettransformation mit Haar-Wavelets erhaltenen Koeffizienten sind im folgenden Graph (Abb. 4.2) abgebildet. In dieser Darstellung werden die

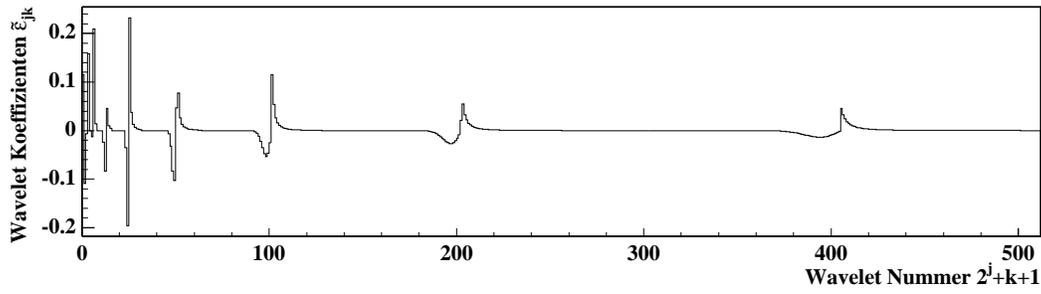


Abbildung 4.2 Waveletkoeffizienten der Testfunktion. Jeder Koeffizient \tilde{c}_{jk} wurde an seiner betreffenden Stelle $2^j + k + 1$ eingezeichnet.

errechneten Waveletkoeffizienten \tilde{c}_{jk} für alle Skalen der Reihe nach in ein Histogramm eingetragen. Die 512 Datenpunkte der Testfunktion werden also in 512 Einträge im Funktionenraum der Haar-Wavelets transformiert. Der Wert des k -ten Waveletkoeffizienten zur Skala j findet sich an der Stelle $x = 2^j + k + 1$.

Da die Testfunktion aus einem sägezahnförmigen Peak besteht, sieht man auch in jedem Skalenbereich genau eine wiederkehrende Struktur¹. Diese Struktur besteht aus einem zuerst negativen und dann positiven Bereich, da die einfache Wavelettransformation nach Haar so etwas wie die Steigung der Eingangsfunktion repräsentiert (genauer: die Hälfte der Differenz zweier benachbarter Bins). Insbesondere liegt der Nulldurchgang innerhalb einer Skala immer genau an der Stelle, an der sich das Maximum der Testfunktion befindet. Er teilt die jeweilige Skala wie auch den Definitionsbereich der Testfunktion im Verhältnis $\frac{300}{512} = \frac{75}{128} \approx 0.6$.

¹Die verschiedenen Skalenbereiche erstrecken sich über folgende Bins: $j=0$, Bin 2; $j=1$, Bin 3–4; $j=2$, Bin 5–8; $j=3$, Bin 9–16; $j=4$, Bin 17–32; $j=5$, Bin 33–64; $j=6$, Bin 65–128; $j=7$, Bin 129–256; $j=8$, Bin 257–512. Im ersten Bin wird der globale Mittelwert eingetragen (siehe Abb. 3.1).

Um eine bessere Vorstellung von den Koeffizienten zu bekommen, wurde ihr Absolutbetrag an der entsprechenden Stelle in logarithmischer Darstellung eingetragen. Man

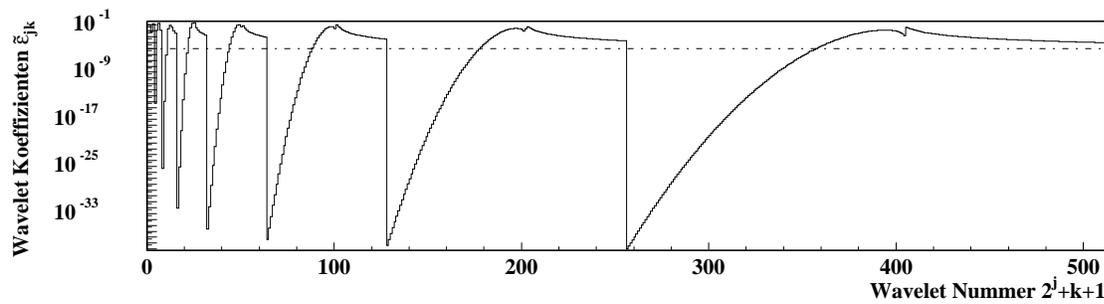


Abbildung 4.3 Absolutbetrag der Waveletkoeffizienten der Testfunktion in logarithmischer Darstellung. Die gestrichelte Linie trennt den Bereich der Koeffizienten $\tilde{\epsilon}_{jk} > 10^{-5}$ ab.

erkennt, daß auch die vermeintlichen Nulleinträge aus Abbildung 4.2 durchaus einen von Null verschiedenen Wert haben, der allerdings meist sehr klein ist. Der Abfall der Steigung zum Maximum der Testfunktion hin läßt sich nun durch kleine Zacken in der Nähe der Maxima des Histogramms 4.3 erkennen. Der Betrag der Steigung wächst jeweils an dieser Stelle sprunghaft an, was auf die unterschiedlichen Funktionstypen, die bei $x = 300$ zusammengesetzt wurden, zurückzuführen ist.

Ordnet man die Einträge aus Histogramm 4.3 nach ihrer Größe, erkennt man, daß nur 315 der ursprünglichen 512 Einträge einen Betrag von mehr als 10^{-5} besitzen (siehe Abb. 4.4). Diese Grenze von $\tilde{\epsilon}_{jk} = 10^{-5}$ ist in den beiden letztgenannten Abbildungen

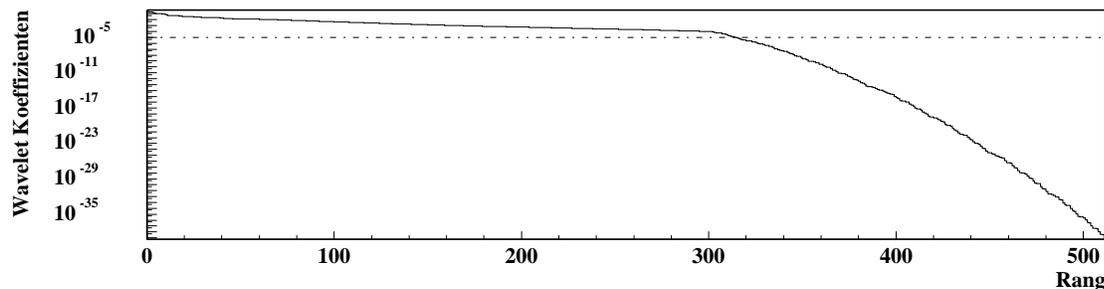


Abbildung 4.4 Waveletkoeffizienten der Testfunktion, geordnet nach ihrem Absolutbetrag. Die Bezeichnung Rang bezieht sich auf eben diese Reihenfolge. Der verwendete Schnitt bei $\tilde{\epsilon}_{jk} = 10^{-5}$ ist auch hier gestrichelt eingezeichnet. Der auffällige Knick der Verteilung ist auf das Abschneiden der Eingangsfunktion am rechten Rand ihres Definitionsbereichs zurückzuführen (näheres im Text).

durch die gestrichelte Linie angedeutet.

Offensichtlich besitzt diese Verteilung einen Knick, der darauf zurückzuführen ist, daß im hochrangigen, linken Bereich jeweils Werte beidseitig des Maximums der Eingangsfunktion Beiträge zu den Waveletkoeffizienten liefern. Der steilere, rechte Bereich

enthält jedoch nur noch den Abfall der Gaußschen Glockenkurve, da der Abfall der Eingangsfunktion $\sim x^{-1}$ am rechten Rand frühzeitig abgeschnitten wird. Der linke Teil der Rangverteilung wird also durch etwa doppelt so viele Werte in einem ähnlichen Größenbereich flacher.

Setzt man nun alle Waveletkoeffizienten mit einem Betrag $\tilde{\epsilon}_{jk} \leq 10^{-5}$ zu 0, erhält man einen neuen Datensatz, der um $\frac{512 - 315}{512} = 38.5\%$ kleiner ist. Wichtig ist allerdings, daß man die Position der übrig gebliebenen Koeffizienten nicht verändern darf. Ansonsten würden die Steigungsschwankungen für verschiedene Skalen an unterschiedlichen Stellen liegen. Andererseits erhält man durch diesen Schnitt größere, zusammenhängende Bereiche mit Nulleinträgen, die mit einer üblichen Nullunterdrückung (wie sie z. B. im NA49-Experiment verwendet wird) komprimiert werden können.

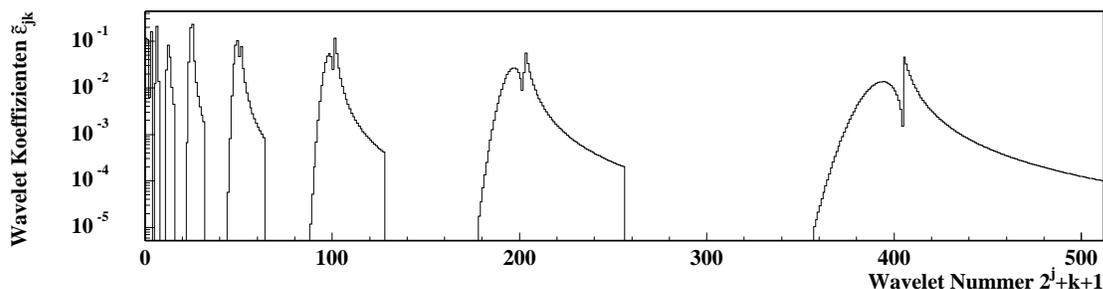


Abbildung 4.5 Verbleibende Waveletkoeffizienten nach dem Schnitt bei $\tilde{\epsilon}_{jk} = 10^{-5}$.

Die Beträge der übrig gebliebenen Koeffizienten sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Eine nicht-logarithmische Darstellung der Waveletkoeffizienten macht hier keinen Sinn, da der Unterschied zur ungeschnittenen Verteilung in Abbildung 4.2 mit bloßem Auge nicht zu erkennen ist.

Die Rücktransformation dieser geschnittenen Koeffizienten ergibt eine von der Form her von der Eingangsfunktion nicht zu unterscheidende Ausgangsfunktion (Abb. 4.6). Dies hat allerdings keine Aussagekraft, da man — wie eben erwähnt — die Differenz der beiden Verteilungen nicht erkennen kann. Deshalb wurde in der folgenden Darstellung (Abb. 4.7) der Betrag der Differenz der Eingangs- und Ausgangsfunktion eines jeden Bins histogrammiert. Die Abweichungen liegen wie erwartet in einem Bereich von etwa 10^{-5} und weniger. Der Maximalwert der Differenz liegt bei $1.3 \cdot 10^{-5}$, die mittlere Differenz beträgt nur $2.8 \cdot 10^{-7}$. Und das alles bei einer Datenreduktion von nahezu 40%.

Man erkennt außerdem, daß die Abweichung insbesondere im Bereich des gaußförmigen Teils der Funktion besonders groß ist. Dies ist darauf zurückzuführen, daß mit dem Schnitt im Koeffizientenraum, wie oben beschrieben, hauptsächlich in den hohen Rängen (die fast ausschließlich vom Gaußschen Ausläufer stammen) Koeffizienten verworfen wurden.

Die starke Kompressionsmöglichkeit im Koeffizientenraum, bei nur geringem Datenverlust im Funktionsraum, macht die Wavelettransformation zu einem vielgenutzten

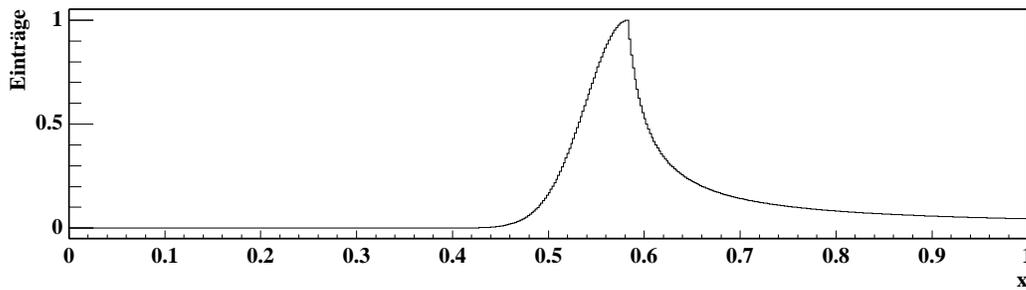


Abbildung 4.6 Rücktransformation der geschnittenen Koeffizientenverteilung nach Abb. 4.5. Die Funktion gleicht in ihrer Form der Testfunktion 4.1. Mit bloßem Auge ist kein Unterschied zu erkennen.

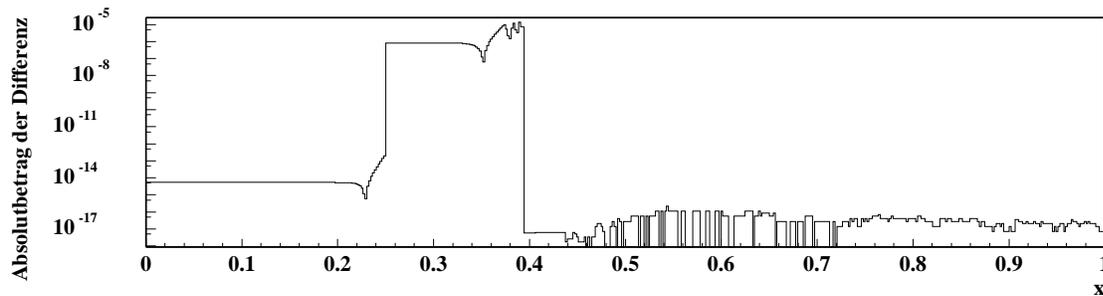


Abbildung 4.7 Absolutbetrag der Abweichung der Rücktransformation vom Original. Die größte Differenz beträgt $1.3 \cdot 10^{-5}$, der Mittelwert der Differenz liegt bei $2.8 \cdot 10^{-7}$.

Werkzeug. Da man die Stärke der Kompression anhand des Schnittes je nach Bedarf frei einstellen kann, — ohne Schnitt ist mit dem selben Verfahren die verlustfreie Transformation möglich — hat sich diese Methode besonders bei der Bildverarbeitung bewährt. An dieser Stelle sei insbesondere auf die im Internet verwendeten Bild- und Filmformate *JPEG* und *MPEG* verwiesen. Die Kompression von Realbildern (im Gegensatz zu Zeichnungen) mit Hilfe von Wavelets ist deshalb besonders günstig, weil solche Bilder einerseits eine sehr große Farbtiefe beinhalten können, andererseits meist große zusammenhängende Flächen mit nahezu denselben Farbtönen enthalten. Ein Bild setzt sich also aus beinahe einfarbigen Flächen und dazwischenliegenden Kanten, die die Farbübergänge enthalten, zusammen. Dabei liegt die eigentliche Bildinformation in den Rändern der nahezu uniformen Flächen. Die Wavelettransformation (in diesem Fall eine zweidimensionale) findet nun eigenständig diese Kanten des Bildes. Schneidet man nach obigem Prinzip einen Teil der Koeffizienten heraus, bleiben die Kanten des Bildes weitgehend erhalten, nur die Flächen werden ihrer Farbtiefe beraubt und sind dann aus weniger Farbtönen zusammengesetzt. Es wird also nur Information verworfen, die aus einem sowieso schon informationsarmen Bildausschnitt stammt.

Würde man dasselbe Verfahren mit einer Fourier-Transformation durchziehen (also im Frequenzraum schneiden), wäre das Ergebnis ungleich schlechter. Wie in Abschnitt 3.2.2

beschrieben, löscht dabei nämlich die Tilgung eines Koeffizienten im Frequenzraum eine komplette sinusförmige Komponente im Funktionenraum. Im Fall der Bildkompression würde dies zu einer sichtbaren Farbschwankung (mit eben der herausgeschnittenen Frequenz) über das gesamte (!) Bild führen (siehe dazu auch [23]).

4.2 Simulierte Verteilungen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde neben grundlegenden Vorgehens- und Darstellungsweisen die Funktionsfähigkeit des Programms zur Haar-Wavelettransformation unter Beweis gestellt. In diesem Unterkapitel sollen nun Verteilungen simuliert werden, die denen später zu betrachtender, experimenteller Daten ähneln. Anhand dessen sollte es möglich sein, eine Vorstellung von der Wirkungsweise der Transformation und den daraus berechneten Momenten zu erhalten.

Zur Klassifikation der Verteilungen werden nun, wie bereits angekündigt, die faktoriellen Waveletmomente 2., 3. und 4. Ordnung verwendet. Diese werden in den graphischen Darstellungen, Gleichung 3.53 folgend, als FWM^q bezeichnet, wobei sich q auf die jeweilige Ordnung bezieht. Jede einzelne Zufallsverteilung liefert jeweils ein faktorielles Waveletmoment für jede Skala j und für die drei oben genannten Ordnungen. Daraus resultieren bei der verwendeten Binanzahl der Eingangsverteilungen von 512 (was einer maximalen Skala von $j = 8$ entspricht) 27 Zahlenwerte je Verteilung (9 Skalen \times 3 Ordnungen). Da von jeder Simulationsart je 10^5 Verteilungen generiert wurden, ergeben sich pro Simulation 27 Verteilungen der faktoriellen Waveletmomente mit jeweils 10^5 Einträgen. Diese große Anzahl von Histogrammen an dieser Stelle einzufügen, ist offensichtlich unangebracht, weshalb die Diskussion hier nur exemplarisch an einzelnen Momenten bestimmter Ordnung und Skala geschieht. Nichtsdestotrotz sind die Histogramme der im Text erwähnten Simulationen der Vollständigkeit halber komplett im Anhang aufgeführt.

Die Zufallseinträge wurden jeweils in das Intervall $[0, 1]$ eingetragen. Es ist klarerweise für die Wavelettransformation und auch für die mit den daraus erhaltenen Koeffizienten errechneten faktoriellen Momente belanglos, wie groß das Definitionsintervall absolut gesehen ist; nur die Zahl der das Intervall unterteilenden Bins (in unserem Fall 512) spielt zu deren Berechnung eine — nun aber wesentliche — Rolle. Die errechneten Momente sind mathematisch gesehen einheitenlos, weshalb die zugehörige Abszisse keine derartige Beschriftung trägt. Die Bezeichnung *willkürliche Einheiten* wäre irreführend, da die Momente untereinander sehr wohl vergleichbar sind und ihr Wert nicht etwa beliebig skalierbar ist.

Die Simulationen umfassen neben flachen Zufallsverteilungen mit unterschiedlicher Multiplizität und gaußförmigen Verteilungen variierender Breite auch generierte Ereignisse, die einige Einträge in einem gaußförmigen Peak auf einem flachverteilten Unter-

grund plazieren.

Wichtig für den anschließenden Vergleich mit experimentellen Daten ist, daß alle simulierten Verteilungsarten im Mittel gleichverteilt waren. Dies wurde erreicht, indem innerhalb einer Simulationsart die Breite der eventuellen Abweichungen von der Gleichverteilung (hier also die Breite von Gaußverteilungen) konstant blieb und der Ort des Maximums von Ereignis zu Ereignis zufällig über den gesamten Definitionsbereich verteilt wurde. Die hohe Anzahl an Ereignissen (je 10^5) bewirkte, daß die Gleichverteilung jeweils gut angenähert wurde. Daher konnte der Schritt der Transformation der Ausgangsverteilungen in flache Verteilungen entfallen, so daß sowohl die Simulationen als auch die errechneten Koeffizienten zumindest prinzipiell ihre Anschaulichkeit behielten.

4.2.1 Flachverteilte Zufallseinträge unterschiedlicher Multiplizität

Die nun folgenden Simulationen beinhalten die faktoriellen Waveletmomente von 10^5 Zufallsereignissen mit 100, 200, 400 und 800 gemäß einer Gleichverteilung auf das Intervall $[0, 1]$ gewürfelten Einträgen. Die Eingangsverteilungen zeigen erwartungsgemäß keine ausgeprägte Struktur, wie man anhand von Abbildung 4.8 oben exemplarisch für ein generiertes Ereignis mit 400 Einträgen erkennen kann. Dementsprechend weisen auch die

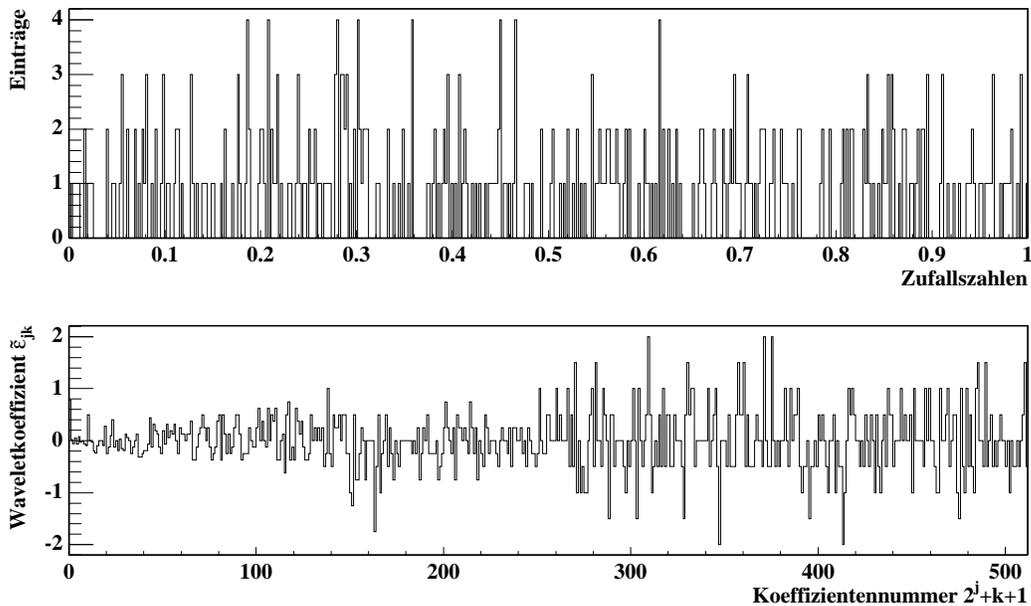


Abbildung 4.8 Ereignis mit 400 zufälligen Einträgen und dessen Waveletkoeffizienten.

dazugehörigen Waveletkoeffizienten (Abb. 4.8 unten) in der bereits aus Abschnitt 4.1 bekannten Darstellung keine augenfälligen Merkmale auf. Der Eintrag im ersten Bin weist

auf eine mittlere Binbelegung von etwa 0.8 Einträgen hin, was genau dem erwarteten Wert von 400 Einträgen/512 Bins ≈ 0.78 Einträge/Bin entspricht.

Die faktoriellen Waveletmomente 2. Ordnung (Abb. 4.9) weisen unabhängig von der Skala ein Maximum nahe Null auf. ‚Nahe Null‘ meint, daß die Verteilung als Ganzes

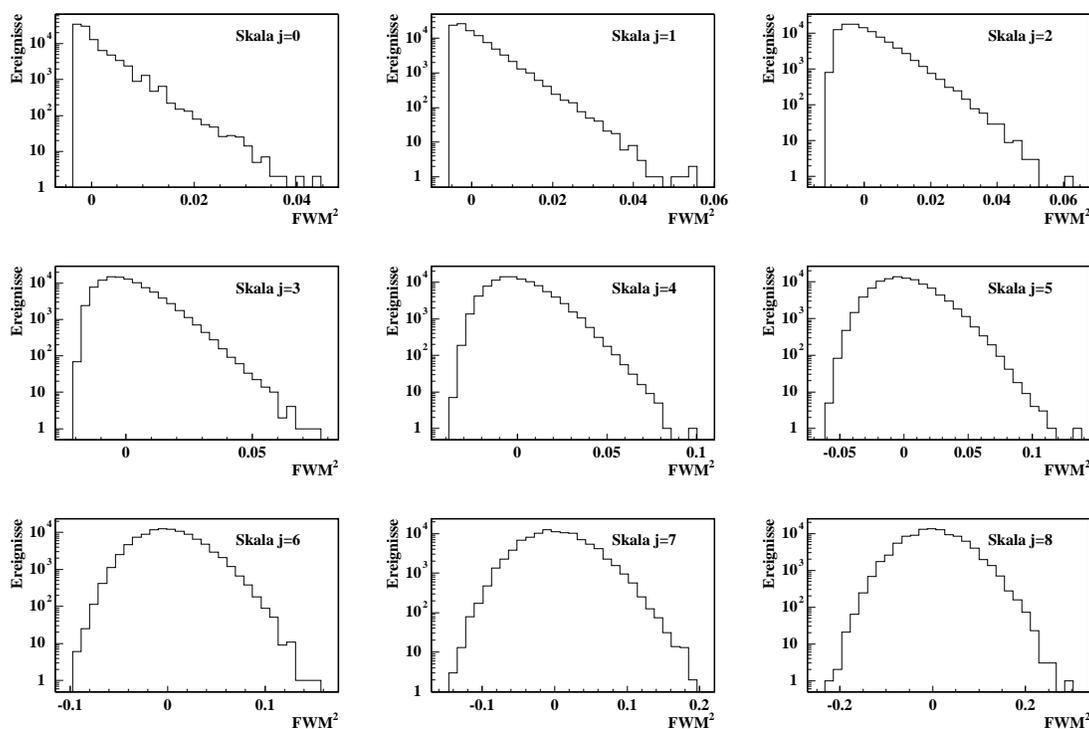


Abbildung 4.9 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung. Die hier zugrundeliegende Simulation hatte jeweils 400 Einträge. Die Verteilungen für andere Multiplizitäten sind im Anhang (ab Abb. B.2) aufgeführt.

deutlich — etwa um den Faktor zehn — breiter ist als der Abstand des Maximums von Null. Auf die Breite der Verteilungen wird weiter unten eingegangen.

Die Asymmetrie der Verteilungen, insbesondere ihre überhaupt vorhandenen negativen Einträge, ist eine Folge der faktoriellen Berechnung der Momente. Dort, wo im Normalfall durch die Quadrierung der $\tilde{\epsilon}_{jk}$ (Gln. 3.51 und 3.52) nur positive Werte zu erhalten sind, kann es nun sein, daß bei einigen Werten von $\tilde{\epsilon}_{jk}$ (nämlich denen mit $\tilde{\epsilon}_{jk} < 1$) negative Ergebnisse erzielt werden. Die Asymmetrie nimmt mit steigender Skala j ab, es gibt schließlich nahezu ebensoviele positive wie negative Werte. Das liegt an der auch noch in die Berechnung der Momente eingehenden Summation über alle k . Bei niedrigen Skalen j (das entspricht einem sehr groben zugrundeliegenden Binraster) ist es sehr unwahrscheinlich, daß bei den hier verwendeten Multiplizitäten ein Koeffizient $\tilde{\epsilon}_{jk}$ einen Wert kleiner als 1 hat, um somit einen negativen Beitrag zu liefern. Die wenigen in diesem Sinne negativen Ereignisse haben dann jedoch eine stärkere (und daher möglicherweise doch noch sichtbare) Auswirkung, da die Summation auch nur über wenige k

zu laufen hat und somit ein negativer Summand seltener durch die weiteren womöglich positiven Summanden innerhalb einer Skala wieder zunichte gemacht wird. Je höher man allerdings mit der Skala kommt, auf desto mehr Bins muß die gleichbleibende Anzahl von Einträgen verteilt werden¹, so daß die Wahrscheinlichkeit von negativen Beiträgen zur Summation und dadurch die Wahrscheinlichkeit einer insgesamt negativen Summe steigt. Je größer die Skala (und je feiner daher die Bineinteilung), desto mehr nähert sich die Verteilung der faktoriellen Momente einer Gaußverteilung. Diese Annäherung geschieht so gesehen von zwei Seiten: einmal gehen mehr Summanden in die Berechnung ein, und zum anderen wird die Erzeugung von negativen Einträgen immer einfacher.

Vergleicht man die Breiten der Verteilungen für unterschiedliche Multiplizitäten miteinander (siehe im Anhang Abb. B.2, B.6, B.10 und B.14), fällt sofort eine grundlegende Abhängigkeit ins Auge. Verdoppelung der Multiplizität m bewirkt eine Halbierung der Verteilungsbreite, hier mit σ bezeichnet:

$$\sigma(2m) \approx \frac{1}{2}\sigma(m). \quad (4.2)$$

Daraus läßt sich direkt auf einen Zusammenhang von der Form

$$\sigma(m) = \frac{a}{m} \quad (4.3)$$

schließen.

Anhand der Verteilungen erkennt man diesen Zusammenhang auf einen Blick; man betrachtet einfach die Breite des Intervalls der Abszisse, in dem sich noch Einträge befinden. Die quantitative Beschreibung ist allerdings etwas komplizierter, da es sich, wie bereits oben erwähnt, in den meisten Fällen (mit Fall ist hier eine Verteilung bestimmter Skala j und Ordnung q gemeint) eben gerade nicht um gaußförmige, ja meist noch nicht einmal um symmetrische Verteilungen handelt. Deshalb wurden zu den folgenden Aussagen nur die Verteilungen der faktoriellen Waveletmomente 2. Ordnung für die Skalen $j = 5, 6, 7$ und 8 herangezogen, die noch am deutlichsten den Charakter einer Gaußfunktion besitzen. Bei diesen wurden für verschiedene Multiplizitäten Gaußsche Glockenkurven angepaßt und deren Standardabweichungen σ als Maße für die Verteilungsbreiten benutzt (vergleiche Abb. 4.10). Die nicht-logarithmische Darstellung bekräftigt die Entscheidung, eine Gaußfunktion anzupassen. Es sei darauf hingewiesen, daß es bei dieser Anpassung nicht um die korrekte Beschreibung der gesamten Verteilung und insbesondere nicht um die Annäherung des Maximums geht. Im Gegensatz zum Maximum wird nämlich die Breite der leicht unsymmetrischen Verteilungen nach wie vor gut durch die Gaußanpassung beschrieben.

Die Auswertung der Parameter der Gaußkurven für verschiedene Multiplizitäten ist in Tabelle 4.1 (Seite 45) angegeben. Noch deutlicher wird der schon dort klar ersichtliche Zusammenhang in der graphischen Darstellung in Abbildung 4.11 auf Seite 46.

¹Die mittlere Belegung eines Bins wird dann immer geringer, und die Differenz zwischen zwei benachbarten Bins nimmt dementsprechend ab.

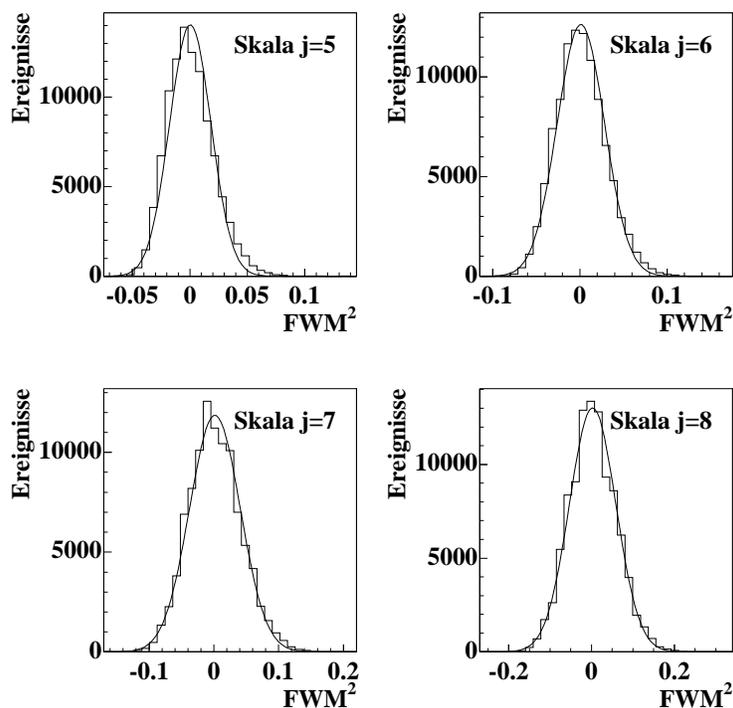


Abbildung 4.10 Anpassung von Gaußfunktionen an verschiedene Waveletmomente 2. Ordnung. Exemplarisch werden hier die Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung dargestellt, die man aus 400 simulierten Einträgen erhält. Die weiteren Gaußanpassungen sind im Anhang zu finden (Abbn. B.17–B.20).

Die Fehlerbalken sind aufgrund des nur geringen Betrags der Fehler nicht zu erkennen. Zusätzlich wurde jeweils eine Funktion vom Typ 4.3 an die Meßwerte angepaßt, was die quantitative Angabe der Gesetzmäßigkeit erlaubt. Die sich ergebenden Parameter a finden sich in Tabelle 4.2. Wie man an der Abbildung 4.11 sieht, stimmt die angepaßte Funktion sehr gut mit den Datenpunkten überein. Der Zusammenhang zwischen der Verteilungsbreite und der Multiplizität ist also richtig erkannt worden (wie man gleich sieht, jedoch vorerst nur für die Ordnung $q = 2$). Einzig die Bedeutung des Parameters a ist noch offen. Es fällt jedoch auf, daß er von Skala zu Skala um etwa den Faktor 1.40 ± 0.05 wächst, wie man anhand der zugehörigen Zusammenstellung in Tabelle 4.3 ersieht.

Die faktoriellen Waveletmomente 3. Ordnung (Abb. 4.12 und im Anhang B.3, B.7, B.11 und B.15) gleichen den vorangegangenen 2. Ordnung darin, daß sie ebenfalls ein Maximum bei Null besitzen. Da die Verteilungen diesmal aber im Idealfall symmetrisch sein sollten¹, liegt das Maximum (zumindest theoretisch) exakt bei Null. Da es sich

¹In die Berechnung der Waveletkoeffizienten geht, wie schon mehrfach erwähnt, der Betrag der Differenz zwischen zwei benachbarten Bins ein. Das Vorzeichen dieser Differenz ergibt sich daraus, daß einmal das linke Bin mehr Einträge besitzt als das rechte (+) und umgekehrt (–). Dieser Zahlenwert wird dann mit der Ordnung q potenziert, woraus sich bei gerader Ordnung nur positive Werte ergeben

Ordnung $q = 2$				
	Skala $j = 5$	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
Multiplizität	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$
100	7.451 ± 0.006	10.71 ± 0.02	15.62 ± 0.02	21.285 ± 0.003
200	3.635 ± 0.006	5.431 ± 0.009	7.82 ± 0.01	11.349 ± 0.007
400	1.8049 ± 0.0009	2.723 ± 0.001	3.917 ± 0.007	5.60 ± 0.01
800	0.899	1.327 ± 0.002	1.940 ± 0.003	2.800 ± 0.003

Tabelle 4.1 Mittlere Schwankungsquadrate der Gaußanpassungen an faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung. Man beachte die Abnahme der Werte innerhalb einer Spalte um jeweils den Faktor 2. Bei Skala $j = 5$ und der Multiplizität 800 war aufgrund von einer Division durch Null keine Fehlerangabe möglich. Im weiteren Verlauf wird mit einem angenommenen Fehler von 10^{-5} gearbeitet.

Skala j	a
5	7.284 ± 0.003
6	10.858 ± 0.005
7	15.66 ± 0.01
8	21.427 ± 0.002

Tabelle 4.2 Parameter a für die Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreiten von Momenten 2. Ordnung. Man erkennt eine Zunahme des Wertes von einer bis zur übernächsten Skala um etwa den Faktor 2, was auf einen Faktor von einer zur nächsten Skala von $\sqrt{2}$ schließen läßt.

nach wie vor um eine faktorielle Berechnung der Momente handelt, zeigen die Werte um Null zumindest bei niedrigen Skalenwerten j eine deutliche Überhöhung. Der Rechenalgorithmus erlaubt in einigen Fällen, trotz positiver Vorzeichen der Koeffizienten, die Erzeugung negativer Einträge. Der umgekehrte Fall ist natürlich ebenso möglich, wodurch der symmetrische Überschuß um Null erklärt wird.

Es ergibt sich die Frage nach dem generellen Zusammenhang der faktoriell und nicht-faktoriell berechneten Momente. Werden nur bestimmte Bereiche einer nicht-faktoriell berechneten Momentverteilung vom positiven in den negativen Bereich (und umgekehrt) verschoben, oder verschiebt sich die Verteilung als Ganzes? Wenn nur positive Werte nahe Null in den negativen Bereich verschoben würden und Vergleichbares mit den nahe Null liegenden negativen Werten passierte (Verschiebung in den positiven Bereich), könnte man keine Überhöhung bei Null sehen, da im Mittel ebensoviele Einträge nach links wie auch nach rechts verschoben würden und so der jeweilige Verlust beiderseits von Null gerade kompensiert wäre. Da man aber deutlich eine Anhäufung der Einträge um Null erkennt, ist klar, daß die links- und rechtsseitigen Verteilungen als Ganzes zur Mitte hin verschoben worden sein müssen.

sollten. Bei ungerader Ordnung (und damit ungerader Potenz) dagegen sollten gleich viele positive wie negative Werte auftreten.

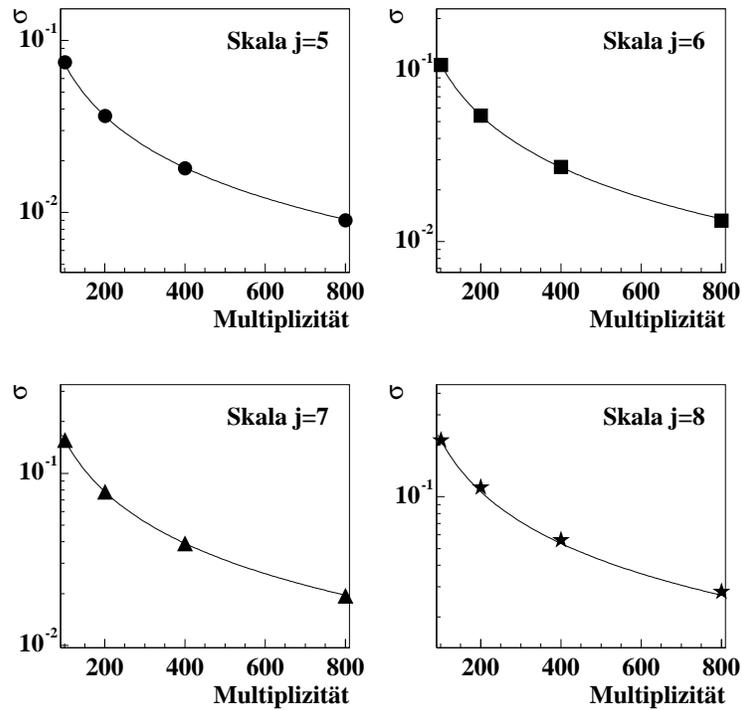


Abbildung 4.11 Anpassung von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$ mit $\lambda = \frac{\ln q}{\ln 2}$ an die Momente simulierter Verteilungen der Ordnung $q = 2$.

a_{j+1}/a_j	Quotient
a_6/a_5	1.385 ± 0.001
a_7/a_6	1.442 ± 0.002
a_8/a_7	1.368 ± 0.001

Tabelle 4.3 Quotienten der Parameter a von verschiedenen Skalen j (2. Ordnung). Der Betrag der Werte liegt immer im Bereich von 1.4.

Die Verteilung wird aus den gleichen Gründen wie bei den Momenten 2. Ordnung mit wachsendem j und mit wachsender Multiplizität m immer gaußförmiger und die Überhöhung um Null verschwindet, da nun sozusagen zwei Gaußkurven mit nahe beieinander liegenden Mittelwerten (leicht über und unter Null) überlagert werden.

In Fortsetzung der bisher erkannten Gesetzmäßigkeiten präsentieren sich die faktoriellen Waveletmomente 4. Ordnung (Abb. 4.13). Auch sie besitzen durch alle Skalen ein ausgeprägtes Maximum bei Null. Da die Originalverteilung zufällig besetzt war, erwartet man keine Korrelationen der Einträge und somit genau ein Maximum an dieser Stelle. Von der Form her gleichen sie eher den Verteilungen der Waveletmomente 2. Ordnung, da sie ebenfalls unsymmetrisch sind. Dies ist offensichtlich eine Folge der geraden Ordnung q , die im nicht-faktoriellen Sinne keine negativen Werte zuläßt, aber dennoch das Maximum bei Null beibehält (entsprechend einer Poisson-Verteilung).

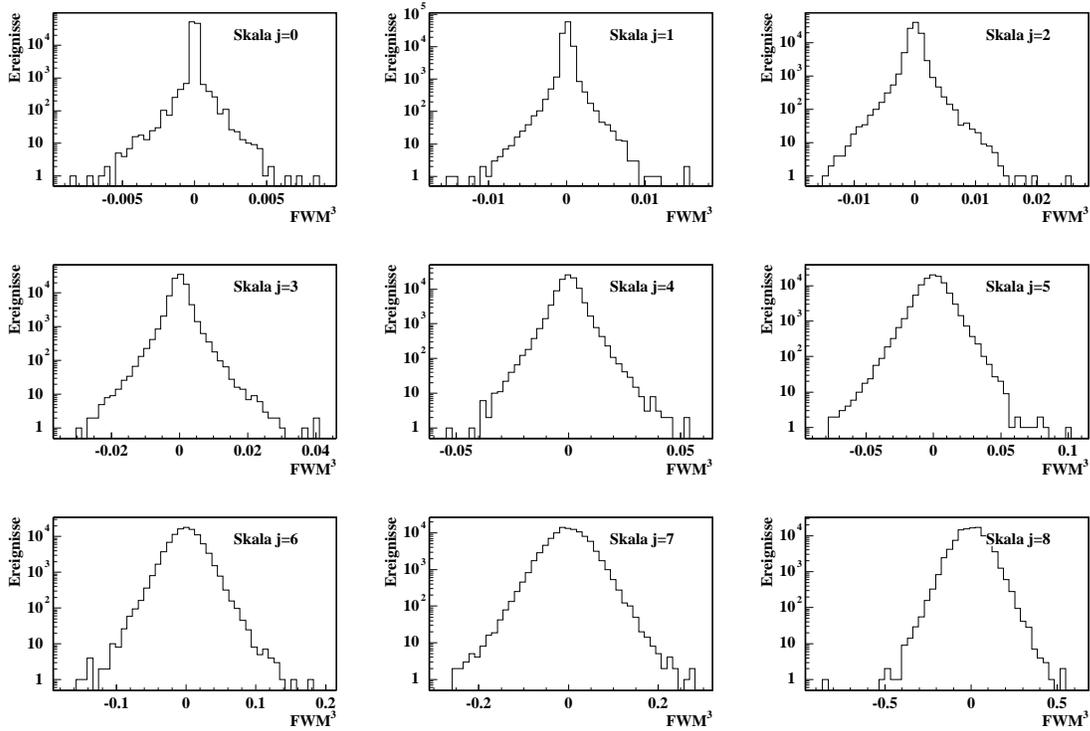


Abbildung 4.12 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung (400 zufällige Einträge; andere Multiplizitäten im Anhang ab Abb. B.3).

Erneut zeigt sich bei den Momenten 3. und 4. Ordnung, daß die Verteilungen einer bestimmten Skala j mit wachsender Multiplizität schmaler werden. Eine Verdopplung der Anzahl der in das Intervall $[0, 1]$ gestreuten Werte erzeugt bei der Auswertung der Momente der Ordnung q eine Verminderung der Verteilungsbreite auf etwa $\frac{1}{q}$. Der funktionale Zusammenhang lautet

$$\sigma_q(2m) \approx \frac{1}{q} \sigma_q(m), \quad (4.4)$$

doch der analytische Ausdruck für $\sigma_q(m)$ ist schwieriger als zuvor aufzustellen. Der sich abzeichnenden Regelmäßigkeit trägt man mit einem Ansatz von der Form

$$\sigma_q(m) = \frac{a}{m^\lambda} \quad (4.5)$$

Rechnung. Der neu hinzugetretene Parameter λ ist mit der Ordnung q wie folgt verbunden:

$$\lambda = \frac{\ln q}{\ln 2}. \quad (4.6)$$

Die Anpassung der Gaußfunktionen an die Verteilungen der Momente bereitet bei höher werdender Ordnung offensichtlich immer mehr Probleme, da die Verteilungen in der logarithmischen Darstellung alles andere als parabelförmig sind (für sämtliche Verteilungen siehe Abschnitt B.1.1). In der nicht-logarithmischen Darstellung scheint dieses

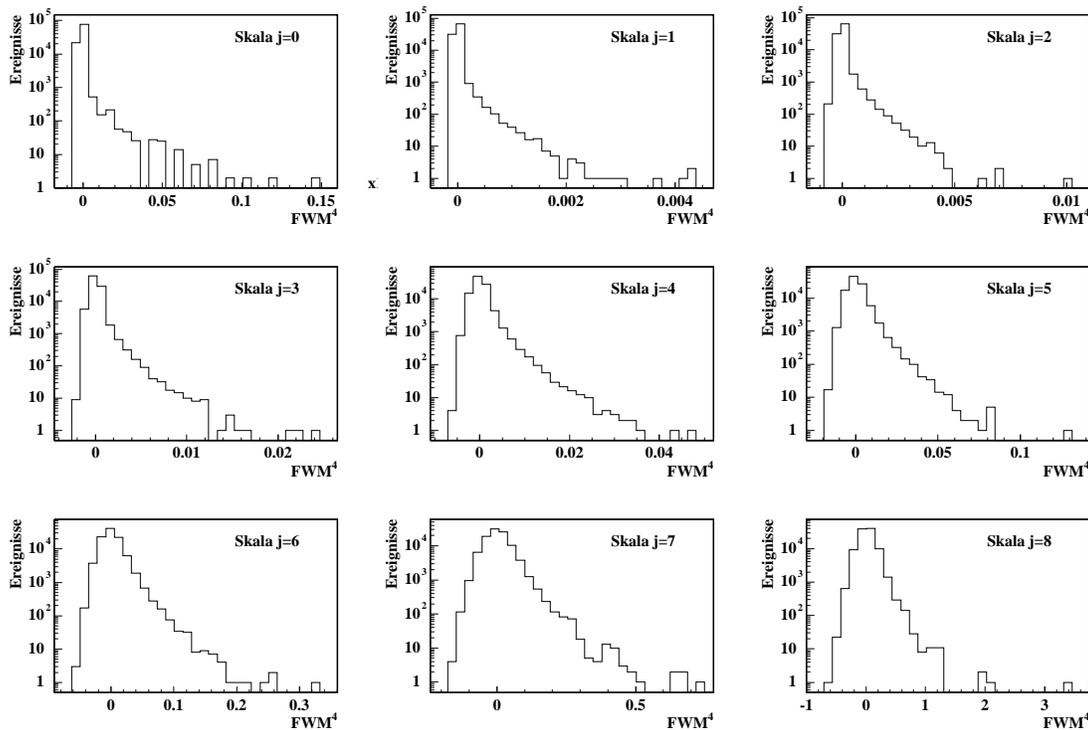


Abbildung 4.13 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung (400 zufällige Einträge; andere Multiplizitäten im Anhang ab Abb. B.4).

Vorgehen aber nach wie vor gerechtfertigt zu sein, da die Verteilungen dennoch ein ausgesprochen scharfes Maximum besitzen¹. Die Tabelle 4.4 zeigt die Auswertung der Verteilungsbreiten für die Ordnungen $q = 3$ und $q = 4$. Die zugehörigen Anpassungen findet man im Anhang (Abbn. B.21–B.28).

Zusätzlich entdeckt man (insbesondere bei den Anpassungsparametern der 3. Ordnung), daß die Verteilungsbreiten mit wachsender Skala j für eine festgehaltene Multiplizität etwa um den Faktor $\sqrt{2}^{q-1}$ zunehmen. Dies scheint im Zusammenhang mit dem bereits bei 2. Ordnung gesehenen Anstieg des Parameters a zu stehen.

Es stellt sich nun die Frage, ob Anpassungen auch weiterhin nur mit einem freien Parameter a oder mit zwei freien Parametern a und λ erfolgen sollen. Die Anpassung nur von a mit nach der Beziehung 4.6 errechnetem λ ist rein optisch schon recht gut, was den gefundenen funktionalen Zusammenhang prinzipiell zu bestätigen scheint. Dennoch soll nun zu einer Anpassung mit 2 freien Parametern übergegangen werden, da dies (wie sich zeigen wird) zu weiteren Erkenntnissen führt. Dieser Schritt wurde auch mit den bereits gut angenäherten Datenpunkten der Breitenabhängigkeit von der Multiplizität 2. Ordnung wiederholt (Ergebnisse siehe Tab. 4.5 und die graphischen Darstellungen im

¹Es geht nach wie vor nur um die Anpassung der Verteilungsbreite und nicht um die Suche nach dem Maximum, welches im Gegensatz zur Breite nur schlecht approximiert wird. Der Grund dafür ist in der Asymmetrie der Verteilungen zu suchen.

Ordnung $q = 3$				
	Skala $j = 5$	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
Multiplizität	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$
100	7.0363 ± 0.0003	14.49 ± 0.02	29.05 ± 0.07	57.5 ± 0.1
200	2.516 ± 0.005	5.21 ± 0.01	10.6509 ± 0.0005	20.41 ± 0.02
400	0.878 ± 0.002	1.870 ± 0.003	3.791 ± 0.007	7.7 ± 0.1
800	0.3138 ± 0.0005	0.6545 ± 0.0006	1.344 ± 0.003	2.739 ± 0.004

Ordnung $q = 4$				
	Skala $j = 5$	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
Multiplizität	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$
100	7.804 ± 0.005	22.22 ± 0.01	43.38 ± 0.05	205.5 ± 0.8
200	1.892 ± 0.004	5.609 ± 0.003	16.60 ± 0.04	38.8 ± 0.1
400	0.446 ± 0.002	1.333 ± 0.001	3.9554 ± 0.0002	12.39 ± 0.03
800	0.1100 ± 0.0003	0.3221 ± 0.0005	9.606 ± 0.001	2.9438 ± 0.0004

Tabelle 4.4 Mittlere Schwankungsquadrate der Gaußanpassungen an faktorielle Waveletmomente 3. und 4. Ordnung. Die Verteilungsbreiten gehen innerhalb einer Skala bei Verdoppelung der Multiplizität auf etwa $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{4}$ zurück. Die graphischen Darstellungen sind im Anhang abgebildet (3. Ordnung ab Abb. B.21, 4. Ordnung Abbn. B.25–B.28)

Anhang ab Abb. B.29). Man erkennt, daß sich die Werte für λ bei den Ordnungen $q = 2$ und $q = 4$ sehr gut mit der Voraussage aus Gleichung 4.6 decken. Demnach sollten sie ja bei

$$\lambda_2 = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2 \quad (4.7)$$

liegen. Der λ -Wert für die Ordnung $q = 3$ dagegen liegt bei ungefähr 1.50, sollte aber erwartungsgemäß den Zahlenwert von

$$\lambda_3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585 \quad (4.8)$$

erreichen. Aufgrund der doch überzeugenden Ergebnisse für λ durch alle Skalen j hindurch gelangt man schließlich zu einer Modifikation des gefundenen Zusammenhangs von Verteilungsbreite und Multiplizität. Es scheint so, als würde sich der Exponent λ nicht wie $\frac{\ln q}{\ln 2}$, sondern nur wie $\frac{q}{2}$ verhalten:

$$\sigma_q(m) = \frac{a}{m^\lambda} = \frac{a}{m^{\frac{q}{2}}}. \quad (4.9)$$

Wurde also ursprünglich die Abnahme der Verteilungsbreite bei Verdopplung der Einträge auf den q -ten Teil (siehe Glg. 4.4) als Berechnungsgrundlage für den Exponenten λ

Ordnung $q = 2$		
Skala j	a	λ
5	8.25 ± 0.03	1.0216 ± 0.0006
6	11.20 ± 0.06	1.0052 ± 0.0009
7	16.02 ± 0.07	1.0043 ± 0.0008
8	18.19 ± 0.03	0.9648 ± 0.0004

Ordnung $q = 3$		
Skala j	a	λ
5	69.7 ± 0.1	1.4965 ± 0.0004
6	142.6 ± 0.7	1.494 ± 0.008
7	284 ± 2	1.488 ± 0.001
8	470 ± 3	1.459 ± 0.001

Ordnung $q = 4$		
Skala j	a	λ
5	1018 ± 6	2.0555 ± 0.001
6	2687 ± 9	2.0358 ± 0.0006
7	1942 ± 7	1.8025 ± 0.0006
8	15280 ± 133	1.968 ± 0.001

Tabelle 4.5 Parameter für die Multiplizitätsabhängigkeit des mittleren Schwankungsquadrats. Die an die Datenpunkte angepaßten Kurven sind im Anhang aufgeführt (Abbn. B.29–B.31).

herangezogen, wird nunmehr die Abnahme der Verteilungsbreite aus dem als bekannt vorausgesetzten Exponenten $\lambda = \frac{q}{2}$ berechenbar. Mathematisch gilt nämlich folgende Beziehung:

$$\sigma_q(2m) = \frac{1}{\eta_q} \sigma_q(m) \quad (4.10)$$

$$\frac{a}{(2m)^{\frac{q}{2}}} = \frac{1}{\eta_q} \frac{a}{m^{\frac{q}{2}}} \quad (4.11)$$

$$\eta_q = 2^{\frac{q}{2}}. \quad (4.12)$$

Der Vorfaktor $\frac{1}{\eta_q}$ ändert seinen Wert bei der 2. und 4. Ordnung also nicht und bleibt bei

$$\frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \text{ bzw.} \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{\eta_4} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad (4.14)$$

was mit der ursprünglichen Annahme von $\frac{1}{q}$ übereinstimmt. Für die Ordnung $q = 3$ dagegen verschiebt er sich von $\frac{1}{3}$ zu

$$\frac{1}{\eta_3} = \frac{1}{2^{1.5}} = \frac{1}{2.828}. \quad (4.15)$$

Dieser feine Unterschied war freilich aus den Verteilungen mit bloßem Auge nicht zu erkennen. Mit diesem nun endgültig als richtig akzeptierten Zusammenhang (Glg. 4.9) wurden nun noch einmal alle Datenpunkte mit nur einem freien Parameter a und dem festen Exponent $\lambda = \frac{q}{2}$ angepaßt (vergleiche Tab. 4.6 und Abb. B.32ff im Anhang). Man

Skala j	Ordnung $q = 2$	Ordnung $q = 3$	Ordnung $q = 4$
	a	a	a
5	7.284 ± 0.003	70.892 ± 0.003	776.8 ± 0.4
6	10.858 ± 0.005	148.05 ± 0.01	2223.6 ± 0.7
7	15.66 ± 0.01	302.38 ± 0.01	6337.5 ± 0.3
8	21.427 ± 0.002	587.1 ± 0.4	18860 ± 2

Tabelle 4.6 Parameter a für die Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreite für 2., 3. und 4. Ordnung. Graphische Darstellung der Anpassungen im Anhang (Abbn. B.32–B.34).

kann bei den Werten für die 3. und 4. Ordnung wieder einen generellen Zusammenhang, wie auch zuvor bei der 2. Ordnung, entdecken — von Skala zu Skala wächst der Zahlenwert von a um den Faktor 2.0 ± 0.1 ($q = 3$) bzw. 2.9 ± 0.1 ($q = 4$) (siehe hierzu auch die Zusammenfassung der Werte in Tab. 4.7).

a_{j+1}/a_j	Ordnung $q = 2$	Ordnung $q = 3$	Ordnung $q = 4$
a_6/a_5	1.385 ± 0.001	2.0884 ± 0.0001	2.863 ± 0.002
a_7/a_6	1.442 ± 0.002	2.0424 ± 0.0001	2.850 ± 0.001
a_8/a_7	1.368 ± 0.001	1.9416 ± 0.0007	2.9759 ± 0.0004

Tabelle 4.7 Quotienten der Parameter a von verschiedenen Skalen j und Ordnungen q .

Die schon vermutete Gesetzmäßigkeit dieser gewonnenen Quotienten in Abhängigkeit von der Ordnung q mit dem Faktor $\sqrt{2}$ scheint sich zu bestätigen. Der Wert für die 2. Ordnung lag ja bereits bei 1.40 ± 0.05 , also sehr nahe bei $1.41 \approx \sqrt{2}$. Der Wert für $q = 3$ liegt bei nahezu exakt bei 2 und der für $q = 4$ bei etwa $2.82 \approx 2 \cdot \sqrt{2}$. Der Zusammenhang bekommt somit folgende mathematische Form:

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{\sigma_{j+1}(m)}{\sigma_j(m)} = \sqrt{2}^{q-1} = 2^{\frac{q-1}{2}}. \quad (4.16)$$

Insgesamt kann man also sagen, daß die Form der Verteilungen faktorieller Waveletmomente verschiedener Ordnungen und Skalen bei gemäß einer Gleichverteilung zufällig

besetzter Originalverteilung für unterschiedliche Anzahl der Einträge qualitativ als auch quantitativ verstanden ist. Nach diesen abschließenden Bemerkungen wird nun zu simulierten Verteilungen übergegangen, die nicht mehr gleichverteilt sind.

4.2.2 Gaußverteilungen variabler Breite

Um einen Eindruck zu bekommen, was für ein Signal Datenpunkte liefern, die nicht gleichverteilt sind, sondern mehr oder weniger eng in einer Verteilung beieinander liegen, wurden je 100 Einträge mit einer Gaußschen Verteilungsfunktion unterschiedlicher Breite in das mittlerweile bekannte Intervall $[0, 1]$ mit 512 Bins gewürfelt. Der Schwerpunkt der Verteilung wurde dabei gemäß einer Gleichverteilung zufällig aus diesem Intervall gewählt. Aus Voruntersuchungen hatte sich schon ergeben, daß Mehrfacheinträge in einem Bin zu einer deutlichen Zunahme des Betrages der faktoriellen Waveletmomente führen (was natürlich auch der Erwartung entspricht). Von jeder Verteilungsart wurden wieder 10^5 Repräsentanten generiert, von denen jeweils die faktoriellen Waveletmomente 2., 3. und 4. Ordnung berechnet wurden.

Begonnen wurde mit einer besonders schmalen Gaußverteilung, deren Standardabweichung nur $\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$ betrug (bei einer um mehr als den Faktor 10 größeren Binbreite von $\frac{1}{512} \approx 1.95 \cdot 10^{-3}$). Damit fielen im Normalfall fast alle 100 Einträge in

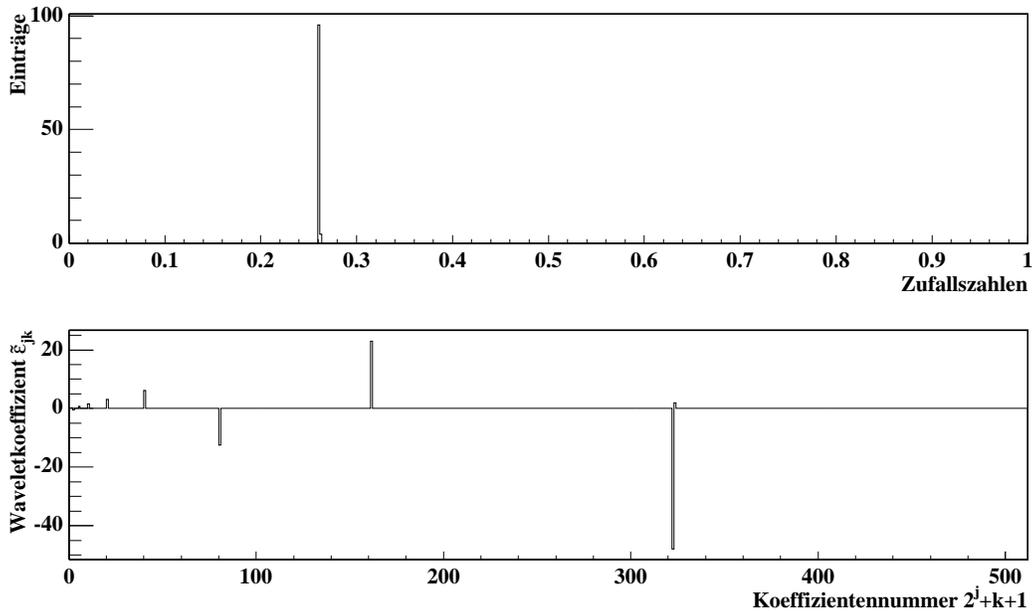


Abbildung 4.14 Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

ein Bin. Wie man an Abbildung 4.14 sieht, führte das zu Signalen im Koeffizientenraum

der Wavelets, die auch nadelförmig ausgeprägt waren. Sobald durch die sukzessive Verdoppelung der Binbreite die Bins breit genug sind, um die Gaußfunktion aufzunehmen, sieht man bei den Waveletkoeffizienten nur noch einen Eintrag pro Skala. Diese Aussage ist im übrigen unabhängig von der Breite der Gaußverteilung: Da eine grundlegende Eigenschaft solcher Verteilungen die Häufung um einen Mittelwert ist, liegen bei einer allmählichen Verbreiterung der Bins früher oder später alle Einträge in einem Bin, und es tritt bei den Waveletkoeffizienten ab dieser Skala nur noch je eine Waveletamplitude auf. Eine Ausnahme bilden offensichtlich nur solche Verteilungen, die breiter als der halbe Definitionsbereich $[0, 1]$ sind.

Die faktoriellen Waveletmomente dieser schmalen Verteilung geben nun ebenfalls ein sehr bemerkenswertes Bild. Es ist klar, daß die Momente von Null verschiedene Einträge haben sollten, da die Waveletmomente, wie in Abschnitt 3.2.4 beschrieben, gerade sensitiv auf Mehrfacheinträge in einem Bin sind.

Die Momente der Ordnung $q = 2$ (siehe Abb. 4.15) haben ein ausgeprägtes Maximum bei 2^j , wobei mit j wie gewohnt die Skala bezeichnet ist. Außerdem erkennt man,

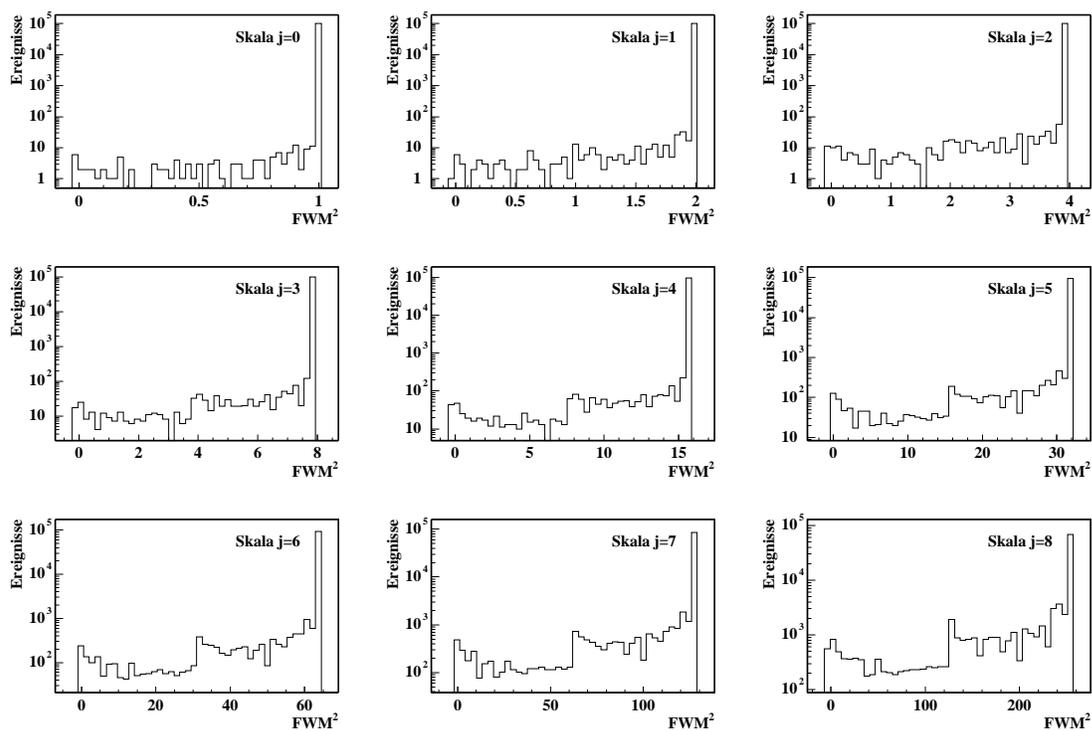


Abbildung 4.15 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung. Die zugrundeliegenden Gaußverteilungen hatten jeweils eine Breite von $\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$.

zumindest bei größerer Skala, je ein Nebenmaximum bei 2^{j-1} . Wie schon von den gleichverteilten Zufallseinträgen her bekannt, ragt die Verteilung der faktoriellen Waveletmomente ein wenig über Null hinaus in den negativen Bereich. Auch scheint es eine kleine Überhöhung der Werte bei Null zu geben.

Daß es überhaupt Einträge zwischen dem Wert 2^j und Null gibt, hat seine Ursache darin, daß der Mittelwert der eingehenden Gaußverteilungen nicht immer genau in der Binmitte liegt (das gilt für alle Skalen j und somit für alle Binbreiten). Dadurch ist die hier benutzte, sehr schmale Gaußverteilung nicht immer auf nur ein Bin konzentriert, wodurch Momente mit geringerem Betrag zustande kommen, da es innerhalb der entsprechenden Skala dann noch weitere Mehrfacheinträge der Waveletkoeffizienten gibt.

Anscheinend existieren auch noch weitere Nebenmaxima (mit einer nur sehr geringen Anzahl von Einträgen im Vergleich zum Hauptmaximum) im Bereich von 2^{j-1} – 2^j . Diese werden allerdings durch die relativ breite Bineinteilung der Momentverteilungen unkenntlich gemacht. Dieses breite Binning war nötig, um gerade dieser sehr feinen Struktur von Maxima rechts von der jeweiligen Verteilungsmitte Herr zu werden. Das Vorgehen, immer Gaußverteilungen mit gleicher Multiplizität zu benutzen, erzwang anscheinend nur bestimmte Ergebnisse der faktoriellen Waveletmomente, so daß es in den Verteilungen immer stark besetzte Bins mit dazwischenliegenden Lücken gab. Um einen Gesamteindruck von der Verteilungsform zu bekommen, mußten unter Verlust von Auflösung mehrere Bins zusammengelegt werden. Deshalb sind diese Nebenmaxima nur noch schwer zu erkennen. Sie sind aber wohl nicht auf einen sogenannten Binningeffekt zurückzuführen, sondern Ausdruck der Gemeinsamkeiten, der in die Verteilung der Momente eingehenden 10^5 Gaußverteilungen mit je 100 Einträgen.

Ein vergleichbares Aussehen haben die faktoriellen Waveletmomente 3. Ordnung. Das ist auch verständlich, da es für diese mehr qualitativen Betrachtungen bei etwa 100 Einträgen pro Bin in jedem Fall ($q = 2, 3$ und 4) eine große Anzahl von q -fach korrelierten Einträgen gibt, so daß durch die gewählte, intelligente Normierung (siehe Glg. 3.53) die Effekte in den Waveletmomenten verschiedener Ordnung q zu ähnlichen Ergebnissen führen sollten.

Genau dies ist auch der Fall, wie man an der graphischen Darstellung 4.16 sehen kann. Erneut erkennt man deutliche, von Null verschiedene Maxima — diesmal allerdings bei den Werten $\pm 4^j$. Auch tritt wieder ein kleineres Maximum bei Null auf, das nun einerseits auf echte Nulleinträge, andererseits aber auf die schon in Abschnitt 4.2.1 erklärte Eigenschaft der *faktoriellen* Momente zurückzuführen ist. Die Symmetrie der Verteilungen beruht, wie auch schon erwähnt, auf der Potenzierung mit dem Wert $q = 3$.

Die mögliche Bildung schwach populierter Nebenmaxima ist gerade noch erkennbar, ist aber auch hier eine grundlegende Eigenschaft der Verteilungen, die wieder auf das gewählte Ensemble der Eingangsverteilungen zurückzuführen ist.

Die Waveletmomente 4. Ordnung (Abb. 4.17) gleichen wie erwartet prinzipiell den vorausgegangenen Momenten 3. und insbesondere denen der 2. Ordnung, was auf den geradzahigen Wert von q zurückzuführen ist. Doch gibt es diesmal auch wesentliche Unterschiede. Die Maxima der Verteilungen liegen etwa bei 8^j , erreichen diesen Wert allerdings nicht ganz. Man sieht deutlich, wie die Einträge bereits unterhalb dieser Grenze auf Null zurückgehen. Diese Eigenschaft hat ihre Ursache nun eindeutig in der faktoriellen Berechnung der Momente, die bei anwachsender Ordnung q eine immer bedeutendere

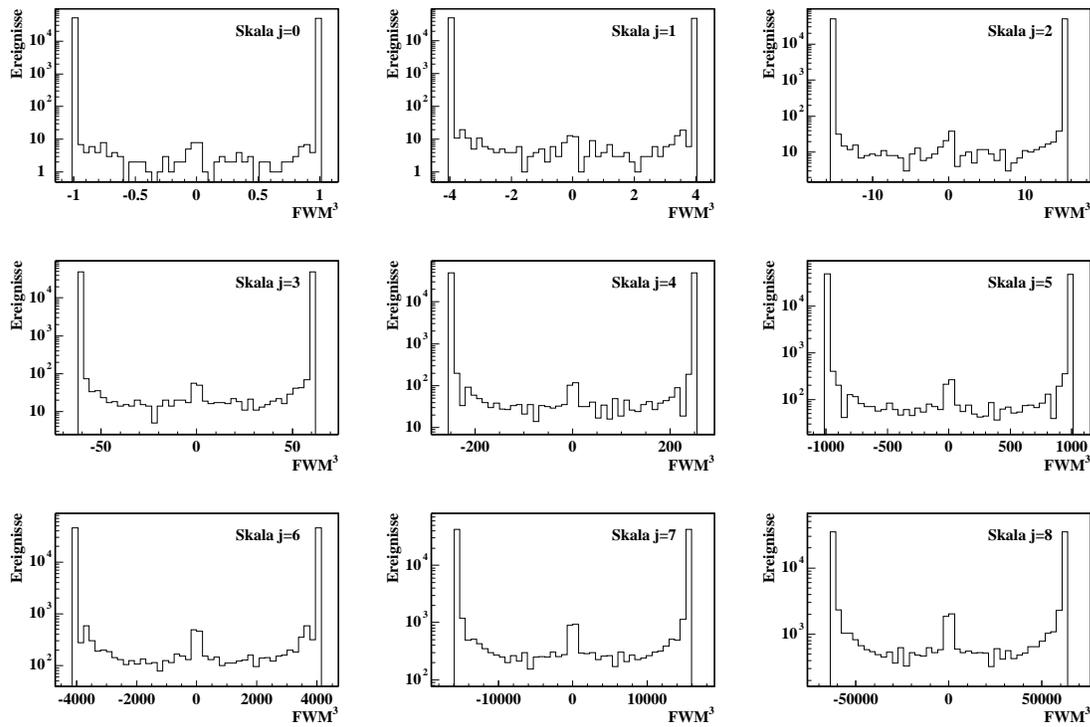


Abbildung 4.16 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung. Breite der generierten Gaußverteilungen: $\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$.

Rolle spielt. Würde man die Verteilungen 2. und 3. Ordnung mit einer höheren Auflösung analysieren, sollte man eben diese Abweichungen auch dort bereits bemerken.

In der rechten Hälfte der Verteilungen sind die Nebenmaxima trotz der schon recht groben Binunterteilung dennoch offensichtlich. Noch breitere Bins hätten zwar das Profil weiter geglättet, doch wäre dies über das vernünftige Maß hinaus gegangen, da man dann andere kleine Effekte, wie den Sprung genau in der Mitte der Verteilungen oder den erneuten Anstieg von rechts, nach einem Minimum zum Wert Null hin, nicht mehr hätte wahrnehmen können. Überraschend ist die Tatsache, daß Nebenmaxima anscheinend immer nur rechts von der Verteilungsmitte auftreten.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß stark korrelierte Daten in den faktoriellen Waveletmomenten in Abhängigkeit von der Ordnung q und der Skala j Maxima bei etwa $(\pm 1)^q \cdot 2^{j(q-1)}$ zeigen. Je höher die Ordnung q ist, desto weiter bleibt das Maximum von diesen Nominalwerten entfernt — bei den hier vorgestellten Ordnungen ist dieser Unterschied nur bei der 4. Ordnung gut zu erkennen. Oberhalb dieser Maxima folgen keine weiteren Einträge, so daß die gesamten Verteilungen gerader Ordnung innerhalb eines Intervalls liegen, das im negativen Bereich nahe Null beginnt und sich fast bis zum Wert $2^{j(q-1)}$ fortsetzt. Bei ungerader Ordnung erstreckt sich dieses Intervall von $-2^{j(q-1)}$ bis $+2^{j(q-1)}$. Alle Ordnungen, doch insbesondere die ungeraden, zeigen eine Überhöhung bei Null, und außerdem sind weitere, aber weitaus niedrigere Nebenmaxima vorhanden.

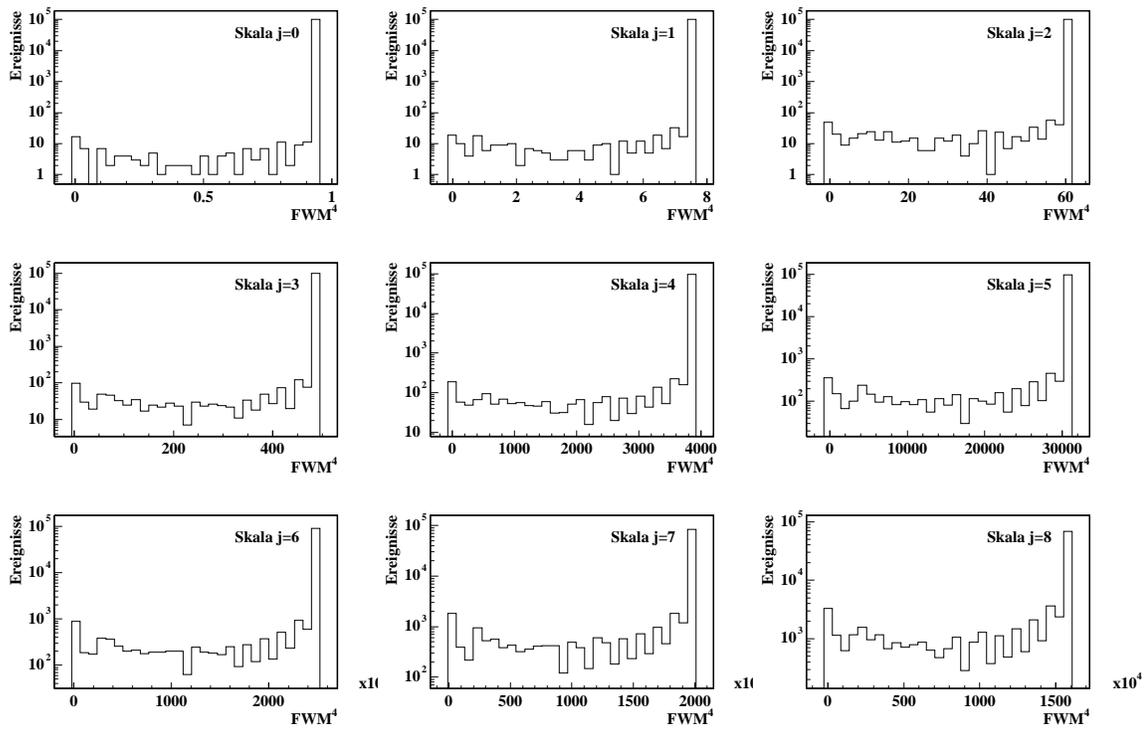


Abbildung 4.17 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung von 10^5 Gaußverteilungen der Breite $\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$.

Des weiteren wurden nun Gaußverteilungen generiert, die die 2^n -fache Breite der eben vorgestellten Verteilung mit $\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$ hatten. Die graphischen Darstellungen hierzu, wie auch die der dazugehörigen Waveletmomente können dem Anhang (Abschn. B.2.1) entnommen werden. Exemplarisch werden in diesem Abschnitt die Verteilungen des Momente von Ausgangsverteilungen der Breite $\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$ abgebildet (Abb. 4.18, 4.19 und 4.20). An ihnen sind viele der im folgenden erwähnten Eigenschaften zu erkennen.

Zunächst einmal (Breite der Gaußschen Glockenkurven $\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4}$, Abb. B.39ff) ändert sich nicht viel am Aussehen der Momentverteilungen. Die Maxima zeigen sich wieder an den Stellen $(\pm 1)^q \cdot 2^{j(q-1)}$. Auch das weitere Maximum bei Null bleibt erkennbar. Allerdings werden nun die Einträge zwischen diesen beiden Extremstellen der Verteilung häufiger, was auch plausibel ist, da die Eingangsverteilung nun immer öfter mehrere Bins überdeckt und es dadurch zu einer Zunahme von Bins mit weiteren Mehrfacheinträgen kommt, die allerdings nicht an die starke Korrelation im häufigst besetzten Bin heranreichen. Die weiteren Nebenmaxima sind nur noch bei 4. Ordnung (und dem hier gewählten Binning) zu erkennen.

Eine weitere Verdoppelung der Breite der Eingangsverteilungen auf $\sigma = 5.0 \cdot 10^{-4}$ (siehe im Anhang Abb. B.43ff) läßt nun erstmals eine Veränderung in der Form der Verteilungen erkennen. Durch alle Ordnungen q hindurch verschieben sich die Maxima der größten Skala $j = 8$ zu Werten mit einem kleinerem Betrag als $2^{j(q-1)}$. Au-

ßerdem ist die Anzahl der Einträge in diesem Maximum nun vergleichbar mit der Höhe der Nebenmaxima bei $(\pm 1)^q \cdot 2^{j(q-1)-1}$ und dem bei Null. Bei höherer Ordnung ($q = 3$ und 4) ist sogar jetzt schon das Maximum bei Null das am stärksten populierete. Trotzdem gibt es auch weiterhin Einträge, die bis an die erkannten Grenzwerte von $(\pm 1)^q \cdot 2^{j(q-1)}$ heranreichen. Diese scheinen also tatsächlich den Wertebereich der (normierten) faktoriellen Waveletmomente zu beschränken.

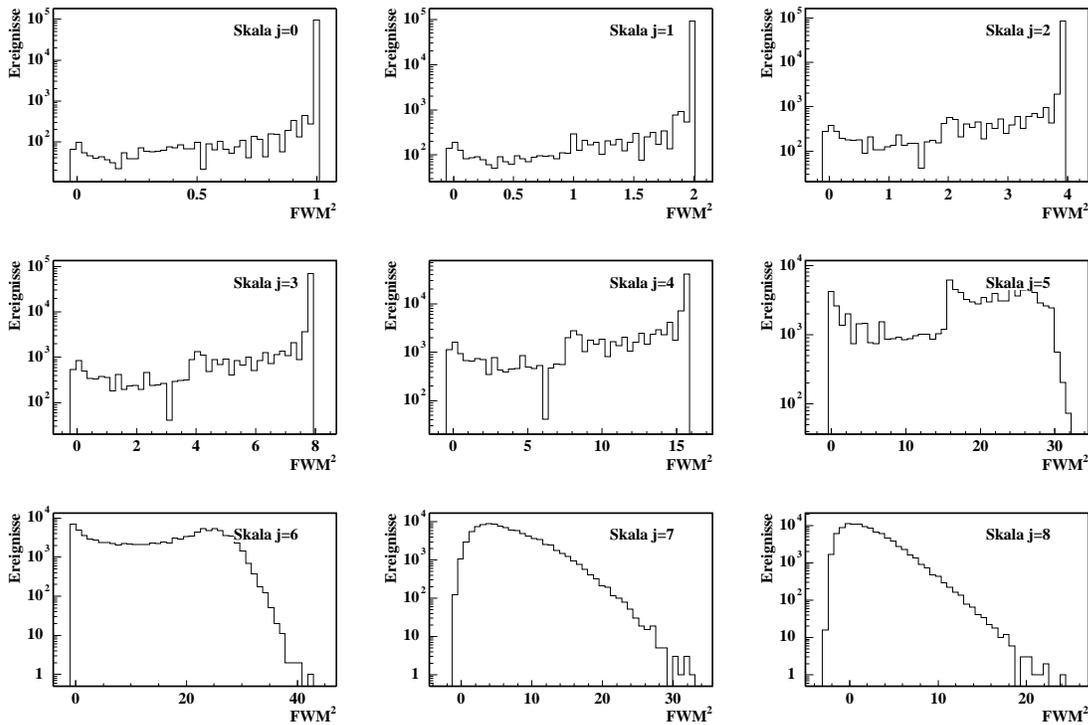


Abbildung 4.18 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung von 10^5 Gaußverteilungen mit einer Breite von $\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$. Es lassen sich deutlich alle im Text erwähnten Eigenschaften wiedererkennen: Bei niedriger Skala ($j \leq 4$) existiert weiterhin das bekannte Maximum bei etwa 2^j . Ab Skala $j = 5$ verschiebt sich dieses Maximum zu niedrigeren Werten und wird nur noch ähnlich stark populiert, wie die nun kaum noch als Nebenmaxima zu bezeichnenden Maxima in der Mitte der Wertebereichs und bei Null. Ab Skala $j = 7$ schließlich existiert nur noch ein Maximum nahe Null. Die Verteilung ist allerdings deutlich breiter als man von gleichverteilten Ausgangsverteilungen gewohnt ist.

Bei immer breiter werdender Eingangsfunktion verschieben sich die Verteilungen mit Maxima, die nicht direkt am Rand des Wertebereichs liegen, zu niedrigeren Skalen. Es ist verständlich, daß das Aussehen der faktoriellen Waveletmomente einer Skala j bei Verdoppelung der Breite der Eingangsfunktion dann bei der Skala $j-1$ wiederzuerkennen ist, da von hoher zu niedriger Skala schrittweise die Breite der Bins verdoppelt wird.

Die Maxima wandern bei sukzessiver Verbreiterung der Gaußverteilungen immer weiter zum nun dominierenden Maximum bei Null, bis sie schließlich bei der höchsten Skala $j = 8$ anfangen, von diesem nicht mehr unterscheidbar zu sein (bei einer Breite der Gauß-

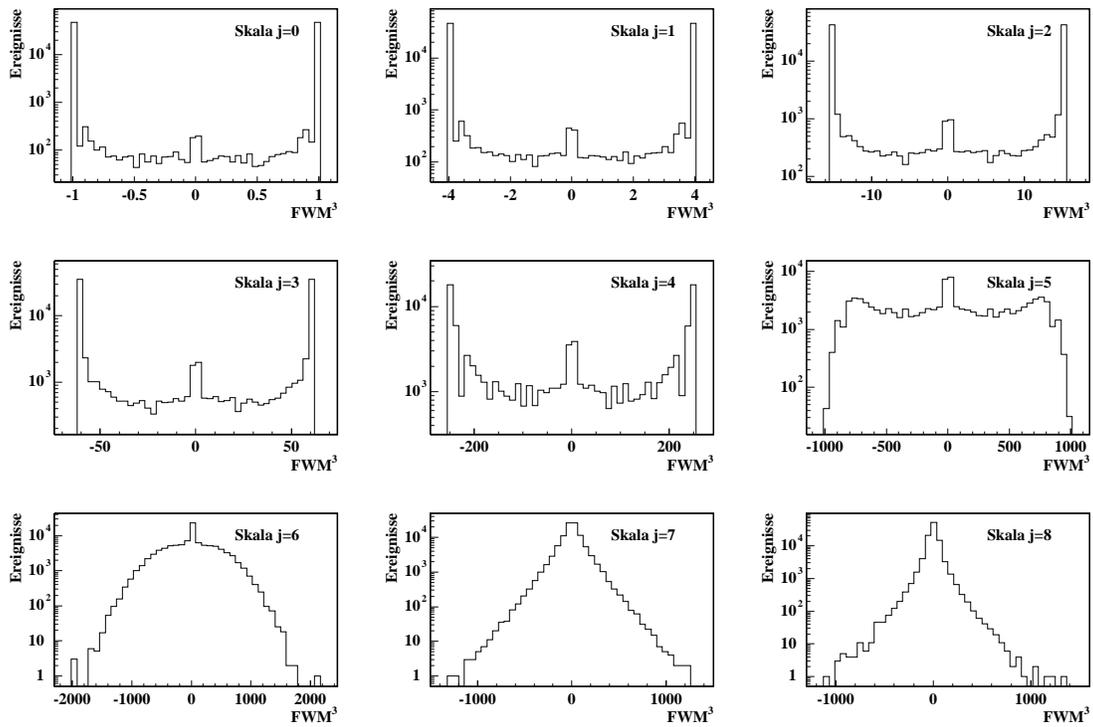


Abbildung 4.19 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung. Die gaußverteilten Ausgangsverteilungen hatten jeweils eine Breite von $\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$. Bis Skala $j = 4$ zeigt sich das gewohnte Bild, dann jedoch verschieben sich die äußeren Maxima hin zum Maximum bei Null, das nun zum Hauptmaximum geworden ist. Bei Skala $j = 6$ sind die ursprünglich außenliegenden Maxima schon nicht mehr als solche zu erkennen. Ab Skala $j = 7$ schließlich gleichen die Verteilungen, bis auf ihre größere Breite, denen von gleichverteilten Zufallseinträgen gleicher Multiplizität (100 Einträge).

verteilung von $\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$, Abb. B.51ff). Das geschieht im übrigen bei allen Ordnungen im gleichen Augenblick. Auch haben die Verteilungen nur noch selten Ausläufer, die bis an die erkannte Grenze des Wertebereichs der normierten faktoriellen Waveletmomente heranreichen.

Anhand der Skala, ab der nur noch ein Maximum bei Null zu erkennen ist, kann man die ungefähre Breite der Ausgangsfunktion abschätzen. Skala j bedeutet, daß man es mit 2^j Differenzwerten von je zwei benachbarten Bins (also 2^{j+1}) zu tun hat. Der Definitionsbereich $[0, 1]$ der Gaußverteilung wird dadurch also allgemein in Intervalle der Breite $\frac{1}{2^{j+1}}$ unterteilt. Beim ersten Auftreten von nur noch einem Maximum ist $j = 8$, so daß sich als Binbreite $\frac{1}{2^{8+1}} = \frac{1}{512} = 1.95 \cdot 10^{-3}$ ergibt. Das entspricht ziemlich genau der Breite der Ausgangsverteilung von $\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$. Daß dies so sein muß, leuchtet ein. Bei einer Breite der Gaußkurve im Größenbereich des Binnings, liegen schon viele besetzte Bins um den Mittelwert der Verteilung vor. Schaut man nun mit der größten Auflösung — sprich der größten Skala j — auf diese Einträge, können die

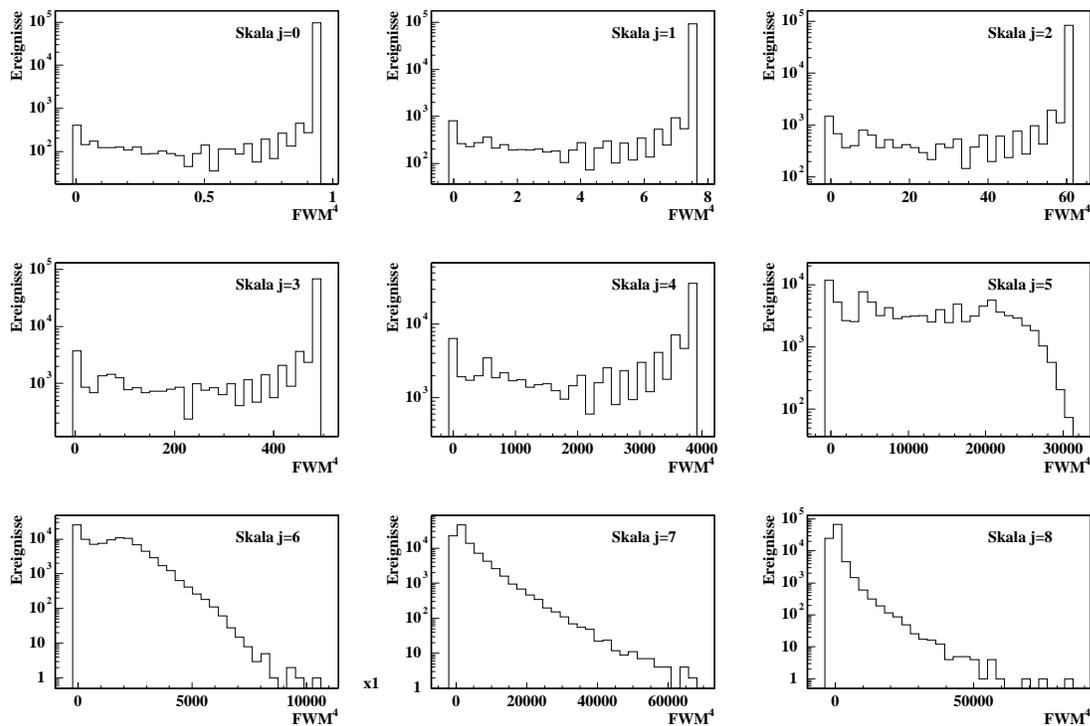


Abbildung 4.20 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung von Gaußschen Ausgangsverteilungen mit der Breite $\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$. Ab Skala $j = 5$ verschwinden die Nebenmaxima in der oberen Hälfte des Wertebereichs und das Maximum verschiebt sich vom rechten Rand nach links. Auch ist nun das Maximum bei Null dasjenige mit den meisten Einträgen. Ab Skala $j = 7$ ist nur noch ein Maximum bei Null zu erkennen.

faktoriellen Waveletmomente diese Einträge immer schlechter von einer Zufallsverteilung unterscheiden. Daher tritt erneut das schon aus Abschnitt 4.2.1 bekannte Maximum bei Null auf.

Man darf allerdings nicht vergessen, daß man einer solchen Verteilung von Momenten immer noch ihren Ursprung in Form der Ausgangsfunktion ansehen kann. Sie ist gegenüber der vergleichbaren Verteilung von 100 gleichverteilten Einträgen deutlich breiter (mindestens eine Größenordnung) und außerdem ist sie (bei gerader Ordnung) unsymmetrisch. Die faktoriellen Momente der höchsten Skala ($j = 8$) von gleichverteilten Einträgen dagegen waren nahezu gaußverteilt um den Nullpunkt. Selbst bei der größten hier simulierten Breite der Eingangsverteilung von $\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$ (im Anhang Abb. B.75ff) sind die Verteilungen der Momente noch deutlich unsymmetrischer, als es durch die faktorielle Berechnung zu erwarten wäre. Diese Asymmetrie nimmt erst dann ab, wenn die Breite der eingehenden Gaußverteilungen tatsächlich so groß ist, daß man durch den nur in dem dann engen Definitionsintervall $[0, 1]$ gesehenen Ausschnitt keine nennenswerte Abweichung von einer Gleichverteilung mehr erkennen kann.

Um diesen letzten Punkt zu quantifizieren, wurden erneut Gaußsche Glockenkurven an die Verteilungen der faktoriellen Waveletmomente angepaßt. Da wie gesagt die Vertei-

lungen mit geringerer Breite der Ausgangsverteilungen sehr unsymmetrisch sind, waren diese Anpassungen in einigen Fällen nicht sehr gut (Abbn.: siehe Anhang B.2.2). Man kann deutlich die Abweichung der Meßpunkte von der Gaußkurve erkennen. Deshalb wurden zur Anpassung nur die Momente mit der Skala $j = 6, 7$ und 8 aller Ordnungen ausgewählt. Wesentlich war aber auch hierbei wieder, eine Messung der Verteilungsbreite zu ermöglichen, was unabhängig von der generellen Anpassung an die Datenpunkte noch mit einiger Genauigkeit durch Gaußfunktionen geschehen konnte. Die Auswertung der sich ergebenden Verteilungsbreiten sind in Tabelle 4.8 zusammengestellt.

Ordnung $q = 2$			
Breite der Ausgangsverteilung	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
	$\sigma [10^{-1}]$	$\sigma [10^{-1}]$	$\sigma [10^{-1}]$
$1.0 \cdot 10^{-2}$	8.43 ± 0.02	6.089 ± 0.003	7.61 ± 0.02
$2.0 \cdot 10^{-2}$	3.153 ± 0.003	3.980 ± 0.007	6.780 ± 0.008
$4.0 \cdot 10^{-2}$	2.373 ± 0.003	3.444 ± 0.002	5.14 ± 0.01
$8.0 \cdot 10^{-2}$	1.655 ± 0.003	2.573 ± 0.004	3.887 ± 0.008

Ordnung $q = 3$			
Breite der Ausgangsverteilung	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
	$\sigma [10^0]$	$\sigma [10^0]$	$\sigma [10^0]$
$1.0 \cdot 10^{-2}$	11.04 ± 0.05	7.91 ± 0.08	15.12 ± 0.03
$2.0 \cdot 10^{-2}$	2.0704 ± 0.004	3.953 ± 0.006	7.79 ± 0.02
$4.0 \cdot 10^{-2}$	0.965 ± 0.002	1.961 ± 0.004	4.078 ± 0.006
$8.0 \cdot 10^{-2}$	0.4803 ± 0.0005	1.022 ± 0.001	2.1733 ± 0.0007

Ordnung $q = 4$			
Breite der Ausgangsverteilung	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
	$\sigma [10^1]$	$\sigma [10^1]$	$\sigma [10^1]$
$1.0 \cdot 10^{-2}$	11.19 ± 0.03	10.49 ± 0.02	29.28 ± 0.06
$2.0 \cdot 10^{-2}$	1.587 ± 0.004	4.12 ± 0.03	9.801 ± 0.007
$4.0 \cdot 10^{-2}$	0.496 ± 0.001	1.256 ± 0.003	4.37 ± 0.01
$8.0 \cdot 10^{-2}$	0.1734 ± 0.0002	0.546 ± 0.001	1.515 ± 0.005

Tabelle 4.8 Mittlere Schwankungsquadrate der Gaußanpassungen an faktorielle Waveletmomente von gaußverteilten Zufallsverteilungen mit unterschiedlicher Breite. Die Verteilungen sind deutlich (Faktor 10–100) breiter als die vergleichbaren Verteilungen mit gleichverteilten Ausgangsfunktionen und ebenfalls 100 Einträgen.

Je nach Breite der Ausgangsverteilungen sind die Verteilungen der faktoriellen Waveletmomente um etwa den Faktor 10–100 breiter als die Verteilungen gleicher Multiplizität aber gleichverteilter Ausgangsverteilung. Diesmal läßt sich in Abhängigkeit von

der Breite der Gaußschen Verteilung eine Abnahme der Verteilungsbreite der Momente beobachten, die ebenfalls einem Gesetz der Form

$$\sigma(\sigma_G) = \frac{a}{m^\lambda} \quad (4.17)$$

genügt. Exemplarisch ist dieser Zusammenhang anhand der faktoriellen Waveletmomente 4. Ordnung in Abbildung 4.21 gezeigt.

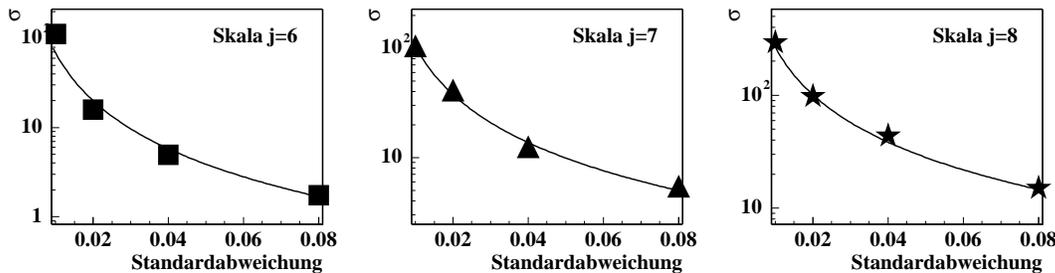


Abbildung 4.21 Abhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von der Breite der Gaußschen Eingangsverteilung, Anpassung mit zwei freien Parametern.

Die Datenpunkte mit angepaßter Funktion vom Typ 4.17 für die Ordnung $q = 2$ und $q = 3$ sind im Anhang unter Abbildung B.91 und B.92 zu finden. Die Ausreißer, insbesondere in der 2. Ordnung bei geringer Breite der Ausgangsverteilungen, sind auf die nur mäßigen Anpassungen der Verteilungsbreite der Momente durch eine Gaußfunktion zurückzuführen. Die Parameter der angepaßten Funktionen sind in Tabelle 4.9 aufgeführt. Im Gegensatz zu den Parametern, die zuvor aus den Anpassungen für den Zusammenhang von $\sigma(m)$ hervorgegangen waren, läßt sich hier nun keine so große Regelmäßigkeit mehr erkennen. Innerhalb einer Ordnung nehmen die Beträge der Parameter a zwar zu, doch ist der Skalierungsfaktor von Skala zu Skala keineswegs konstant. Er liegt aber immerhin in jeweils der gleichen Größenordnung. Es ist auffällig, daß a in der 2. Ordnung um den Faktor 2, in der 3. Ordnung um etwa den Faktor 10 und in der 4. Ordnung um nahezu den Faktor 100 von den Parameterwerten der Anpassung an die Abhängigkeit $\sigma(m)$ abweicht. Das läßt darauf schließen, daß der Unterschied in den Ausgangsverteilungen insbesondere auf diesen Parameter Auswirkungen zeigt, wogegen der Parameter λ gegenüber vorherigen Untersuchungen kaum abweicht. Diese Parameter liegen für eine Ordnung wieder relativ eng beieinander, der Schluß auf einen funktionalen Zusammenhang ist jedoch nicht möglich. Auch sind die Abweichungen von Skala zu Skala alles andere als klein.

Um diesen Abschnitt über die Form der Verteilungen der Waveletmomente von gaußverteilten Zufallsverteilungen zu beenden, ist noch zu bemerken, daß bei der breitesten simulierten Verteilung bei Ordnung $q = 4$ außerdem kleine Nebenmaxima in den Ausläufern der Momentverteilungen auftauchten. Da aber nicht noch weitere (breitere) Gaußverteilungen generiert wurden, weil deren generelle Auswirkung auf die Momente

Ordnung $q = 2$		
Skala j	$a [10^{-2}]$	λ
6	4.52 ± 0.02	0.507 ± 0.001
7	9.14 ± 0.02	0.4107 ± 0.0005
8	16.43 ± 0.08	0.354 ± 0.001

Ordnung $q = 3$		
Skala j	$a [10^{-2}]$	λ
6	2.98 ± 0.01	1.097 ± 0.001
7	8.48 ± 0.03	0.984 ± 0.001
8	20.39 ± 0.04	0.9375 ± 0.0007

Ordnung $q = 4$		
Skala j	$a [10^{-2}]$	λ
6	1.833 ± 0.008	1.787 ± 0.002
7	12.50 ± 0.07	1.459 ± 0.002
8	43.6 ± 0.3	1.392 ± 0.002

Tabelle 4.9 Parameter für die Abhängigkeit der mittleren Schwankungsquadrate der faktoriellen Waveletmomente von der Breite der Ausgangs-Gaußverteilung. Die aus dem vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse sind nur noch ansatzweise wiederzuerkennen. Auffälligster Unterschied ist der im Vergleich viel kleinere Wert des jeweiligen Parameters a .

nun ausreichend verstanden war, blieb es unklar, ob es sich hierbei nur um Artefakte oder um eine echte Eigenschaft der Momente handelte.

4.2.3 Gaußverteilte Zufallseinträge mit Untergrund

Zum Abschluß dieses Kapitels über simulierte Verteilungen soll nun der wohl realistischste Fall untersucht werden: Ein Signal mit endlicher Breite sitzt auf einem nach einer Gleichverteilung generierten Untergrund. Dies stellt eine einfache Simulation für eine lokale, nicht-statistische Fluktuation dar.

Das Verhältnis von gaußverteilten Einträgen zum Untergrund wurde für zwei verschiedene Breiten des Gaußschen Signals ($\sigma_1 = 1.0 \cdot 10^{-2}$ und $\sigma_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}$) von $\frac{1}{7}$ über $\frac{1}{15}$ und $\frac{1}{31}$ bis hin zu $\frac{1}{79}$ variiert. Dabei wurden als gemeinsame Eigenschaft die Gesamtmultiplizitäten bei 800 Einträgen festgehalten¹. Auch hier wurden von jeder Simulationsart je 10^5 Verteilungen generiert und jeweils deren faktorielle Waveletmo-

¹Die Verhältnisse entsprechen somit 100, 50, 25 und 10 gaußverteilten Einträgen.

mente berechnet und histogrammiert. Die schmalen Verteilungen mit $\sigma_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}$ sind offensichtlich ein eher unrealistisches Beispiel (siehe Abb. A.1), wenn es darum geht, experimentelle Verteilungen zu simulieren und werden deshalb nur kurz im Anhang abgehandelt (siehe Abschn. A).

Die im folgenden zu besprechenden Verteilungen mit einem auf einem Untergrund sitzenden Gaußschen Signal der Breite $\sigma_1 = 1.0 \cdot 10^{-2}$ simulieren also eine lokale dynamische Fluktuation. Sie sind im Mittel zwar gleichverteilt, jedes einzelne Ereignis weicht aber von dieser Mittelung ab. Die allgemeine Diskussion erfolgt anhand der Verteilung, die das günstigste Signal-zu-Rausch-Verhältnis hat (100 gaußverteilte und 700 flachverteilte Einträge). Zum anschließenden Vergleich wird aber natürlich auch auf die Verteilungen mit einem ungünstigeren Verhältnis eingegangen.

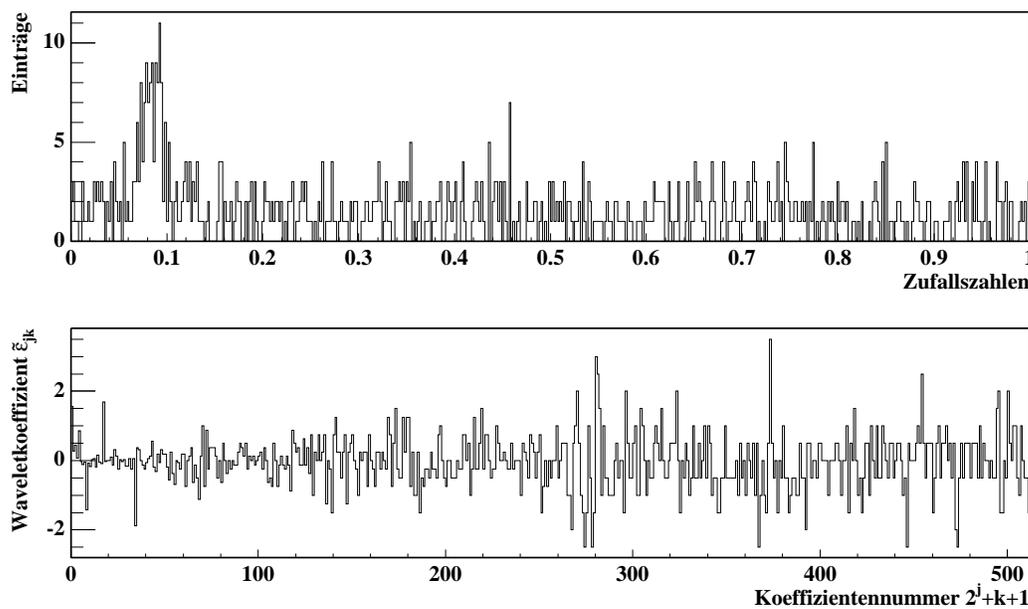


Abbildung 4.22 Repräsentant einer Verteilung von 100 gaußverteilten Zufallseinträgen ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$) mit 700 Einträgen Untergrund. Unten sind die dazugehörigen Waveletkoeffizienten aufgetragen.

Ein Repräsentant einer Ausgangsverteilung ist in Abbildung 4.22 oben dargestellt. Der gaußförmige Anteil ist deutlich zu erkennen. Die zugehörigen Waveletkoeffizienten zeigen bei hoher Skala j (was einer feinen Unterteilung des Definitionsbereichs entspricht) an der entsprechenden Stelle starke Fluktuationen, die über das allgemeine Rauschen hinausgehen. In der graphischen Darstellung in Abbildung 4.22 unten ist dies besonders in der Umgebung der Koeffizientennummern 276 ($j = 8$), 138 ($j = 7$) und 69 ($j = 6$) zu beobachten. Diese Koeffizientennummern unterteilen die jeweilige Skala genau in dem Verhältnis, wie der Mittelwert der Gaußverteilung den Definitionsbereich unterteilt. Bei niedrigerer Skala paßt das gesamte Signal in ein Bin der dann sehr groben Unterteilung hinein, so daß dort ($j = 5, 4, 3$ und 2 , entspricht den Koeffizientennummern 32–17, 16–9,

8–5 und 4–3) statt einer Fluktuation nur noch ein hoher Eintrag an der entsprechenden Stelle zu sehen ist.

Dementsprechend sind die Verteilungen der faktoriellen Waveletmomente der verschiedenen Ordnungen ausgebildet. Bei derjenigen Skala j , bei der in den Koeffizienten nur eine Fluktuation und kein einzelner, hoher Eintrag zu erkennen war, wirkt sich dies durch eine Verbreiterung der zugehörigen Momente aus, die aber generell eine nahezu gaußförmige Form behalten. Dieses Verhalten ist insbesondere für die 2. Ordnung sehr gut zu beobachten (siehe Abb. 4.23). Von hoher Skala kommend, ist den Verteilungen

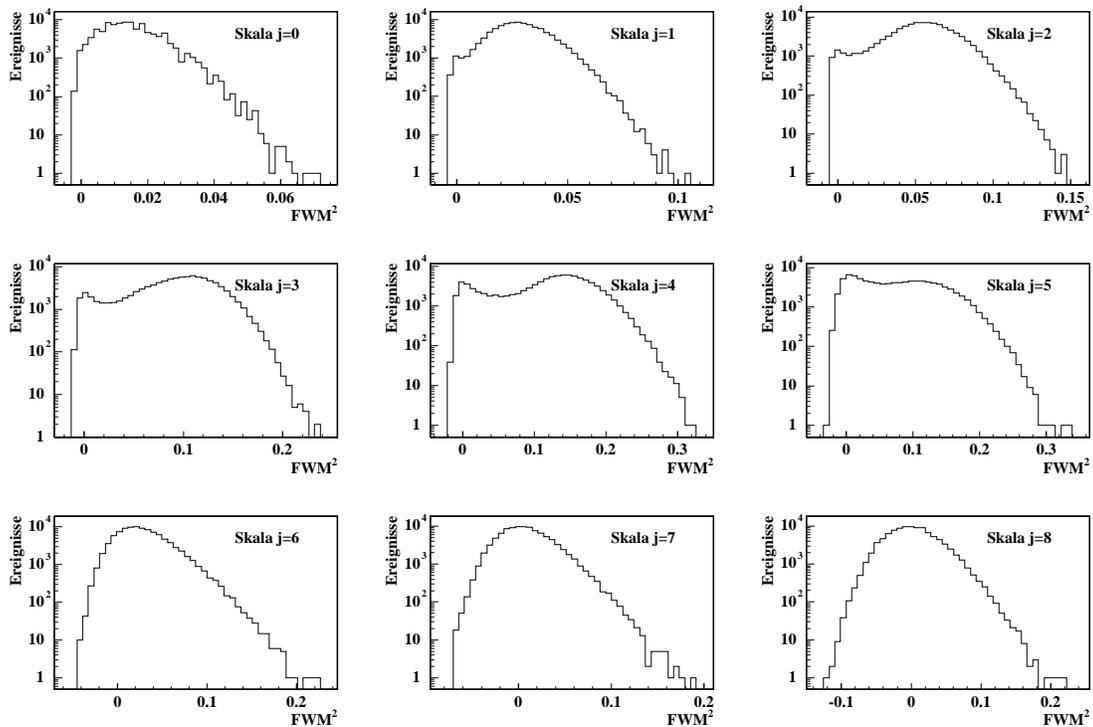


Abbildung 4.23 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung von 10^5 Ausgangsverteilungen mit einem Signal-zu-Rausch-Verhältnis von 100/700 bei einer Signalbreite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$.

der Momente bis einschließlich der Skala $j = 6$, bis auf einen etwas breiteren Ausläufer nach rechts, nichts Auffälliges anzusehen. Bei niedrigerer Skala ist dagegen ein zweites Maximum zu erkennen, daß teilweise sogar das auch noch vorhandene Maximum bei Null in der Zahl der Einträge übertrifft.

Anhand der Skala, bei der dieses zweite Maximum auftritt, läßt sich erneut die Breite des Ausgangssignals abschätzen. In dem hier betrachteten Fall ist das von Null verschiedene Maximum erstmals bei der Skala $j = 5$ zu beobachten, was 2^5 Differenzwerten von 2^{5+1} Bins entspricht. Der Definitionsbereich wird also bei dieser Skala in 64 Abschnitte unterteilt, was bei seiner Breite von 1 zu einer Binbreite von etwa 0.0156 führt. Das ist aber gerade die richtige Größenordnung der Breite des Signals von $\sigma_1 = 1.0 \cdot 10^{-2}$.

Ein ähnliches Verhalten ist bei den Momenten der 3. Ordnung zu beobachten (Abb. B.112 im Anhang). Allerdings führt die notwendige Symmetrie der Verteilungen dazu, daß sich diese Effekte schwerer erkennen lassen. Bei hoher Skala sehen die Verteilungen noch wie die von gleichverteilten Einträgen her gewohnten Momente aus, nur daß sie leicht verbreitert zu sein scheinen. Bei der entsprechenden Skala, bei der schließlich die gesamte besondere Information in einem Bin liegt, ist plötzlich wieder eine starke Überhöhung bei Null zu erkennen. Geht man zu kleineren Skalen weiter, bilden sich links und rechts von dieser Überhöhung symmetrische Nebenmaxima aus, die schließlich sogar den Eintrag bei Null übertreffen.

Bei den Momenten der 4. Ordnung (im Anhang Abb. B.113) ist die Veränderung von Skalen $j \geq 6$ zu Skalen $j \leq 5$ zwar bei weitem nicht mehr so dramatisch wie bei niedrigerer Ordnung, es läßt sich aber trotzdem eine Art Umspringen beobachten. Waren die Verteilungen zuvor durch ein starkes Maximum bei Null ausgezeichnet, ändert sich bei der kritischen Skala die Form der Verteilungen grundlegend, indem diese nun einen zu hohen Werten (im Gegensatz zu vorher) stark populierte Ausläufer bekommen. Bei noch niedrigerer Skala kann man schließlich sogar hier ein zweites, von Null verschiedenes Maximum erkennen, das aber nicht sehr stark ausgeprägt ist.

Beim Übergang zu generierten Verteilungen, bei denen das Signal im Vergleich zum Rauschen schwächer ausgeprägt ist, zeigt sich leider, daß die eben gemachten Aussagen zwar prinzipiell richtig bleiben, insbesondere bildet sich aber das Maximum bei der kritischen Skala oft nicht mehr scharf genug aus, um sich deutlich von dem bei Null sitzenden Maximum abzuheben (siehe dazu die Abbn. B.114–B.125 im Anhang). Hier bleibt nichts anderes übrig, als über die Breite der Momentverteilungen die Abweichung von einer reinen Gleichverteilung zu untersuchen.

Zu diesem Zweck wurden an die unterschiedlichen Momentverteilungen der Skalen $j = 6-8$, wie bereits gewohnt, Gaußkurven angepaßt, um mit deren Hilfe ein Maß für die Verteilungsbreiten der Momente zu bekommen. Daß dies wieder nur bei den höchsten Skalen durchgeführt werden konnte, ist klar, da nur dort die Verteilungen einigermaßen gaußförmig waren. Die Anpassungen selbst sind im Anhang abgebildet (Abbn. B.126–B.137); die sich ergebenden Werte für die Breiten finden sich in Tabelle B.1, ebenfalls im Anhang. Zusätzlich zu den Breiten der in diesem Abschnitt beschriebenen Verteilungen wurden die entsprechenden Werte von 800 gleichverteilten Einträgen aus Abschnitt 4.2.1 mit aufgenommen, was einem verschwindenden Signal-zu-Rausch-Verhältnis entspricht.

Die graphischen Darstellungen dieser Wertaufstellung (Abb. 4.24 und im Anhang die Abbn. B.138 und B.140) lassen erkennen, daß nur bei einem Signal-zu-Rausch-Verhältnis von mehr als etwa $\frac{1}{15}$ (das entspricht den Einträgen bei einer ‚Gaußschen Multiplizität‘ von 50) eine vernünftige Unterscheidung von Ereignissen mit einem vorhandenen Signal und einem rein gleichverteilten Ereignis gemacht werden kann. Ob insbesondere 10 oder weniger Einträge gaußverteilt auf einem Untergrund von mindestens 790 Einträgen sitzen, ist anhand der Breite der Momentverteilungen nicht von einer Gleichverteilung zu

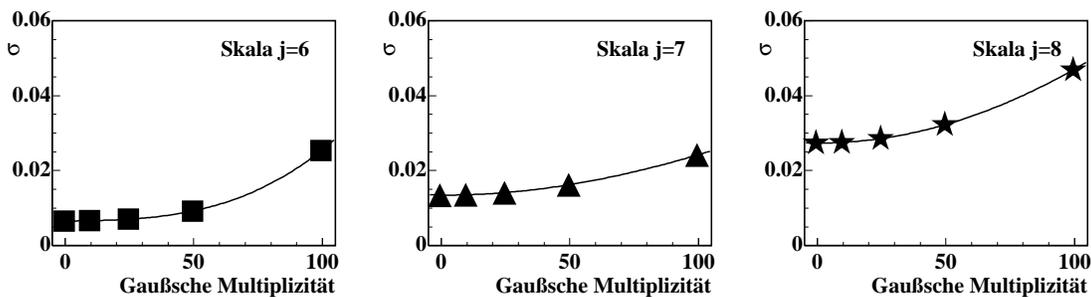


Abbildung 4.24 Verteilungsbreiten der faktoriellen Waveletmomente 3. Ordnung in Abhängigkeit von der Gaußschen Multiplizität, die ein Maß für das Signal-zu-Rausch-Verhältnis ist. Bei niedrigen Werten zeigt sich ein nur langsamer Anstieg, der aber dann rasch zunimmt. Das führt dazu, daß bei einem nur geringen nicht-gleichverteilten Anteil die Unterscheidung von einem rein gleichverteilten Ensemble anhand der Breite der Waveletmomente nicht möglich ist.

unterscheiden. Bei der in diesen Graphen eingezeichneten Funktion handelt es sich um ein Polynom 3. Grades, das nur zur Führung des Auges abgebildet ist. Anzumerken ist jedoch, daß die Abhängigkeit der Verteilungsbreite von der Stärke des Signals nicht exponentiell ist, da eine Anpassung einer Exponentialfunktion zeigt, daß diese es durch die bei niedrigen Gaußschen Multiplizitäten nahezu konstant bleibenden Werte bei hohen Werten nicht schafft, den teilweise abrupt steilen Anstieg von 50 zu 100 Einträgen zu approximieren.

Als abschließende Bemerkung zu diesen Verteilungen soll darauf hingewiesen werden, daß es offensichtlich bei steigender Ordnung immer einfacher wird, anhand der zuletzt gewählten Darstellung, eine Entscheidung für ein anomales Ereignisensemble zu treffen. Daß dies so sein muß, leuchtet ein, da bei zurückgehender Signalthöhe schließlich im Signal nur noch wenige Einträge mehr als im darunterliegenden Rauschen zu finden sind, was nur durch eine hohe Potenz, also der Suche nach Korrelationen, möglichst in der Ordnung, die durch die im Signal sitzenden Einträge gegeben ist, sichtbar gemacht werden kann.

4.2.4 Zusammenfassung der durch Simulationen erhaltenen Erkenntnisse

In diesem Kapitel wurden die Methoden und Darstellungsweisen, mit denen eine Waveletanalyse auf Basis der faktoriellen Momente arbeitet, vorgestellt. Die grundlegenden Eigenschaften der Verteilungen solcher Momente wurden qualitativ und quantitativ verstanden bzw. ausgewertet, so daß die Untersuchung von experimentellen Daten nun auf einen reichhaltigen Erfahrungsschatz und vielfältige Vergleichsverteilungen zurückgreifen kann.

Leider hat sich im Laufe der in diesem Abschnitt abgehandelten Methoden aber auch gezeigt, daß sich ein durch eine bestimmte Besonderheit ausgezeichnetes Ereignis — sei es durch eine hohe Multiplizität oder eine Häufung von Meßpunkten um einen bestimmten Mittelwert — anhand der beschriebenen Waveletanalyse nicht eindeutig von ‚normalen‘ Verteilungen abgrenzen läßt. Dies hat seine Ursache darin, daß selbst bei Beibehaltung der wesentlichen Eigenschaften einer Verteilung, wie Multiplizität oder Breite eines Signals, die faktoriellen Waveletmomente immer eine breite Verteilung bilden. Die Breite dieser Verteilungen ist so groß, daß eine Unterscheidung von verschiedenen Ereignisklassen nur schwer möglich ist. Die Auswertung kann deshalb nur noch auf die Form der Verteilungen abzielen, was im Widerspruch zu der Grundintention steht, besondere Verteilungen anhand eines Satzes von Maßzahlen als solche zu charakterisieren.

Die in der hier vorliegenden Form durchführbare Analyse läßt nur eine Aussage darüber zu, ob in einem Ensemble von Messungen einer Observablen Verteilungen mit einer Besonderheit vorliegen oder nicht. Ein gezieltes Heraussuchen derselben in dem Ensemble ist anschließend jedoch anhand der erhaltenen Ergebnisse nicht durchführbar.

5 Analyse von einzelnen Ereignissen mit faktoriellen Waveletmomenten

Nach diesen ausführlichen Untersuchungen zur Funktionsweise der Waveletanalyse sollen nun experimentelle Daten mit Hilfe dieser Methode ausgewertet werden. Dazu wurden 37952 Ereignisse zentraler Pb+Pb-Stöße der Strahlzeit im Herbst 1995 prozessiert. Diese waren zuvor mit der globalen Spurrekonstruktion (Stand April 1997) aufbereitet worden. Die Konfiguration des magnetischen Feldes war Standard+.

Nach einem Überblick über die verwendeten Qualitätskriterien an die Spuren, wird auf die Verteilungen der faktoriellen Waveletmomente eingegangen, um schließlich die Daten mit den im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Simulationen zu vergleichen.

5.1 Qualitätskriterien der verwendeten Spuren

Um Effekten, die auf die im April 1997 noch nicht perfekte globale Ereignisrekonstruktion zurückzuführen waren, auszuweichen, wurden rigorose Schnitte (engl.: *Cuts*) auf die Daten angewendet, so daß schließlich nur solche Spuren im Datensatz übrig blieben, die Anteile in der Main-TPC und einen gut definierten Impuls hatten. Außerdem wurden Spuren die nicht vom Hauptvertex kamen, wie auch aufgebrochene und generell schlecht gemessene Spuren verworfen. Auf die Cuts, die dazu führten, soll nun im einzelnen eingegangen werden.

5.1.1 Nähe des Spurursprungs zum BPD-Vertex

Der durch Rückextrapolation berechnete Ursprung der Spuren sollte möglichst nah an dem durch die BPDs bestimmten Hauptvertex liegen. Dazu wurden bei den breiten Verteilungen der x - und y -Koordinate des errechneten Vertex (b_x und b_y) jeder Spur Schnitte angebracht, die in y -Richtung nur solche Spuren zuließen, deren Ursprung näher als 2 cm am nominellen Vertex lag. In x -Richtung wurde der Cut wegen der größeren räum-

lichen Auflösung mit 3 cm etwas höher angesetzt. Daß diese Bedingungen auch nötig waren, sieht man an Abbildung 5.1. Die Werte für b_x und b_y streuen über einen sehr

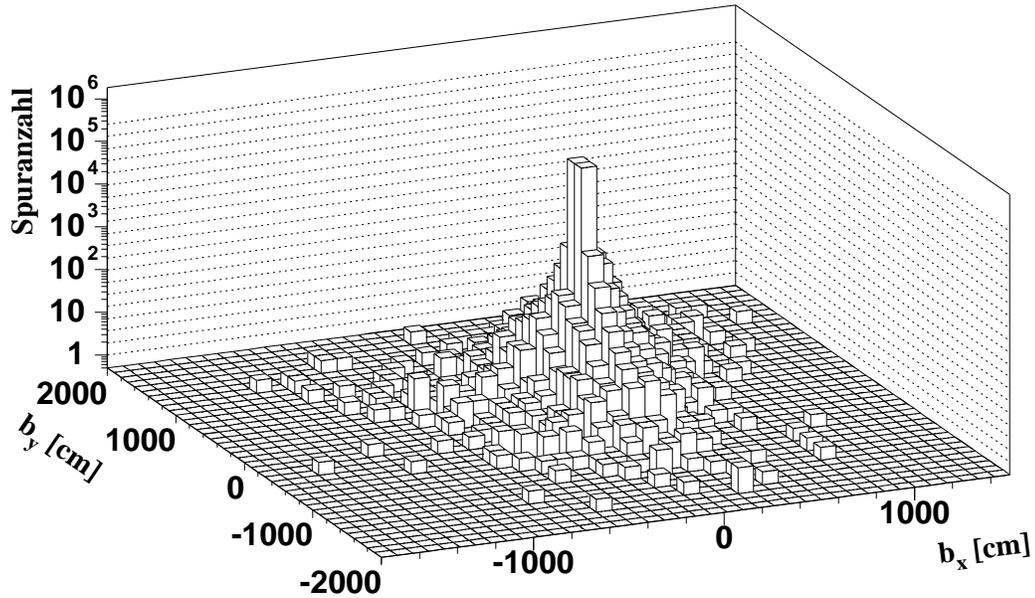


Abbildung 5.1 Verteilung der rückextrapolierten Vertexposition.

großen Bereich, was einerseits auf Zerfallsprodukte zurückzuführen ist, deren Zerfallsvertex hinter dem Target liegt, womit bei richtiger Impulsbestimmung die Teilchenspuren zwangsläufig nicht auf den Hauptvertex zurückzeigen können. Andererseits kann aber auch die Impulsbestimmung aufgrund von zu kurzen Spurstücken schlecht sein, so daß ein vom Vertex kommendes Teilchen falsch zurückextrapoliert wird. Mit diesem Schnitt entledigt man sich also Zerfallsprodukten und Spuren mit schlecht gemessenem Impuls.

Mit dem Schnitt $b_x \leq 3$ cm allein werden im Mittel 20.2% der Spuren eines Ereignisses entfernt, mit dem Schnitt $b_y \leq 2$ cm sind es 16.7%. Beide Schnitte zusammen reduzieren die Spuranzahl eines Ereignisses im Mittel auf 80.0%.

5.1.2 Anzahl der gemessenen Punkte in der Main-TPC

Mit dem folgenden Cut wurden Spuren aus dem Datensatz entfernt, deren Anzahl der gemessenen Punkte in der Main-TPC kleiner als 30 war. Damit verwirft man als erstes sämtliche Spuren, die nur in der Vertex-TPC 1 oder 2 (oder in beiden) detektiert wurden. Außerdem kann man sicher sein, daß es sich bei einer Spur, die aus so vielen Punkten re-

konstruiert wurde, nicht um ein bei der Spurenbildung übrig gebliebenes Spurbruchstück handelt. Zusätzlich werden kurze Spuren am Rand der Main-TPC-Akzeptanz verworfen (Abb. 5.2).

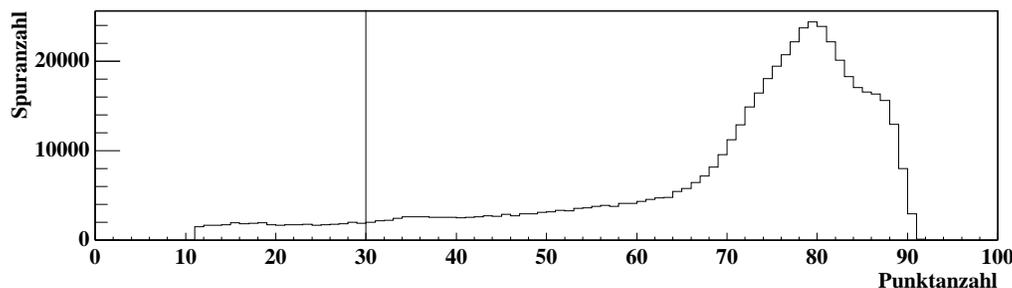


Abbildung 5.2 Anzahl der Spurpunkte in der Main-TPC. Man erkennt, daß der Schnitt bei mindestens 30 Punkten nur einen geringen Teil, nämlich 7.2%, der in der Main-TPC gesehenen Spuren verwirft.

Der Anteil der Spuren, die überhaupt keinen Punkt in der Main-TPC hatten (also Vertex 1- und 2-Spuren), lag bei 45.9%. Von den verbleibenden Main-TPC-Spuren wurden dagegen nur 7.2% durch die Anwendung des 30-Punkte-Schnittes verworfen.

5.1.3 Aufgebrochene Spuren

Ein grundlegendes Problem bei der Spurrekonstruktion ist, daß Spuren nicht komplett, sondern in zwei oder mehreren Bruchstücken gefunden werden können. Diese Bruchstücke bekommen dann zwangsläufig nahezu den gleichen Impuls zugeordnet, so daß es irrtümlicherweise so aussieht, als hätte man im Impulsraum stark korrelierte Teilchen gefunden.

Diese Unzulänglichkeit wird mittlerweile durch eine nachträgliche Zusammenfügung offensichtlicher Spurbruchstücke ein und derselben Spur behoben¹. In der für diese Analyse benutzten Spurrekonstruktion vom April 1997 war diese Erweiterung aber noch nicht vorhanden. Daher wurden nur solche Spuren im Datensatz behalten, deren Anzahl der zur Spurrekonstruktion benutzten Punkte mehr als die Hälfte der durch die Länge der Spur möglichen Anzahl der Punkte betrug. Durch diese Bedingung wurden durchschnittlich 26.7% der Spuren eines Ereignisses verworfen.

In Abbildung 5.3 erkennt man außerdem Spuren, die komplett durch eine TPC laufen, jedoch keine Punkte in einer weiteren TPC haben. Das führt zu vertikalen Linien von Einträgen bei 72 (Anzahl der Pad-Reihen der Vertex-TPCs), 90 (Anzahl der Pad-Reihen in der Main-TPC) und 162 (Anzahl der Pad-Reihen einer Vertex-TPC und der

¹Die Grundlage für dieses Vorgehen ist gerade, daß man Spuren mit ähnlichem Impuls findet, die keine Punkte bei derselben z -Koordinate haben und die zusammen etwa die für ihre Gesamtlänge typische Anzahl von Punkten besitzen.

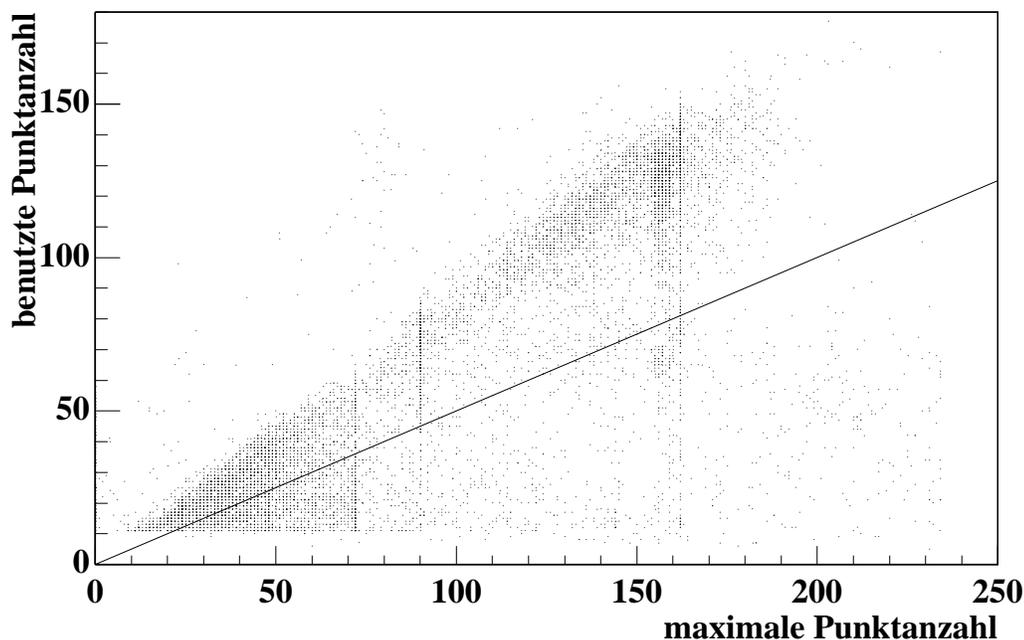


Abbildung 5.3 Anzahl der zur Spurrekonstruktion verwendeten Punkte gegenüber der durch die Länge der Spur gegebenen maximal möglichen Anzahl der Spurpunkte. Alle Spuren unterhalb und auf der Halbgeraden mit der Steigung $\frac{1}{2}$ wurden nicht berücksichtigt.

Main-TPC) möglichen Spurpunkten. Ein etwas verdichtetes Band von Werten liegt bei einem Verhältnis von benutzten zu möglichen Spurpunkten von annähernd 1. Dies sollte auch der Normalfall sein. Einträge oberhalb dieser Bedingung, also solche mit mehr zur Spuranpassung benutzten Punkten, als eine entsprechende Spur überhaupt haben kann, dürften dagegen gar nicht auftreten. Die doch sichtbaren Einträge sind auf eine falsche Bestimmung der maximal möglichen Punktzahl zurückzuführen, was aufgrund einer schlechten Impulsbestimmung für Spuren am Rand einer TPC durchaus möglich ist.

5.1.4 Verwendete Impuls- und Rapiditätsbereiche

Neben diesen aus eher geometrischen Erwägungen motivierten Schnitten wurden zur Analyse nur Spuren und damit produzierte Teilchen verwendet, die in einen bestimmten Phasenraumbereich des Impulses fielen. Um die Main-TPC nur bei ihrer vollen Akzeptanz zu nutzen und somit auf ein sauberes Ereignisensemble vertrauen zu können, wurden nur Teilchen akzeptiert, deren Transversalimpuls die Bedingung $0.01 \text{ GeV} \leq p_{\perp} \leq 2.0 \text{ GeV}$ erfüllte und die im Rapiditätsbereich $4.0 \leq y \leq 5.5$ lagen. Diese Bereiche decken sich exakt mit den Phasenraumgebieten, in denen die geometrische Akzeptanz

der Main-TPC fast durchgehend bei 100% liegt und nur zu hohen Werten von p_{\perp} auf tolerierbare 80 Prozent abfällt (siehe dazu [24]). Zusätzlich wurden mit diesem Cut sicherheitshalber noch verbliebene Teilchen ohne assoziierten Impuls verworfen, was durch die untere Grenze des p_{\perp} -Cuts geschah.

Die Teilchen mußten außerdem die einschränkende Bedingung erfüllen, im (Gesamt-) Impulsbereich von $0.4 \text{ GeV} \leq p \leq 200.0 \text{ GeV}$ zu liegen. Damit wurden unterhalb der niedrigen Akzeptanzgrenze des Schnittes δ -Elektronen entfernt, die typischerweise einen Impuls im Bereich von $0 \text{ MeV} \leq p \leq \sim 350 \text{ MeV}$ besitzen. Oberhalb von 200 GeV werden geladene Zerfallsprodukte von neutralen, bei der Reaktion erzeugten Teilchen verworfen, die aufgrund ihres strahlabwärts liegenden Zerfallsvertex nur einen Teil des Magnetfeldes der beiden Vertexmagneten zu spüren bekommen haben. Dem nur kurzen Reststück der Teilchenspur wird dadurch wegen seiner geringen Ablenkung ein viel zu hoher Impuls zugewiesen.

Der zuletzt erwähnte Cut hat nur geringen Einfluß. Er akzeptiert immerhin 98.9% aller gemessenen Teilchen bzw. Spuren. Der Schnitt im Transversal- und Rapiditätsbereich dagegen schneidet dagegen 71.0% aller Teilchen heraus.

5.1.5 Gesamtergebnis

Durch Anwendung aller oben beschriebenen Cuts wurde das Datenvolumen eines Ereignisses im Mittel auf 29.0% reduziert. Somit betrug die mittlere Multiplizität nur noch 291.2. Davon wiederum wurden nur solche Ereignisse akzeptiert, die nach den Schnit-

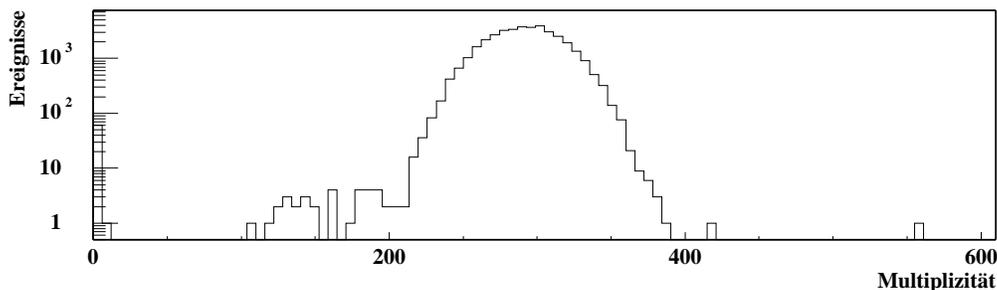


Abbildung 5.4 Multiplizitätsverteilung des verwendeten Ereignisensembles.

ten mehr als 200 akzeptierte Teilchen enthielten (siehe Abb. 5.4). Die Ausreißer der Verteilung zu hohen Multiplizitäten wurden dagegen beibehalten, obwohl sie mit hoher Wahrscheinlichkeit auf je eine zweite Reaktion im Triggerfenster zurückzuführen sind. Das verkleinerte das Ereignisensemble von 37952 auf 37860 und verschob die mittlere Multiplizität pro Ereignis zu 291.8. Mit diesem Wert wurden anschließend die faktoriellen Momente nach Gleichung 3.53 normiert.

Die Zusammenstellung in Tabelle 5.1 führt noch einmal alle vollzogenen Schnitte im Zusammenhang auf.

Qualitätskriterien der Spuren	
Schnitt	Bereich
rückextrapolierte Vertexposition	$ b_x \leq 3 \text{ cm}, b_y \leq 2 \text{ cm}$
Punkte in der Main-TPC	$n_{point} > 30$
Punktverhältnis	$n_{fit}/n_{max} > 0.5$
Rapidität	$4.0 \leq y \leq 5.5$
Transversalimpuls	$0.01 \text{ GeV} \leq p_{\perp} \leq 2.0 \text{ GeV}$
Gesamtimpuls	$0.4 \text{ GeV} \leq p \leq 200.0 \text{ GeV}$
zusätzliches Qualitätskriterium für Ereignisse	
Multiplizität	$n > 200$

Tabelle 5.1 Schnitte zur Teilchen- und Ereignisselektion.

5.2 Verteilungen der faktoriellen Waveletmomente

Um die Analyse durchführen zu können, mußten die Daten, wie bereits angedeutet, zweimal prozessiert werden. Im ersten Durchlauf wurde die inklusive p_{\perp} -Verteilung mit einer sehr feinen Unterteilung (20000 Bins) des Intervalls $0 \text{ GeV} \leq p_{\perp} \leq 2 \text{ GeV}$ unter Anwendung der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Qualitätskriterien ermittelt (siehe Abb. 5.5). Diese diente als Eingangsverteilung, gemäß der im zweiten Durchlauf die einzelnen Verteilungen nach dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen Verfahren flachtransformiert wurden.

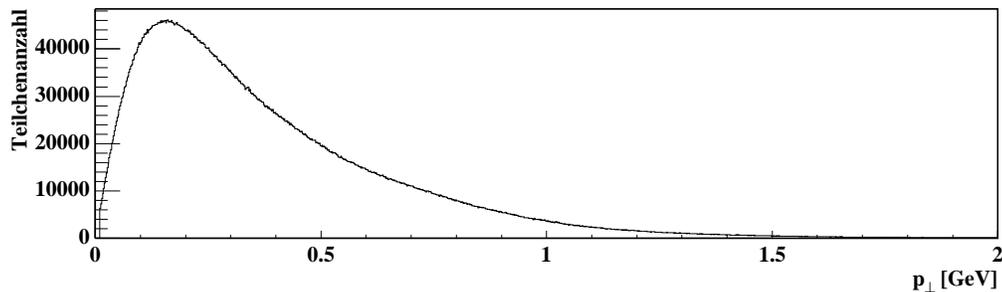


Abbildung 5.5 Inklusives Transversalimpulsspektrum. Die tatsächliche, für die Berechnung benutzte Verteilung hatte eine um den Faktor 20 feinere Unterteilung der Abszisse, was zu einer Verschmierung der Verteilung führte, da die Fluktuation zwischen zwei benachbarten Bins oft sehr groß war.

Zur Kontrolle wurden alle knapp 40000 flachtransformierten Ereignisse in ein Histogramm eingetragen. Die Forderung, daß die Verteilung im Mittel über das Intervall $[0,1]$ mit dem Wert 1 gleichverteilt sein sollte, konnte auf diese Weise bestätigt werden.

Für die Auswertung wurde jedes transformierte Ereignis in ein Histogramm mit einer Abszissenunterteilung von 512 Bins eingetragen. Daraus wurden die faktoriellen Waveletmomente der 2., 3. und 4. Ordnung für die Skalen $j = 0-8$ nach erfolgter Haar-Wavelettransformation bestimmt. Offensichtlich ist es für diese Analyse wesentlich, faktorielle Waveletmomente zu benutzen, da jedes Bin im Mittel nur mit 0.6 Einträgen belegt wird. Anschließend wurden die errechneten Momente unter Zuhilfenahme der mittleren Multiplizität (291.8 Einträge, sprich Teilchen pro Ereignis) gemäß Gleichung 3.53 normiert.

Für jedes Ereignis wurde simultan ein gleichverteiltes Zufallereignis mit exakt der gleichen Multiplizität generiert, um eine zusätzliche Kontrollsimulation mit einer um einen Mittelwert schwankenden Multiplizität zu erhalten. Dadurch konnte im Anschluß die Vernachlässigbarkeit von Multiplizitätsschwankungen um einen Mittelwert bestätigt werden.

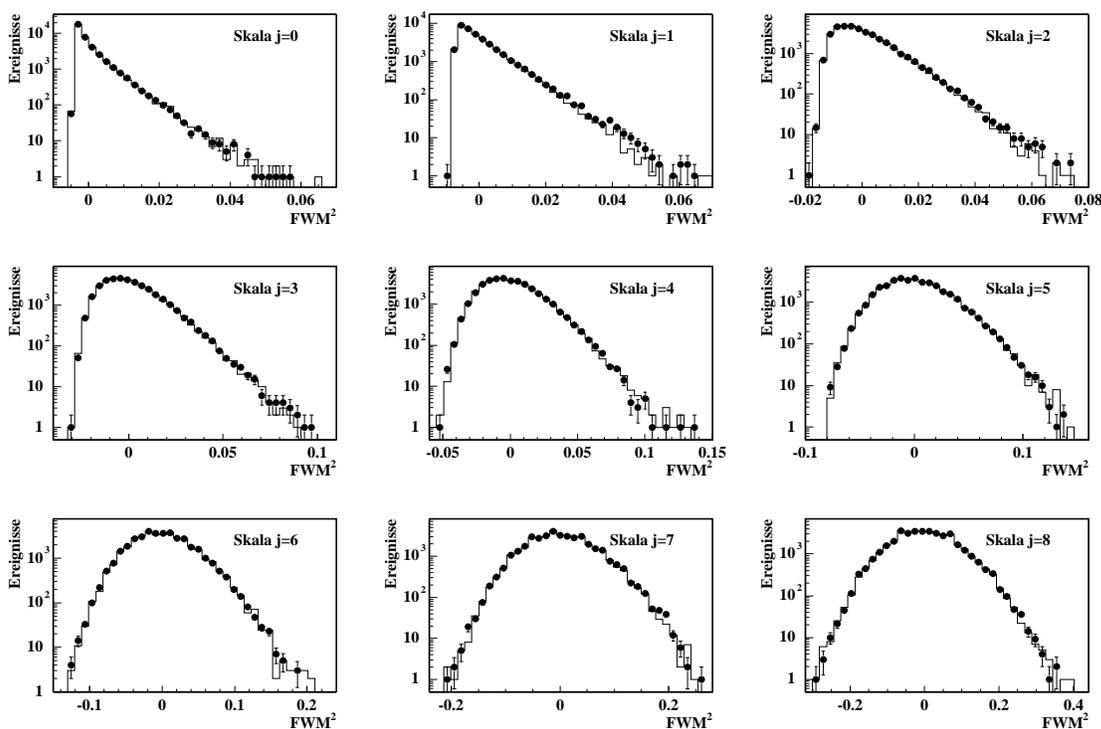


Abbildung 5.6 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung des verwendeten Ereignisensembles. Die Ergebnisse der gemäß einer Gleichverteilung mit gleicher Multiplizität (Event-by-Event) generierten Kontrollereignisse sind als Linie unterlegt.

In den Abbildungen 5.6–5.8 sind nun die Verteilungen der faktoriellen Momente der verschiedenen Ordnungen und Skalen abgebildet. Dort sind ebenfalls die Ergebnisse der

gleichverteilten Kontrollverteilungen gleicher Multiplizität (durchgezogene Linie) eingetragen. Die Fehlerbalken der Datenpunkte wurden mit Hilfe der jeweiligen Anzahl der Einträge berechnet.

Die faktoriellen Momente 2. Ordnung (Abb. 5.6) zeigen in keiner Skala j Auffälligkeiten gegenüber den Kontrollmomenten. Lediglich in den Ausläufern der Verteilungen links und rechts kommt es zu kleineren Abweichungen, die aber durchaus im Rahmen von statistischen Schwankungen liegen. Bei keiner Skala ist zu erkennen, daß sich die flachtransformierte Verteilung der experimentellen Daten in irgendeiner Weise von künstlich erzeugten, gleichverteilten Ereignissen unterscheidet.

Die Momente 3. Ordnung zeigen ein ähnliches Bild (siehe Abb. 5.7). Die schon aus

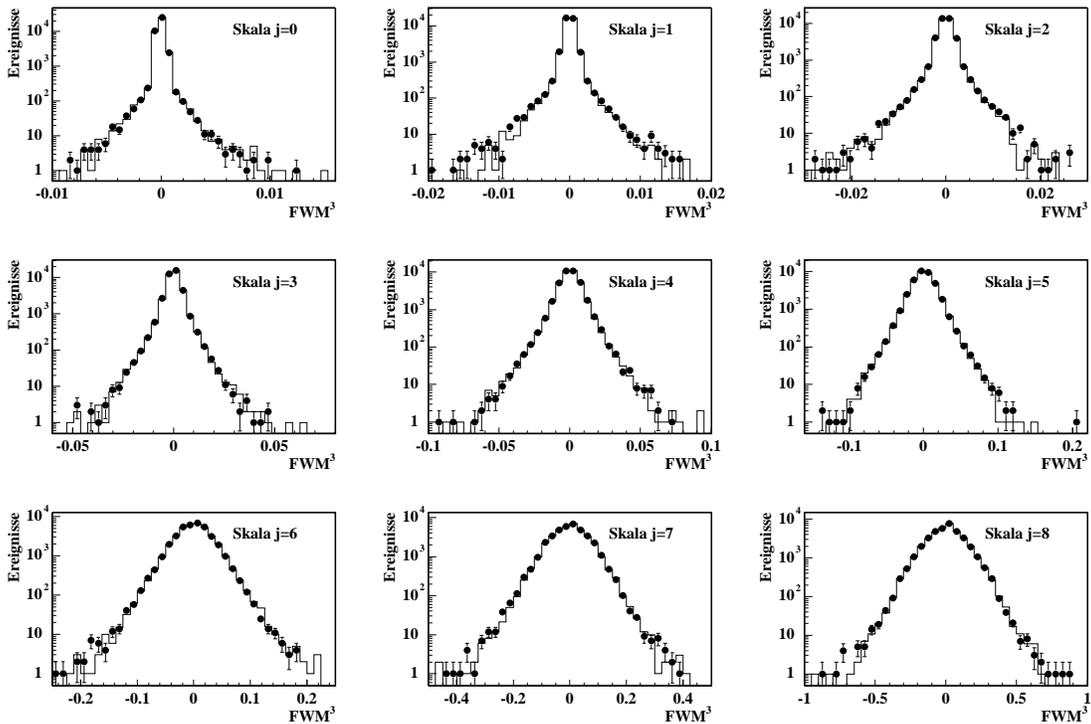


Abbildung 5.7 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung der Daten. Mit der Linie sind die Waveletmomente der Kontrollereignisse dargestellt.

Abschnitt 4.2.1 bekannte symmetrische Verteilung für gleichverteilte generierte Ereignisse konstanter Multiplizität wird hier eindrucksvoll reproduziert. Daß sich die trotzdem vorhandenen Abweichungen von den generierten Kontrollverteilungen allein auf einen statistischen Effekt zurückführen lassen, zeigt sich darin, daß in den Ausläufern der Verteilungen bei manchen Skalen die experimentellen Momente, bei anderen Skalen die generierten Verteilungen mehr Ausreißer haben.

In der 4. Ordnung (Abb. 5.8) tauchen erneut keine Überraschungen auf: Die Abweichungen der aus den Daten gewonnenen faktoriellen Momente von den mit der Kontrollsimulation erhaltenen Verteilungen sind äußerst gering. Wenn überhaupt Fluktuationen

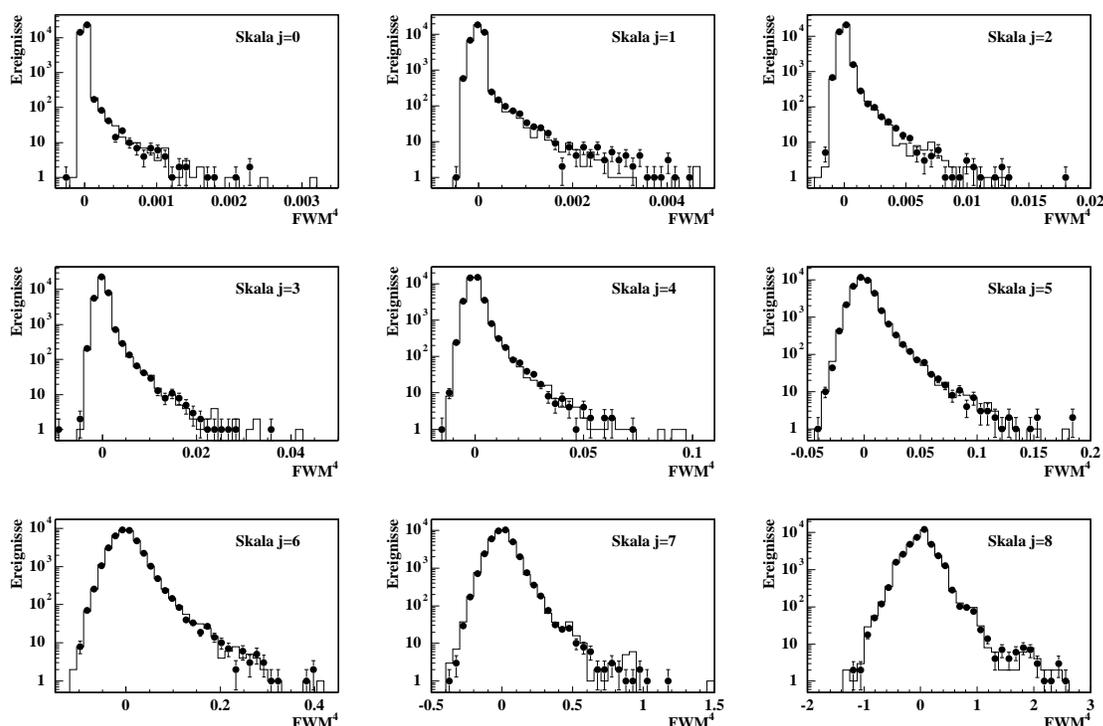


Abbildung 5.8 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung mit als Linie dargestellten Verteilungen der generierten Ereignisse gleicher Multiplizität.

vorhanden sind, spielen sich diese in den Randbereichen der Verteilungen ab.

Um erneut eine Abschätzung für die Breite der Verteilungen zu bekommen, wurden an die Momente der Skalen $j = 5-8$, wie üblich, Gaußsche Glockenkurven angepaßt. Die Anpassung ist bei diesen Skalen sehr gut möglich, da es sich bei den faktoriellen Momenten der Daten — wie bei den gleichverteilten Simulationen — annähernd um Gaußverteilungen handelt. Daher hat die Verteilungsbreite σ hier einen sehr gut abgesicherten Wert. Die Waveletmomente der Kontrollverteilungen wurden ebenfalls durch Gaußkurven approximiert, was einen direkten quantitativen Vergleich möglich machte. Die Anpassungen sind, wie gewöhnlich, im Anhang abgebildet (Abbn. B.142–B.146).

Die Ergebnisse dieser Approximationen sind in Tabelle 5.2 zusammengefaßt. Auf den ersten Blick erkennt man die schon vermutete prinzipielle Gleichheit der Verteilungsbreiten der aus experimentellen Daten erhaltenen Momente und der Momente der Kontrollverteilungen. Die Abweichungen liegen zwar nicht im durch den Fehler gegebenen Bereich, sind aber dennoch maximal von der Größe 2%. Das liegt im Bereich der Genauigkeit für die Bestimmung der Verteilungsbreiten, da die faktoriellen Waveletmomente eben doch keine perfekten Gaußkurven ausbilden. Wie man im folgenden sieht, ist diese Abweichung aber auf jeden Fall zu klein, um einen Hinweis auf eine generelle Unterschiedlichkeit der beiden Ereignisensembles (Daten und Kontrollverteilungen) zu bekommen.

Daten				
	Skala $j = 5$	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
Ordnung q	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$
2	2.534 ± 0.008	3.783 ± 0.004	5.46 ± 0.02	7.77 ± 0.01
3	1.41 ± 0.01	2.92 ± 0.01	6.18 ± 0.02	12.02 ± 0.06
4	0.842 ± 0.002	2.45 ± 0.01	7.56 ± 0.02	21.223 ± 0.005

Zufallsverteilungen				
	Skala $j = 5$	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
Ordnung q	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$
2	2.524 ± 0.006	3.73 ± 0.01	5.380 ± 0.007	7.844 ± 0.007
3	1.41 ± 0.01	2.930 ± 0.001	6.042 ± 0.005	12.22 ± 0.05
4	0.805 ± 0.004	2.474 ± 0.002	7.43 ± 0.04	21.86 ± 0.06

Tabelle 5.2 Verteilungsbreiten der Gaußanpassungen an faktorielle Waveletmomente experimenteller Daten und der zugehörigen Kontrollverteilungen. Die entsprechenden Werte zeigen eine deutliche Übereinstimmung.

5.3 Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreiten

Die im vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Verteilungsbreiten können nun genutzt werden, um einen weitergehenden Vergleich der experimentellen Daten mit den in Kapitel 4 gewonnenen Ergebnissen zu ermöglichen. Insbesondere soll hier auf die unübersehbaren Gemeinsamkeiten der experimentell bestimmten faktoriellen Momente mit gleichverteilten Zufallsereignissen unterschiedlicher Multiplizität eingegangen werden.

In Abschnitt 4.2.1 war die funktionale Abhängigkeit der Verteilungsbreite von der Multiplizität bei gleichverteilten Ausgangsverteilungen bestimmt worden. In die dort gewonnenen Abbildungen kann nun je ein weiterer Datenpunkt bei einer Multiplizität von 291.8 eingetragen werden. Als Beispiel ist diese Abhängigkeit für die Ordnung $q = 3$ in Abbildung 5.9 dargestellt. Die ausgefüllten Punkte sind die aus den Simulationen erhaltenen Werte; der jeweils offene Punkt ist der Eintrag des experimentell gewonnenen Meßwerts. Die weiteren Darstellungen für die anderen Ordnungen sind, wie gewohnt, im Anhang abgebildet (Abbn. B.147–B.152). Allen gemeinsam ist, daß der jeweilige experimentelle Wert nahezu exakt auf der analytisch bekannten Funktion der Verteilungsbreite liegt.

Man erkennt anhand der sehr guten Übereinstimmung diesmal sogar quantitativ, daß die p_{\perp} -Fluktuationen in den experimentellen Ereignissen nicht über rein statistische Effekte hinausgehen. Um dies genauer einzugrenzen, wurden die Abweichungen der

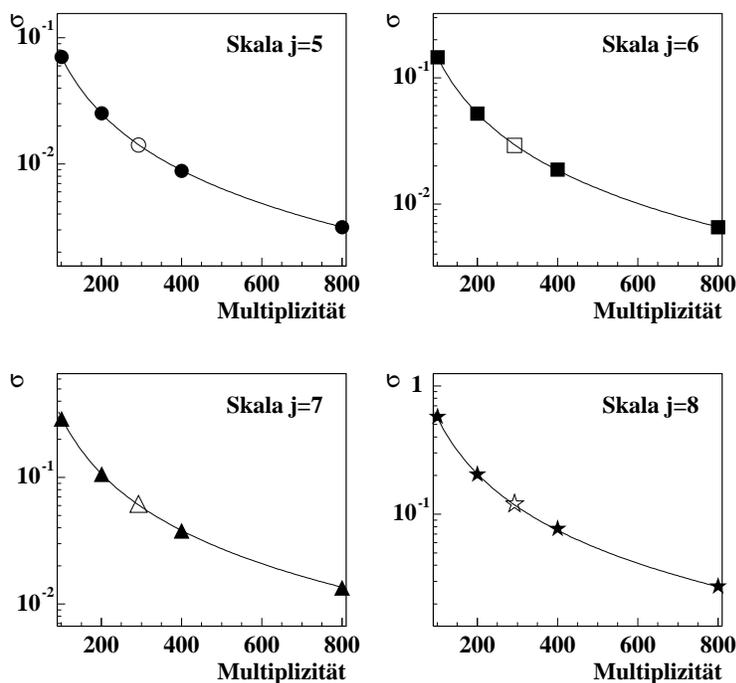


Abbildung 5.9 Anpassung von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$ an die Momente simulierter Verteilungen (ausgefüllte Punkte) der Ordnung $q = 3$. Der offene Punkt ist der nachträglich eingezeichnete, aus der Analyse der experimentellen Daten erhaltene Meßwert.

gemessenen Verteilungsbreiten von dem durch Gleichung 4.9/5.1,

$$\sigma_q(m) = \frac{a}{m^\lambda} = \frac{a}{m^{\frac{q}{2}}}, \quad (5.1)$$

gegebenen Wert bestimmt. Dabei wurde mit den aus den Simulationen ermittelten Parametern a (siehe Tab. 4.5) gerechnet. Die Abweichungen betragen im Mittel 3.5%. Neben zwei starken Ausreißern bei niedriger Multiplizität und hoher Ordnung ($q = 4, j = 7, m = 100$: 46.1% und $q = 4, j = 8, m = 200$: 21.5%) ergab sich die mittlere Abweichung der aus Simulationen bestimmten Verteilungsbreiten vom analytischen Ausdruck der Gleichung 5.1 zu 4.3%. Damit reiht sich die mittlere Abweichung des experimentellen Wertes anstandslos in die aus den Simulationen gewonnenen Werte ein.

Außerdem rechtfertigt dieses Ergebnis im Nachhinein, daß keine Untersuchungen gleichverteilter Simulationen mit einer um einen Mittelwert schwankenden Multiplizität vorgenommen wurden. Offensichtlich ist der dadurch entstehende Effekt viel zu gering, um anhand der eben beschriebenen Verteilungen bemerkt zu werden. Aus diesem Grund wurde auch darauf verzichtet, die Datenpunkte der Kontrollverteilungen mit in die Abbildungen B.138–B.140 einzubeziehen. Dies hätte nur zu einem Doppeleintrag an den jeweiligen Stellen ($m = 291.8$) geführt.

5.4 Sensitivität auf lokale dynamische Fluktuationen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde auf die starke Ähnlichkeit der Verteilungen der faktoriellen Waveletmomente mit simulierten gleichverteilten Ereignissen hingewiesen. Um eine Aussage über die Sensitivität der Methode bei der Suche nach lokalen dynamischen Fluktuationen machen zu können, wurde eine weitere Simulation, diesmal mit der Multiplizität der experimentellen Daten (292 Einträge), durchgeführt. Dabei wurden, wie in Abschnitt 4.2.3, $\frac{1}{15}$ bzw. $\frac{1}{31}$ der Einträge (was 9 bzw. 18 Einträgen entspricht) gemäß einer Gaußverteilung mit der Breite $\sigma = 10^{-2}$ an von Ereignis zu Ereignis wechselnder, beliebiger Stelle auf einem Untergrund aus den restlichen Einträgen plaziert.

Zusammen mit dem aus der Kontrollverteilung bekannten Wert für die Breiten der faktoriellen Waveletmomente ohne Signal, also mit 292 gleichverteilten Einträgen, war es so wieder möglich, die Abhängigkeit der Verteilungsbreiten von der Stärke des Signals darzustellen. Durch Eintrag des experimentellen Werts konnte so ein oberer Grenzwert für die in den Daten vorhandenen und mit der Analyse durch faktorielle Waveletmomente registrierbaren lokalen dynamischen Fluktuationen abgeschätzt werden.

Die Auswertung wurde exemplarisch an den faktoriellen Waveletmomenten 3. Ordnung der Skala $j = 6$ durchgeführt. In Abbildung 5.10 sind die drei Simulationspunkte als schwarze Quadrate eingezeichnet. Ein Polynom 2. Grades approximiert diese Punkte (dünne Linie). Anhand der Fehler auf die Verteilungsbreiten der simulierten Verteilungen wurde um die Approximation ein Band der Breite 2σ (dicke Linien) gelegt, was den Bereich markiert, der maximal durch die Interpolationskurve mit dem ihr anhaftenden Fehler abgedeckt wird. Anhand des entsprechenden Datenpunktes (Ordnung $q = 3$, Skala $j = 6$, Breite der Verteilung der faktoriellen Waveletmomente: 2.92 ± 0.01 ; siehe Tab. 5.2) wurde eine obere Grenze für die mit den Daten verträglichen lokalen dynamischen Fluktuationen bestimmt. Fluktuationen mit einem größeren Signal-zu-Rausch-Verhältnis werden von den Daten ausgeschlossen, da sie zu einer größeren Verteilungsbreite der Waveletmomente führen müßten. Fluktuationen mit einer kleineren Stärke sind hingegen als Teil der beobachteten Verteilungsbreite nicht auszuschließen. Der auf dem 3σ -Niveau ausgeschlossene Bereich für die Breite der Verteilung der Waveletmomente ist in Abbildung 5.10 grau unterlegt dargestellt. Für eine Signalstärke der anomalen Fluktuationen von mehr als 5 Einträgen (bei einer Signalbreite von 10^{-2}) ist die in der Simulation beobachtete Breite nicht mehr mit dieser oberen Grenze verträglich. Entsprechende Fluktuationen sind daher durch die Daten ausgeschlossen.

Diese Aussage wurde allein aus der Verteilungsbreite der Ordnung $q = 3$ auf der Skala $j = 6$ gewonnen. Die Simulationen zeigen, daß Momente höherer Ordnung eine noch geringfügig bessere Empfindlichkeit auf die untersuchten Vielteilchenkorrelationen zeigen sollten, wobei bei der gegebenen Multiplizität nur eine Untersuchung von Momenten bis einschließlich 4. Ordnung sinnvoll ist.

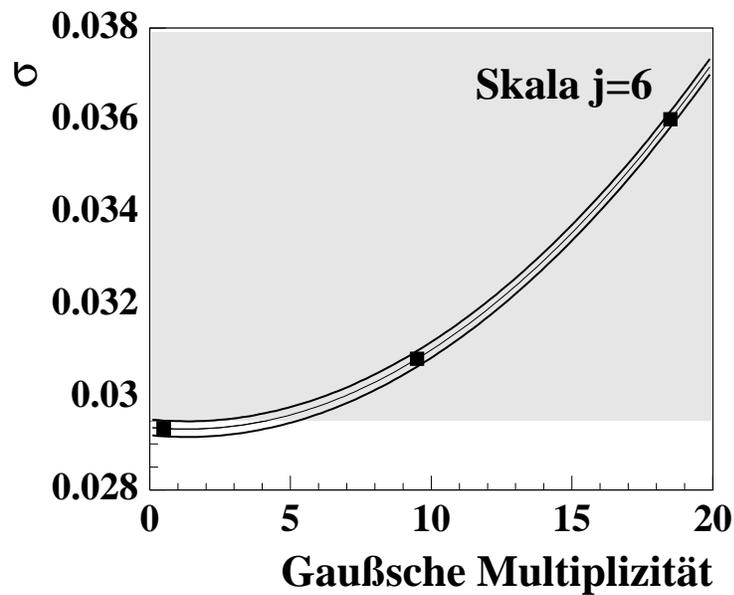


Abbildung 5.10 Sensitivität der faktoriellen Waveletmomente auf Gaußsche Signale, die auf einem Untergrund sitzen. Die schwarzen Quadrate sind die aus Simulationen mit den Daten entsprechender Multiplizität gewonnen. Der graue Bereich zeigt an, inwieweit der experimentell erhaltene Wert die jeweiligen Simulationen ausschließen kann. Demnach sind in den Daten maximal 5 gaußförmig korrelierte Einträge möglich.

Die Skala der hier untersuchten anomalen Fluktuationen liegt bei 10^{-2} . Innerhalb des dadurch gegebenen Fensters werden statistisch etwa 10 Teilchen erwartet (FWHM von 0.023). Das tatsächliche Signal-zu-Rausch-Verhältnis liegt also an der (unbekannten) Signalposition bei etwa 1:2. Das liegt etwa in der Größenordnung, in der in DCC-Modellen das Signal zusätzlich produzierter Teilchen bei kleinen Transversalimpulsen erwartet wird. Im Vergleich mit solchen Modellen könnte die hier vorgestellte Methode daher auch zur Charakterisierung der DCC-Produktion (bzw. ihrer Abwesenheit) verwendet werden.

6 Diskussion

Im vorangegangenen Kapitel wurde deutlich, daß in den experimentellen Daten mit Hilfe der angewandten Methoden keine lokalen nicht-statistischen Fluktuationen nachzuweisen waren. Trotzdem bleibt die Frage, ob dies eine tatsächliche Eigenschaft der Daten ist, oder ob das angewandte Verfahren dem Problem unzureichend angepaßt war.

6.1 Theoretische Überlegungen

Die Entscheidung, Datenauswertung mit Hilfe von Waveletmomenten zu betreiben, beruhte auf zwei grundlegenden Überlegungen: Nachdem die Einzelereignisanalyse des Mittelwertes von p_{\perp} [6] bei den gegebenen experimentellen Bedingungen globale nicht-statistische Fluktuationen mit hoher Wahrscheinlichkeit ausschließen konnte, blieb die Frage offen, ob es nicht trotzdem skalenabhängige lokale Fluktuationen in p_{\perp} geben könnte, die auf die Verteilung des Mittelwertes keinen Einfluß haben. Somit war die Idee einer Multiskalenanalyse geboren. Die Vermutung, im p_{\perp} -Spektrum korrelierte Teilchen finden zu können, wurde durch theoretische Ansätze [25] über die mögliche Bildung von DCCs gestützt, was zusätzlich eine Korrelationsanalyse notwendig machte. Durch die unbekannte Größe der vermuteten Pionen-Cluster, wurde außerdem auch in diesem Zusammenhang auf die Notwendigkeit einer Vielskalenanalyse, insbesondere aber auf die Möglichkeiten der Wavelettransformation hingewiesen [26, 27, 28]. Eine sinnvolle Symbiose schienen daher Momente von wavelettransformierten p_{\perp} -Spektren zu sein, da somit den Anforderungen nach einer Korrelations- wie auch nach einer Multiskalenanalyse in p_{\perp} Rechnung getragen werden konnte.

Als nächstes mußte eine Entscheidung über die Art des zu verwendenden Wavelets getroffen werden. Sie fiel zu Gunsten des einfachen Haar-Wavelets aus. Möglicherweise ist dieses Wavelet dem Problem nicht ausreichend angepaßt, doch bestanden keine zwingenden Gründe, einen anderen Satz von Wavelets zu benutzen. Das Haar-Wavelet zeichnet sich durch seine Einfachheit aus, und schien daher angebracht, um zu Beginn

der Analyse nicht gleich mit unanschaulichen Funktionen hantieren zu müssen. Man kann somit die einzelnen Analyseschritte noch relativ einfach nachvollziehen. Außerdem wurde schnell klar, daß eine mehrdimensionale Erweiterung dieser Transformation — im Gegensatz zu anderen Wavelets — keine nennenswerten Schwierigkeiten machen würde. Erwähnenswert ist noch, daß die Suche nach dem für eine Anwendung am besten geeigneten Wavelet mittlerweile von den Theoretikern als Problem erkannt wurde und in Bearbeitung ist [29].

Die Verwendung von Waveletmomenten machte eine intelligente Normierung nötig. Üblicherweise werden Momente nur für eine Skala berechnet, so wie auch die Daten nur in einer Skala vorliegen. Mit Hilfe der Wavelets ist aber automatisch eine Vielskalendarstellung von Verteilungen geschaffen worden. Will man nun die Momente verschiedener Skalen untereinander vergleichen, ist man ohne eine passende Normierung hilflos. Zusätzlich muß die Normierung dem jeweiligen konkreten Problem angepaßt sein. In unserem Fall, in dem mit flachtransformierten Verteilungen gearbeitet wurde, wurde dementsprechend auf die mittlere Multiplizität in einem Bin der betreffenden Skala normiert. Daß diese Normierung die angesprochenen Forderungen erfüllte, zeigte sich in Kapitel 4, wo anhand von gaußverteilten Simulationen die systematische Änderung der Breite der Verteilungen der Waveletmomente bei größer werdender Skala erkannt wurde, was einen Interkalenvergleich der Momente ermöglichte.

Durch die zu erwartende Multiplizität von einigen 100 Einträgen in einer Verteilung wurde die faktorielle Berechnung der Momente unabdingbar. Nur sie ermöglichte eine konsistente Beschreibungsgrundlage, die insbesondere für Mehrteilchenkorrelationen wichtig ist, da dort die Abweichungen von den mathematisch einfacheren nicht-faktoriell berechneten Momenten schnell anwachsen.

6.2 Praktische Erfahrungen

Die im vorausgegangenen Abschnitt beschriebenen Überlegungen machten umfangreiche Simulationen nötig, um für die erstmalige Anwendung dieser Methode einen Satz von Vergleichsfällen parat zu haben. Außerdem wurden so schon im Vorfeld die Vor- und Nachteile der einzelnen Analyseschritte sichtbar, und die Software konnte Schritt für Schritt hin zu einer fehlerfreien Bearbeitung des Problems entwickelt werden.

Um es vorwegzunehmen: Die Methode ist dem Problem an sich gut angepaßt, die Software arbeitete einwandfrei, trotzdem war die Auswertung von einzelnen Ereignissen mit Hilfe der faktoriellen Waveletmomente für unseren Fall von Pb+Pb-Stößen bei 158 GeV/Nukleon nicht sehr erfolgreich. Die Ursache lag in der zu geringen Multiplizität der Einzelverteilungen, die nach allen Schnitten bei nur noch etwa 300 Einträgen pro Ereignis lag. Die Ursache ist aber nicht in vielleicht zu starken Cuts zu suchen; auch die volle Multiplizität von über 1000 Teilchen hätte nicht ausgereicht, diese Analyse

gewinnbringend durchzuführen.

Will man eine n -Teilchenkorrelation nachweisen, muß man — wie in Abschnitt 3.2.4 erläutert — die Momente der Ordnung n anschauen. Dies macht für verschiedene Skalen natürlich nur dann Sinn, wenn es dort jeweils (möglicherweise auch nur einzelne) Bins mit einer solchen Anzahl von Einträgen gibt. In unserem Fall allerdings wurden die etwa 300 Einträge auf 512 Bins verteilt, was die großen Skalen zur Auswertung von Korrelationseffekten praktisch nicht benutzbar machte. Eine Möglichkeit wäre, die Anzahl der verwendeten Skalen einzuschränken, doch das steht im Widerspruch zur Forderung einer Multiskalenanalyse mit möglichst vielen Skalen. Die Verwendung der Ordnungen 2–4 beruhte also ausschließlich auf der maximalen Ausnutzung des vorhandenen Datenmaterials. Prinzipiell wäre es dagegen wünschenswert, die Korrelationsanalyse auch für höhere Ordnungen durchzuführen, um eben sensitiv für weitere Mehrteilchenkorrelationen (und nicht nur solche der Ordnung 2, 3 und 4) zu werden. Außerdem hatte sich anhand der Verteilungsbreiten faktorieller Waveletmomente von gaußschen Signalen auf einem Untergrund gezeigt, daß die Sensitivität mit größer werdender Ordnung immer besser wird.

Die Arbeit mit Simulationen brachte noch einen weiteren Nachteil der verwendeten Methode ans Licht: Eine Einzelereignisanalyse ist mit dem beschriebenen Verfahren nur eingeschränkt möglich. Das liegt daran, daß die faktoriellen Waveletmomente von vielen Einzelereignissen wiederum selbst eine mehr oder weniger breite Verteilung bilden. Einzelne Klassen von Ereignissen produzieren aber keine an verschiedenen Orten lokalisierten Momentverteilungen, sondern die Verteilungsform ändert sich bei nur geringer Veränderung ihrer Breite. Dies verlagert aber das ursprüngliche Problem nur an eine andere Stelle. Wollte man zu Beginn von der inklusiven Verteilung einer physikalischen Observablen abweichende Verteilungen erfassen, muß man nun von der Norm abweichende Verteilungen der Waveletmomente anhand ihrer Form erkennen. Es stellt sich also erneut das Problem, einer Verteilungsform eine oder mehrere Maßzahlen zuzuordnen, um sie zu charakterisieren. Genau an dieser Stelle war aber bei der vorherigen Iteration die Entscheidung für die faktoriellen Waveletmomente gefallen. Außerdem zeigt sich, daß die mühsam eingeführten Maßzahlen für die Verteilungsform der Momente auf geringe Änderungen der Form der Eingangsverteilung nicht ausreichend reagieren.

Insgesamt läßt sich also feststellen, daß der verwendeten Analysemethode eine fundierte Idee zugrunde lag. Die Praxis und insbesondere die anhand von Simulationen gewonnene Erfahrung haben jedoch gezeigt, daß die in unserem Experiment vorkommenden Multiplizitäten an der unteren Grenze für eine gewinnbringende Durchführung einer Waveletanalyse liegen.

Im Rahmen der erwähnten begrenzten Möglichkeiten der Analyse unter Zuhilfenahme von faktoriellen Waveletmomenten kommt man also zu dem Schluß, daß es in den betrachteten Daten von 158 GeV/Nukleon Pb+Pb-Stößen im Rahmen der statistischen Fehler auf keiner Skala signifikante lokale dynamische Fluktuationen in p_{\perp} -Spektren gibt. Diese Aussage beruht auf dem Vergleich der experimentell gewonnenen Daten mit Si-

mulationen mit rein zufällig verteilten Einträgen. Dieses Ergebnis ist in Anbetracht der Untersuchungen des Verhaltens von Φ_{p_T} (siehe Abb. 6.1 und [6]) nicht sehr überraschend. Schon dort hatte sich gezeigt, daß in Blei-Blei-Kollisionen nur eine relativ geringe globale Korrelation in p_{\perp} vorhanden ist. Insofern stellt das mit den faktoriellen Waveletmomenten erhaltene Ergebnis bezüglich lokaler Fluktuationen eine Bestätigung dieser Studie dar.

Durch einen weiteren Vergleich mit simulierten Verteilungen konnte die obere Grenze für das Auftreten lokaler nicht-statistischer Fluktuationen auf 5 Einträge pro Ereignis begrenzt werden. Dies entspricht in etwa der von DCC-Modellen erwarteten Korrelationsstärke.

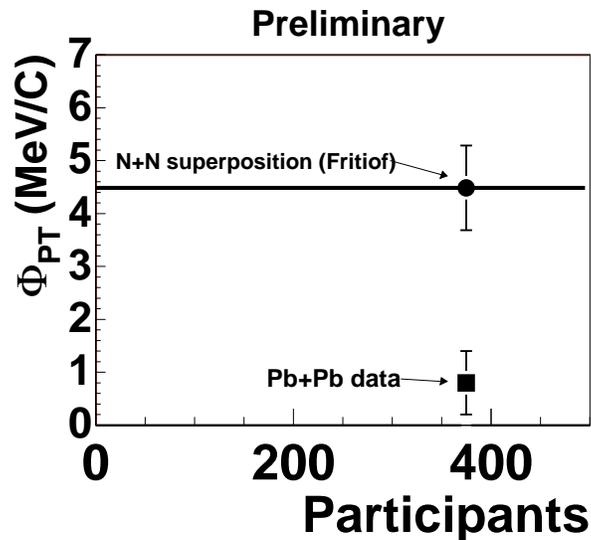


Abbildung 6.1 Messung der Korrelationsstärke mit Φ_{p_T} . Blei-Blei-Ereignisse weisen demnach in p_{\perp} eine bedeutend schwächere Korrelation auf, als dies durch eine Überlagerung von Proton-Proton-Stößen zu erwarten wäre.

6.3 Ausblick

Trotz der oben beschriebenen Mängel soll im Hinblick auf zukünftige Experimente in der Physik hochenergetischer Schwerionenkollisionen auf die Chancen dieser Analyse hingewiesen werden.

Bei den an den neuen Beschleunigern RHIC (engl.: *Relativistic Heavy Ion Collider*) in Brookhaven/NY und LHC (engl.: *Large Hadron Collider*) am CERN/Schweiz in weni-

gen Jahren durchgeführten Experimenten wird im Vergleich zu heutigen Experimenten eine ungleich höhere Teilchenmultiplizität erzeugt werden. Für die Multiplizität der geladenen Teilchen im CERN-Experiment ALICE wird z. B. ein Wert von $dN_{ch}/dy = 8000$ erwartet. Damit wäre die Grundvoraussetzung für eine gewinnbringende Analyse unter Benutzung der faktoriellen Waveletmomente gegeben. Eventuell kann sogar die Anzahl der verwendeten Skalen erweitert werden, und die Berechnung von Momenten mit einer höheren Ordnung als 4 kann angegangen werden. Sind die Auswirkungen einer höheren Multiplizität erst einmal hinreichend bekannt, kann zu anderen, dem Problem besser angepaßten Wavelets übergegangen werden. Auch weitere Observablen stehen zur Untersuchung bereit. Schließlich bleibt auch noch der Schritt zu mehrdimensionalen Wavelettransformationen offen, wobei die Erfassung des kompletten kinematischen Phasenraums (also (p_{\perp}, y) oder gar (p_x, p_y, p_z)) der nächste logische Schritt wäre. Allerdings sind die zu einem sinnvollen Arbeiten notwendigen Multiplizitäten wohl auch dafür vorerst noch nicht ausreichend.

A Gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$) mit Untergrund

Die schmalen Verteilungen mit $\sigma_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}$ sind offensichtlich (siehe Abb.A.1) ein eher unrealistisches Beispiel, wenn es darum geht, experimentelle Verteilungen zu simulieren und sollen deshalb nur kurz besprochen werden. Dennoch kann man besonders an

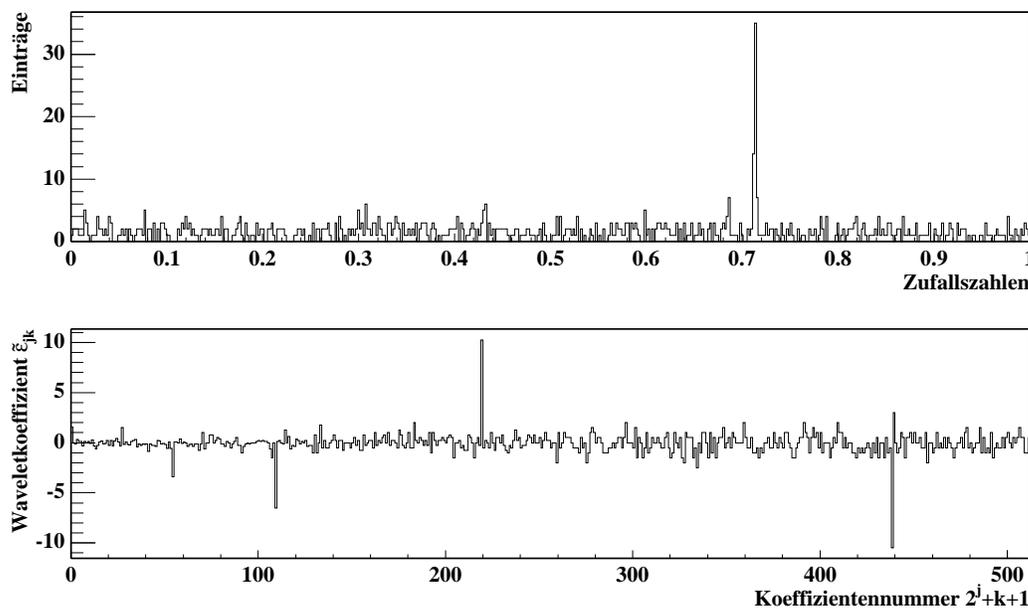


Abbildung A.1 Beispiel einer Verteilung von 50 gaußverteilten und 750 gleichverteilten Einträgen. Der Gaußsche Anteil hat dabei eine Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$. Die daraus gewonnenen Waveletkoeffizienten sind im unteren Bildteil abgebildet.

ihnen noch einmal die schon bei Gaußschen Verteilungen gesehenen Eigenschaften wiedererkennen. Außerdem zeigen sich auch hier schon die Auswirkungen, die sich ergeben, wenn die Multiplizität im Gaußschen Signal abnimmt. Die Abbildungen der sonstigen Verteilungen sind, wie üblich, dem weiteren Anhang zu entnehmen (Abbn. B.94–B.109).

In der Verteilung der Waveletkoeffizienten ist die Stelle des Peaks jeweils deutlich zu erkennen. Je mehr Einträge in dem Peak der Ausgangsverteilung liegen, bei desto geringerer Skala j gehen die zugehörigen Waveletkoeffizienten im darunterliegenden Rauschen unter. Bei der Skala j , bei der der Koeffizient in die Größenordnung des Rauschens gelangt, befindet sich das Maximum der zugehörigen faktoriellen Waveletmomente aller Ordnungen q auch wieder nahezu bei Null. Insbesondere gibt es dann jeweils nur ein Maximum. Bei allen größeren Skalen — also bei schmalerer Unterteilung des Definitionsintervalls — ist zusätzlich ein Maximum an einer von Null verschiedenen Stelle zu finden (bei ungerader Ordnung natürlich zwei symmetrisch angeordnete Maxima). Diese Maxima sind, wenn sie nach Obigem überhaupt zu erkennen sind, mindestens genauso stark populiert, wie das verbleibende Maximum bei Null.

Bei den Momenten 2. Ordnung sind in den Fällen, in denen 50 bzw. 100 Einträge in der Gaußverteilung zu finden waren, außerdem bei einigen Skalen Nebenmaxima in der Mitte der Momentverteilungen zu erkennen. Rutscht das von Null verschiedene Maximum allerdings bei kleiner werdender Skala gegen Null, gehen diese Nebenmaxima in den breiten Ausläufern des Hauptmaximums unter. Bei niedrigerer Populierung des Gaußschen Anteils der Ausgangsverteilungen sind die Ausläufer der Waveletmomente bei allen Skalen so breit, daß mögliche Nebenmaxima nicht zu erkennen sind. Bei nur 10 Einträgen ist von Beginn an (größte Skala j) nur ein breites Maximum zu erkennen.

Zeigen die faktoriellen Waveletmomente 3. Ordnung bei einem großen Signal-zu-Rausch-Verhältnis zumindest bei großen Skalen noch deutlich höhere von Null verschiedene Maxima als die schon bekannte Nullüberhöhung, bleibt davon bei nur gering ausgeprägtem Signal oder zu niedriger Skala nur eine verbreiterte Verteilung mit einem überhöhten Wert bei Null übrig.

In der 4. Ordnung setzt dieses Verhalten, nur noch ein Maximum bei Null und eine breite Verteilung zu haben, zwar immer genau bei der gleichen Skala j wie bei der 2. oder 3. Ordnung ein, die Maxima bei größerer Skala sind aber nicht so stark ausgeprägt. Das liegt daran, daß sich die Anzahl der Paare von Einträgen in einem Bin quadratisch zu der Anzahl der 4-Tupel in demselben Bin verhält.

Abschließend läßt sich zu diesen Ausgangsverteilungen mit einem sehr schmalen Signal auf einem Rauschuntergrund sagen, daß die genannten Effekte am deutlichsten bei niedriger Ordnung q , großer Skala j und hoher Population des Signals zu erkennen sind. Ein zu kleines Signal, obwohl es mit dem Auge noch sehr gut wahrzunehmen ist, führt nur zu einer sehr geringen Verbreiterung der Momente hoher Skala.

B Graphische Darstellungen und Tabellen

B.1 Gleichverteilte Simulationen unterschiedlicher Multiplizität

B.1.1 Faktorielle Waveletmomente

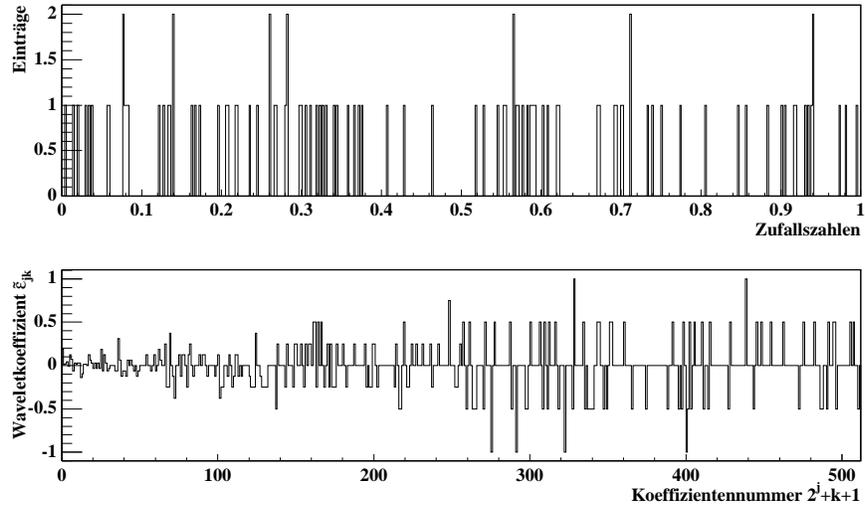


Abbildung B.1 Ereignis mit 100 zufälligen Einträgen und dessen Waveletkoeffizienten.

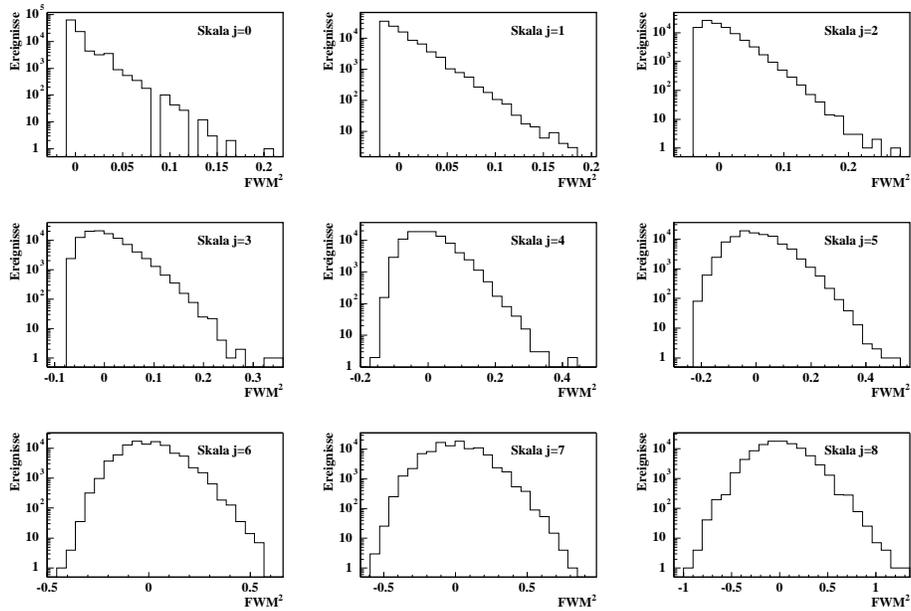


Abbildung B.2 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung (100 zufällige Einträge).

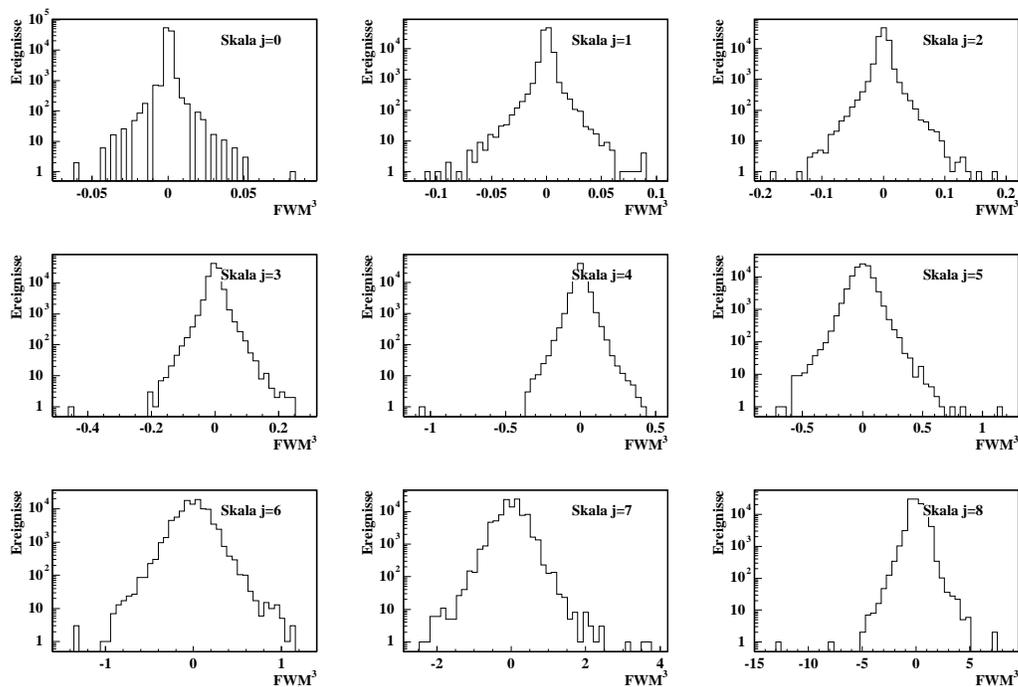


Abbildung B.3 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung (100 zufällige Einträge).

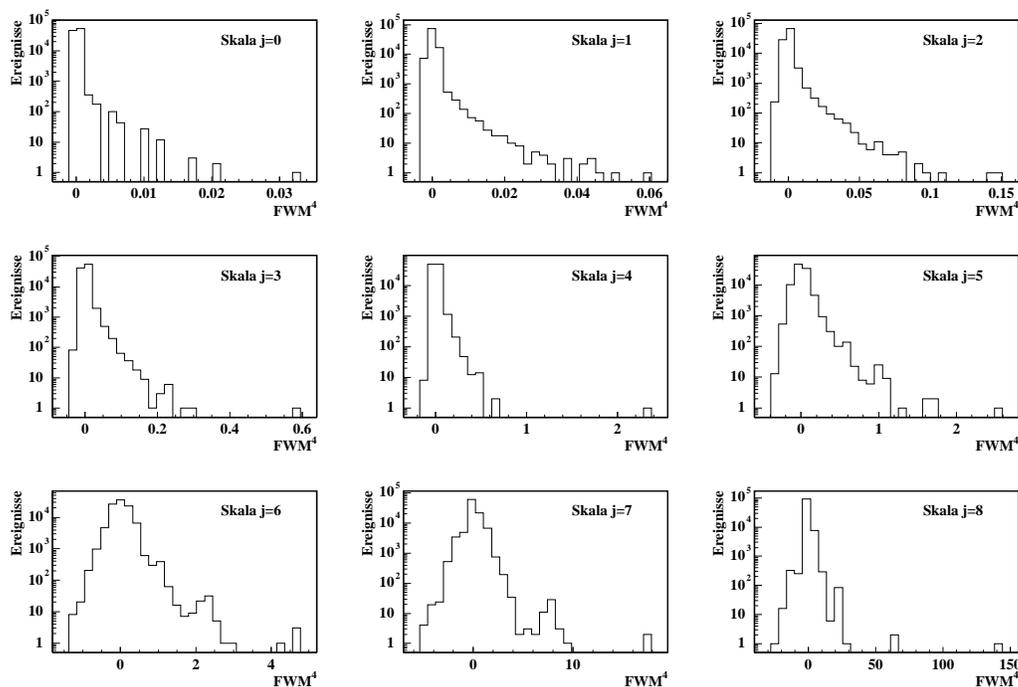


Abbildung B.4 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung (100 zufällige Einträge).

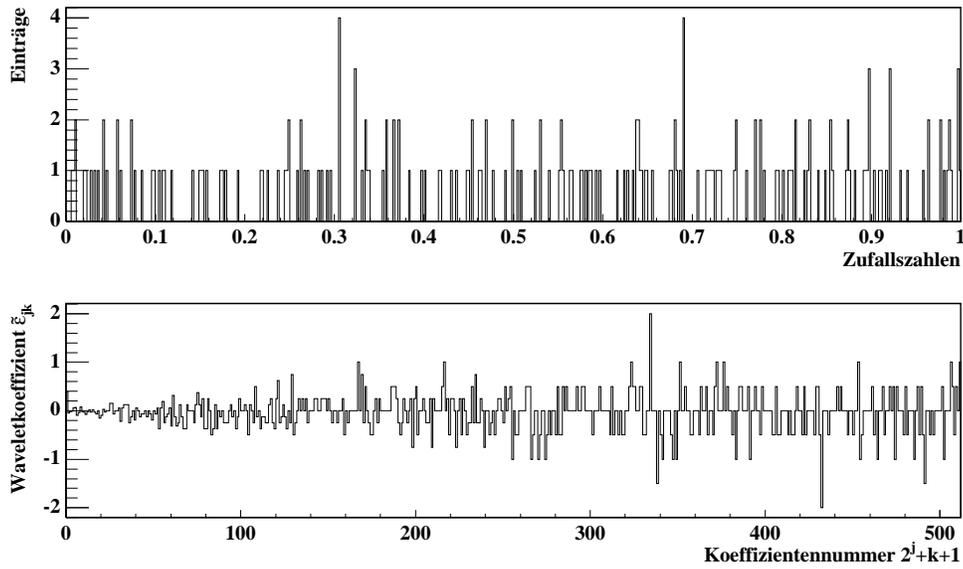


Abbildung B.5 Ereignis mit 200 zufälligen Einträgen und dessen Waveletkoeffizienten.

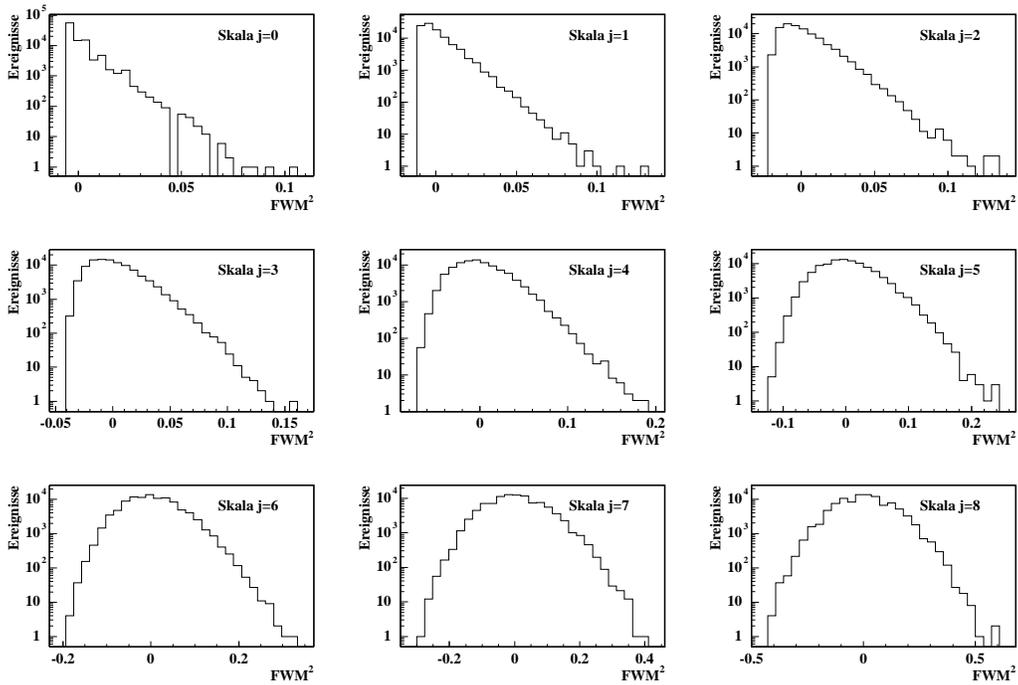


Abbildung B.6 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung (200 zufällige Einträge).

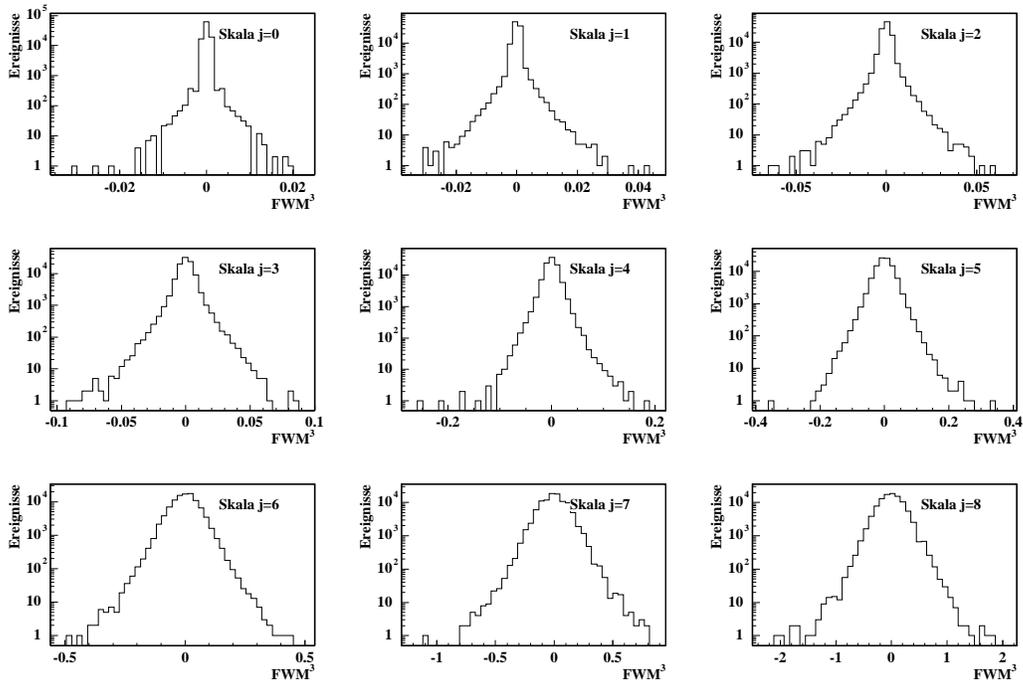


Abbildung B.7 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung (200 zufällige Einträge).

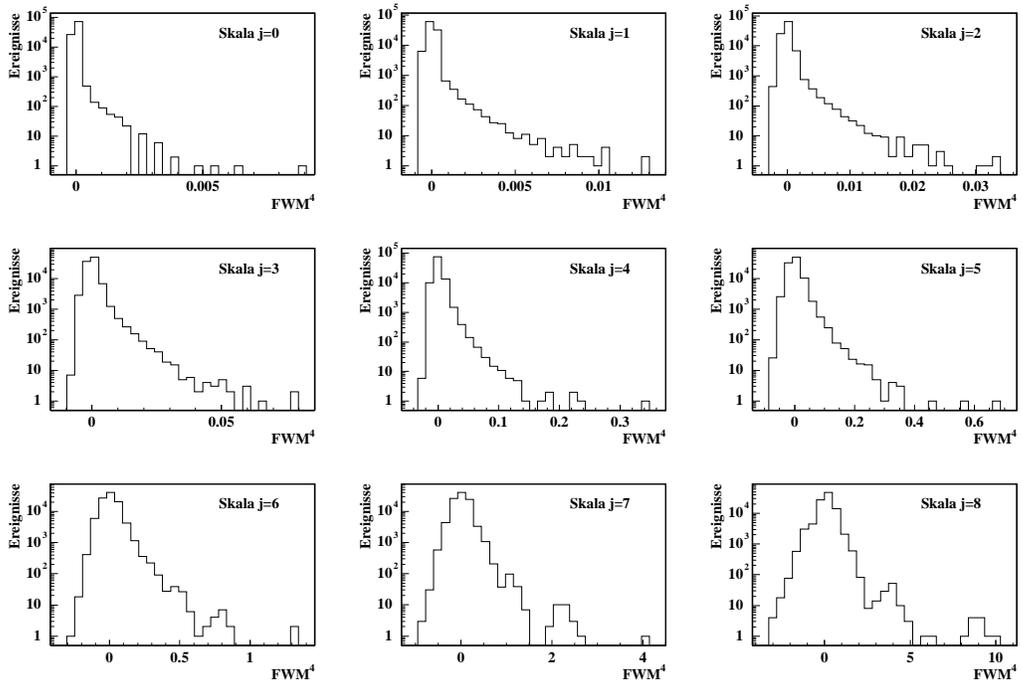


Abbildung B.8 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung (200 zufällige Einträge).

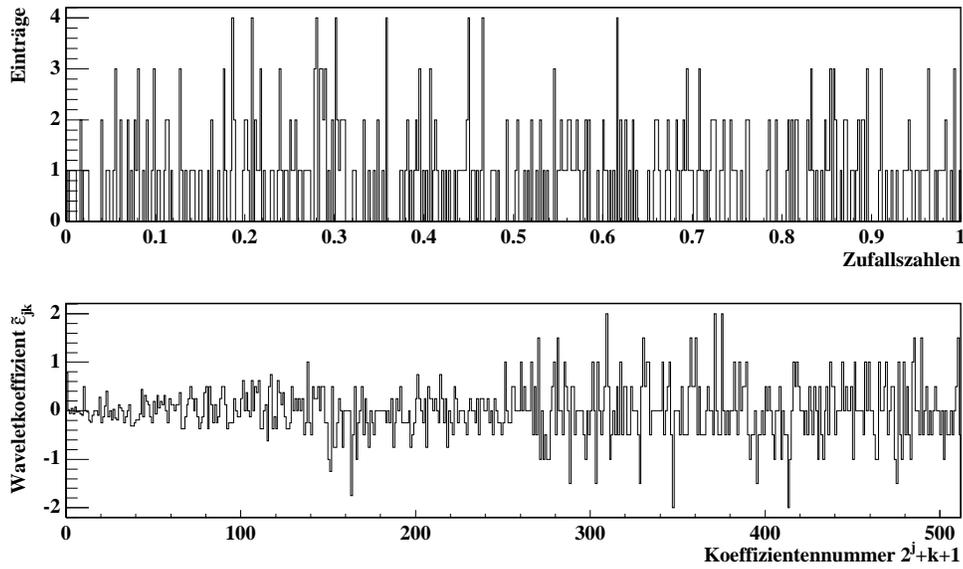


Abbildung B.9 Ereignis mit 400 zufälligen Einträgen und dessen Waveletkoeffizienten.

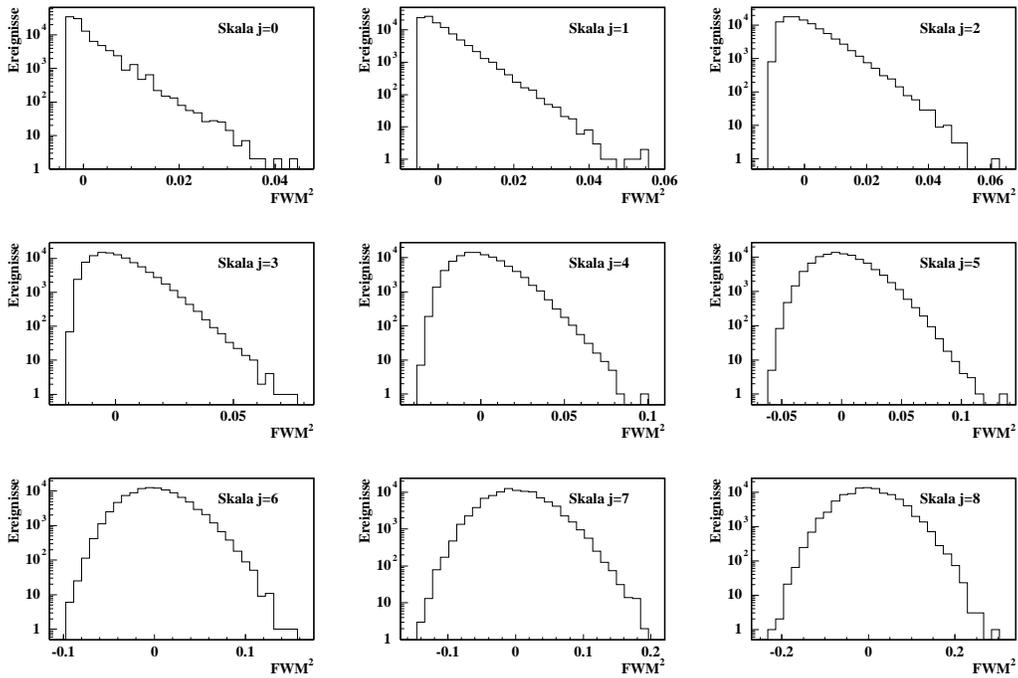


Abbildung B.10 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung (400 zufällige Einträge).

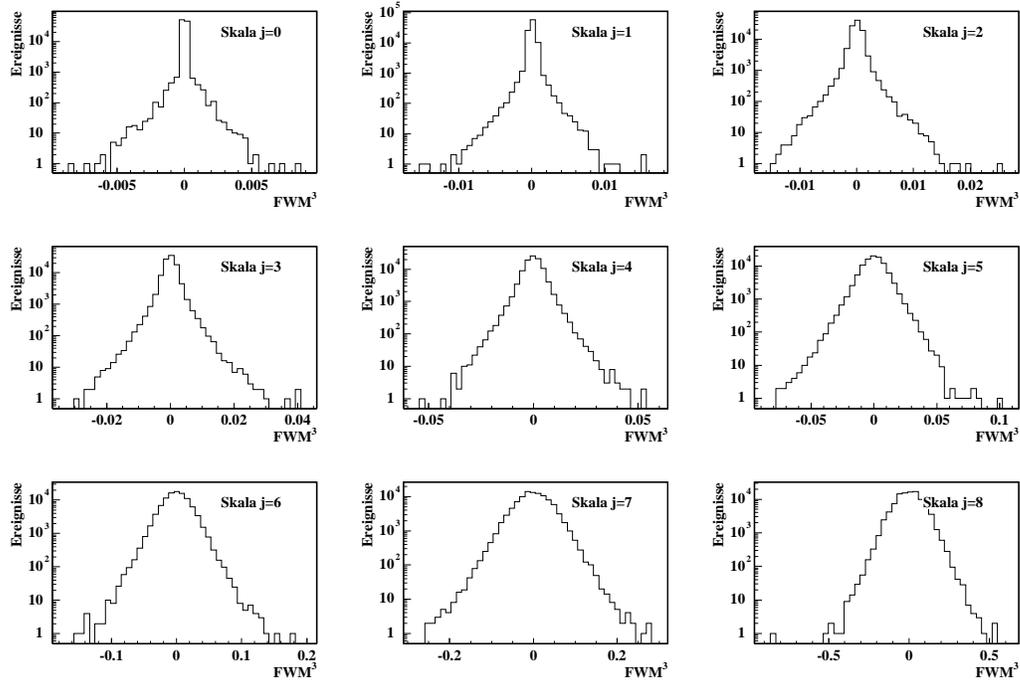


Abbildung B.11 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung (400 zufällige Einträge).

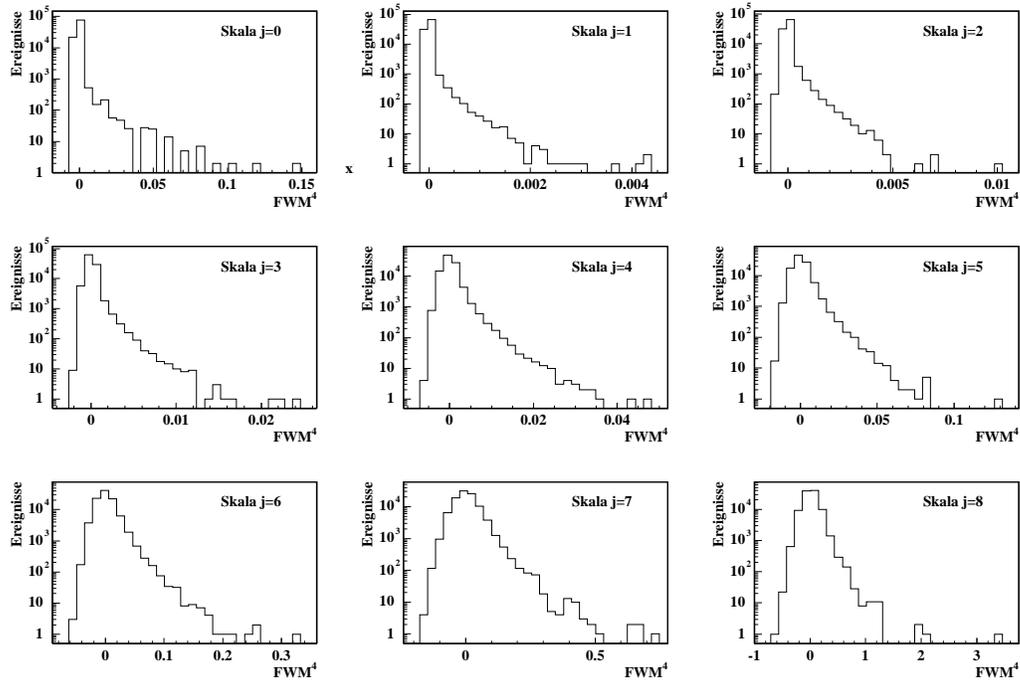


Abbildung B.12 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung (400 zufällige Einträge).

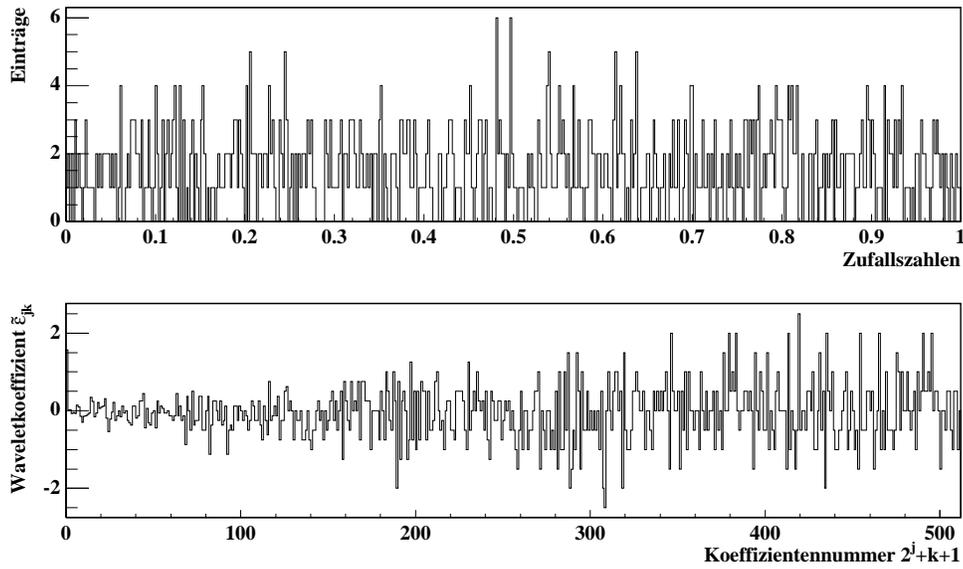


Abbildung B.13 Ereignis mit 800 zufälligen Einträgen und dessen Waveletkoeffizienten.

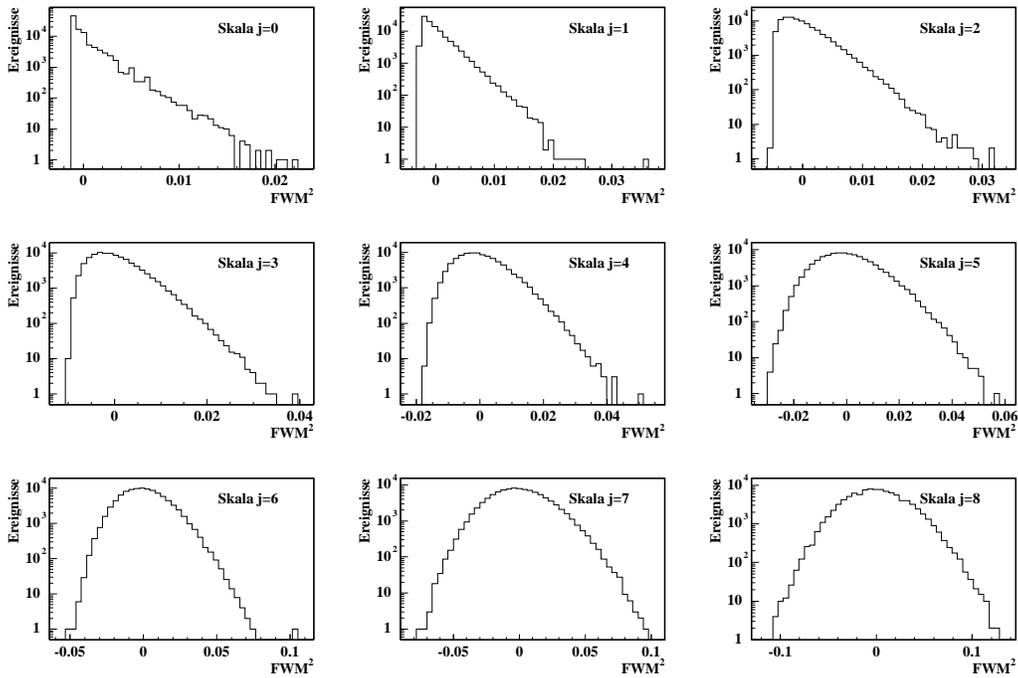


Abbildung B.14 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung (800 zufällige Einträge).

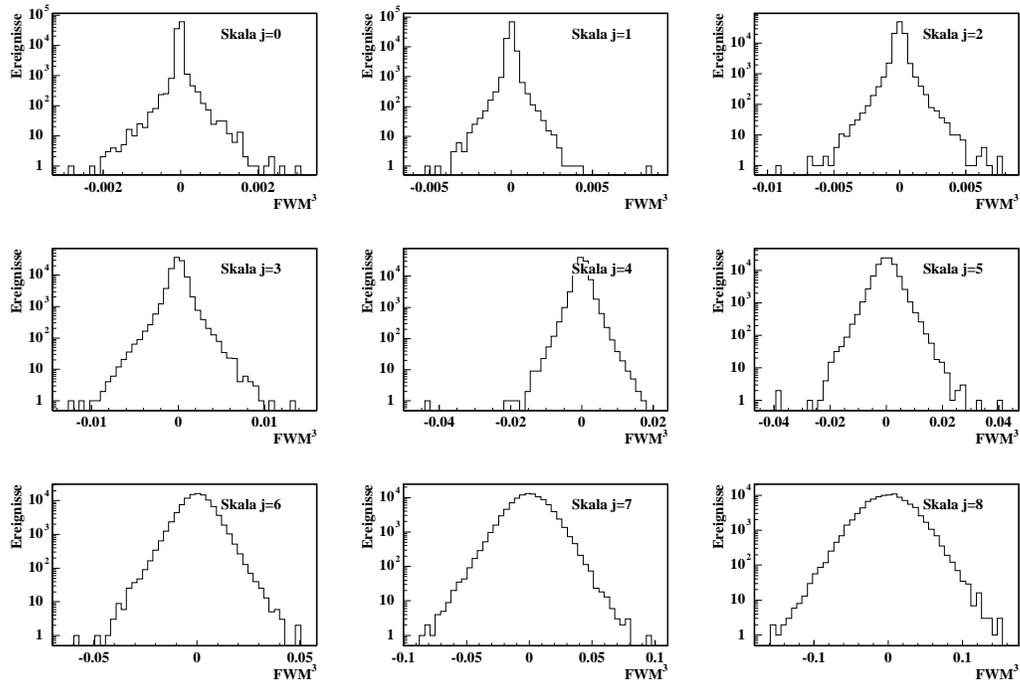


Abbildung B.15 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung (800 zufällige Einträge).

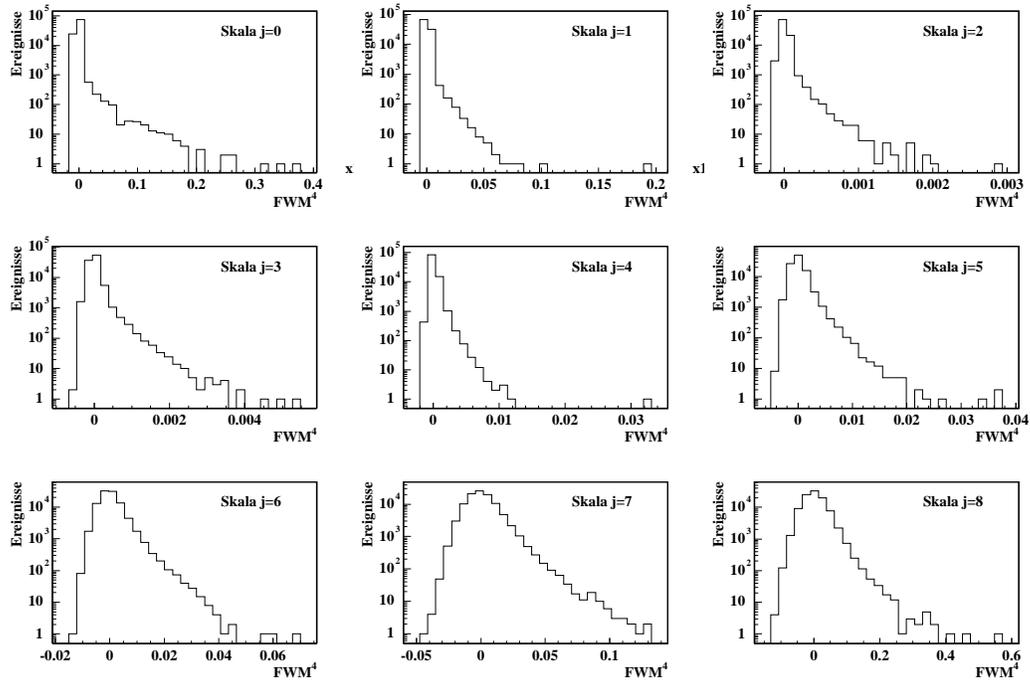


Abbildung B.16 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung (800 zufällige Einträge).

B.1.2 Gaußanpassungen

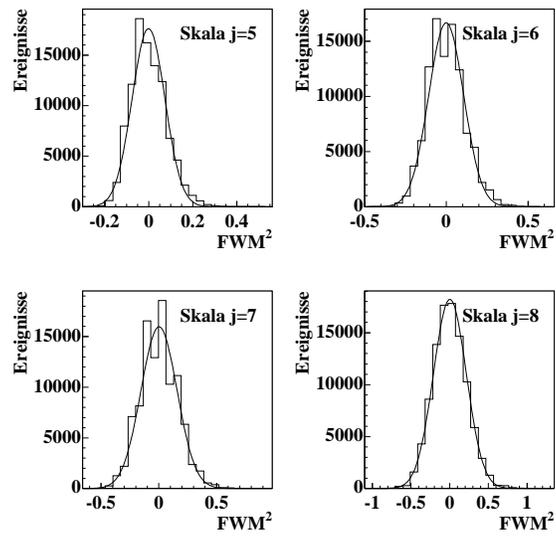


Abbildung B.17 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 100 Einträgen.

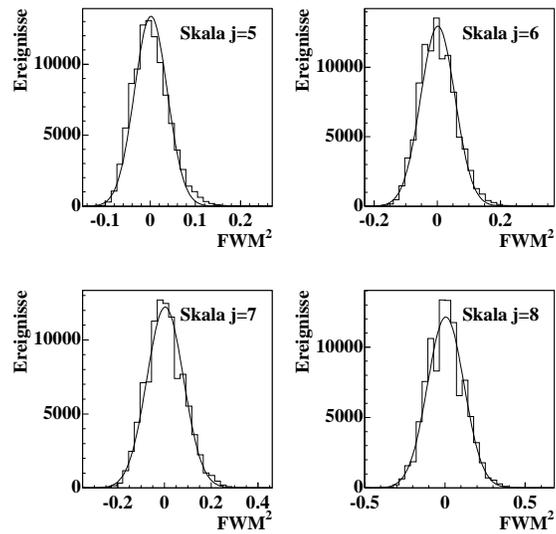


Abbildung B.18 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 200 Einträgen.

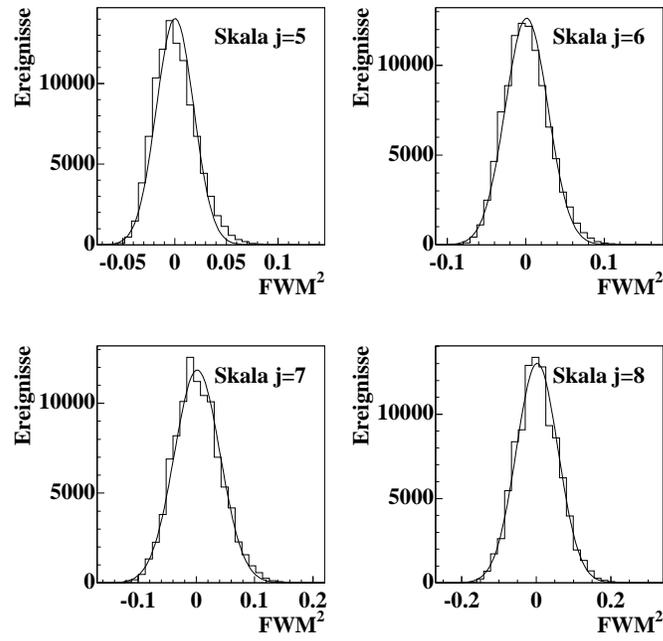


Abbildung B.19 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 400 Einträgen.

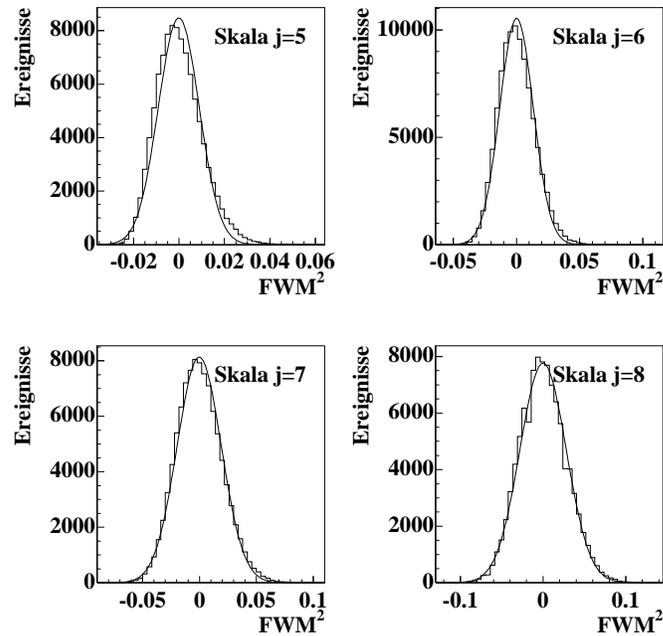


Abbildung B.20 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 800 Einträgen.

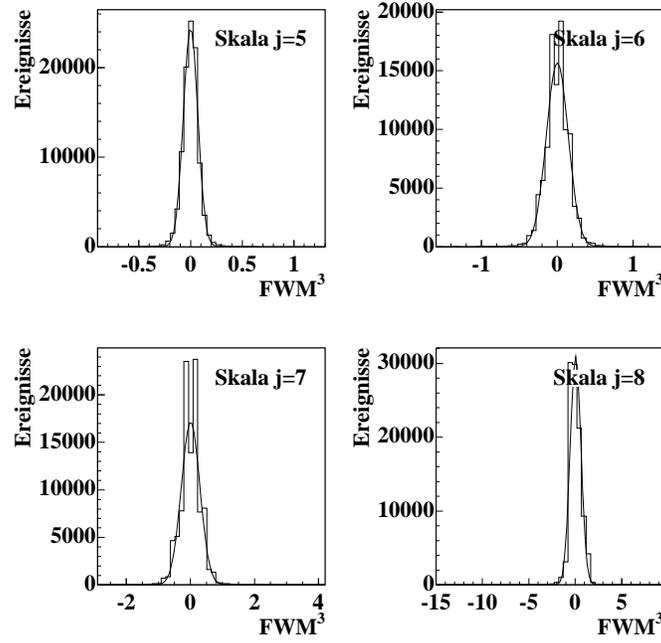


Abbildung B.21 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 100 Einträgen.

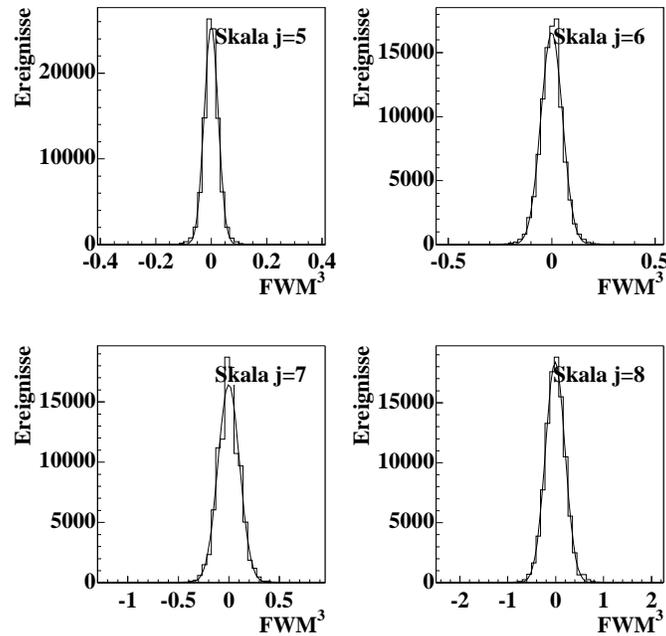


Abbildung B.22 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 200 Einträgen.

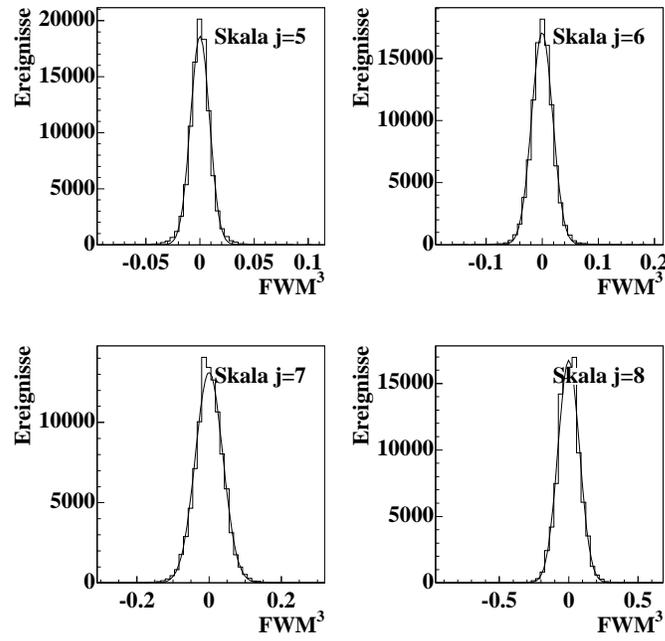


Abbildung B.23 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 400 Einträgen.

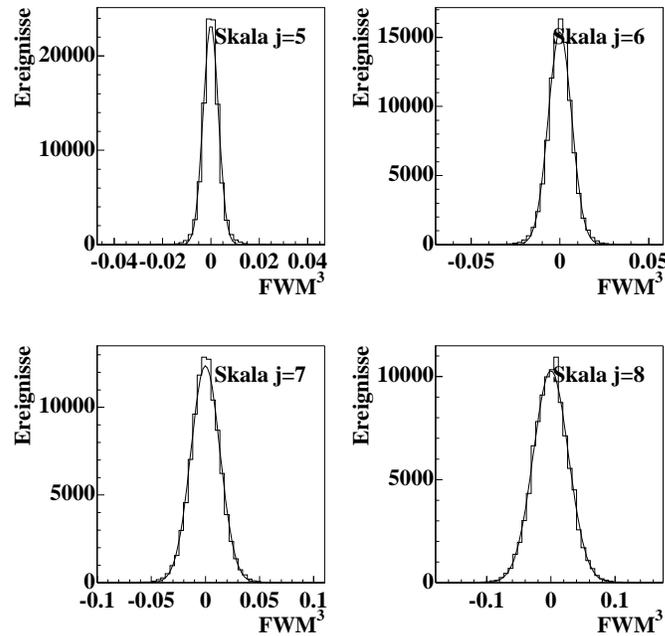


Abbildung B.24 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 800 Einträgen.

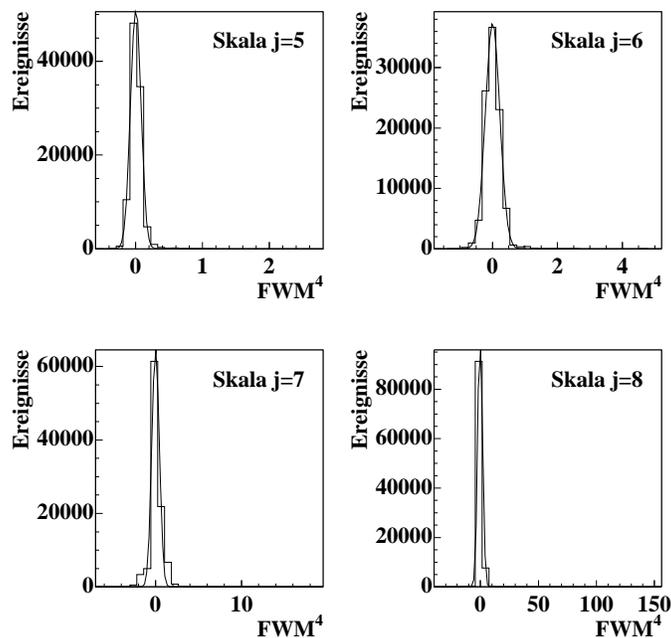


Abbildung B.25 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 100 Einträgen.

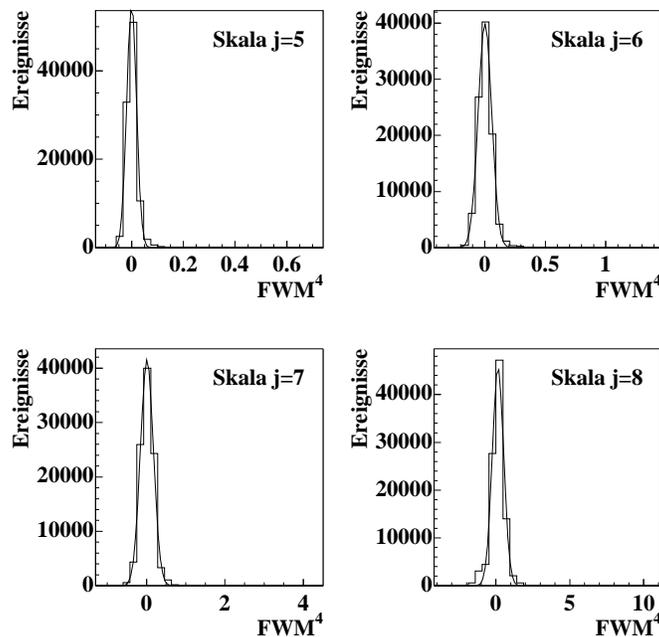


Abbildung B.26 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 200 Einträgen.

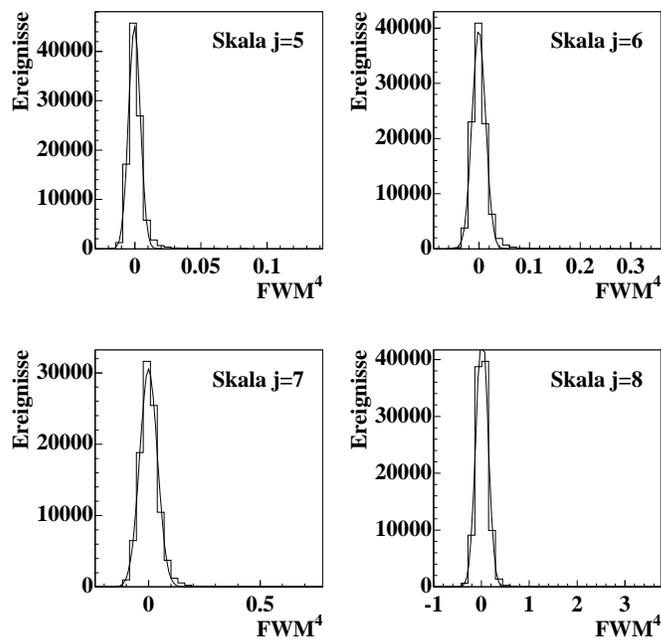


Abbildung B.27 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 400 Einträgen.

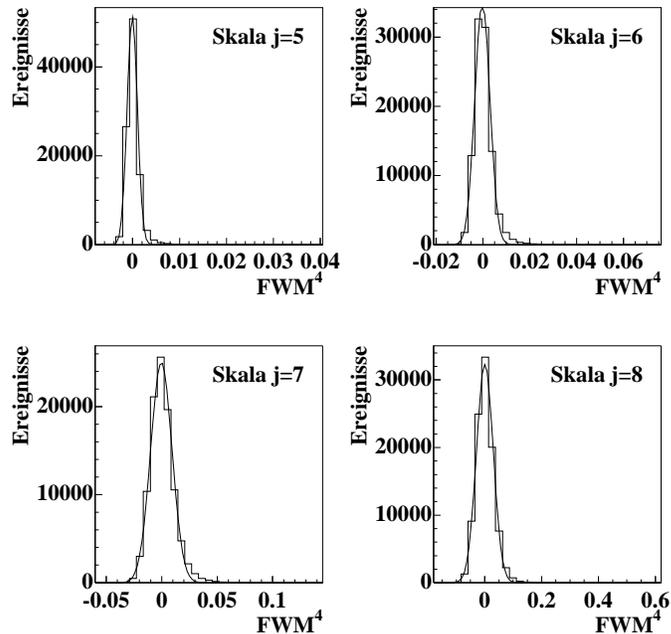


Abbildung B.28 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit 800 Einträgen.

B.1.3 Verteilungsbreiten in Abhängigkeit von der Multiplizität $\sigma(m)$

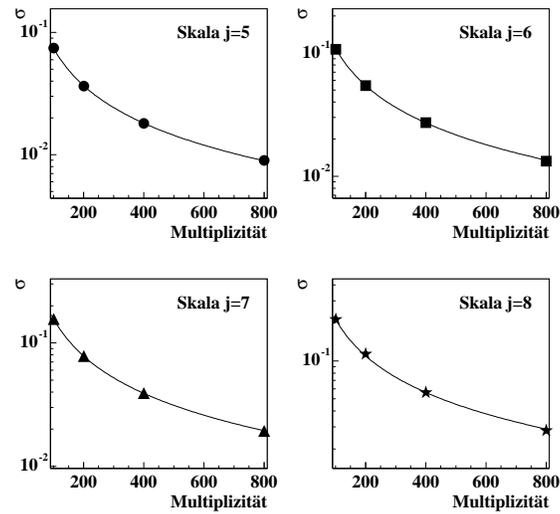


Abbildung B.29 Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung, Anpassung mit zwei freien Parametern a und λ .

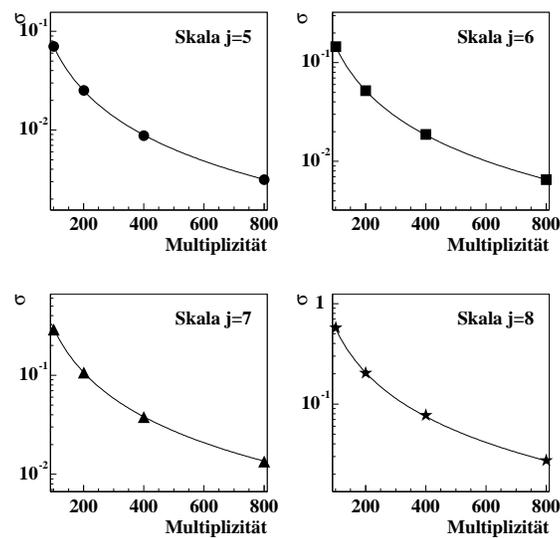


Abbildung B.30 Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung, Anpassung mit zwei freien Parametern a und λ .

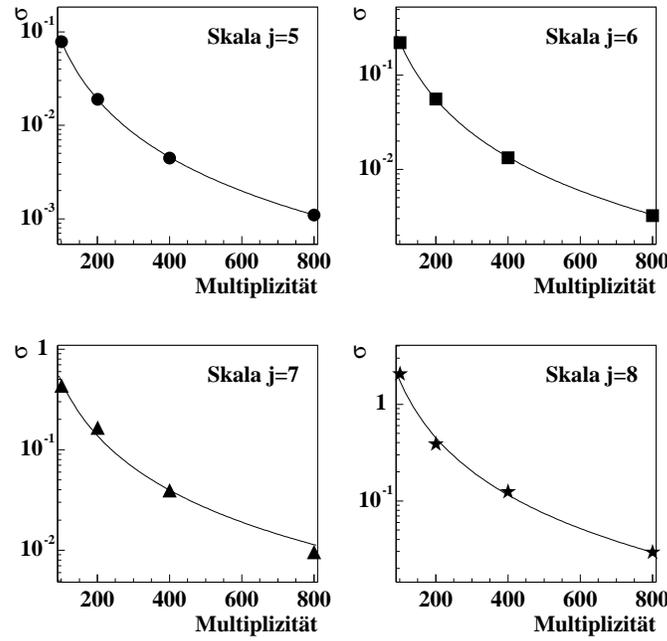


Abbildung B.31 Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung, Anpassung mit zwei freien Parametern a und λ .

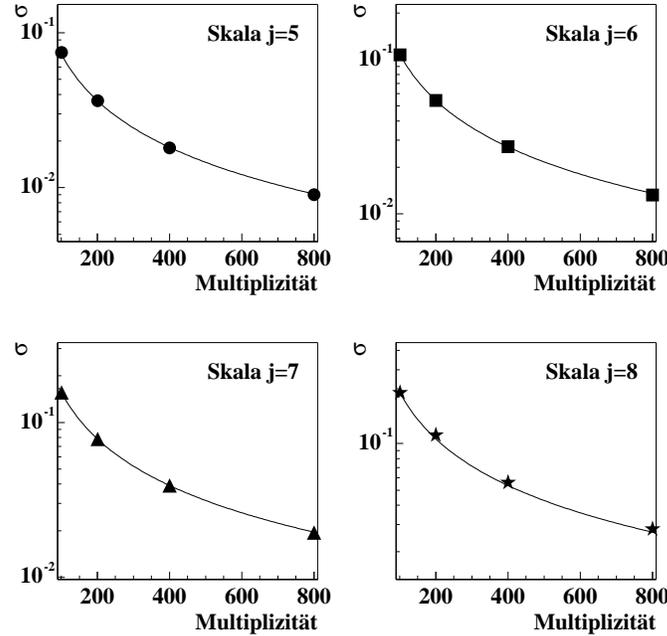


Abbildung B.32 Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung, Anpassung mit einem freien Parameter a und gesetztem $\lambda = \frac{1}{2}$.

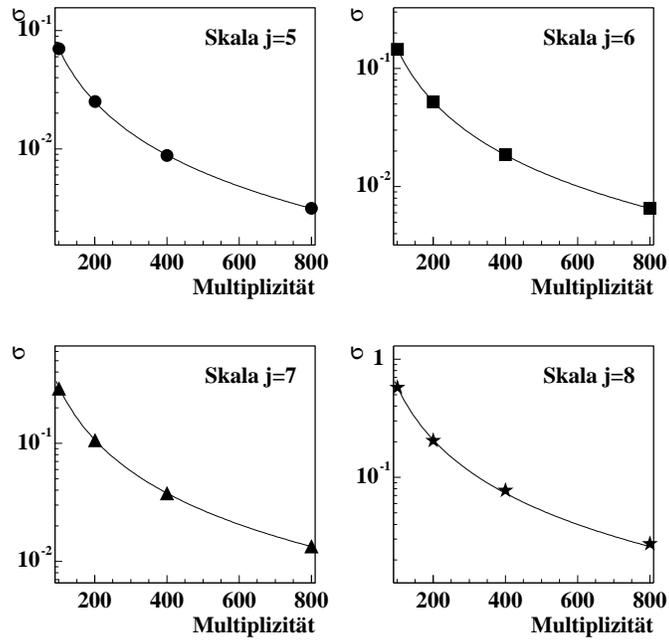


Abbildung B.33 Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung, Anpassung mit einem freien Parameter a und gesetztem $\lambda = \frac{a}{2}$.

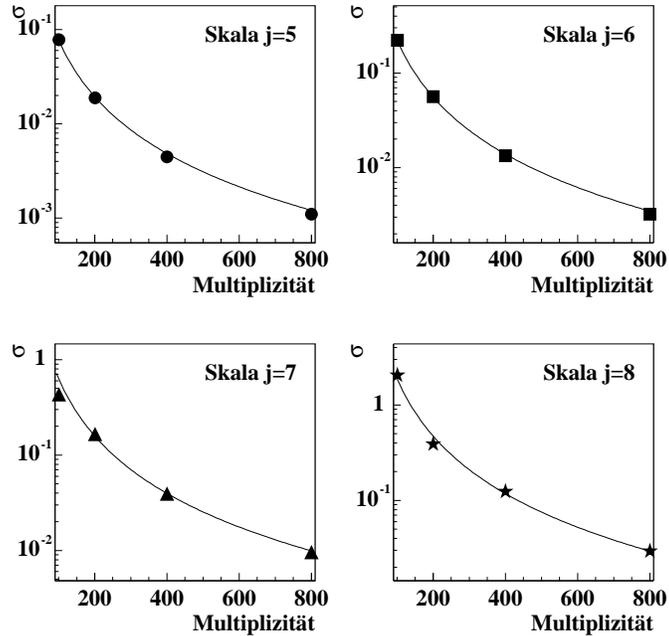


Abbildung B.34 Multiplizitätsabhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung, Anpassung mit einem freien Parameter a und gesetztem $\lambda = \frac{a}{2}$.

B.2 Gaußverteilte Simulationen unterschiedlicher Breite

B.2.1 Faktorielle Waveletmomente

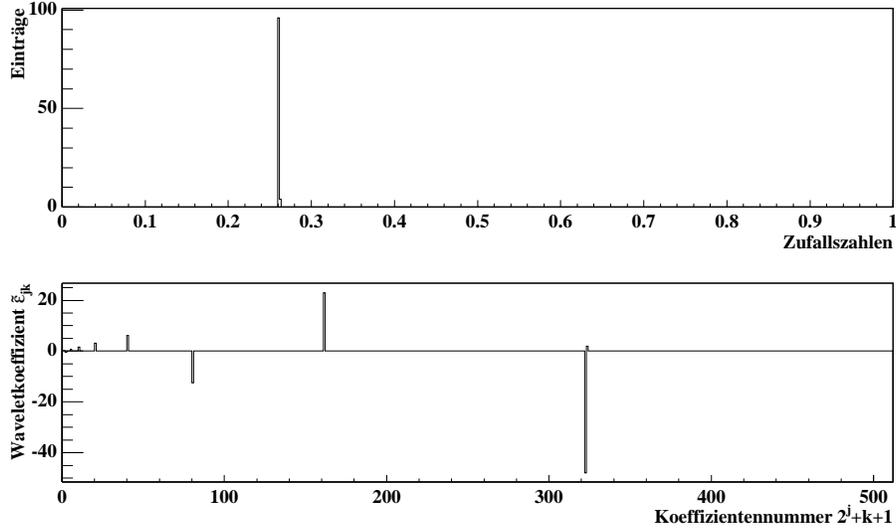


Abbildung B.35 Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

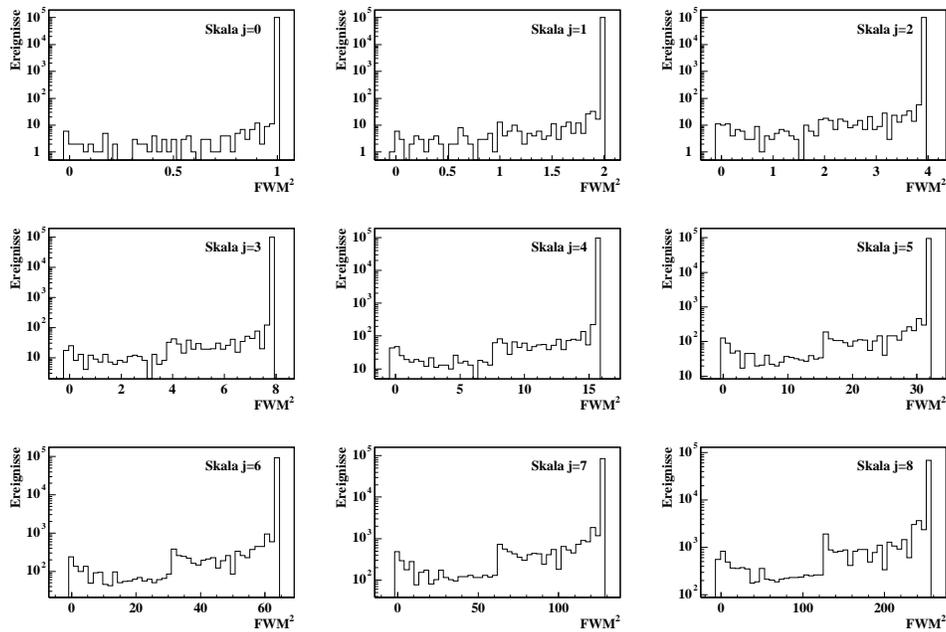


Abbildung B.36 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).

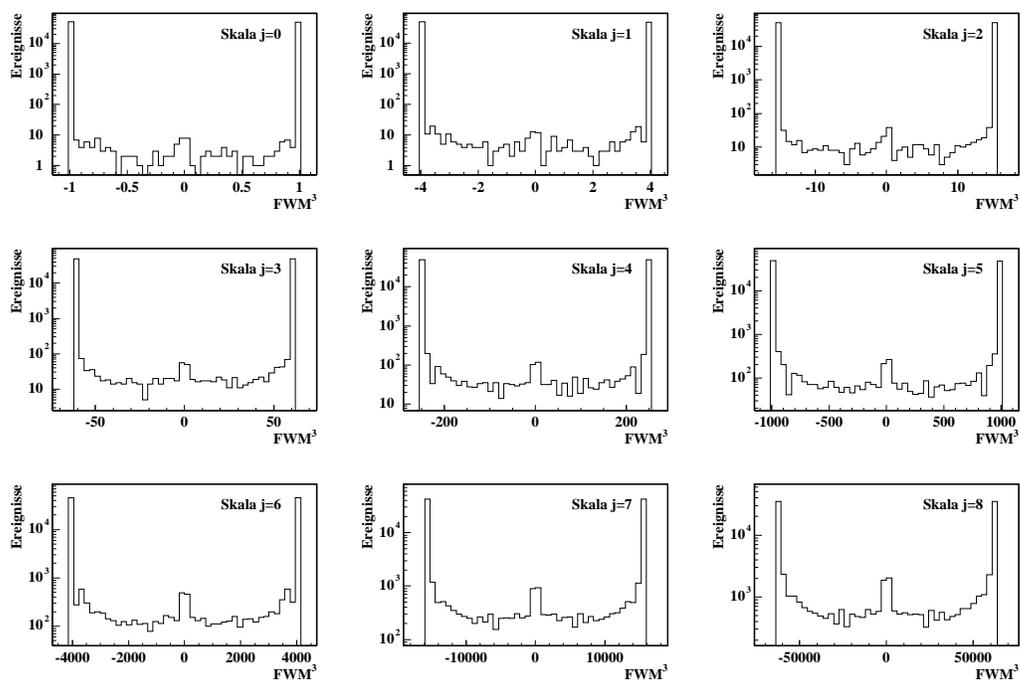


Abbildung B.37 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).

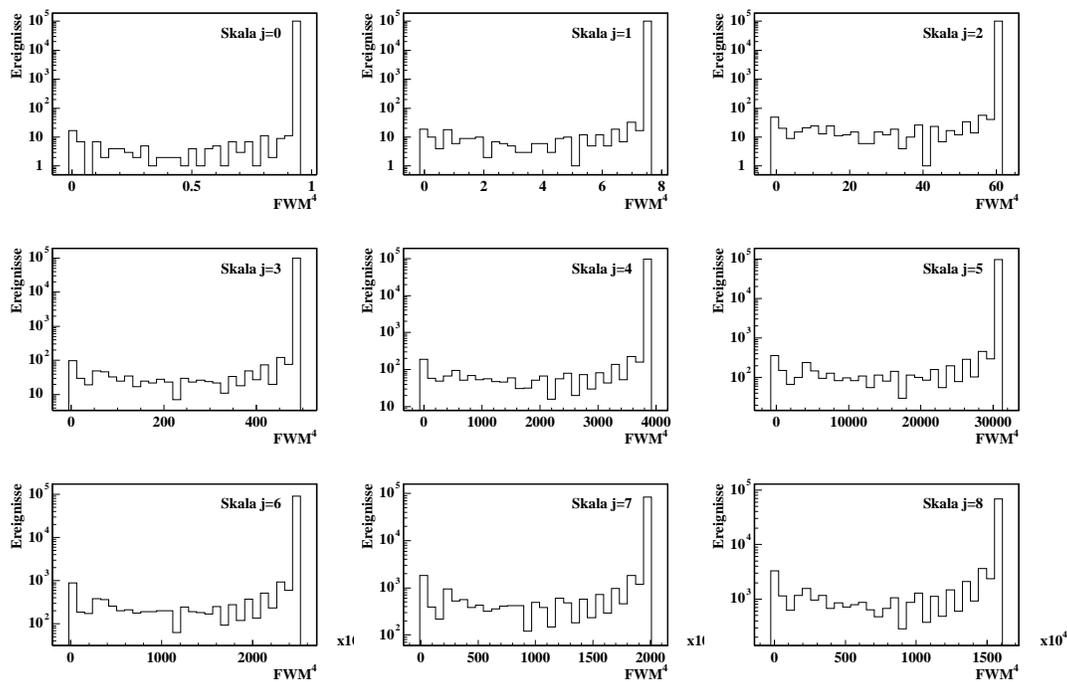


Abbildung B.38 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).

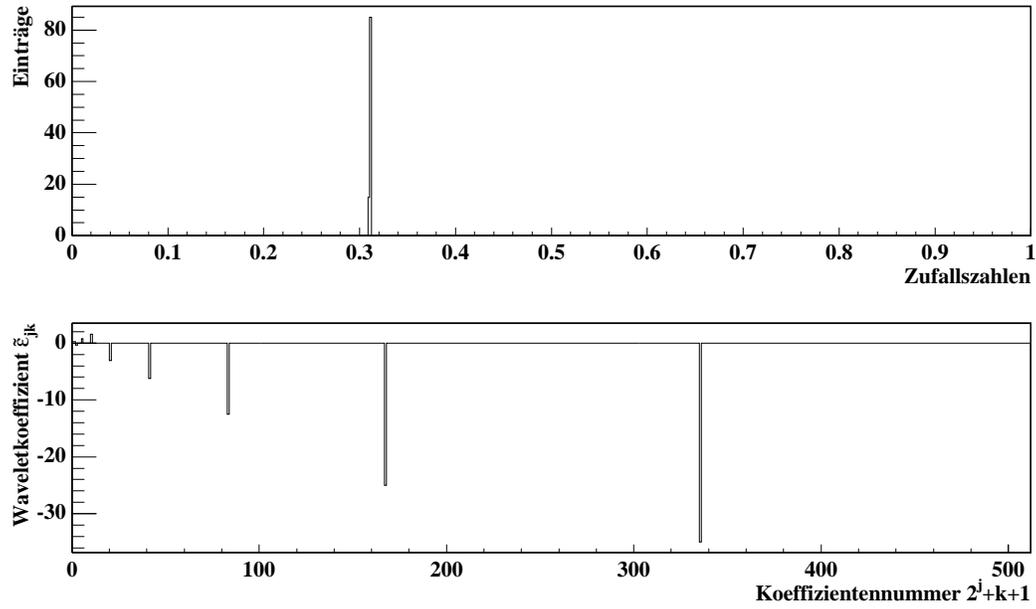


Abbildung B.39 Gaußverteiltas Zufallsereignis ($\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

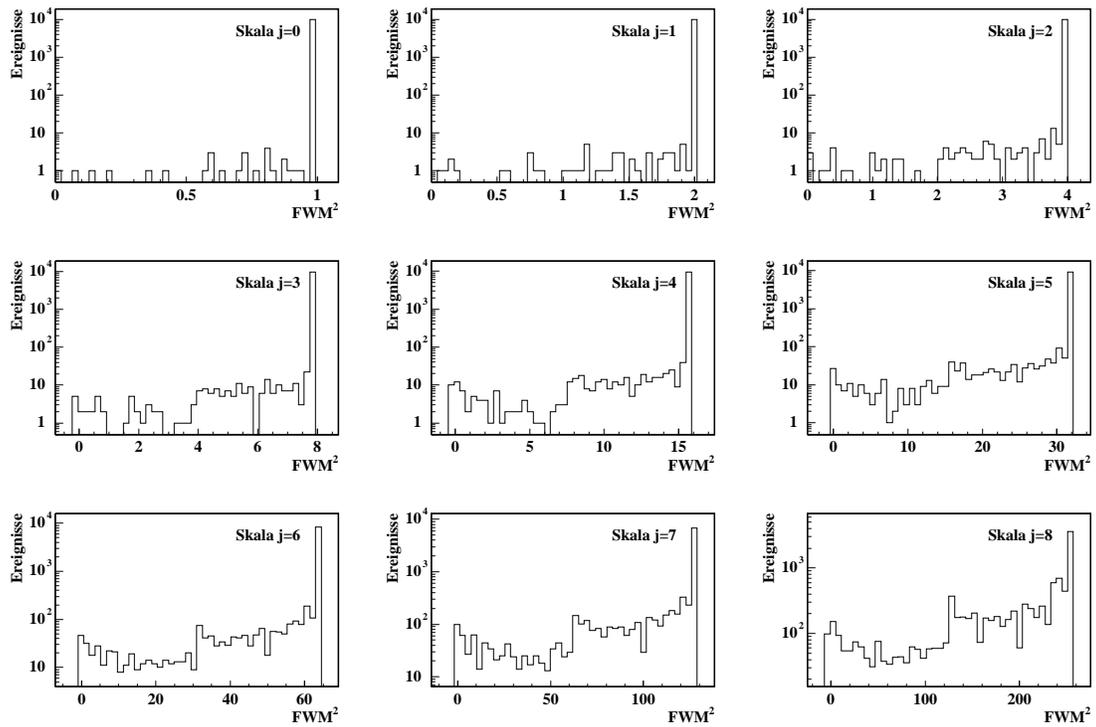


Abbildung B.40 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4}$).

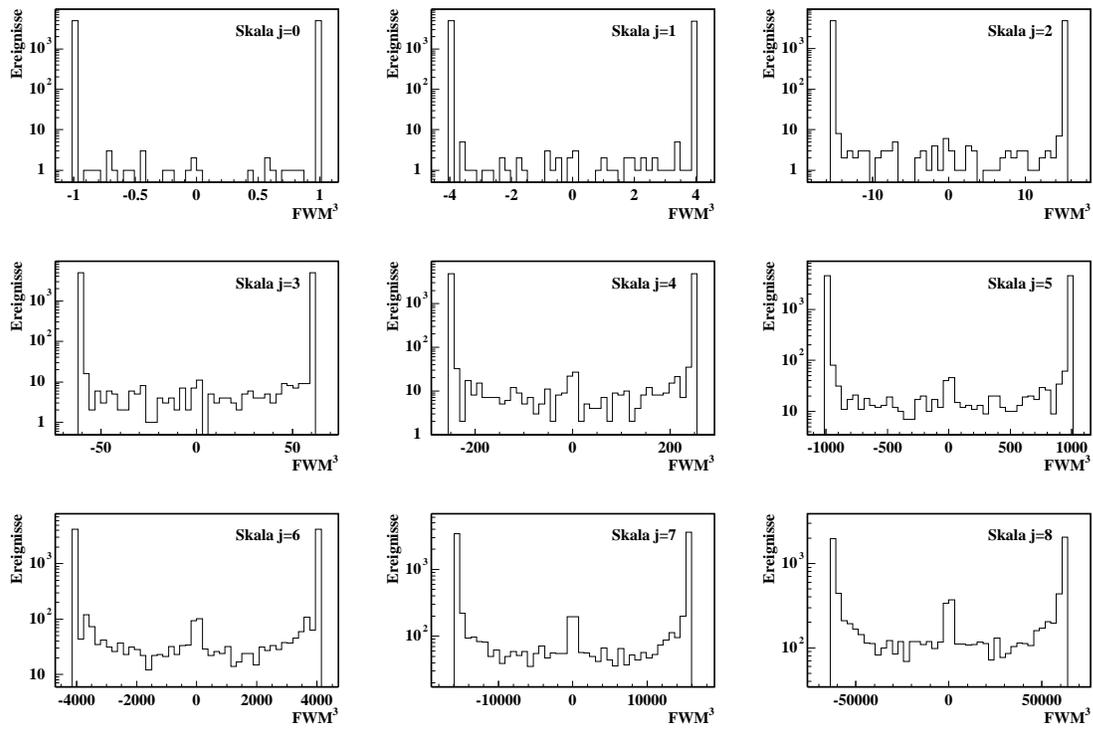


Abbildung B.41 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4}$).

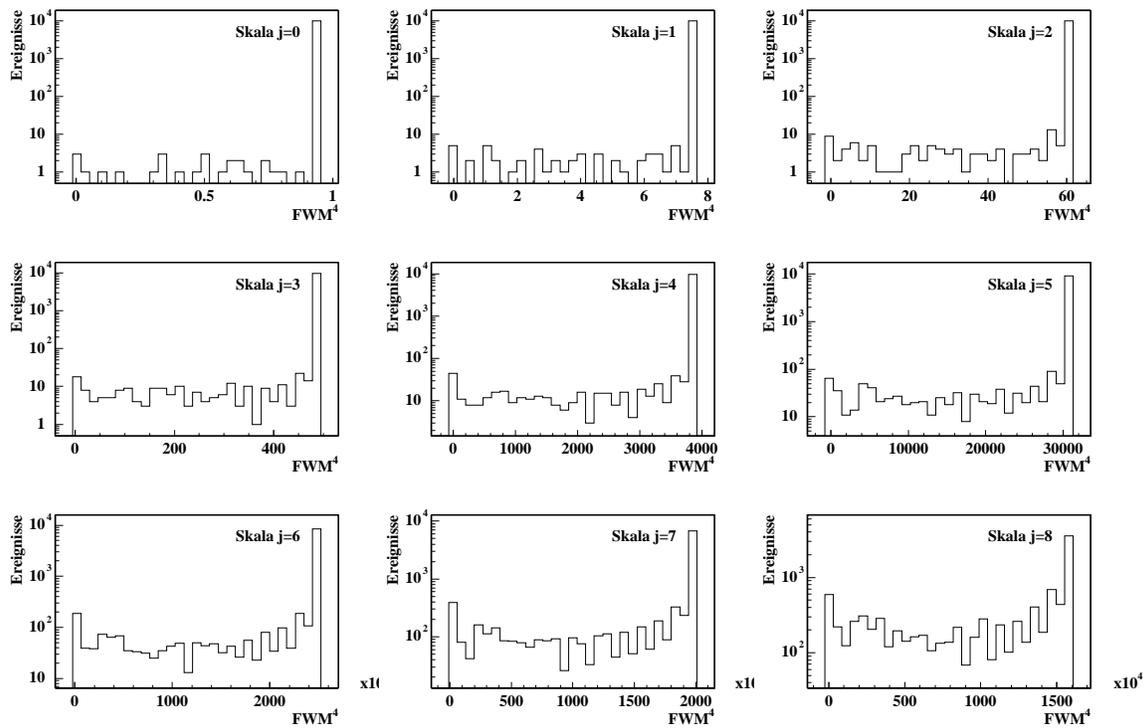


Abbildung B.42 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4}$).

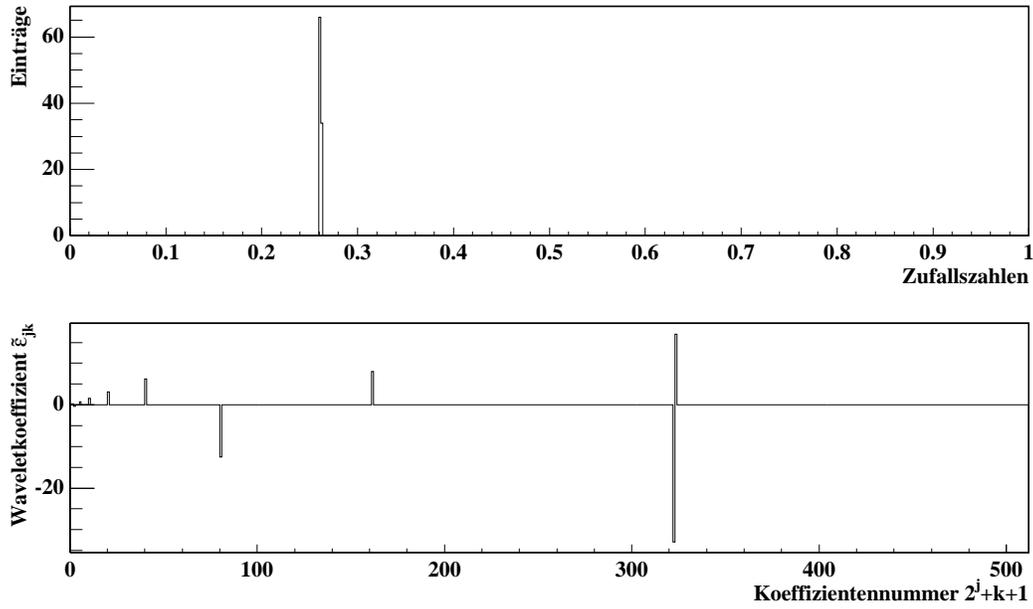


Abbildung B.43 Gaußverteilttes Zufallsereignis ($\sigma = 5.0 \cdot 10^{-4}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

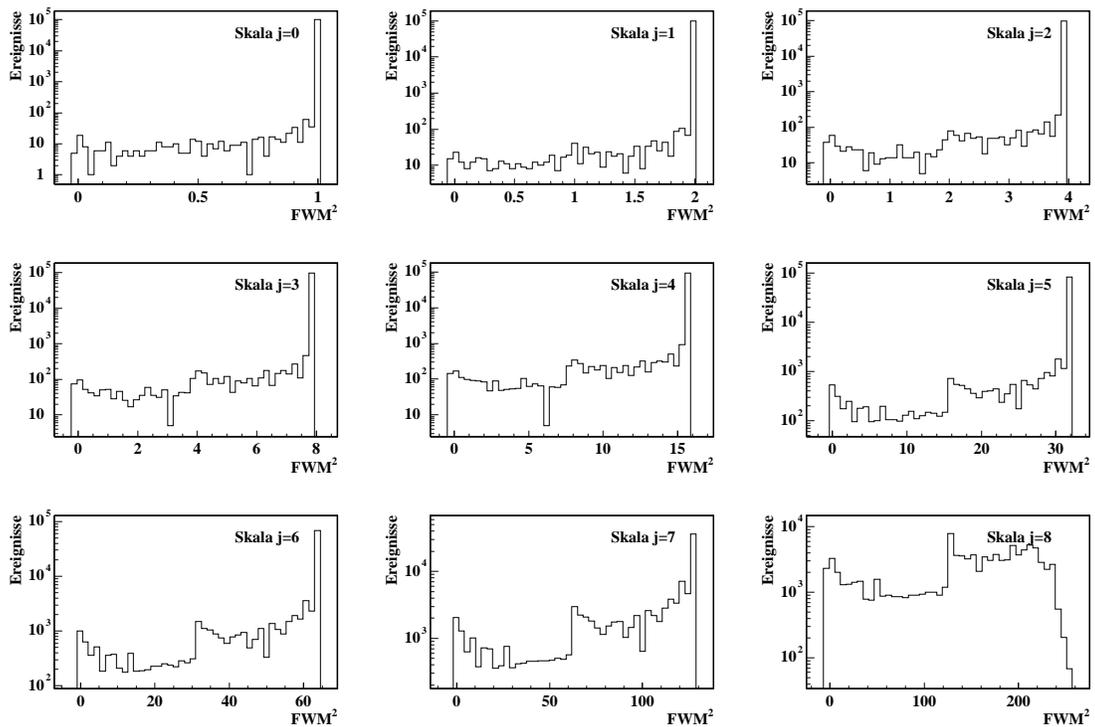


Abbildung B.44 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 5.0 \cdot 10^{-4}$).

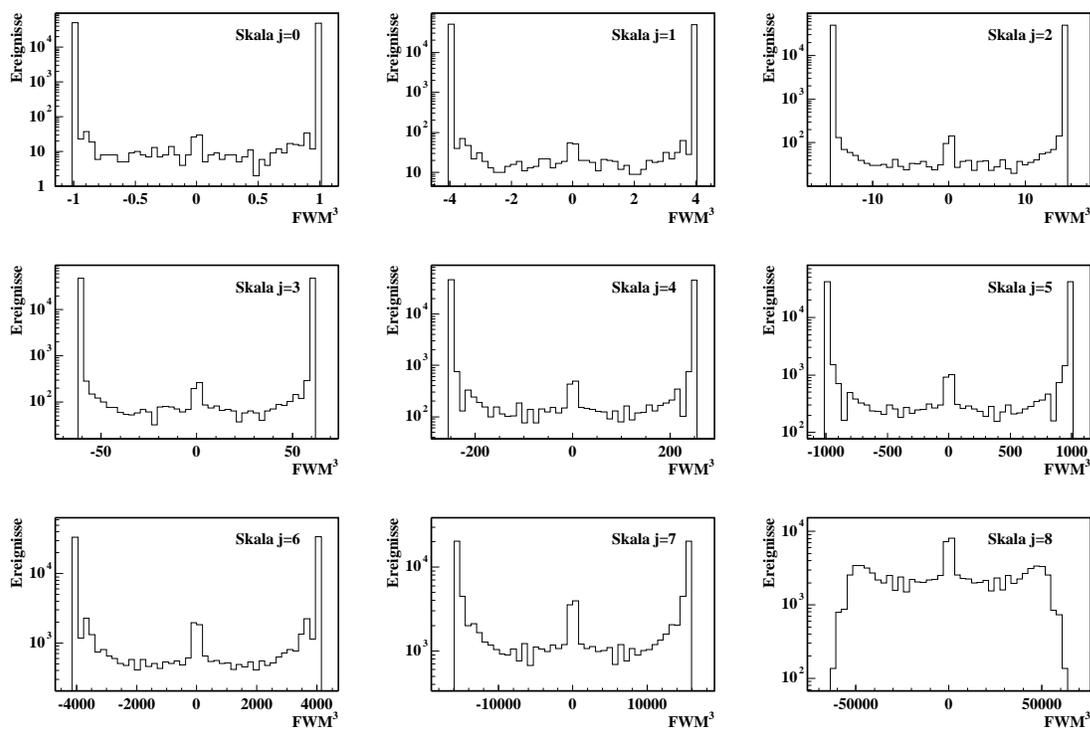


Abbildung B.45 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 5.0 \cdot 10^{-4}$).

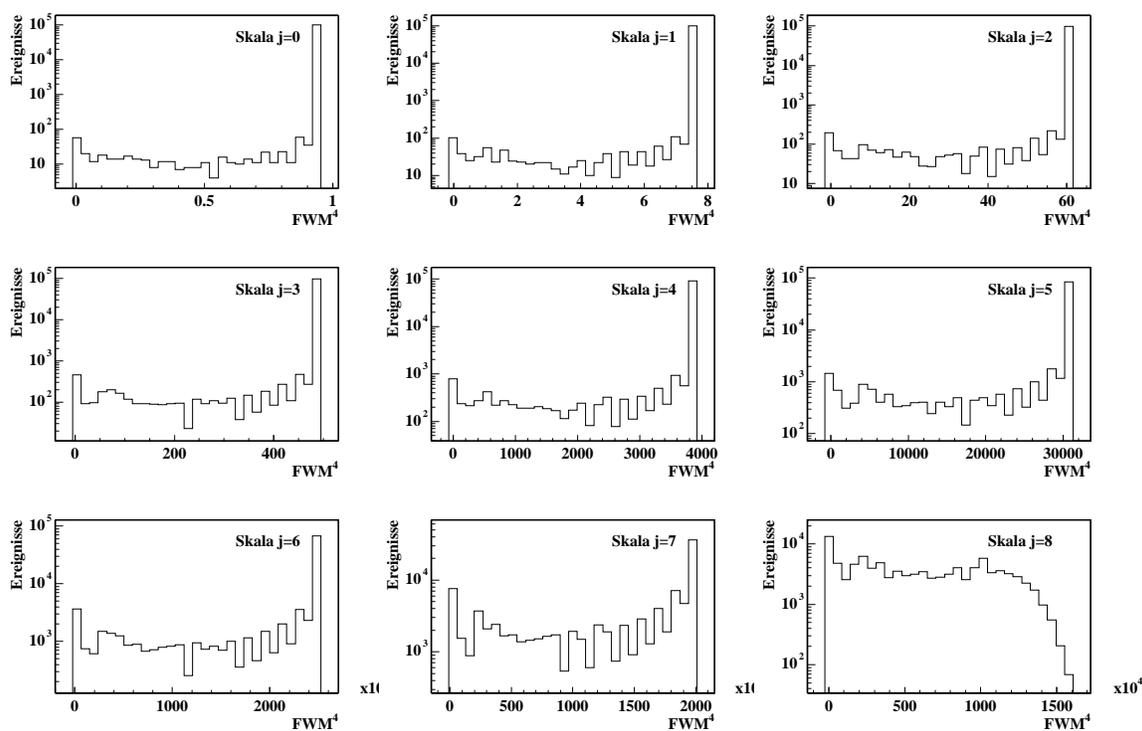


Abbildung B.46 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 5.0 \cdot 10^{-4}$).

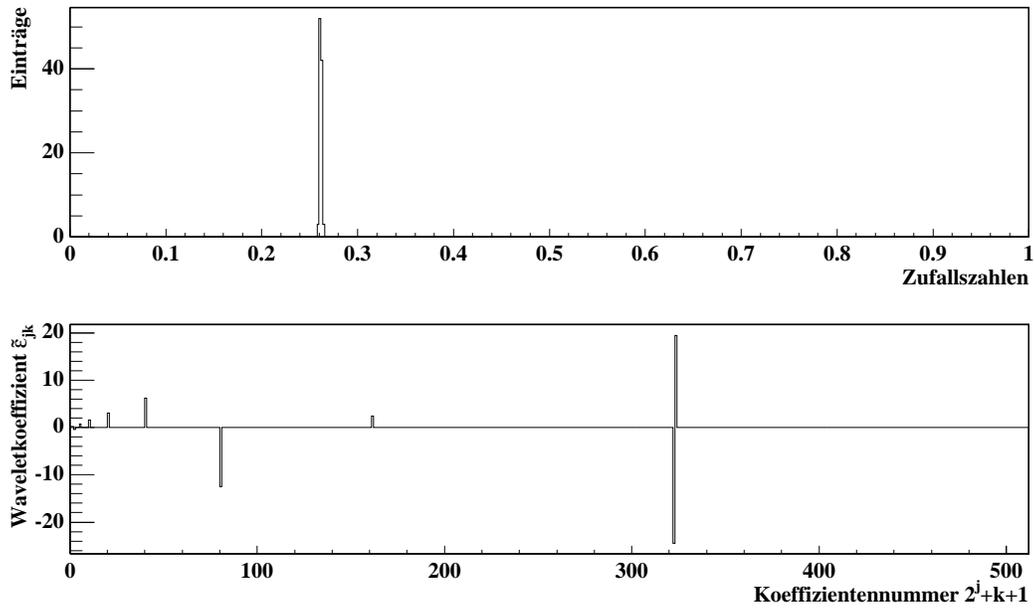


Abbildung B.47 Gaußverteiltas Zufallsereignis ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

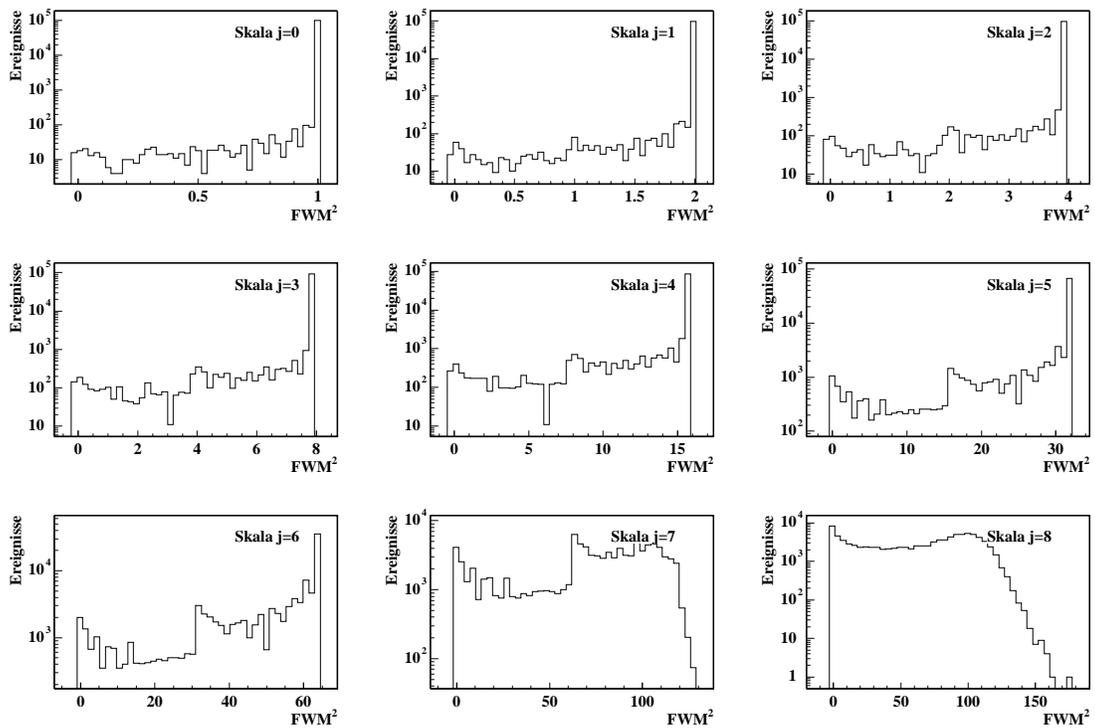


Abbildung B.48 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

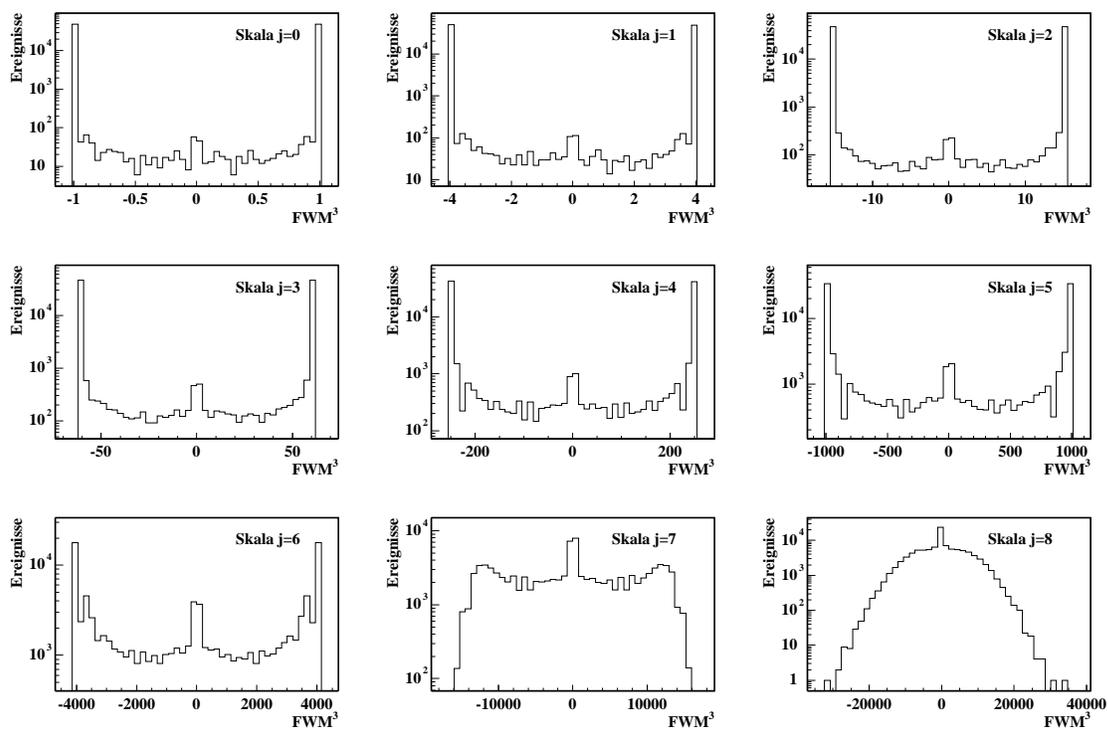


Abbildung B.49 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

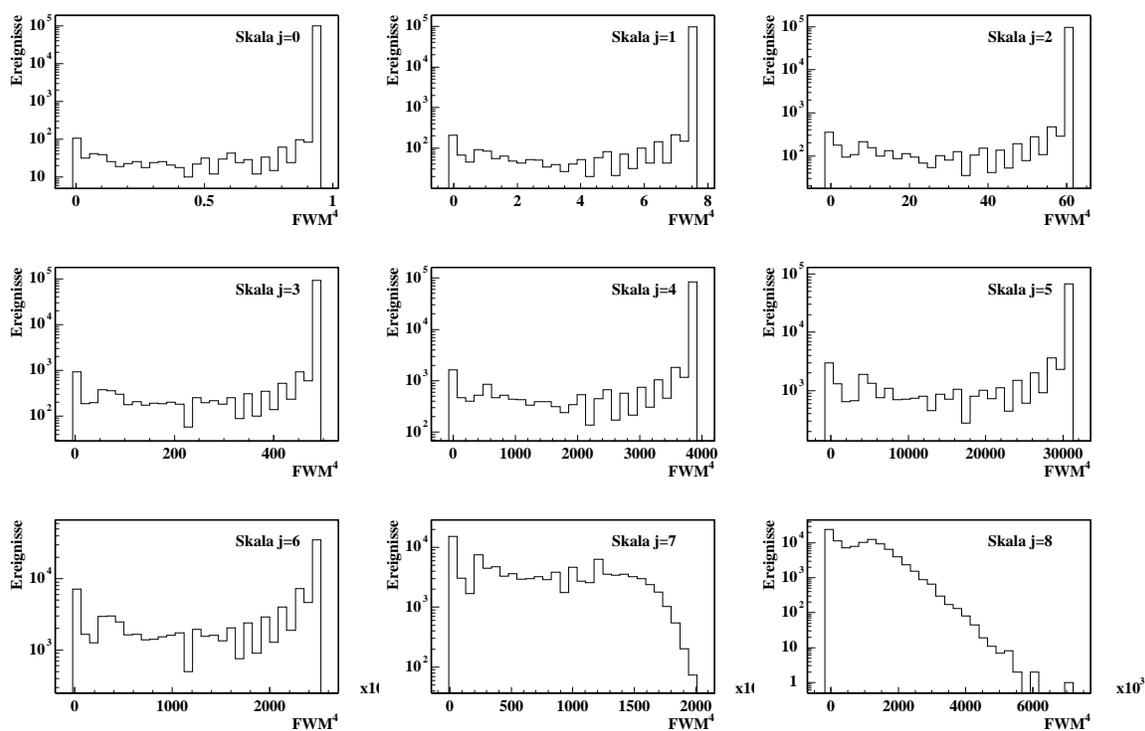


Abbildung B.50 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

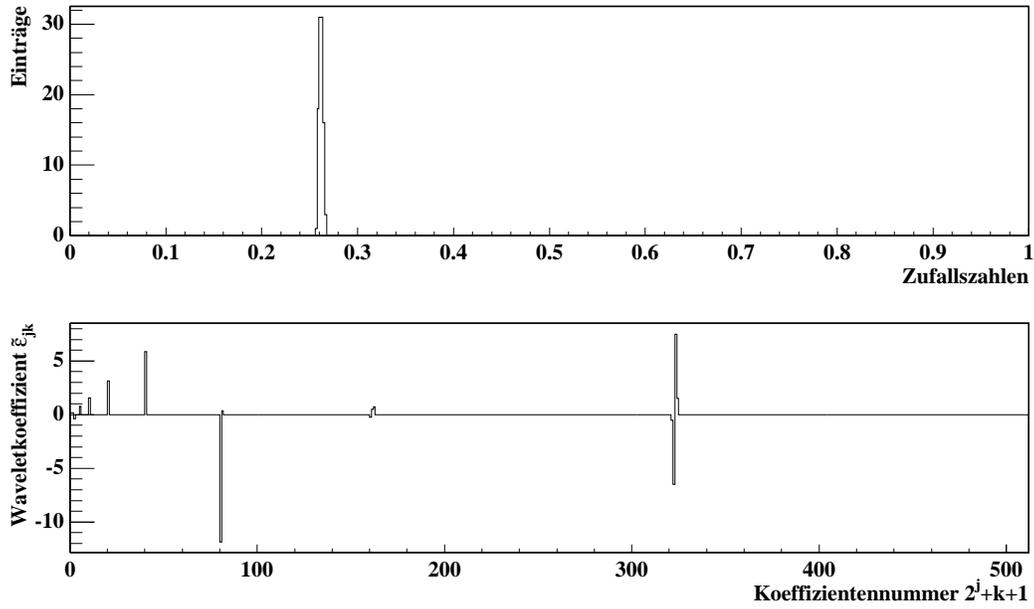


Abbildung B.51 Gaußverteiltas Zufallsereignis ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

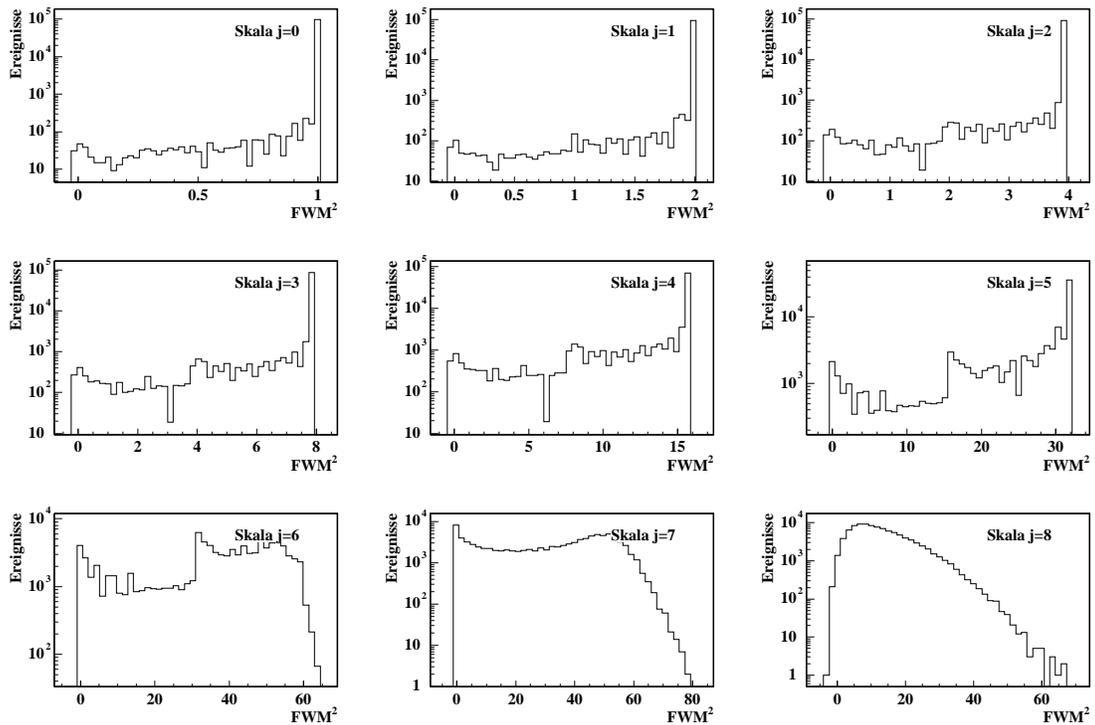


Abbildung B.52 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$).

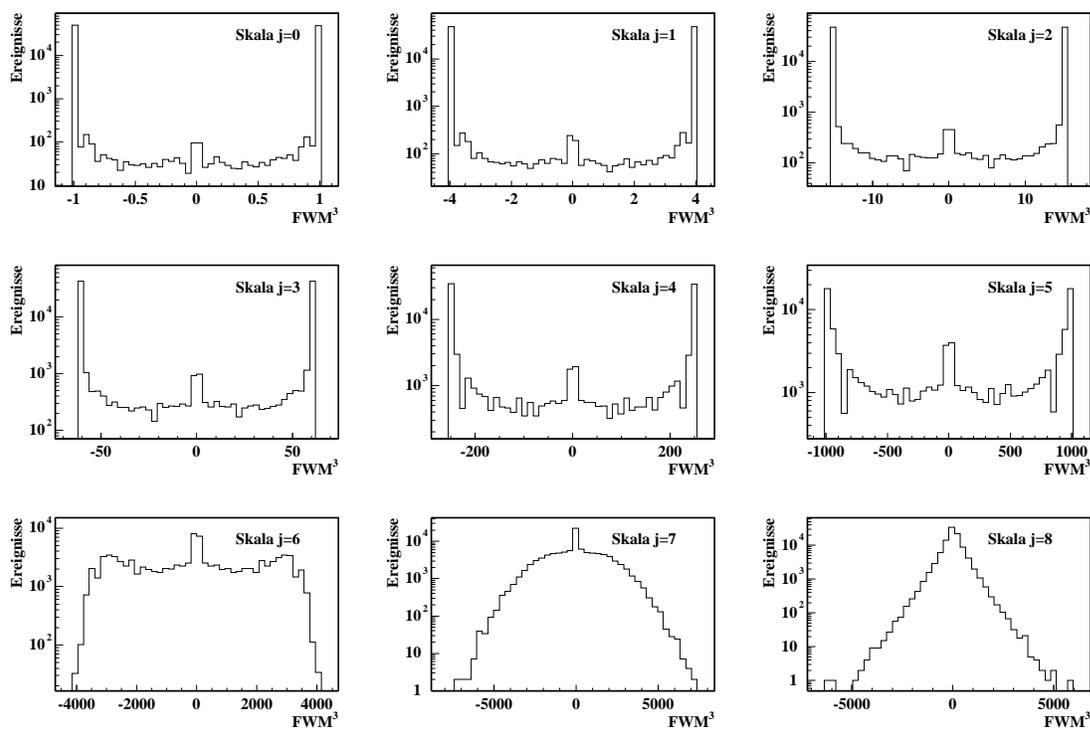


Abbildung B.53 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$).

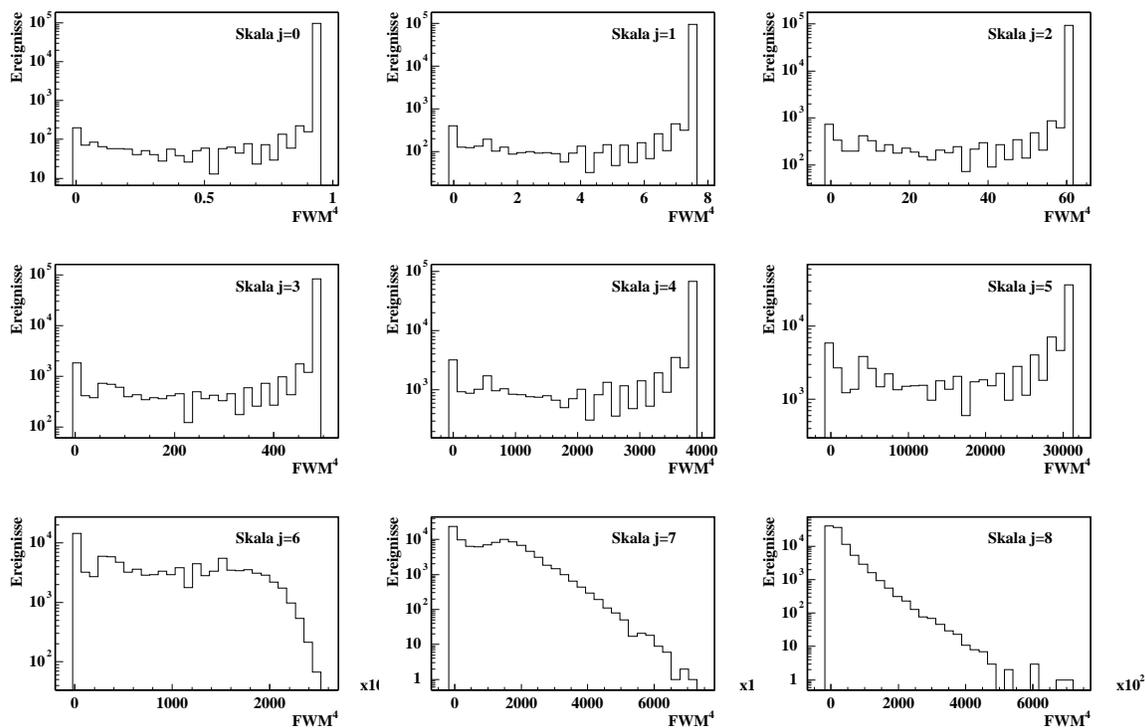


Abbildung B.54 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$).

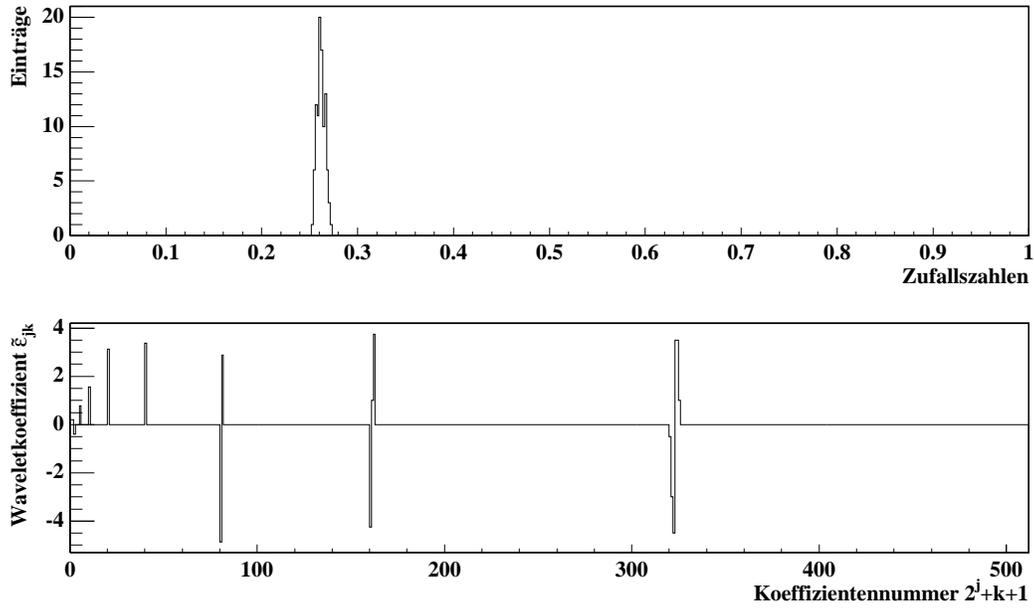


Abbildung B.55 Gaußverteiltas Zufallsereignis ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

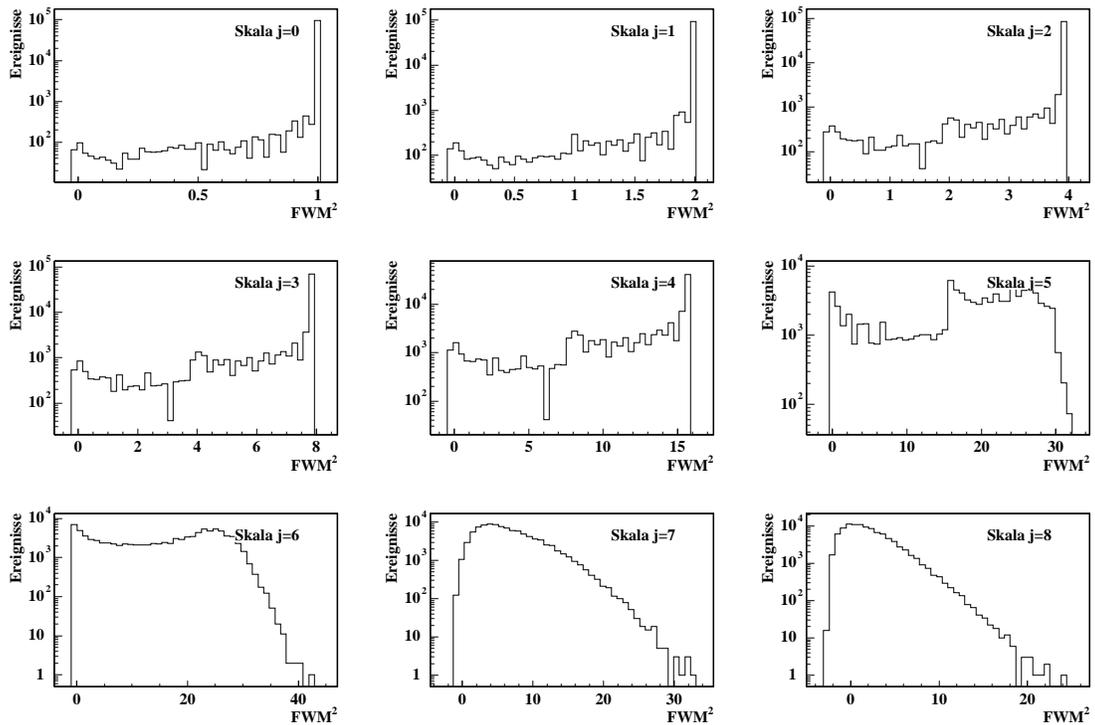


Abbildung B.56 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).

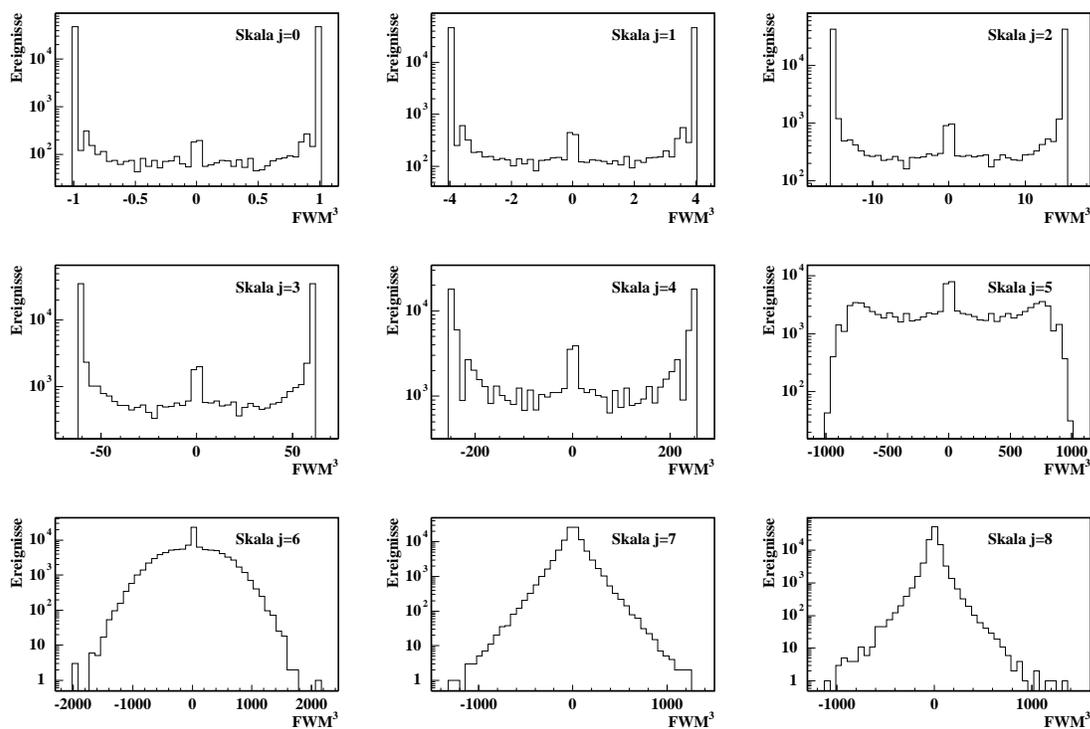


Abbildung B.57 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).

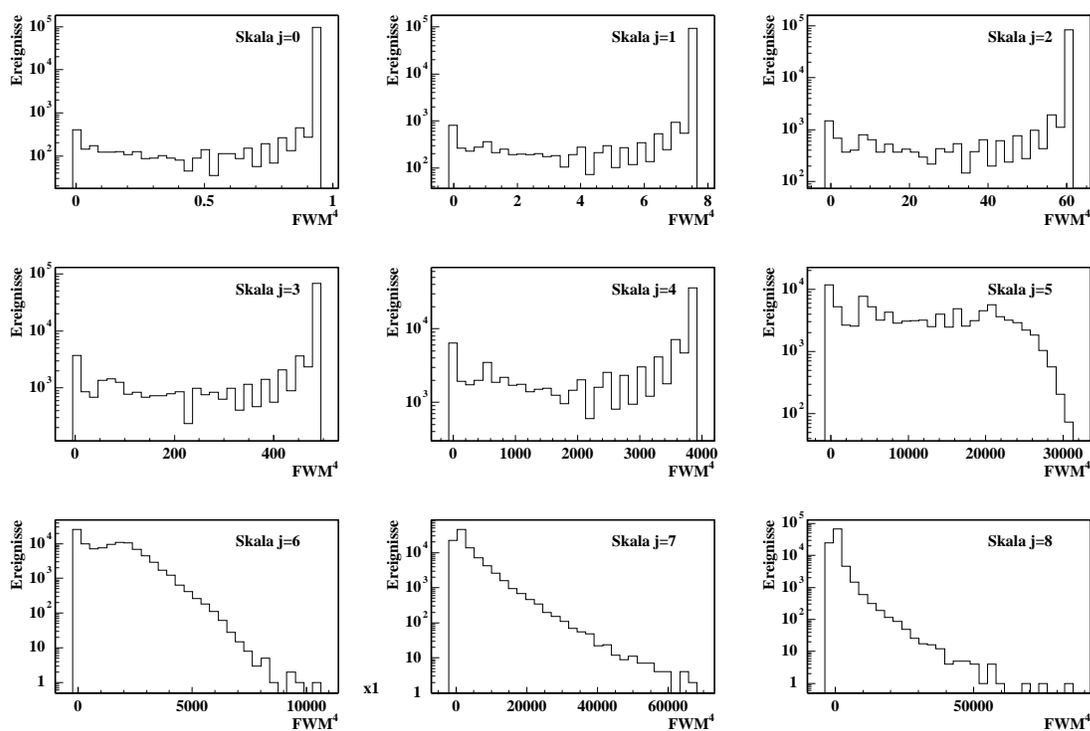


Abbildung B.58 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).

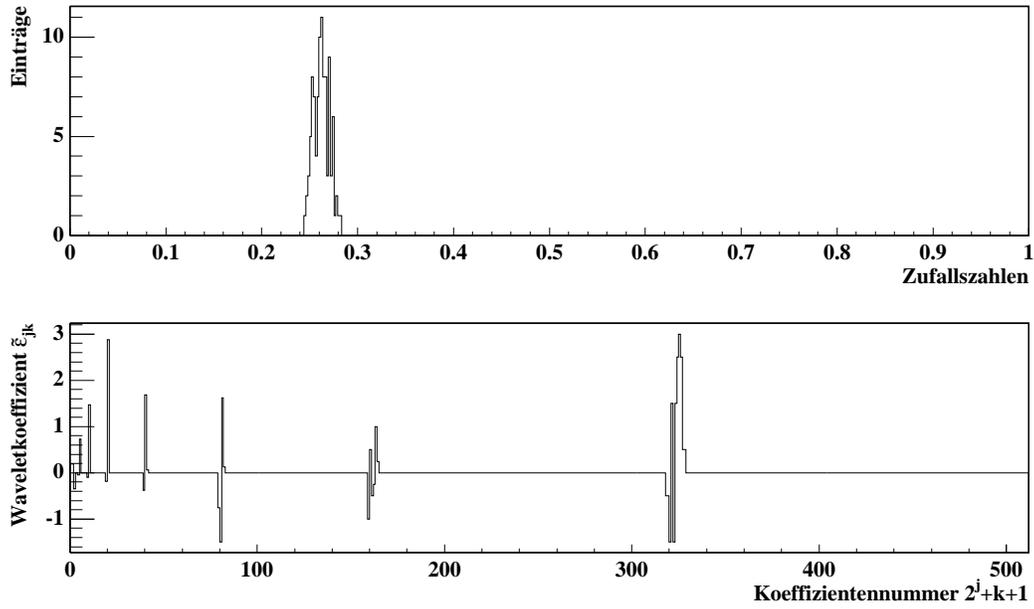


Abbildung B.59 Gaußverteiltas Zufallsereignis ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-3}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

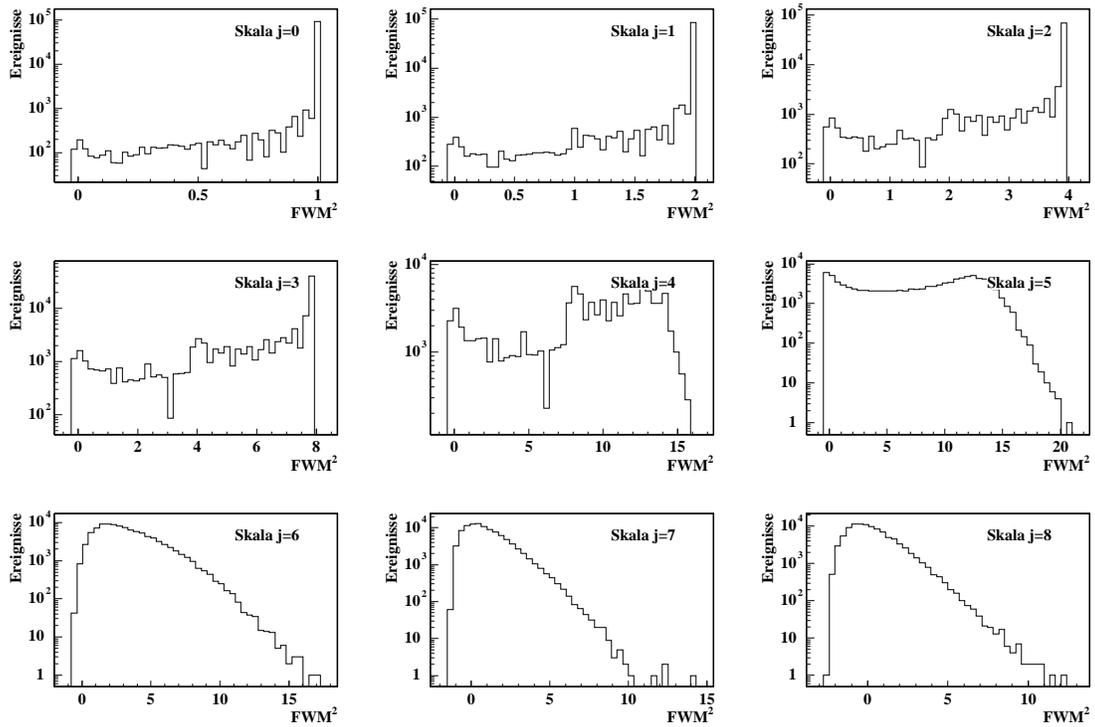


Abbildung B.60 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-3}$).

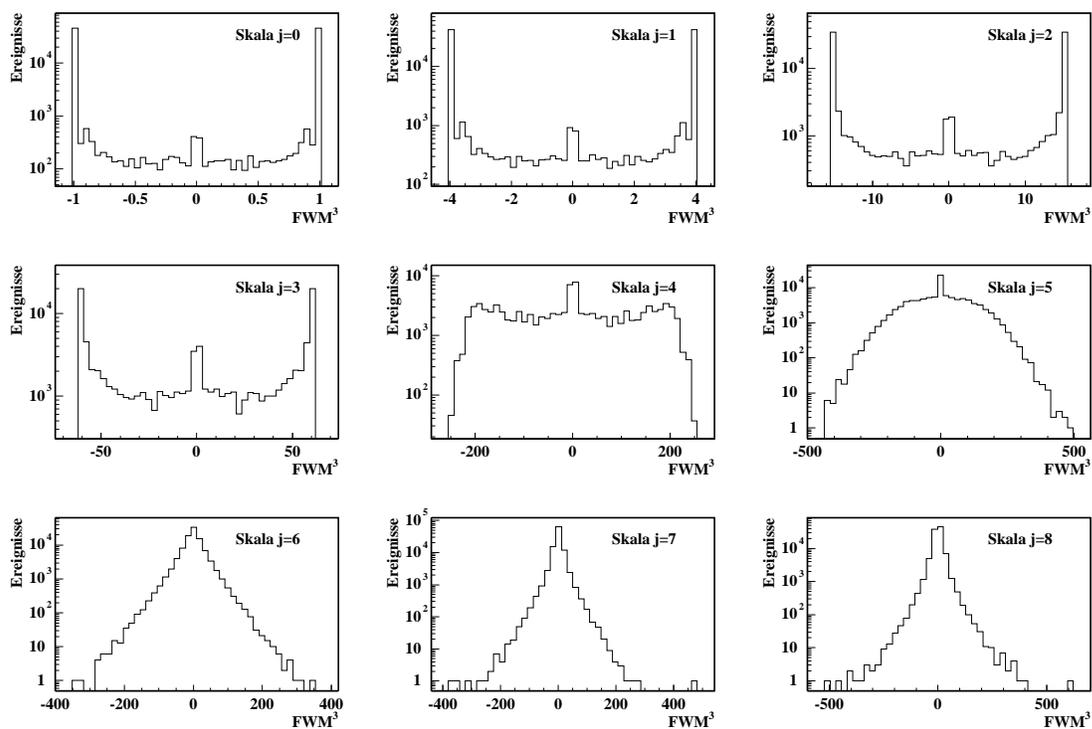


Abbildung B.61 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-3}$).

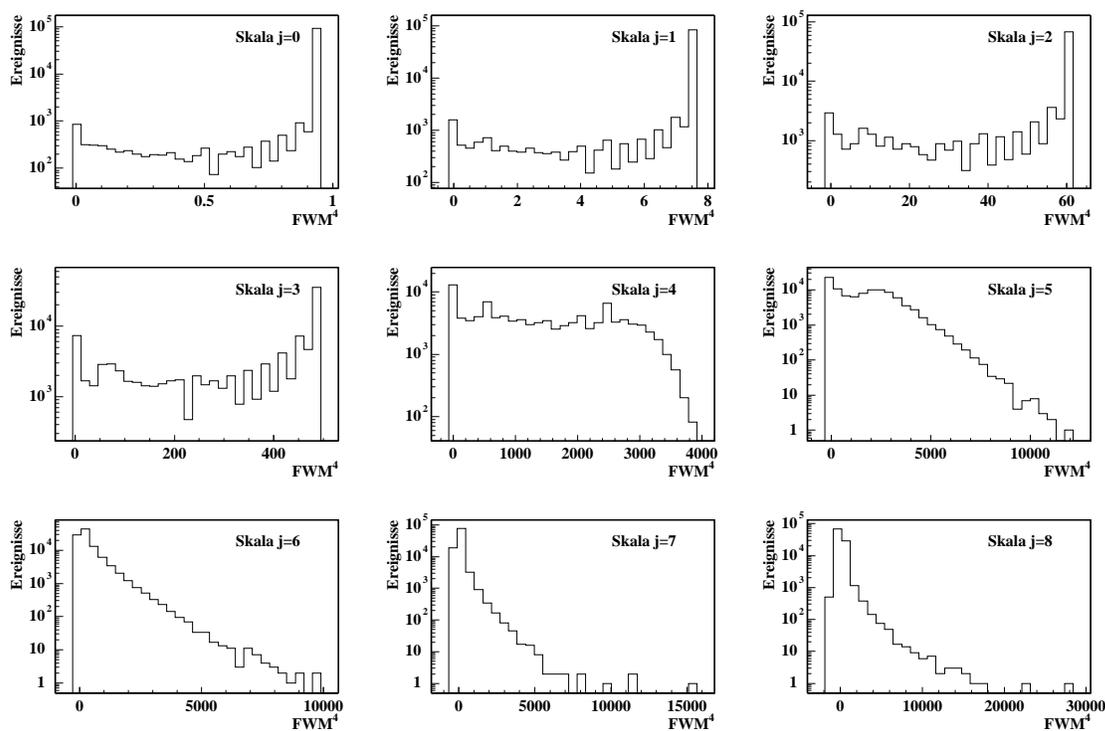


Abbildung B.62 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-3}$).

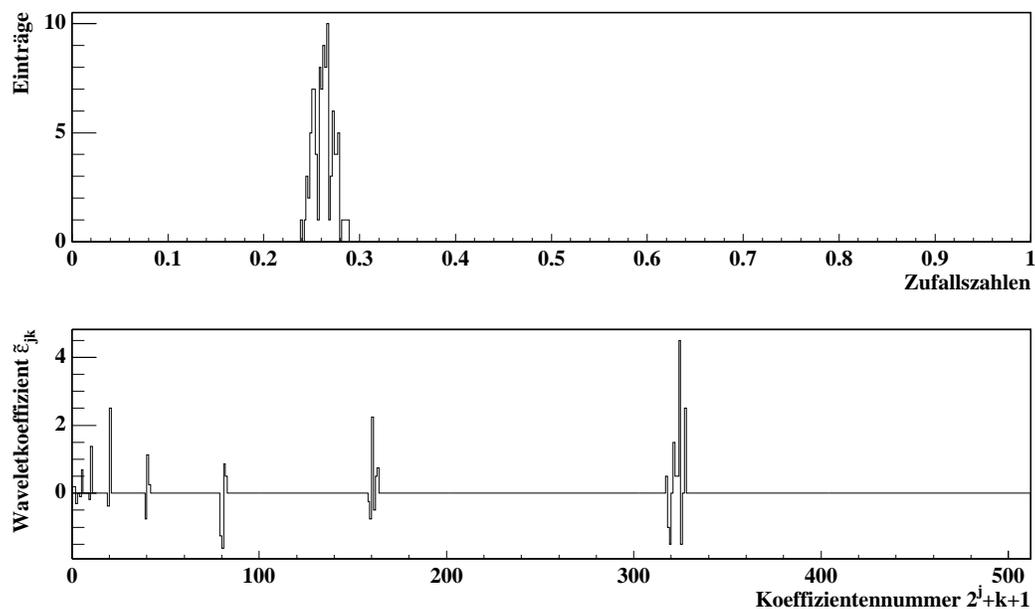


Abbildung B.63 Gaußverteilttes Zufallsereignis ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

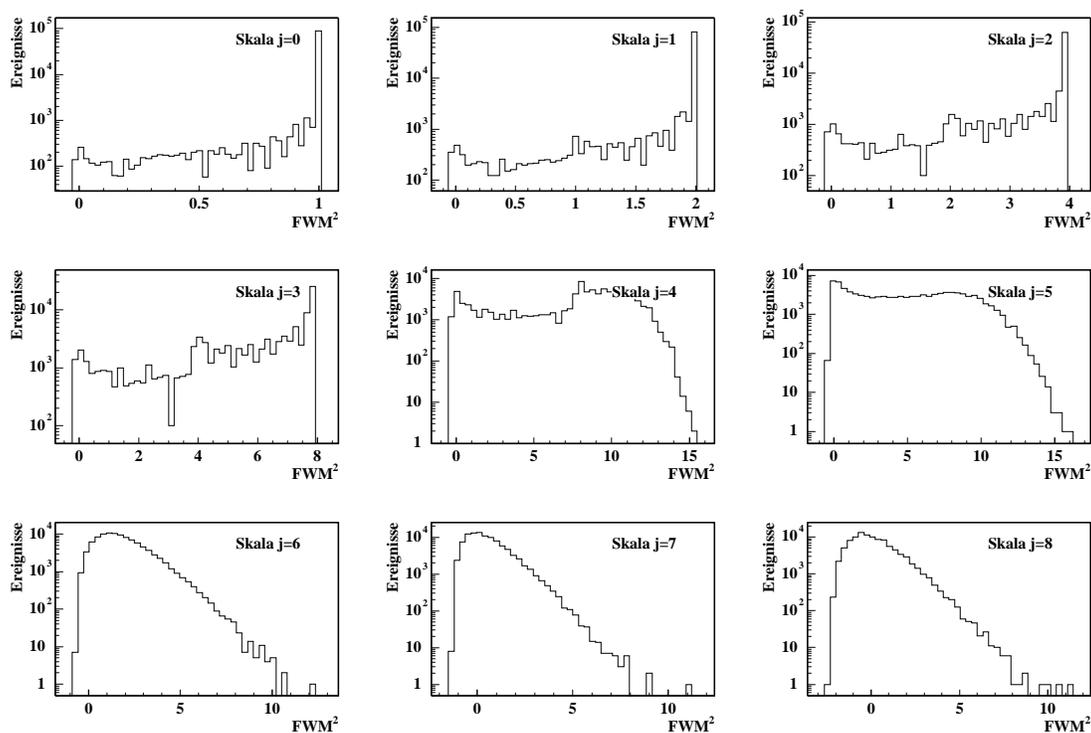


Abbildung B.64 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

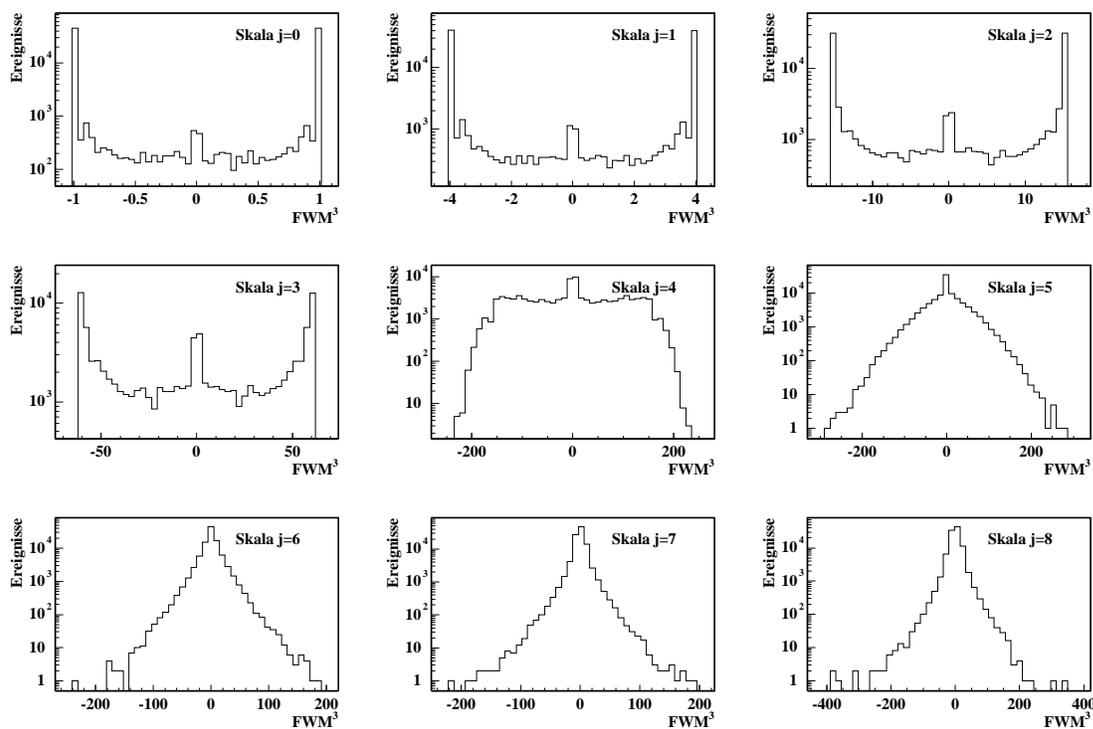


Abbildung B.65 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

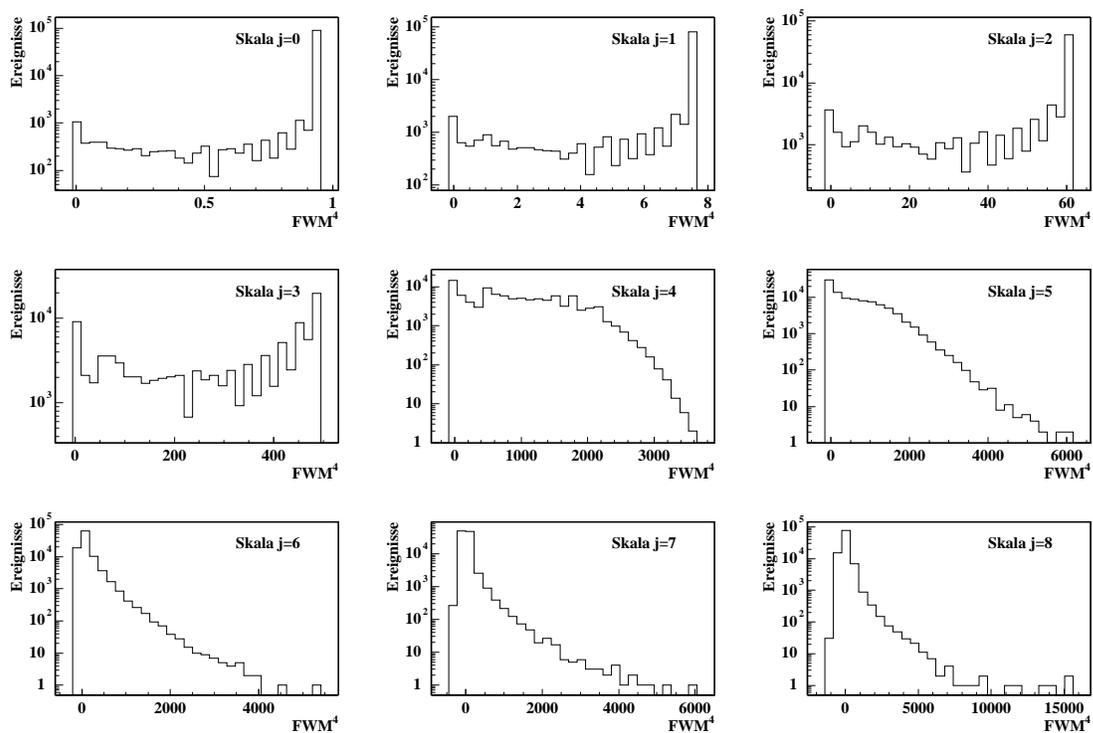


Abbildung B.66 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

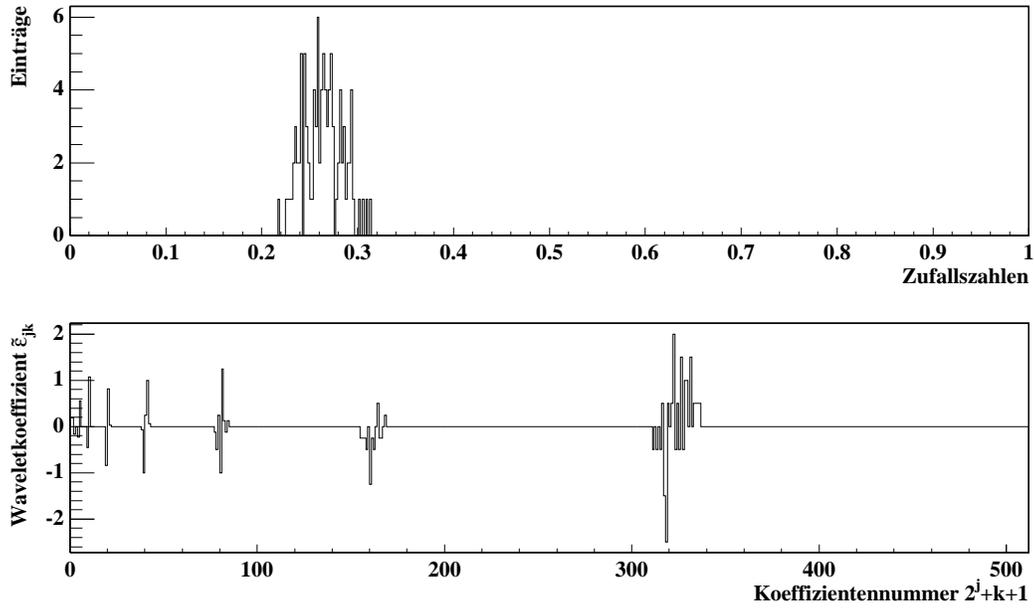


Abbildung B.67 Gaußverteiltas Zufallsereignis ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

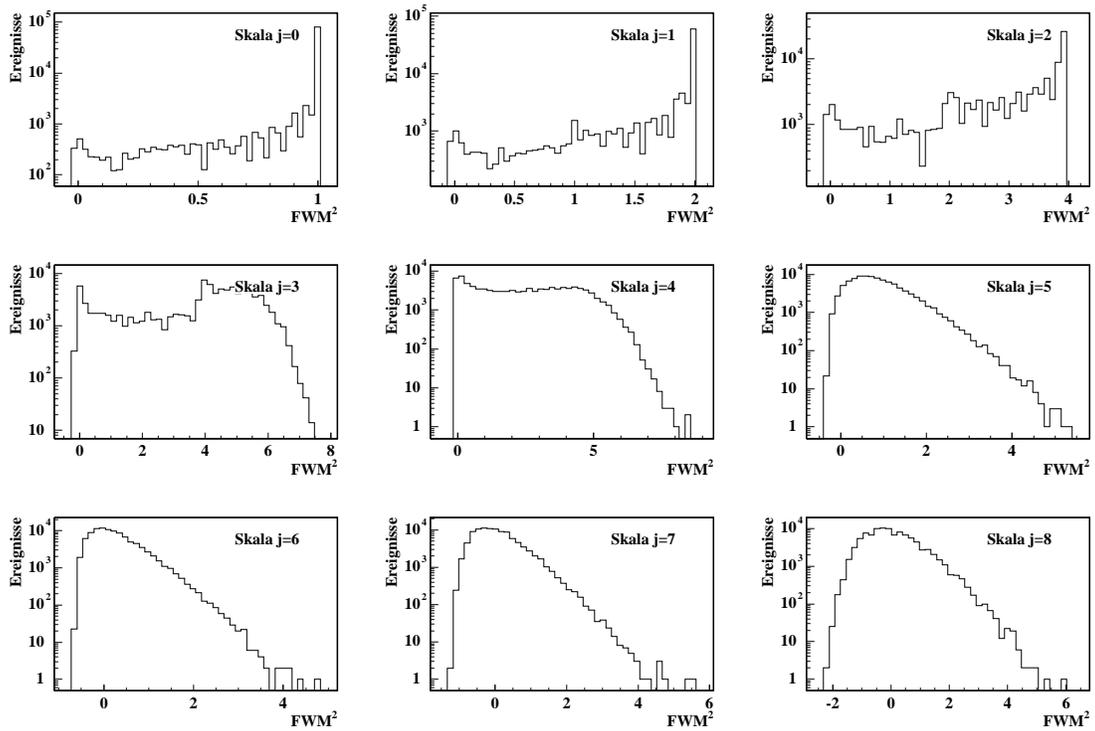


Abbildung B.68 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).

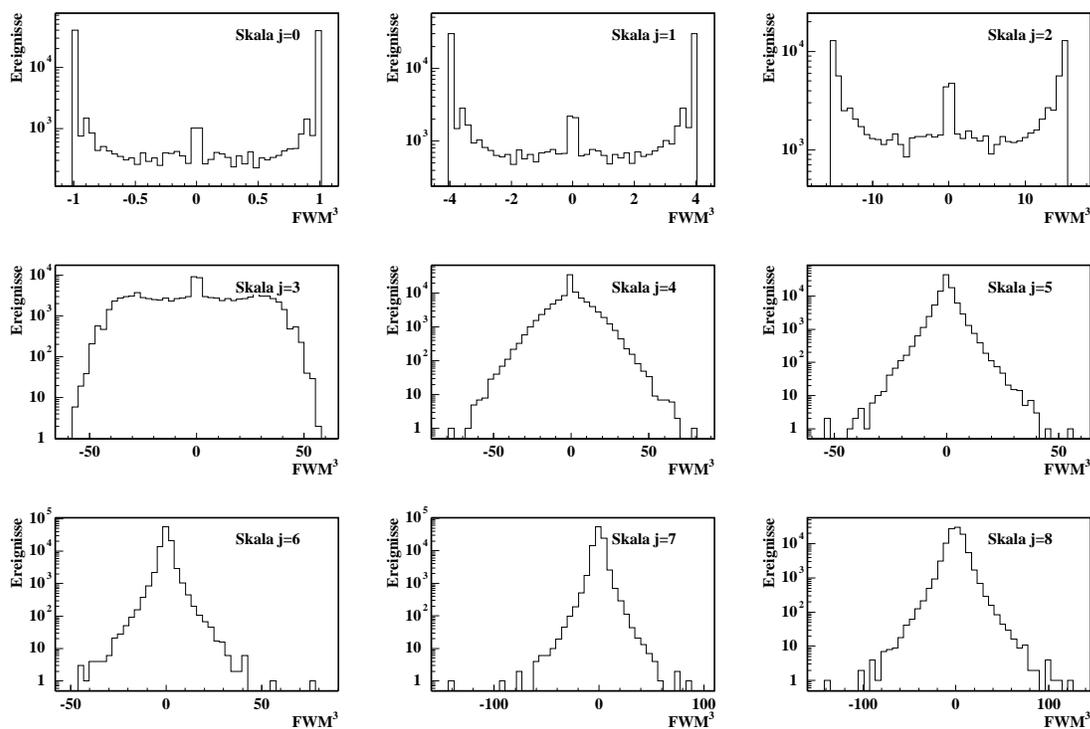


Abbildung B.69 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).

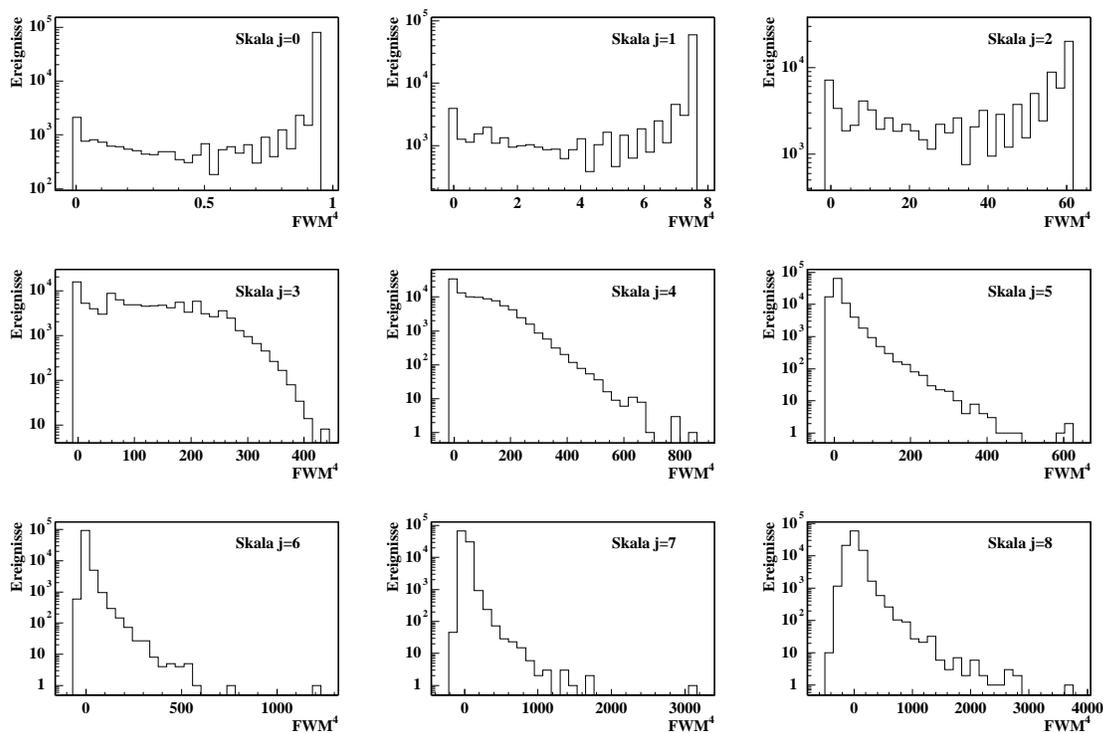


Abbildung B.70 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).

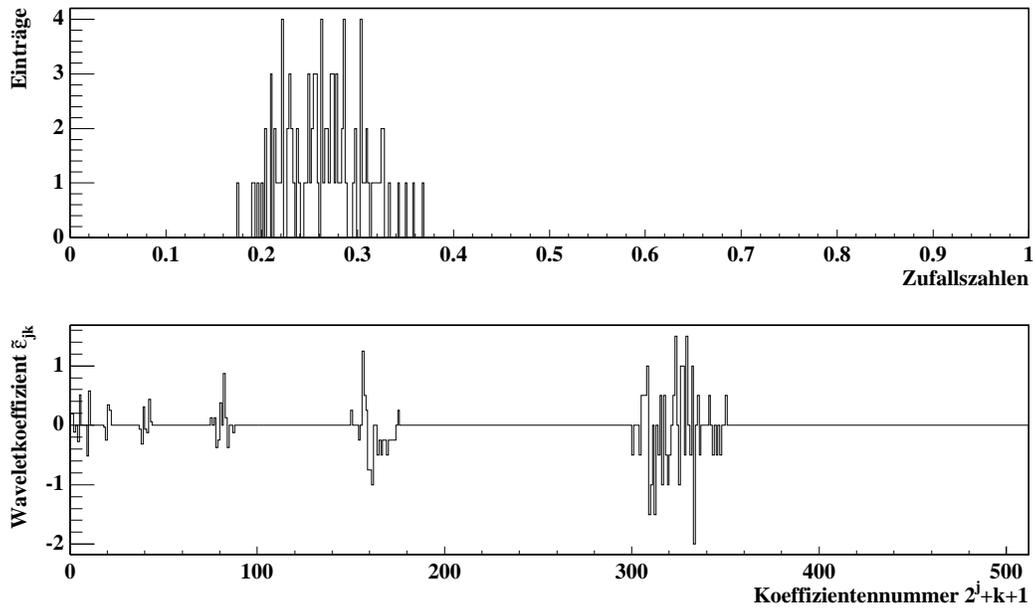


Abbildung B.71 Gaußverteiltas Zufallsereignis ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

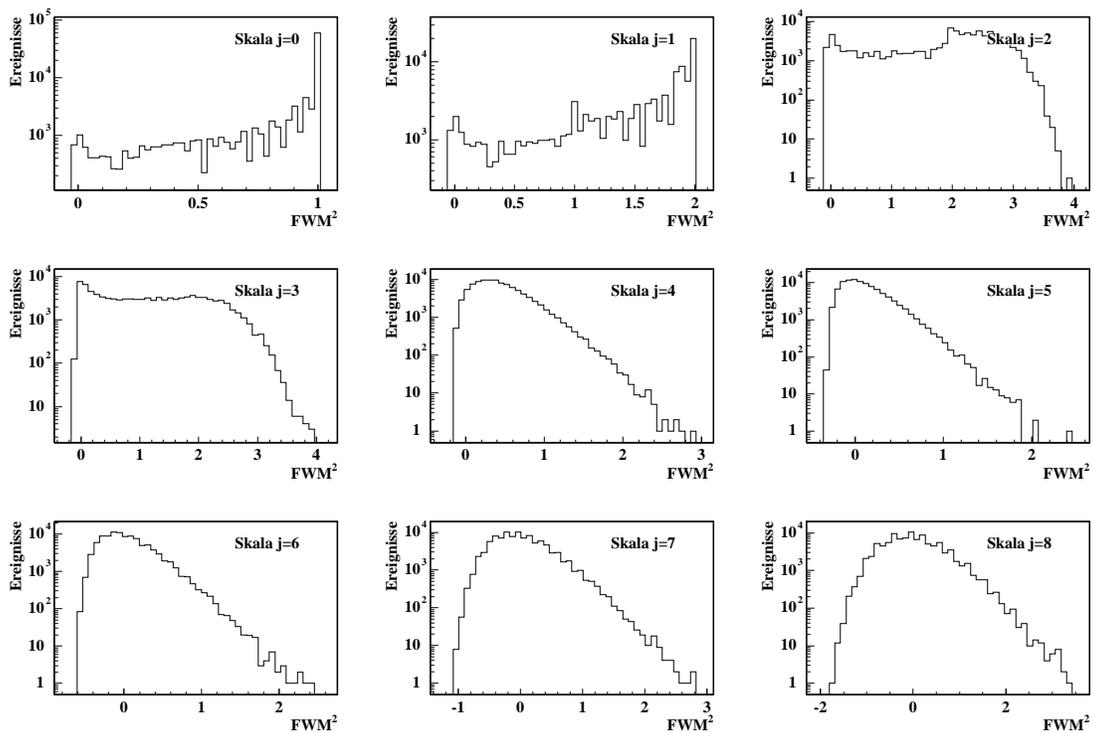


Abbildung B.72 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).

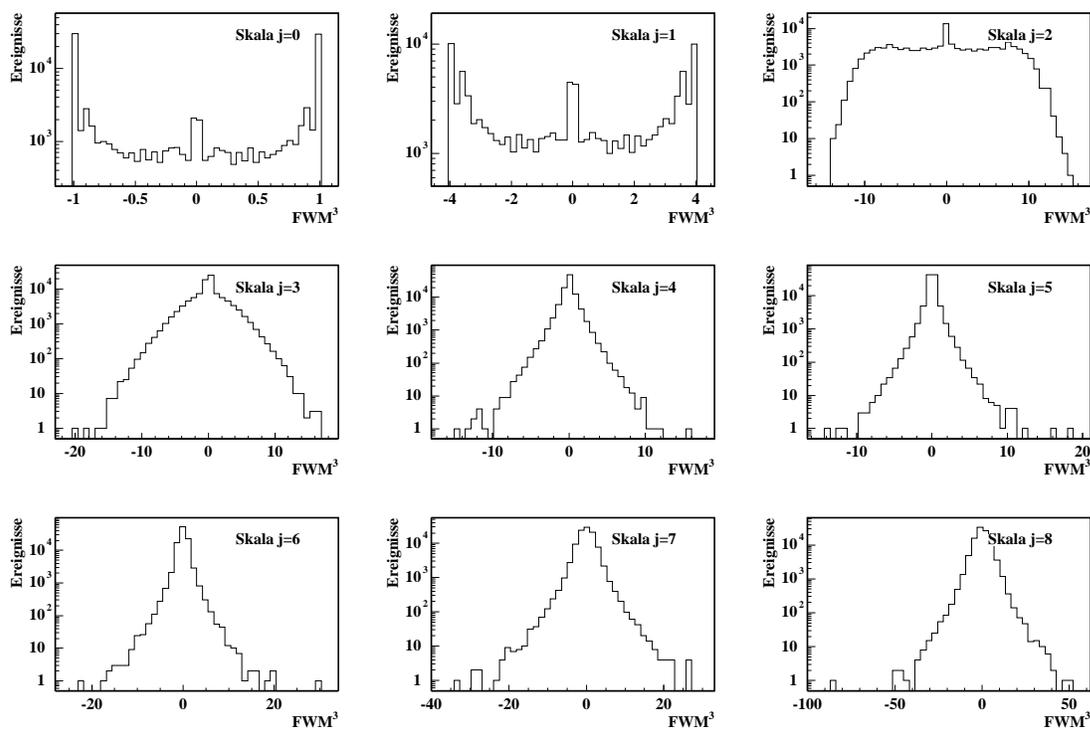


Abbildung B.73 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).

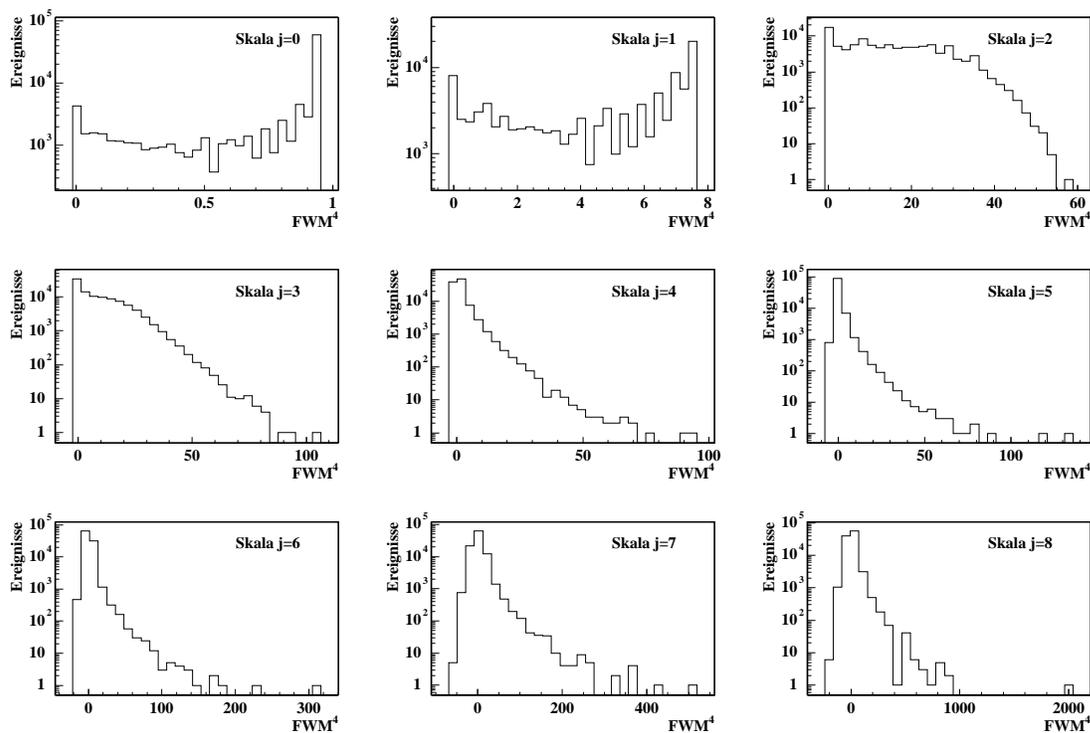


Abbildung B.74 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).

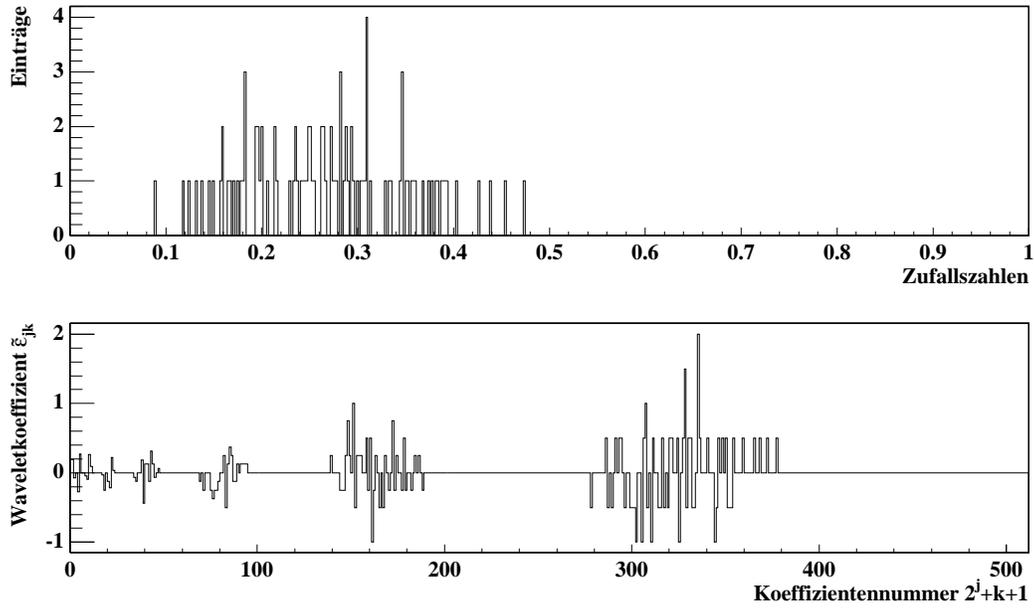


Abbildung B.75 Gaußverteiltas Zufallsereignis ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$) und dessen Waveletkoeffizienten.

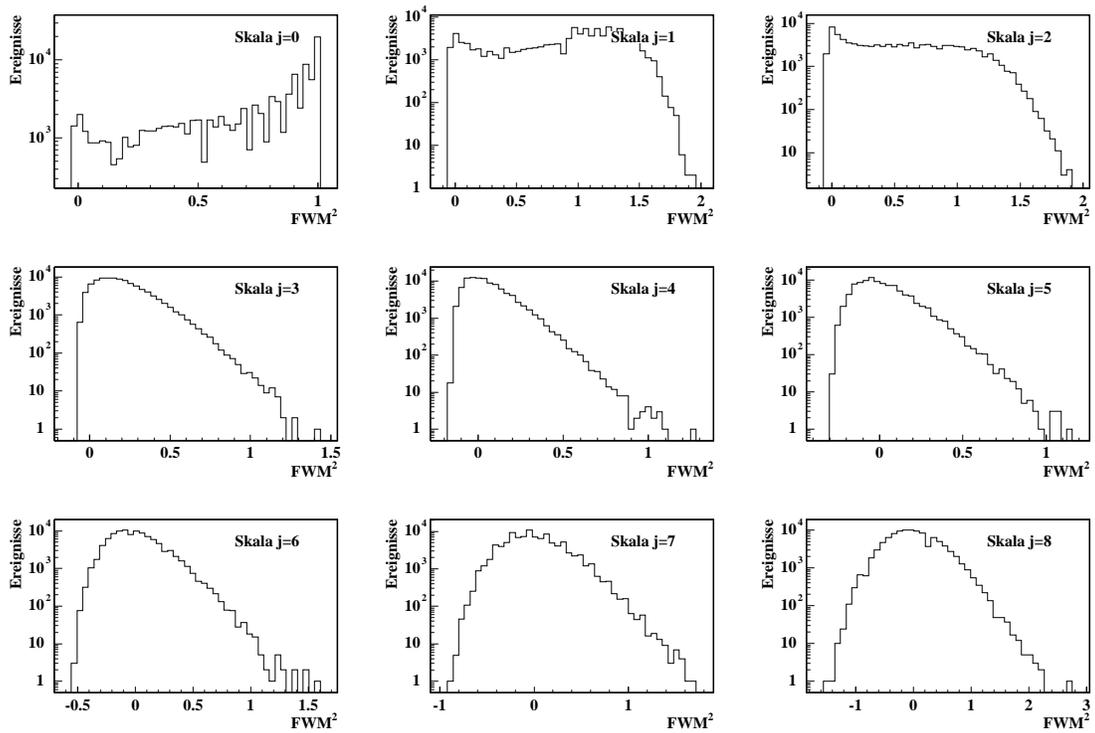


Abbildung B.76 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).

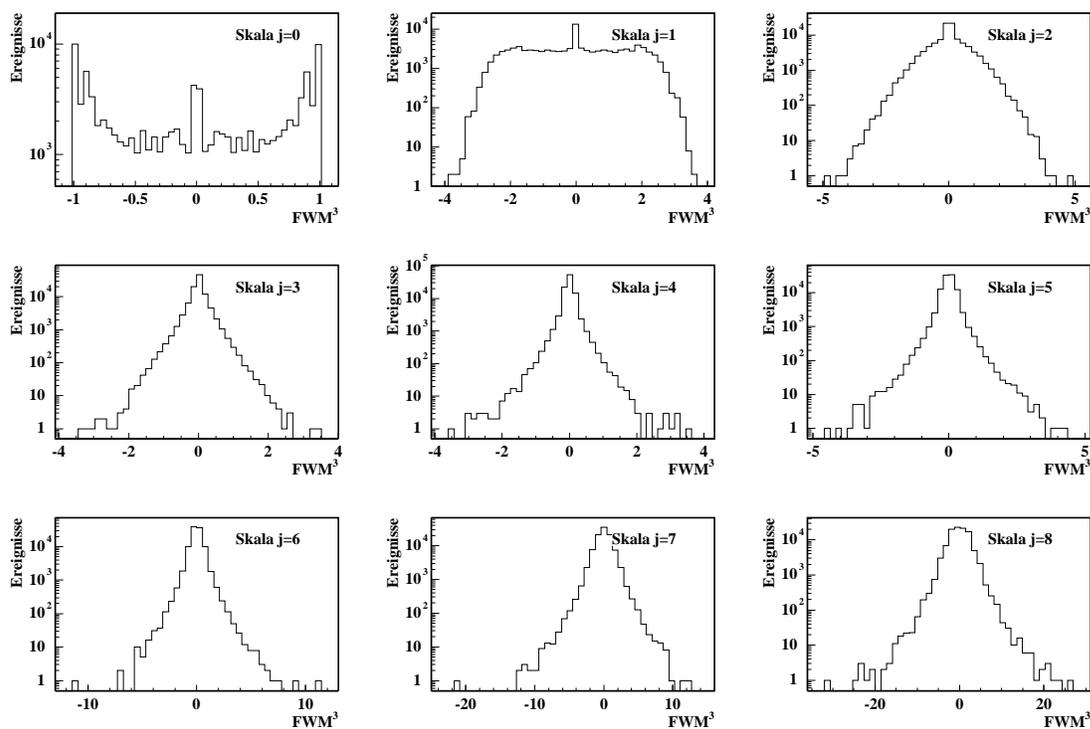


Abbildung B.77 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).

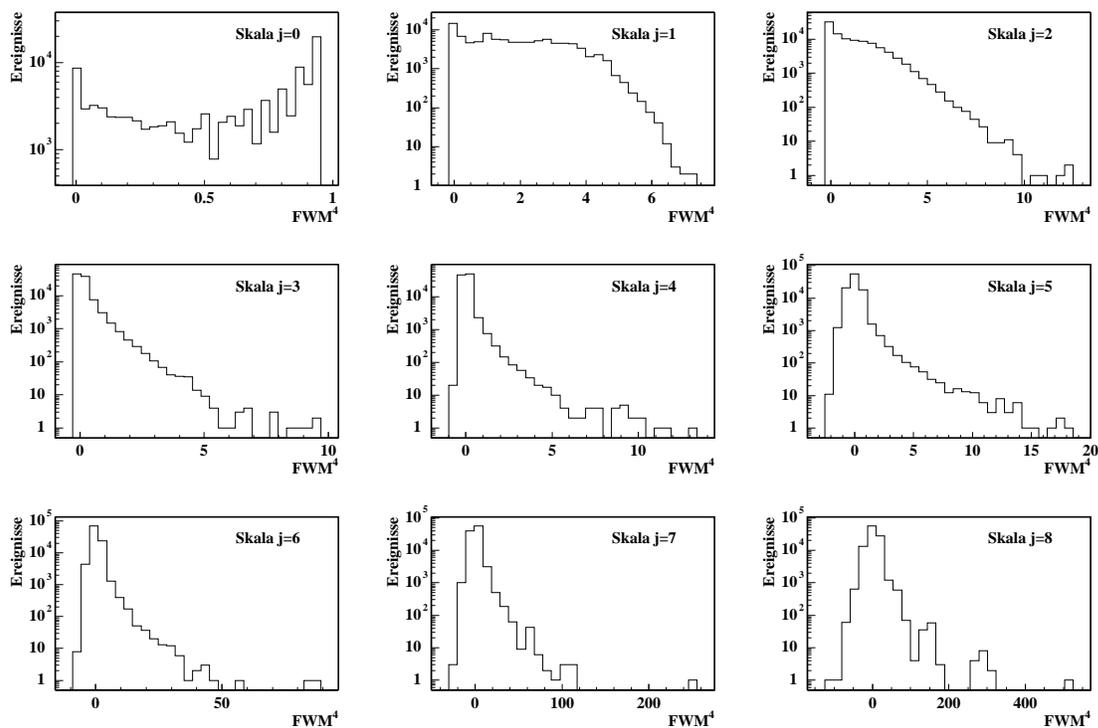


Abbildung B.78 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).

B.2.2 Gaußanpassungen

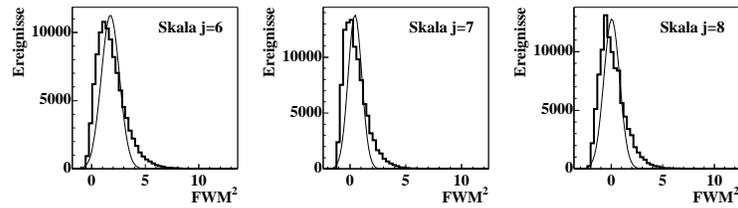


Abbildung B.79 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$.

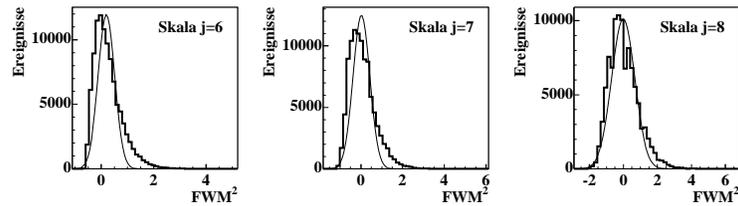


Abbildung B.80 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$.

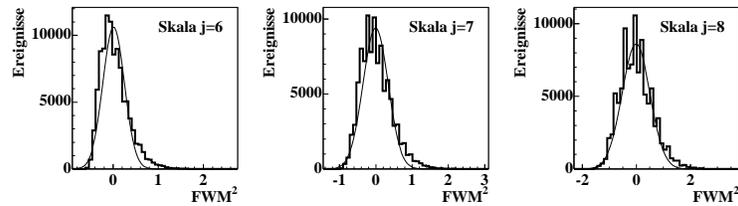


Abbildung B.81 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$.

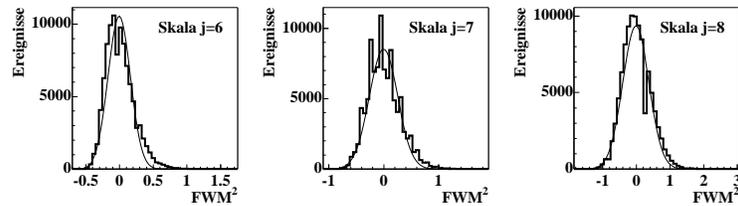


Abbildung B.82 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$.

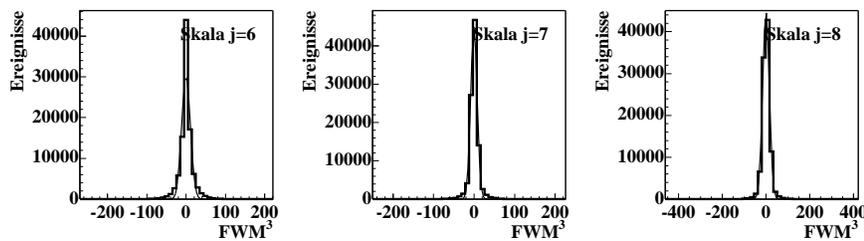


Abbildung B.83 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$.

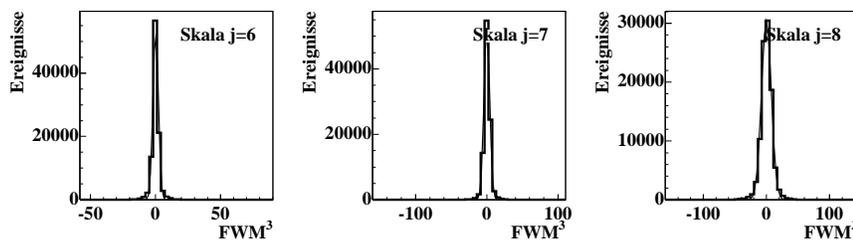


Abbildung B.84 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$.

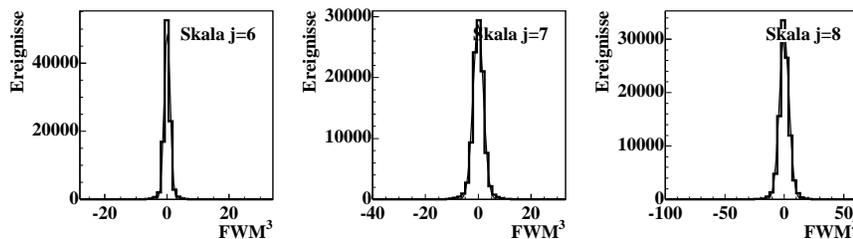


Abbildung B.85 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$.

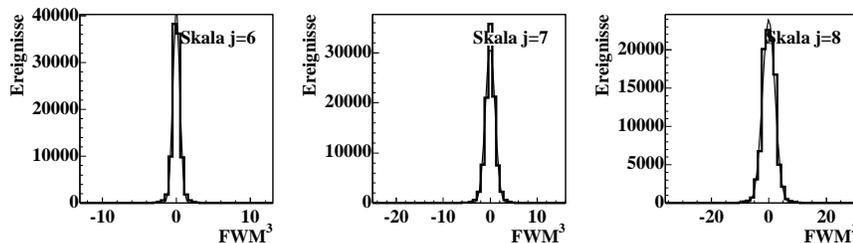


Abbildung B.86 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$.

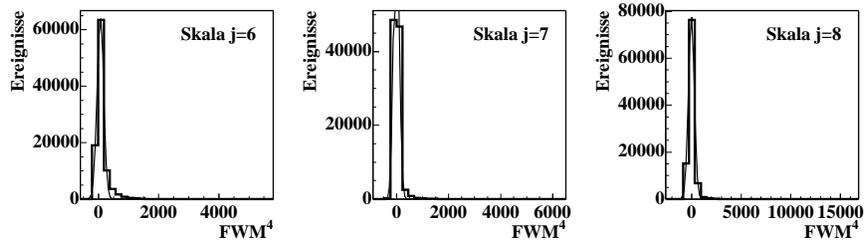


Abbildung B.87 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$.

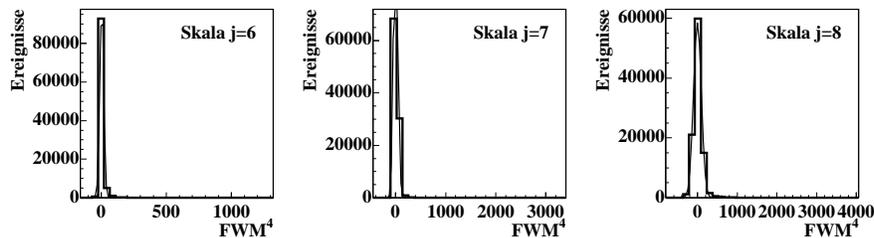


Abbildung B.88 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$.

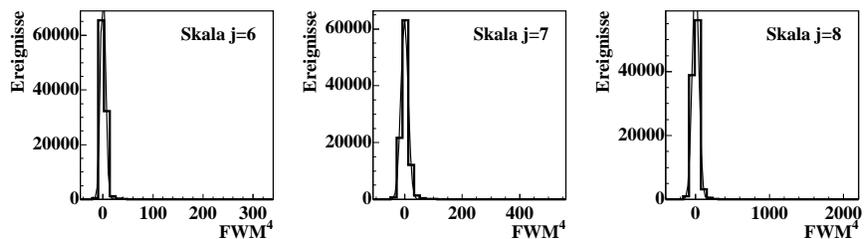


Abbildung B.89 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$.

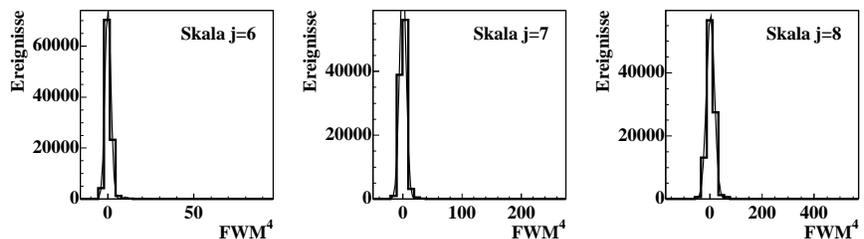


Abbildung B.90 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$.

B.2.3 Verteilungsbreiten in Abhängigkeit von den Ausgangsbreiten $\sigma(\sigma_G)$

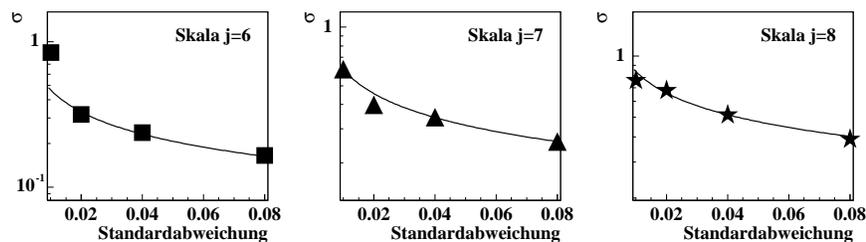


Abbildung B.91 Abhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von der Breite der gaußschen Eingangsverteilung, Anpassung mit zwei freien Parametern.

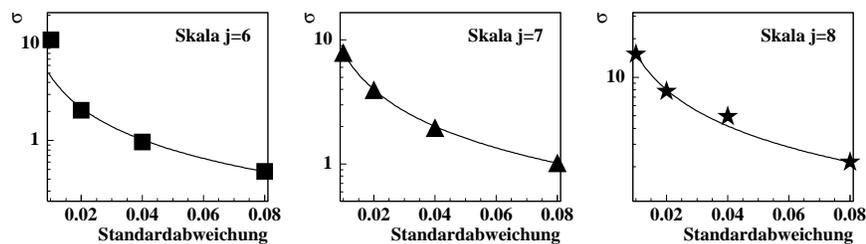


Abbildung B.92 Abhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von der Breite der gaußschen Eingangsverteilung, Anpassung mit zwei freien Parametern.

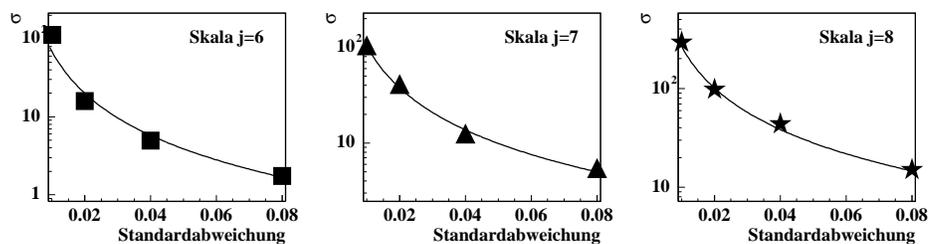


Abbildung B.93 Abhängigkeit der Verteilungsbreite faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von der Breite der gaußschen Eingangsverteilung, Anpassung mit zwei freien Parametern.

B.3 Gaußverteilte Zufallseinträge mit Untergrund

B.3.1 Faktorielle Waveletmomente

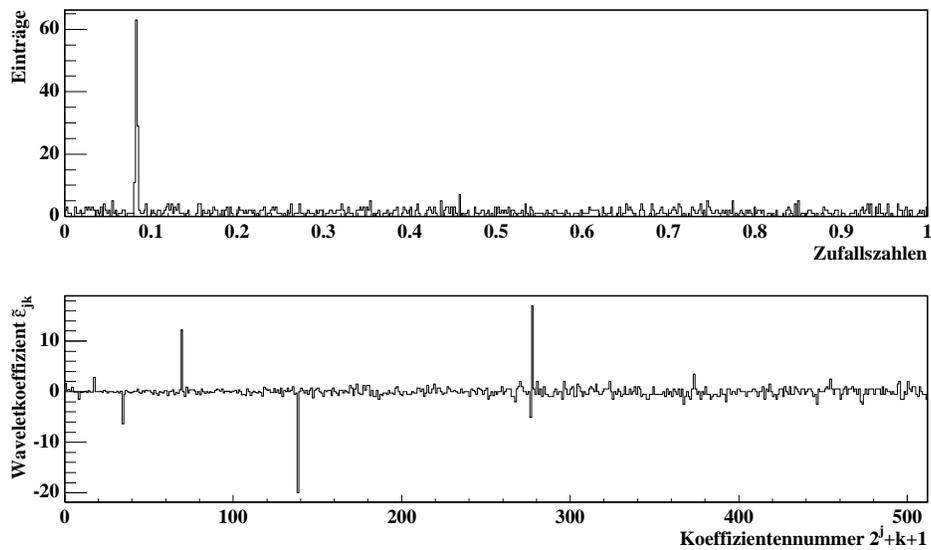


Abbildung B.94 100 gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$) mit 700 Einträgen Untergrund.

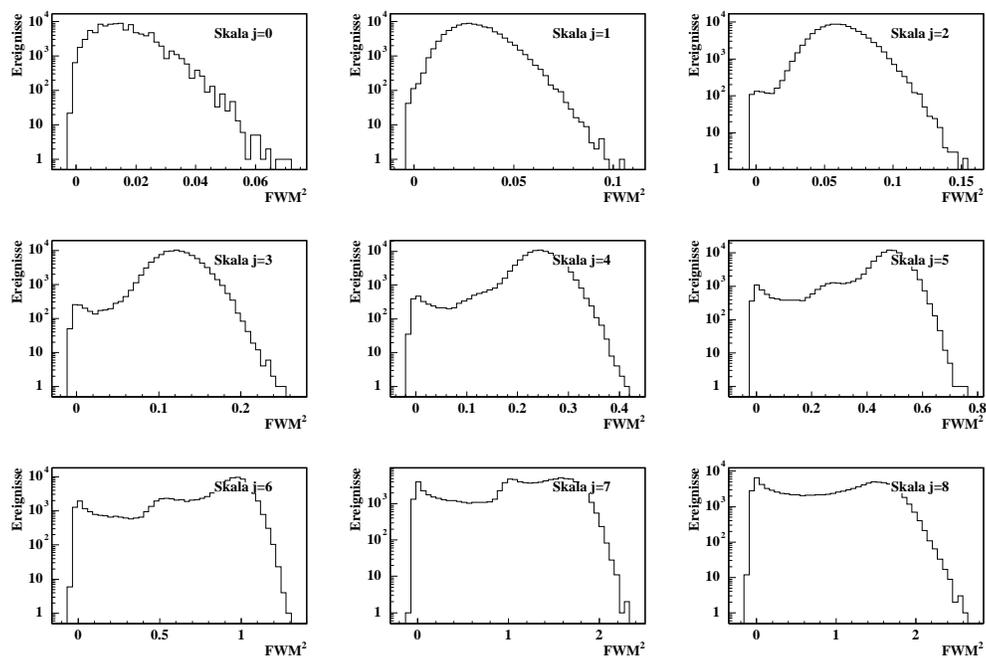


Abbildung B.95 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

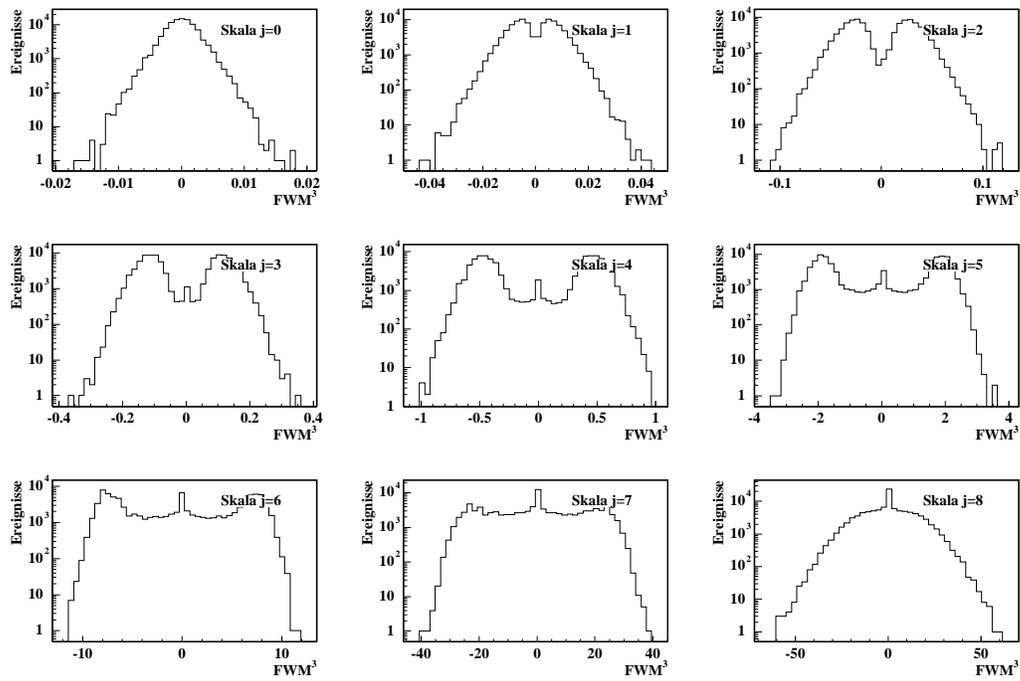


Abbildung B.96 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($100/700, \sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

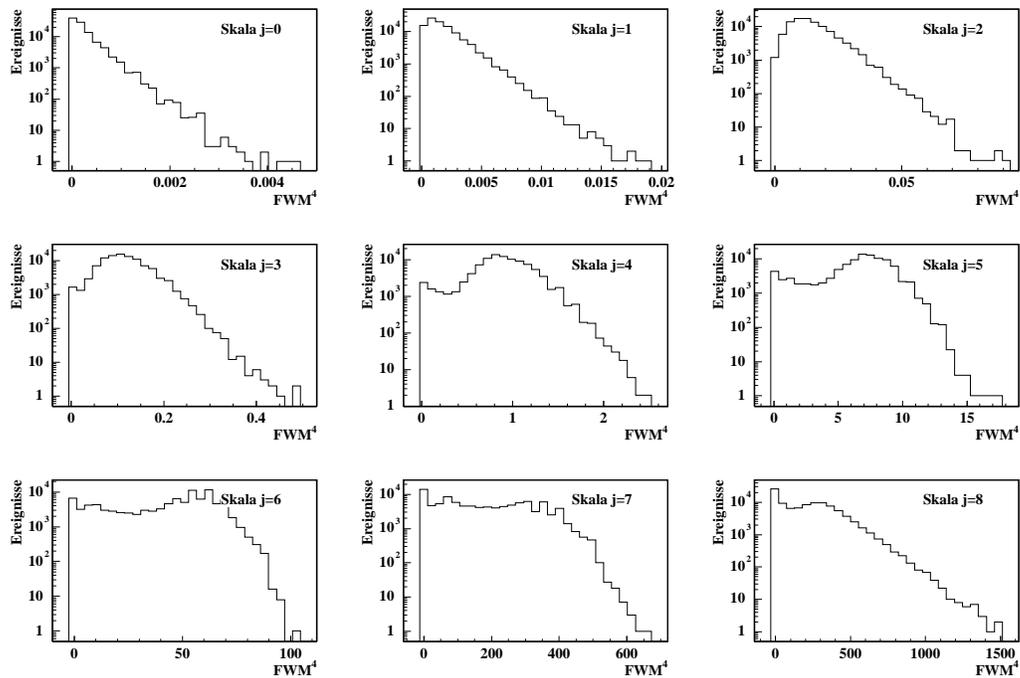


Abbildung B.97 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($100/700, \sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

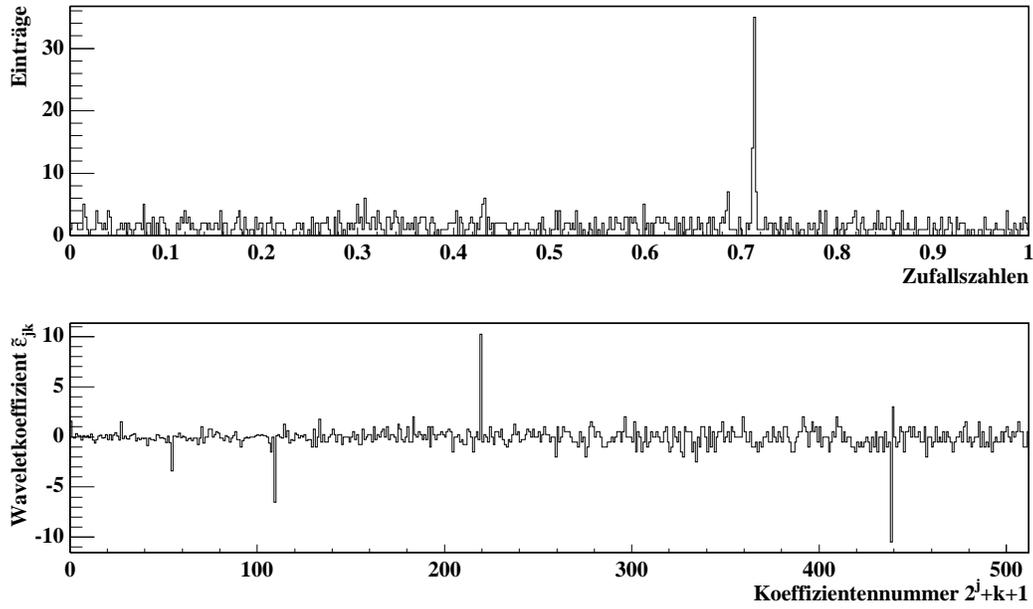


Abbildung B.98 50 gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$) mit 750 Einträgen Untergrund.

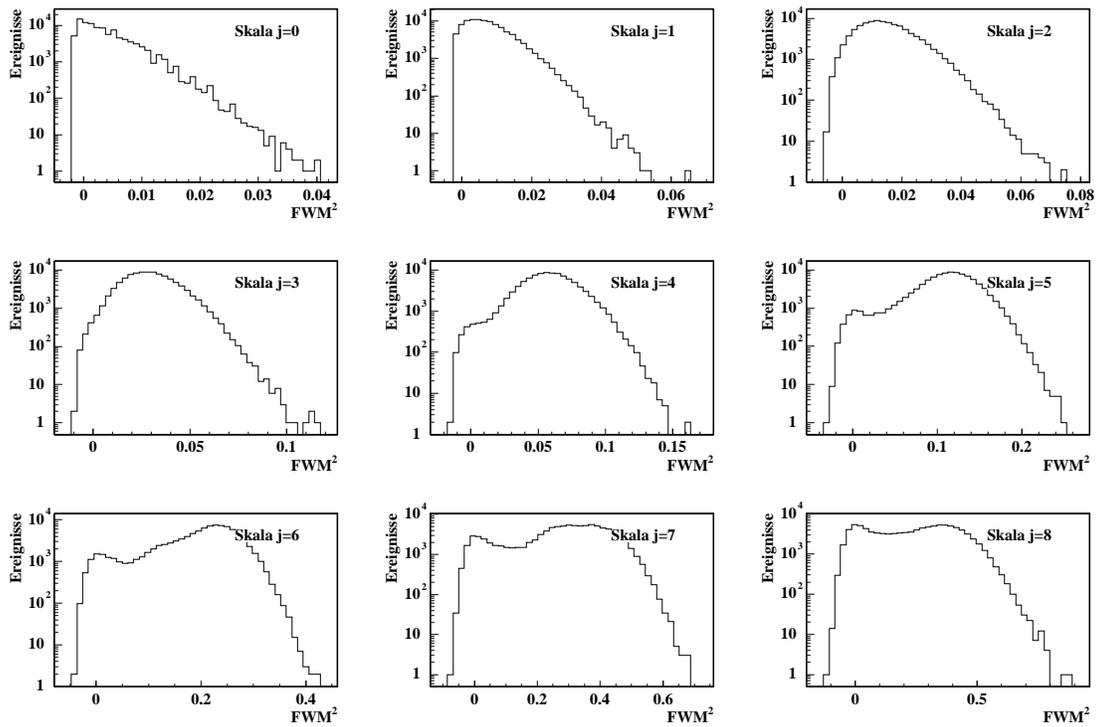


Abbildung B.99 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($50/750$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

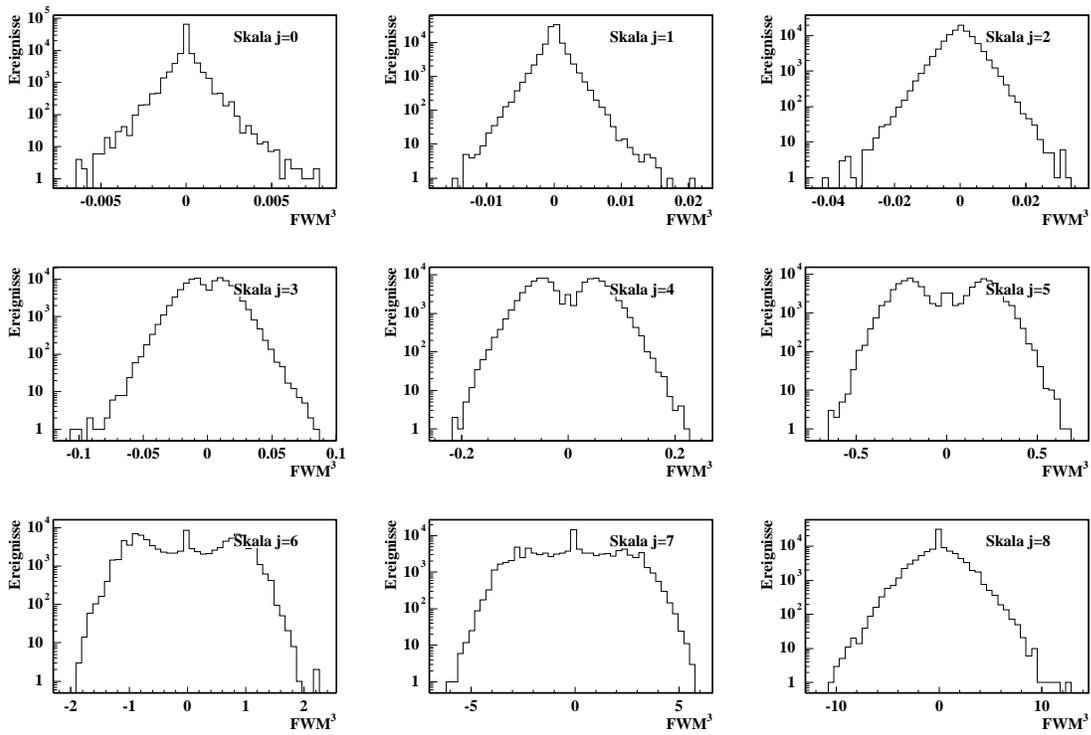


Abbildung B.100 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

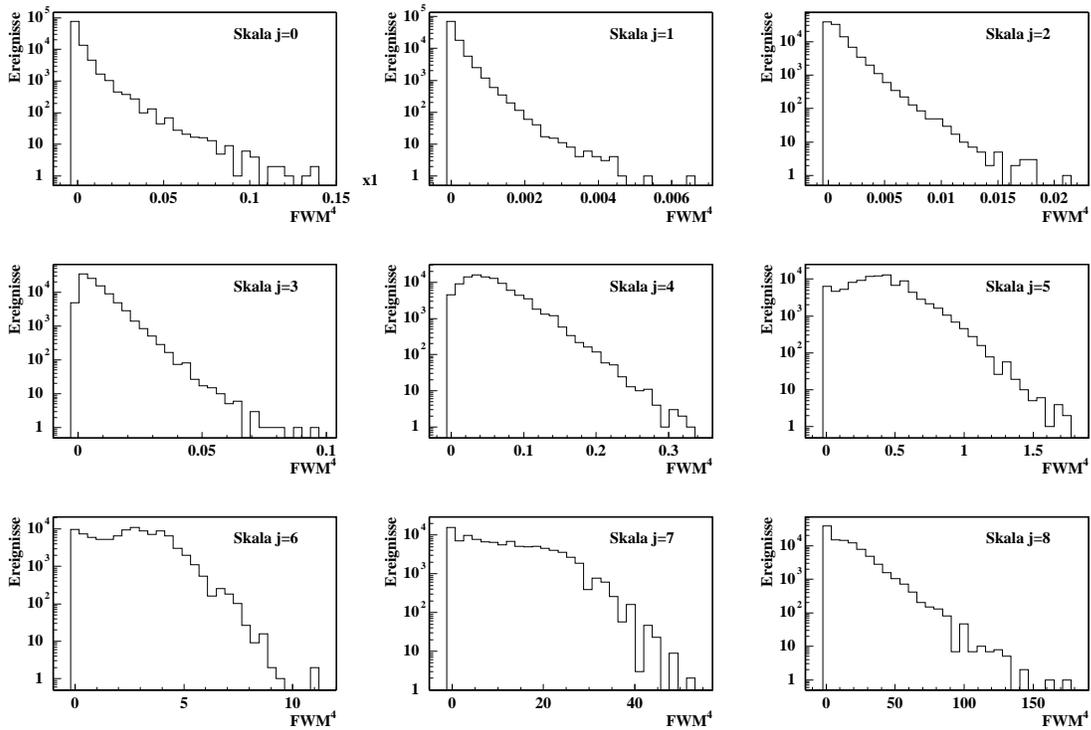


Abbildung B.101 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

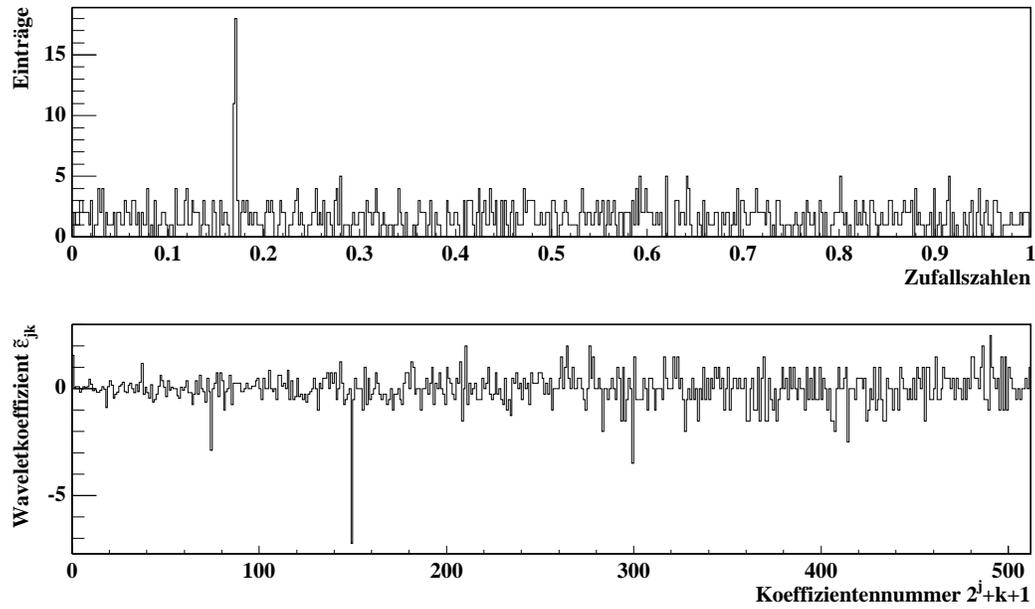


Abbildung B.102 25 gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$) mit 775 Einträgen Untergrund.

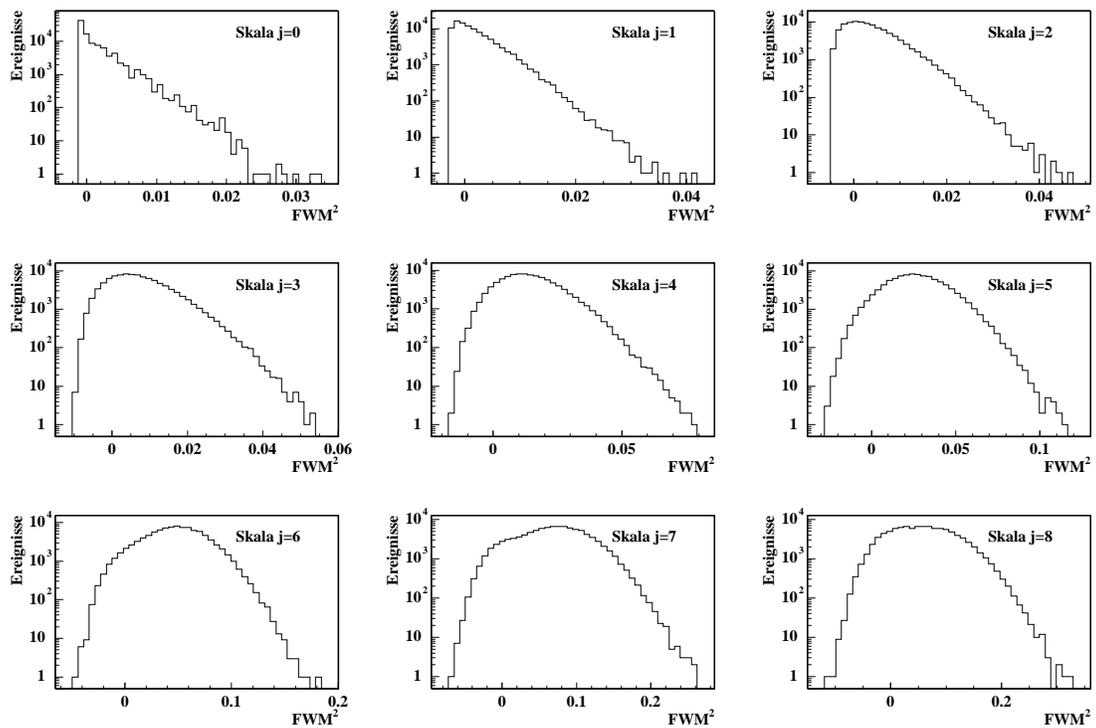


Abbildung B.103 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($25/775$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

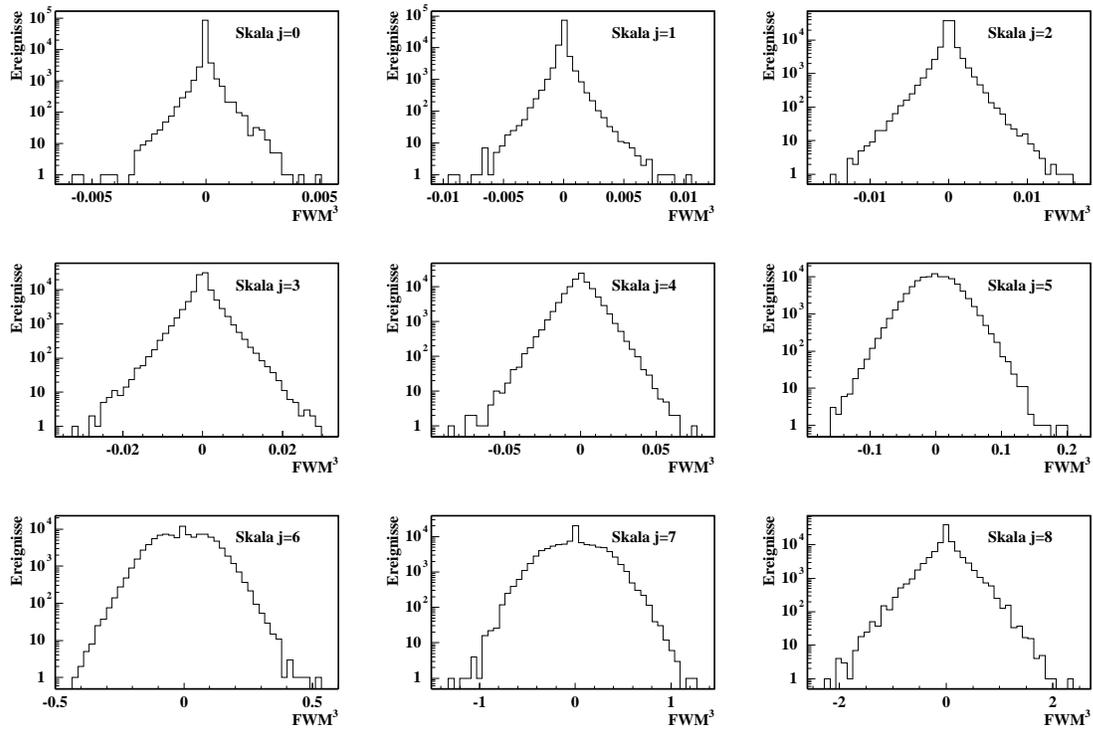


Abbildung B.104 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($25/775$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

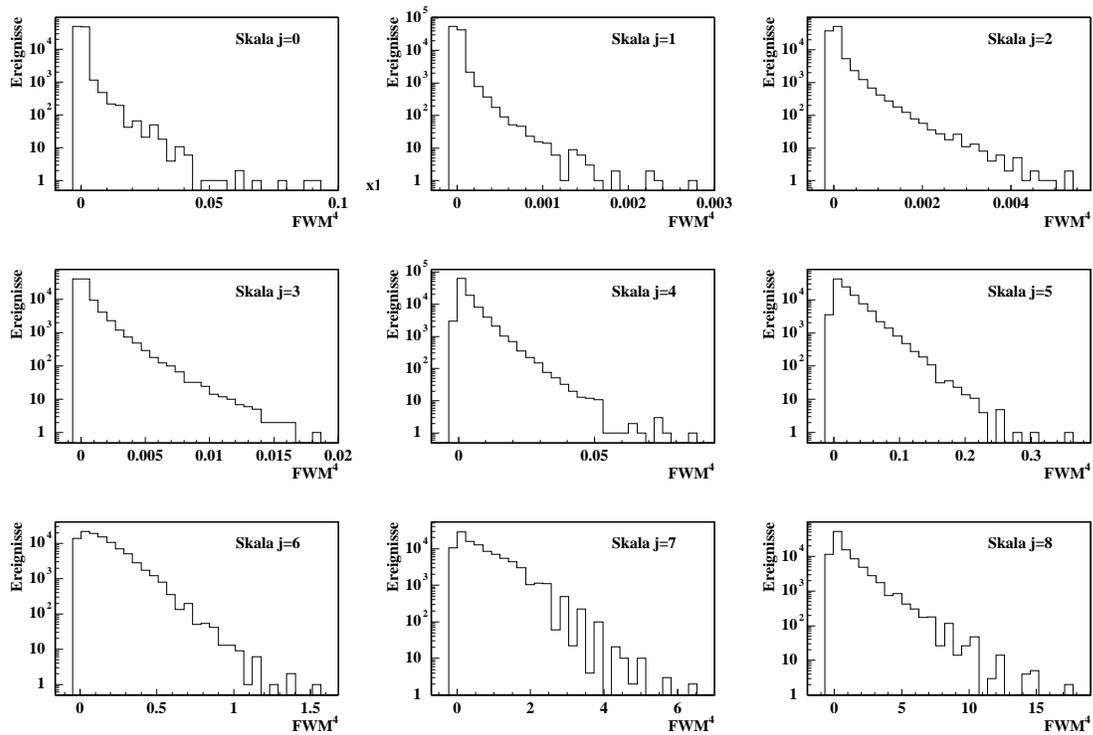


Abbildung B.105 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($25/775$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

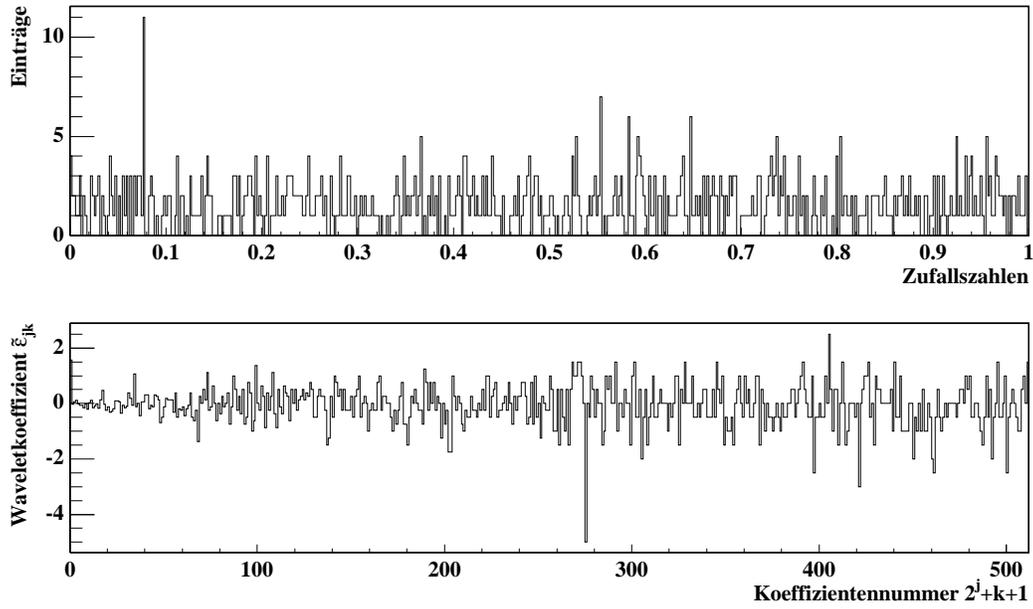


Abbildung B.106 10 gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$) mit 790 Einträgen Untergrund.

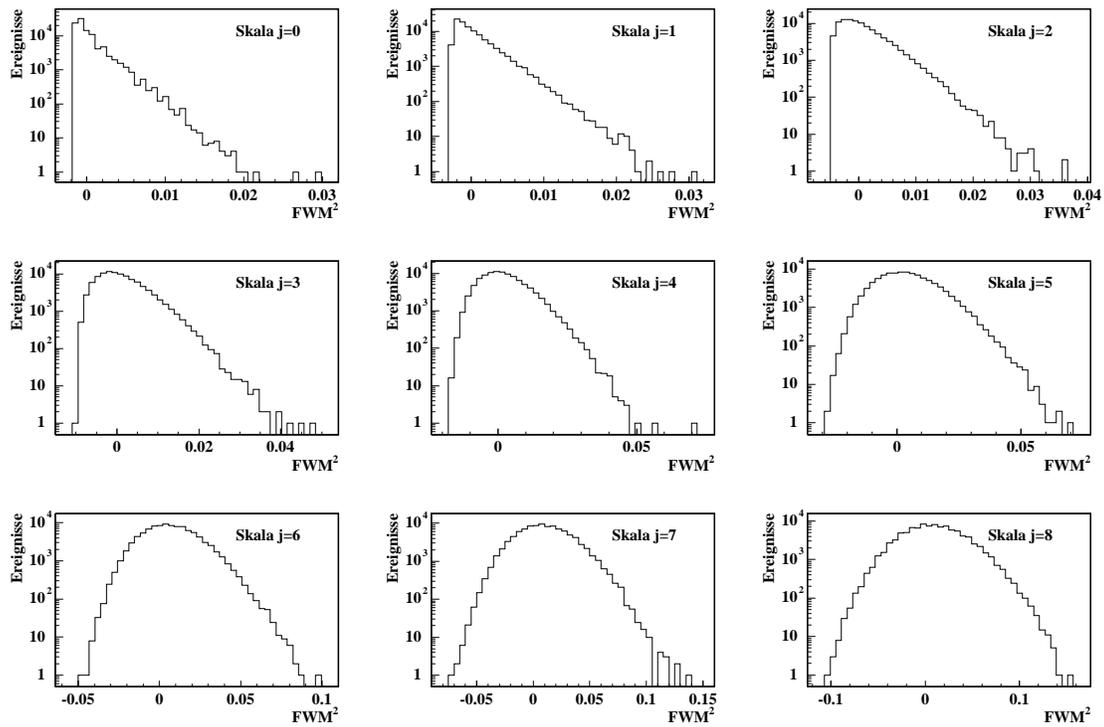


Abbildung B.107 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($10/790$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

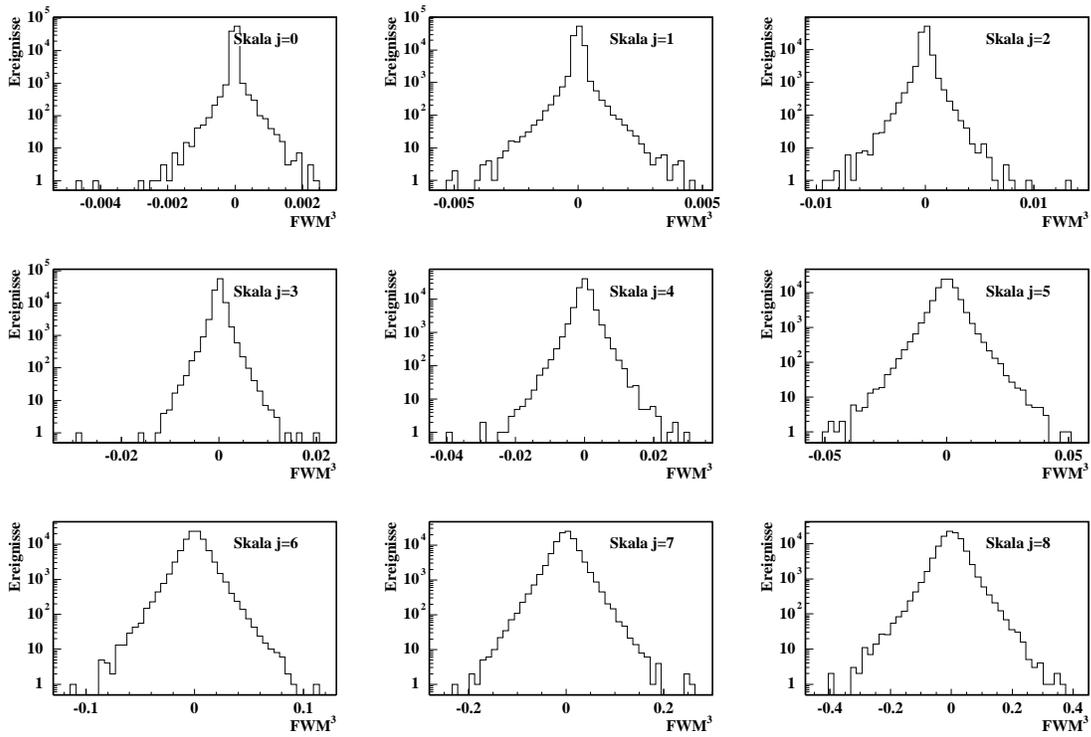


Abbildung B.108 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($10/790, \sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

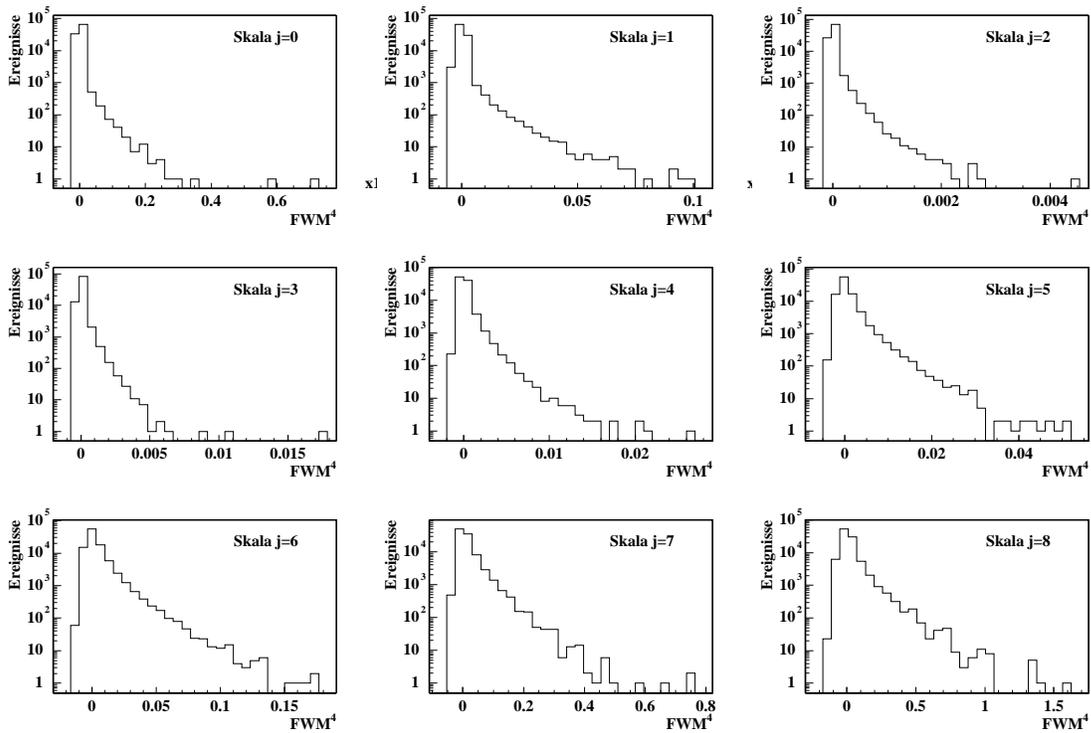


Abbildung B.109 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($10/790, \sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).

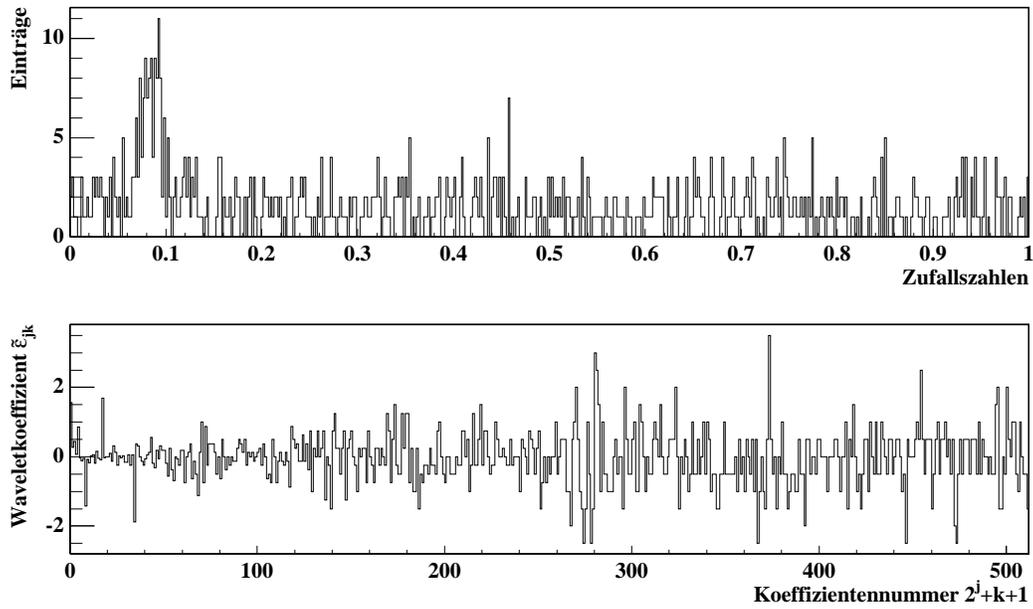


Abbildung B.110 100 gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$) mit 700 Einträgen Untergrund.

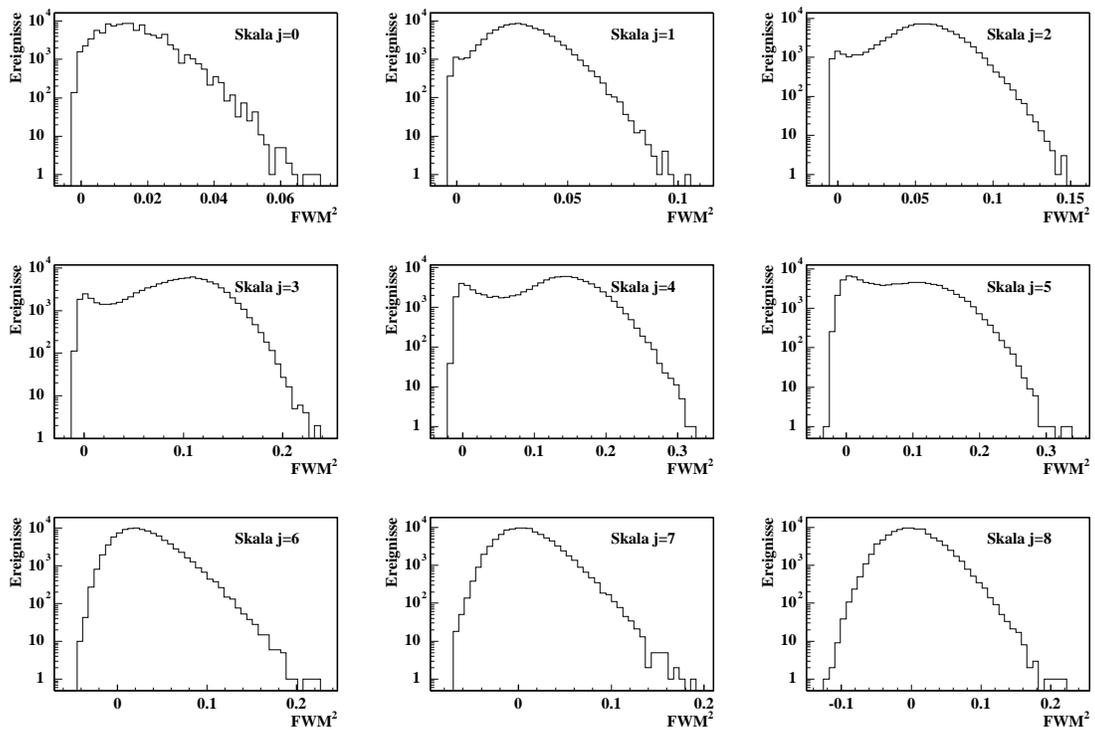


Abbildung B.111 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($100/700$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

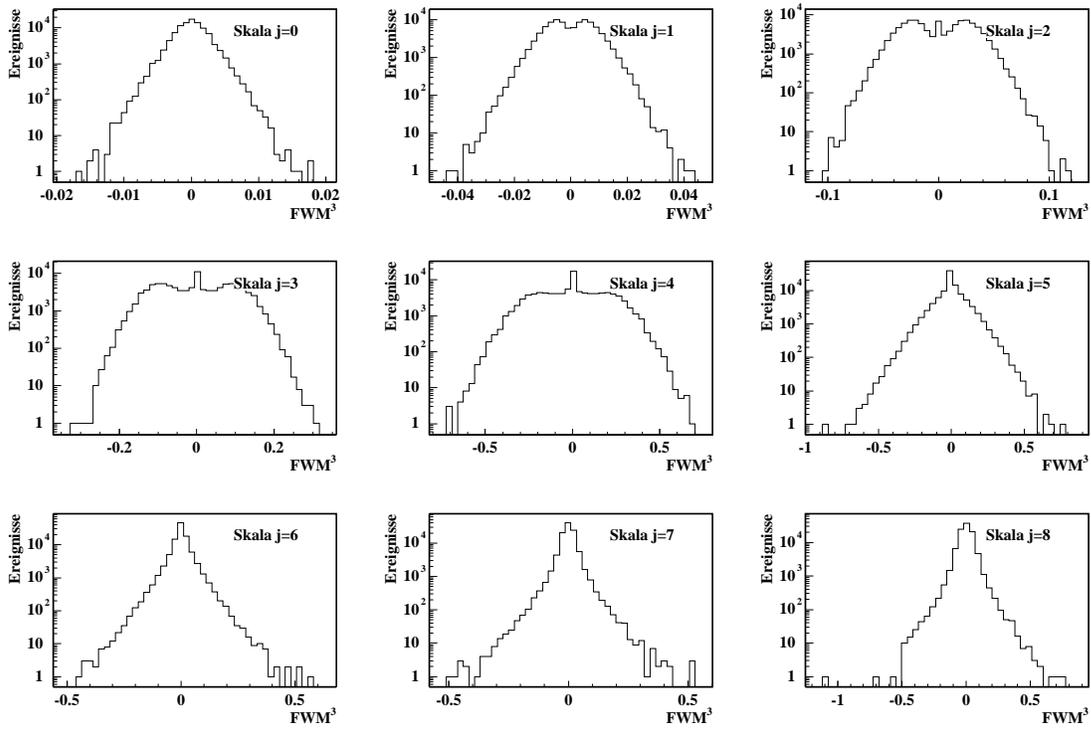


Abbildung B.112 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($100/700, \sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

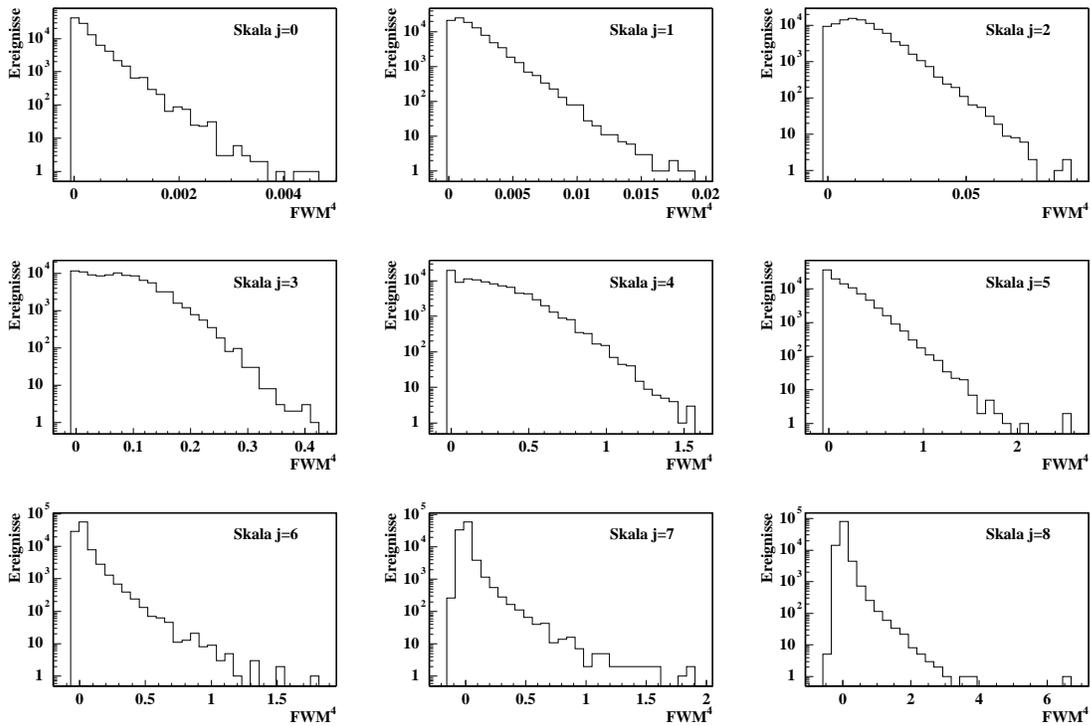


Abbildung B.113 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($100/700, \sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

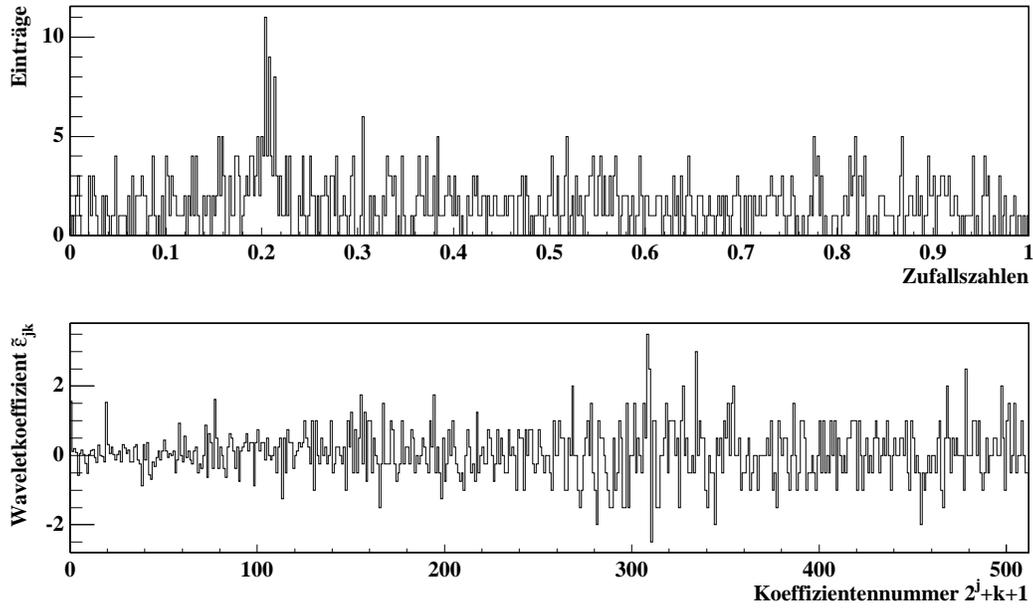


Abbildung B.114 50 gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$) mit 750 Einträgen Untergrund.

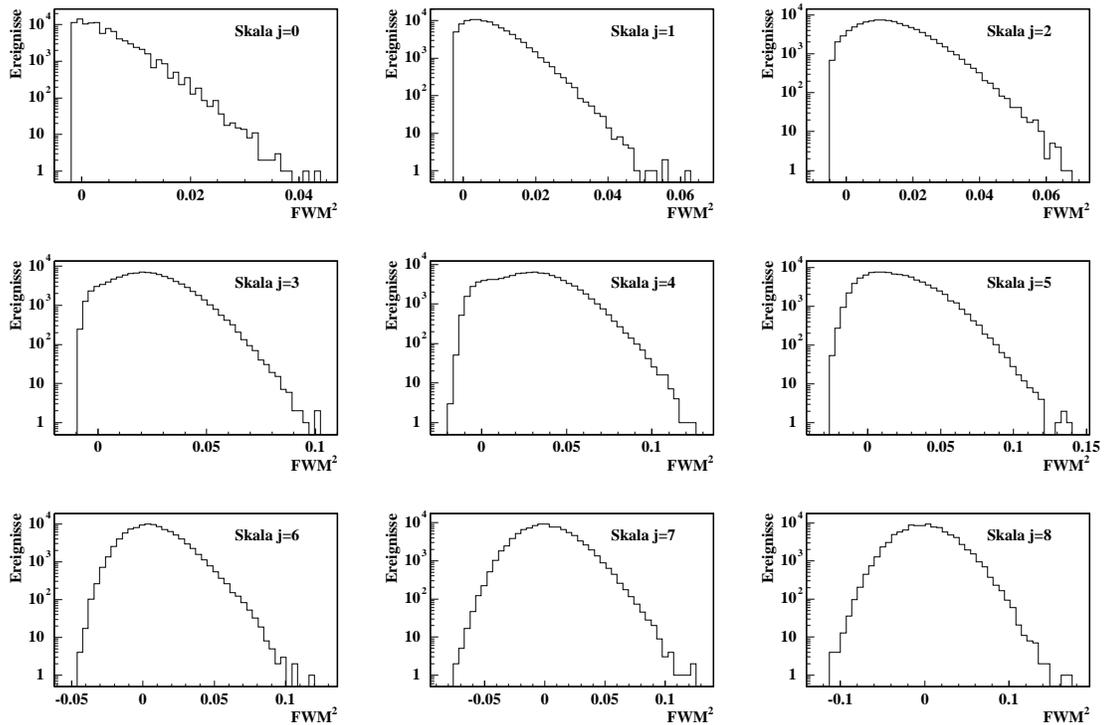


Abbildung B.115 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

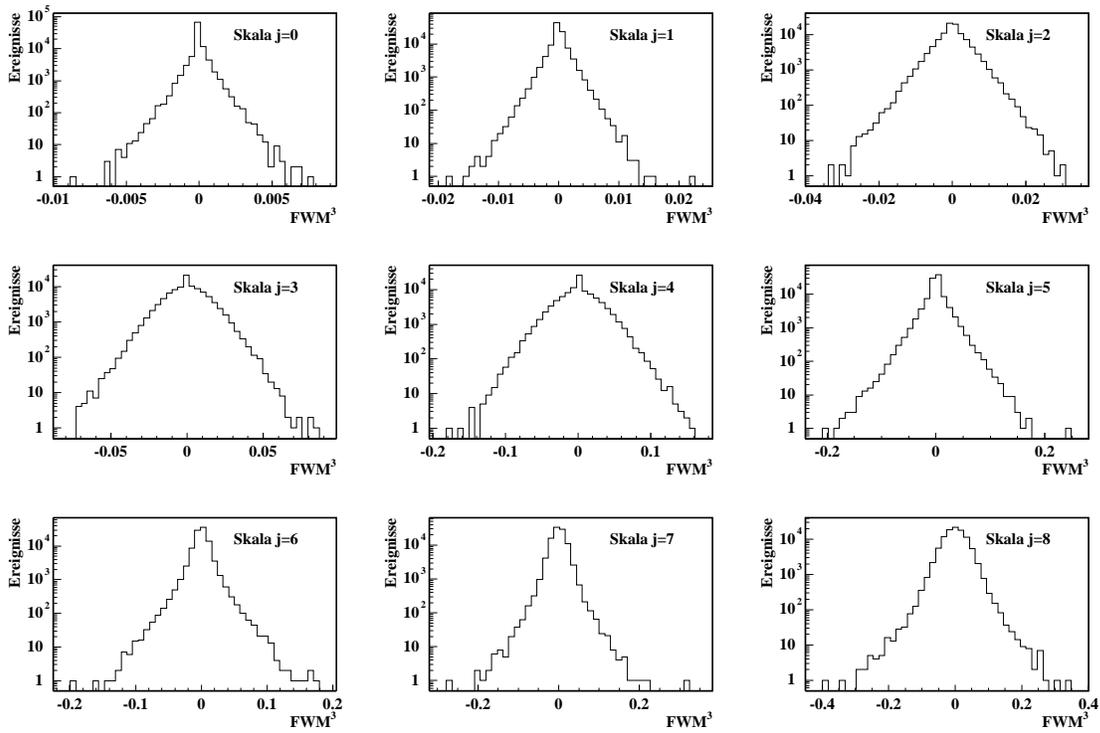


Abbildung B.116 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

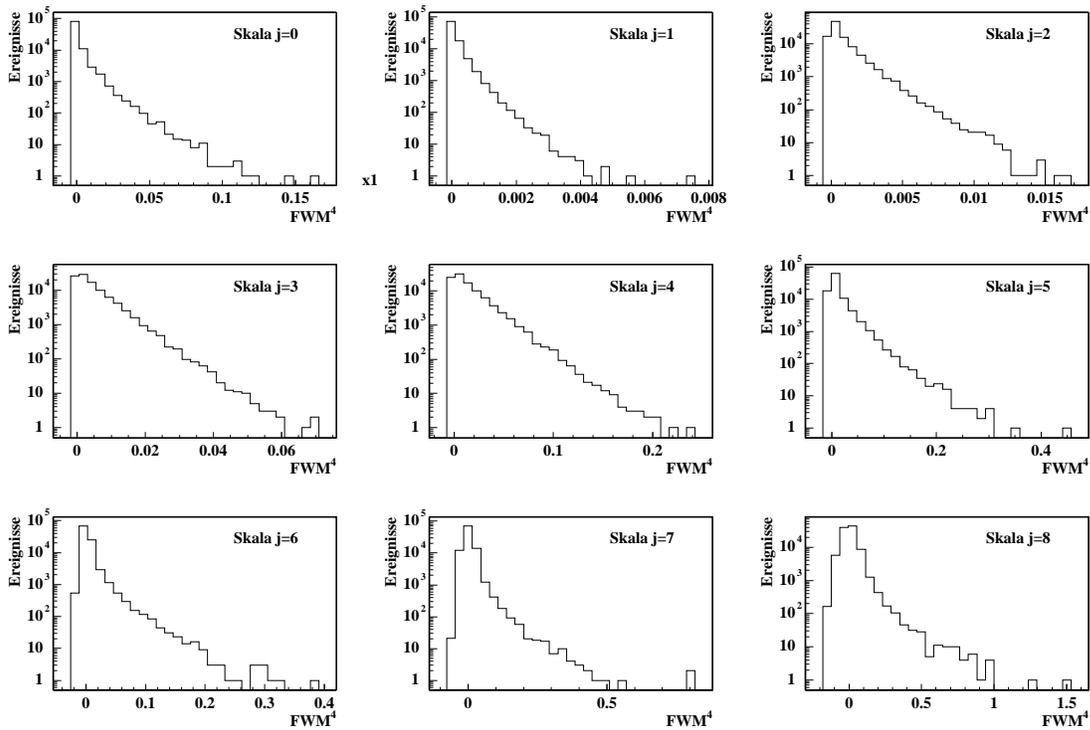


Abbildung B.117 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

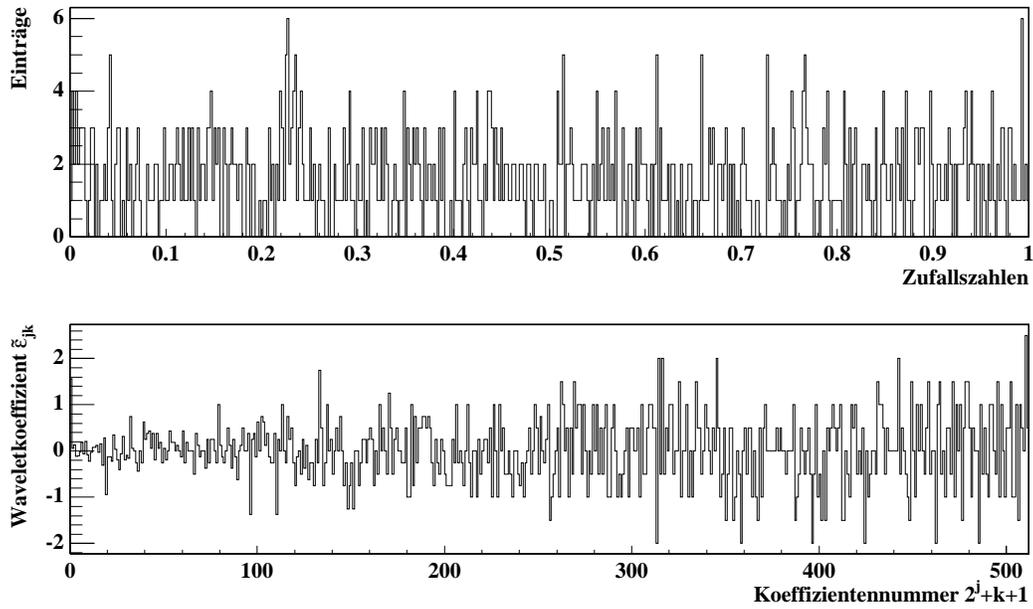


Abbildung B.118 25 gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$) mit 775 Einträgen Untergrund.

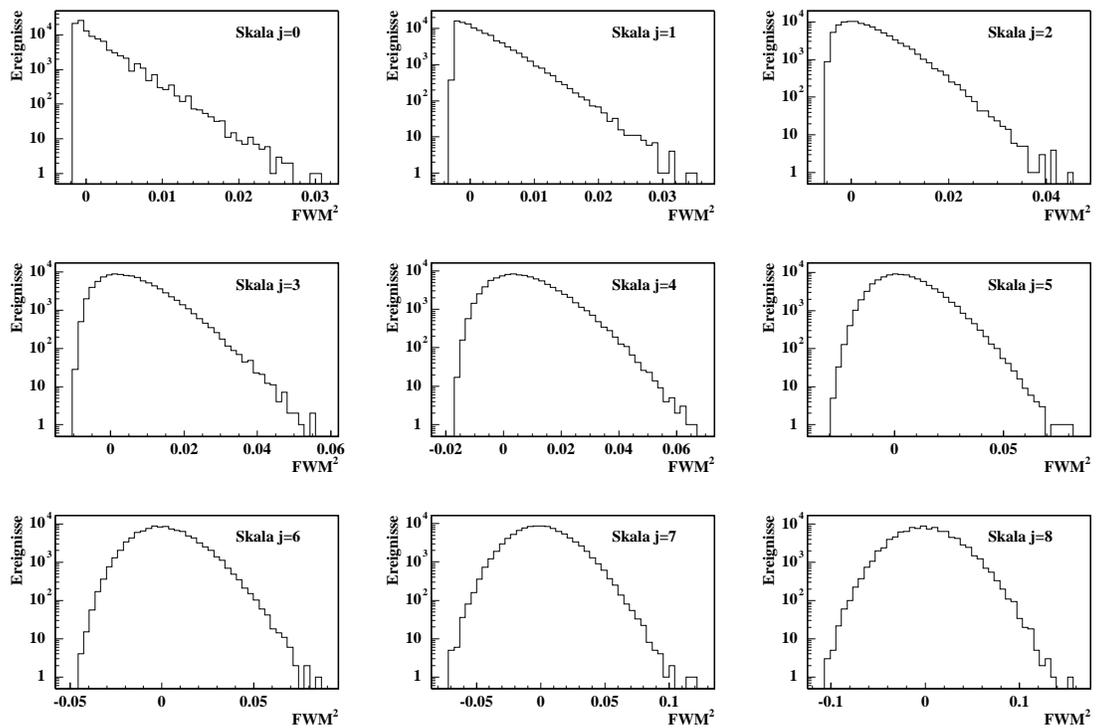


Abbildung B.119 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($25/775$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

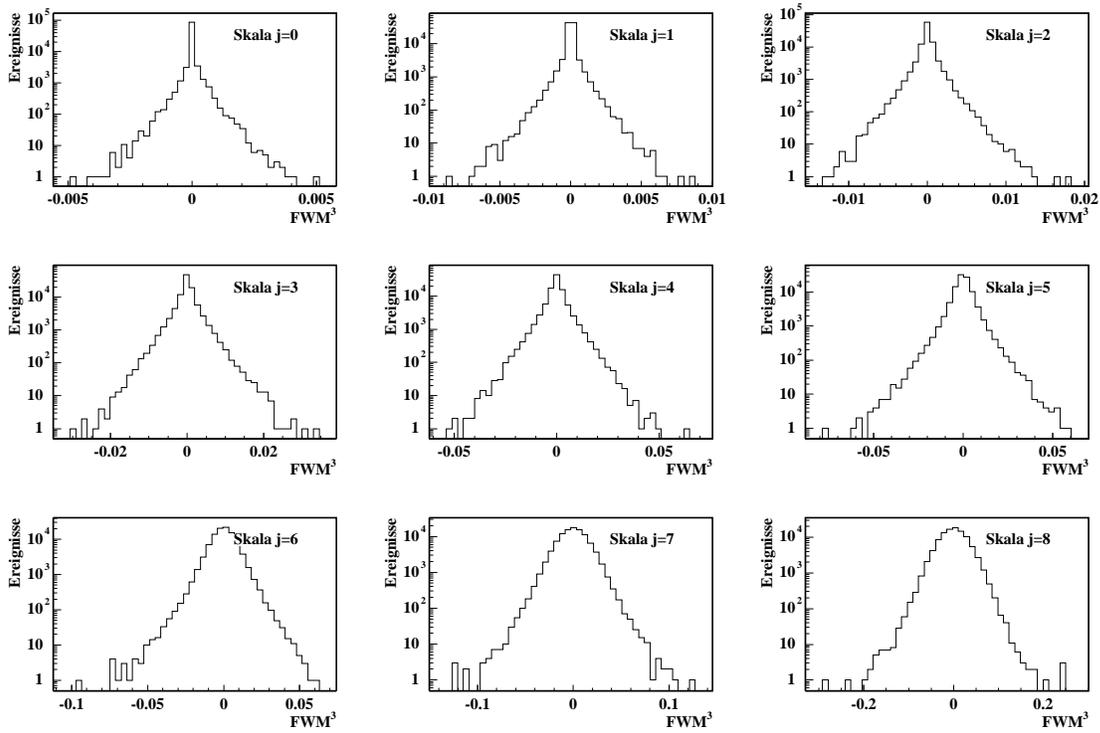


Abbildung B.120 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($25/775$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

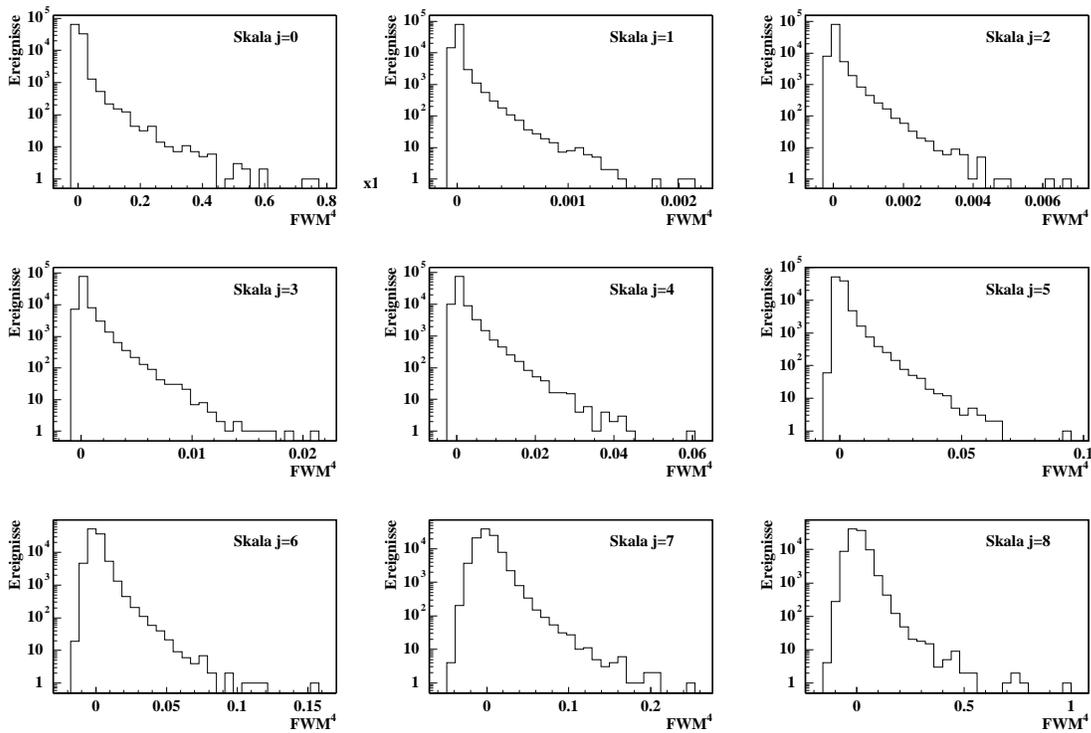


Abbildung B.121 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($25/775$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

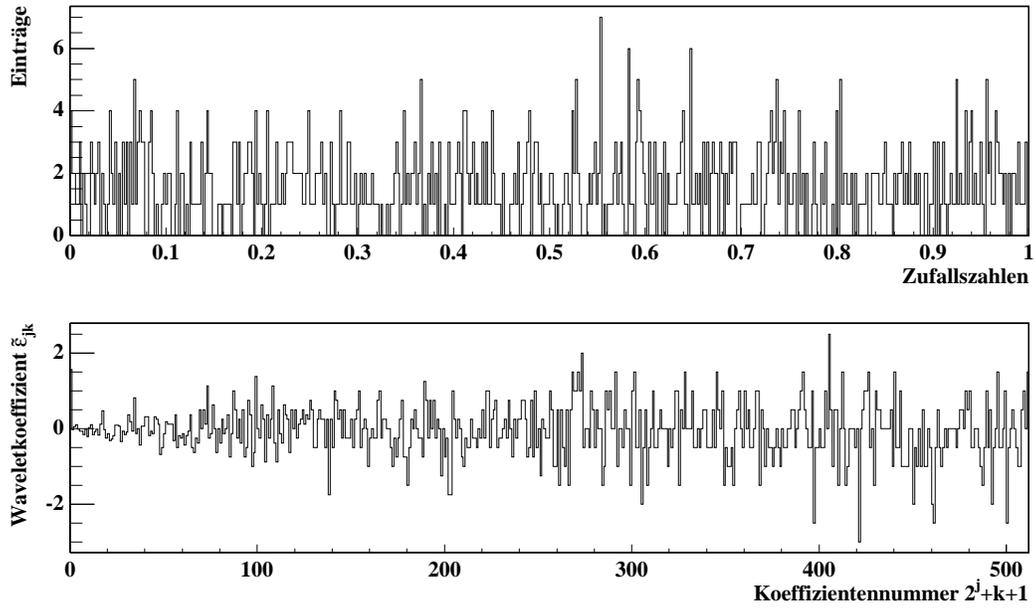


Abbildung B.122 10 gaußverteilte Zufallseinträge ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$) mit 790 Einträgen Untergrund.

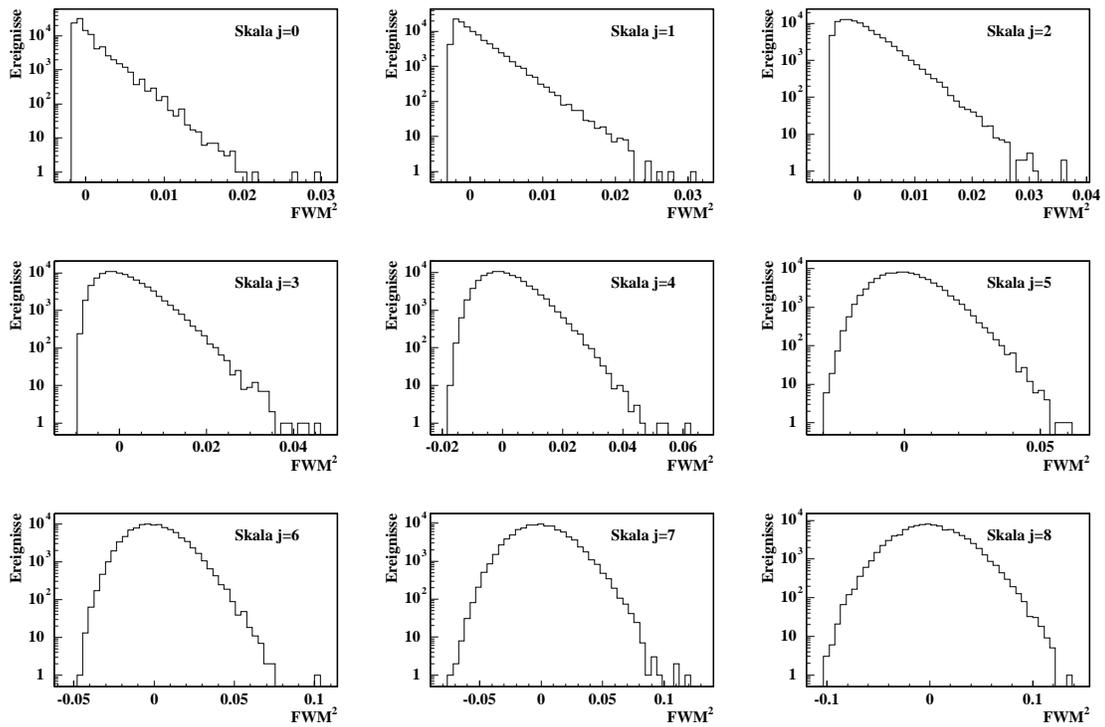


Abbildung B.123 Faktorielle Waveletmomente 2. Ordnung ($10/790$, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

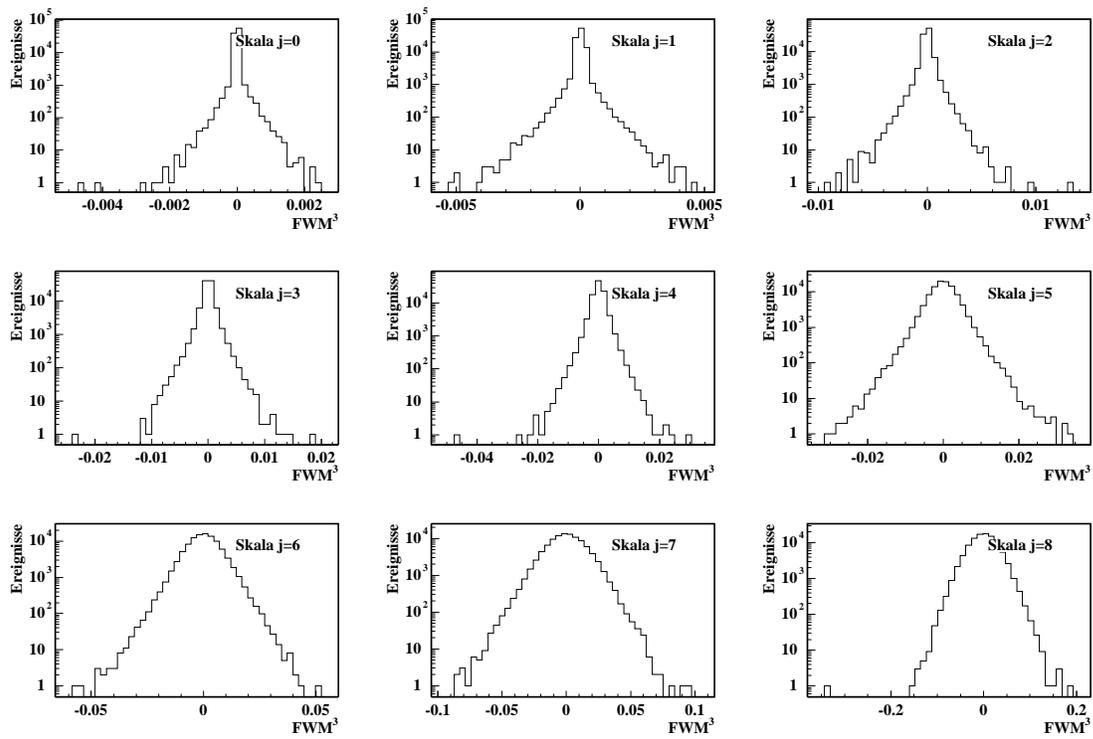


Abbildung B.124 Faktorielle Waveletmomente 3. Ordnung ($10/790, \sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

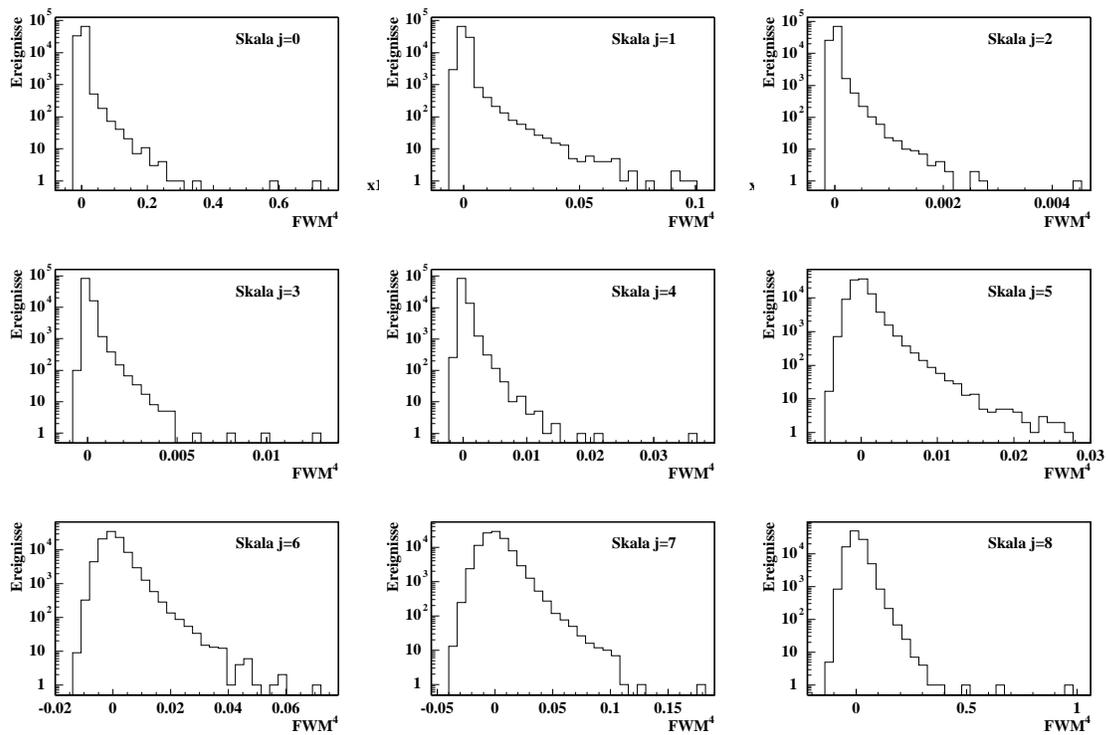


Abbildung B.125 Faktorielle Waveletmomente 4. Ordnung ($10/790, \sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).

B.3.2 Gaußanpassungen

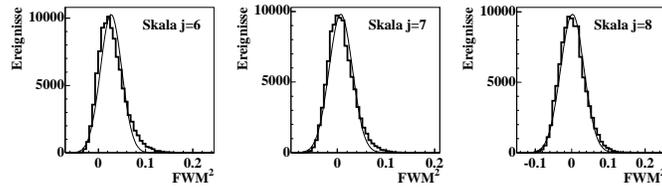


Abbildung B.126 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{100}{700}$.

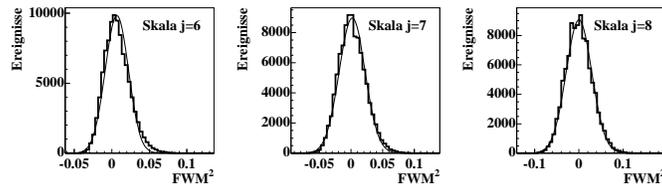


Abbildung B.127 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{50}{750}$.

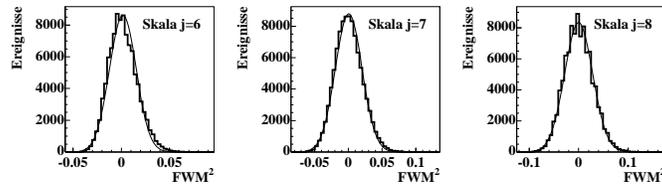


Abbildung B.128 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{25}{775}$.

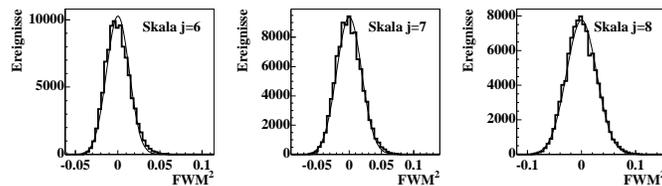


Abbildung B.129 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{10}{790}$.

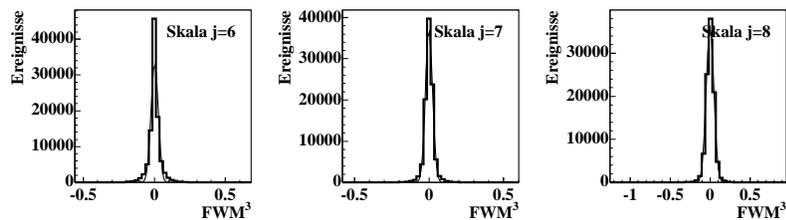


Abbildung B.130 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{100}{700}$.

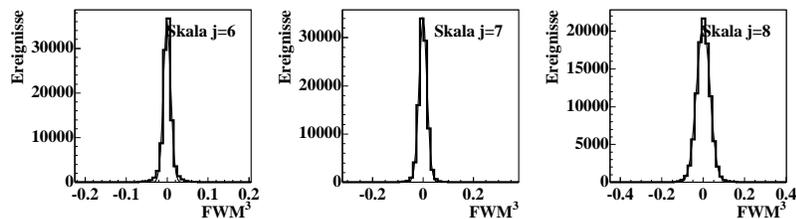


Abbildung B.131 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{50}{750}$.

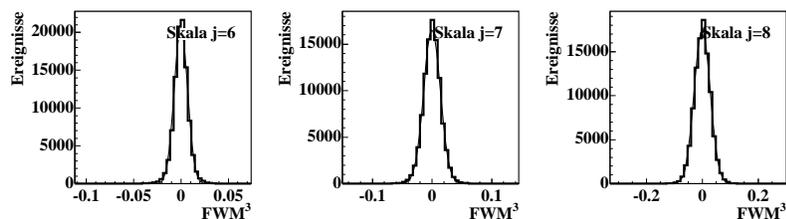


Abbildung B.132 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{25}{775}$.

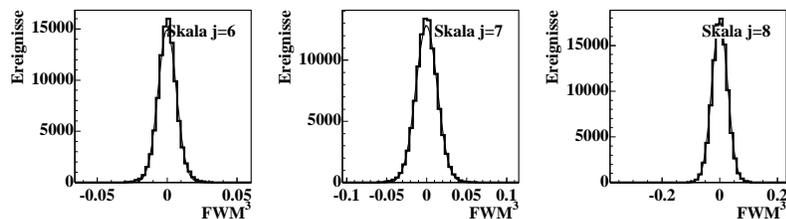


Abbildung B.133 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{10}{790}$.

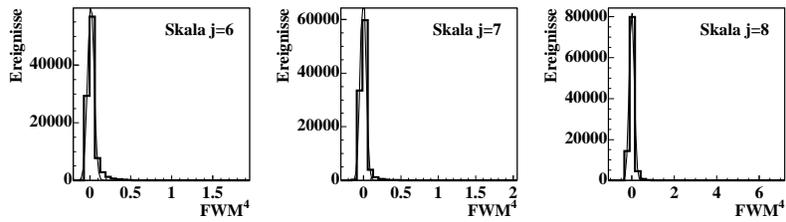


Abbildung B.134 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{100}{700}$.

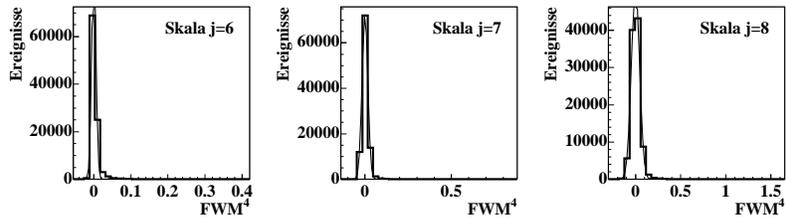


Abbildung B.135 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{50}{750}$.

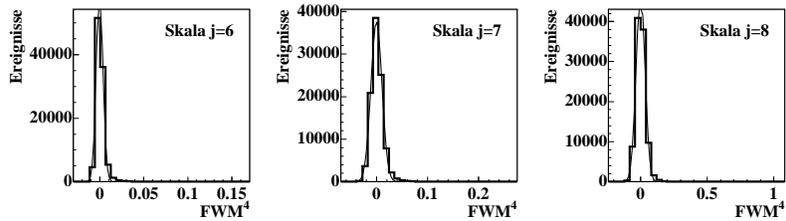


Abbildung B.136 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{25}{775}$.

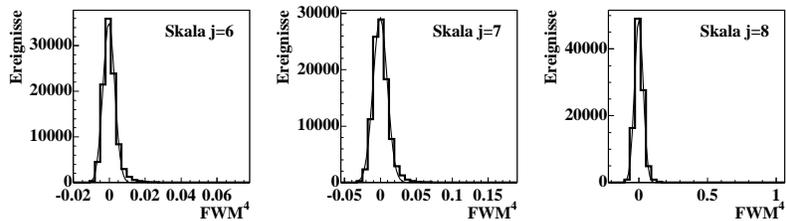


Abbildung B.137 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von simulierten Ereignissen mit einer Breite von $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$ mit Untergrund, $\frac{S}{R} = \frac{10}{790}$.

B.3.3 Verteilungsbreiten in Abhängigkeit der Signalmultiplizität $\sigma(m_G)$

Ordnung $q = 2$			
Multiplizität des Gaußschen Anteils	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$
100	2.242 ± 0.004	2.381 ± 0.007	3.215 ± 0.004
50	1.540 ± 0.002	2.055 ± 0.003	2.914 ± 0.007
25	1.383 ± 0.001	1.973 ± 0.004	2.839 ± 0.006
10	1.329 ± 0.001	1.932 ± 0.002	2.799 ± 0.002
0	1.327 ± 0.002	1.940 ± 0.003	2.800 ± 0.003

Ordnung $q = 3$			
Multiplizität des Gaußschen Anteils	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$
100	2.54 ± 0.01	2.414 ± 0.005	4.691 ± 0.008
50	0.918 ± 0.003	1.621 ± 0.002	3.223 ± 0.002
25	0.708 ± 0.002	1.410 ± 0.002	2.856 ± 0.003
10	0.663 ± 0.001	1.359 ± 0.002	2.748 ± 0.006
0	0.6545 ± 0.0006	1.344 ± 0.003	2.739 ± 0.004

Ordnung $q = 4$			
Multiplizität des Gaußschen Anteils	Skala $j = 6$	Skala $j = 7$	Skala $j = 8$
	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$	$\sigma [10^{-2}]$
100	4.03 ± 0.01	3.80 ± 0.03	11.689 ± 0.007
50	0.597 ± 0.002	1.664 ± 0.003	4.503 ± 0.007
25	0.3954 ± 0.0009	1.080 ± 0.001	3.3287 ± 0.0006
10	0.3252 ± 0.0004	0.983 ± 0.002	3.1121 ± 0.0001
0	0.3221 ± 0.0005	0.961 ± 0.001	2.9438 ± 0.0004

Tabelle B.1 Verteilungsbreiten, gewonnen aus den Gaußanpassungen an faktorielle Waveletmomente von Gaußchen Signalen mit Untergrund der Breite $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$.

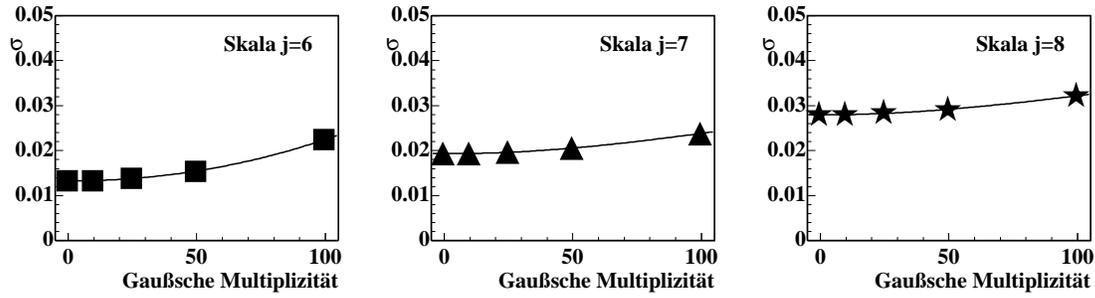


Abbildung B.138 Abhängigkeit der Verteilungsbreiten faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung von der Anzahl der Gaußschen Einträge.

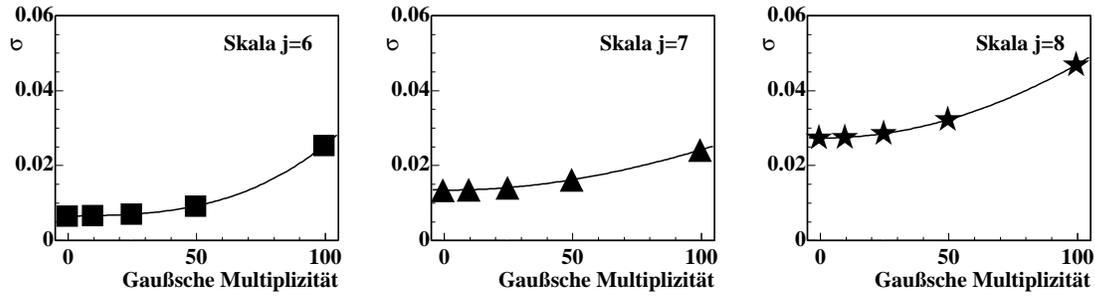


Abbildung B.139 Abhängigkeit der Verteilungsbreiten faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung von der Anzahl der Gaußschen Einträge.

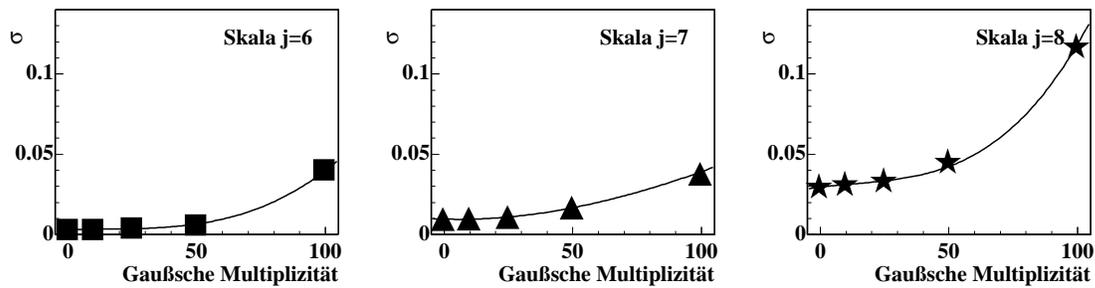


Abbildung B.140 Abhängigkeit der Verteilungsbreiten faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung von der Anzahl der Gaußschen Einträge.

B.4 Experimentelle Daten und Kontrollverteilungen

B.4.1 Gaußanpassungen an experimentelle Daten

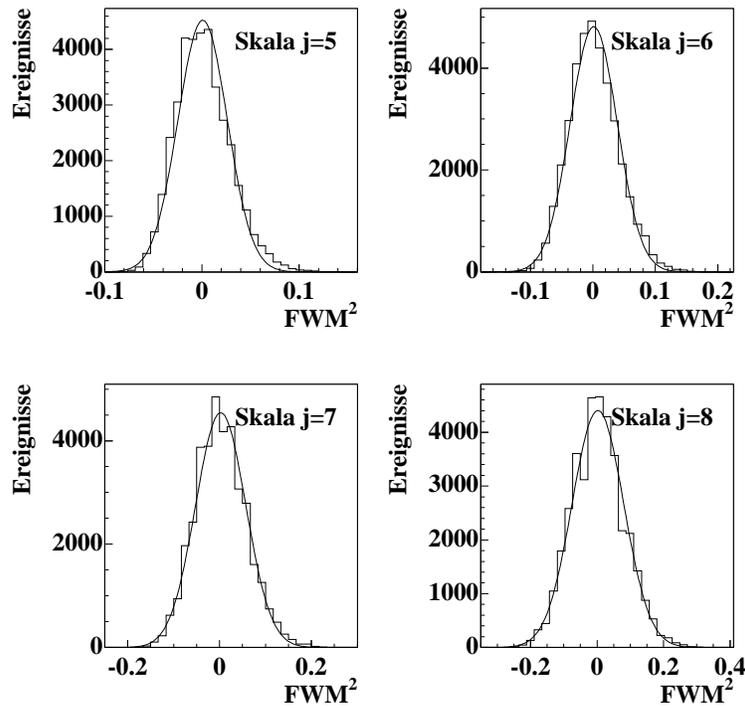


Abbildung B.141 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung experimenteller Daten.

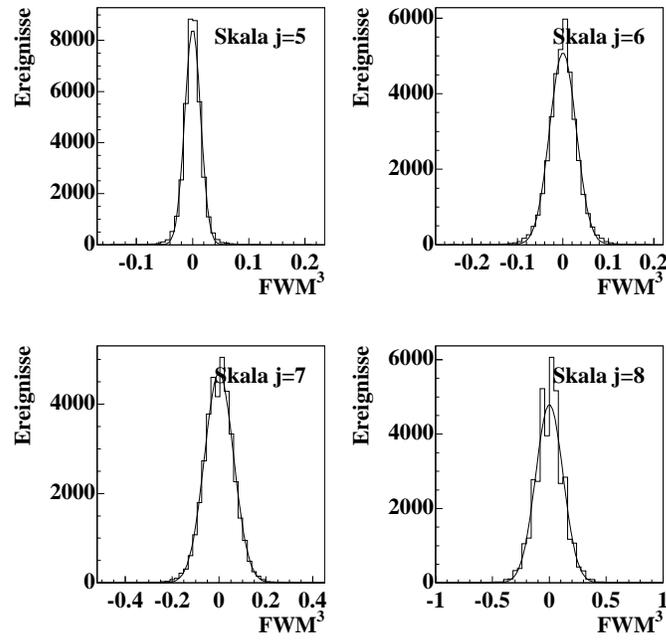


Abbildung B.142 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung experimenteller Daten.

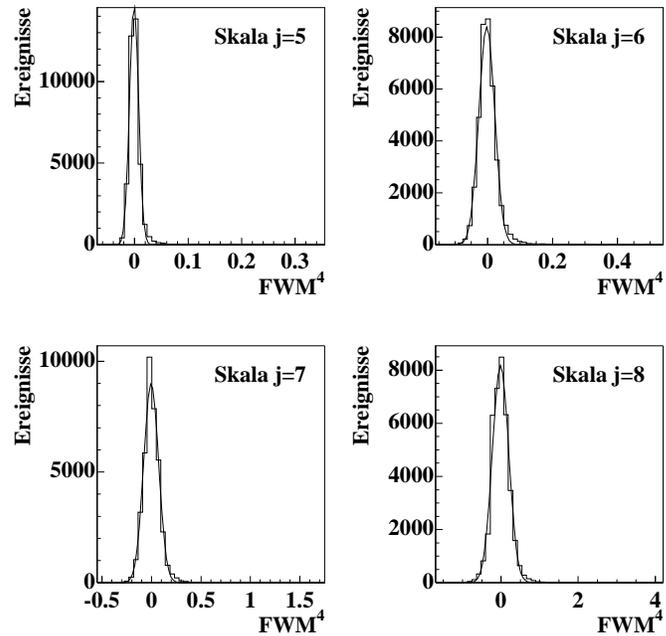


Abbildung B.143 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung experimenteller Daten.

B.4.2 Gaußanpassungen an Kontrollverteilungen

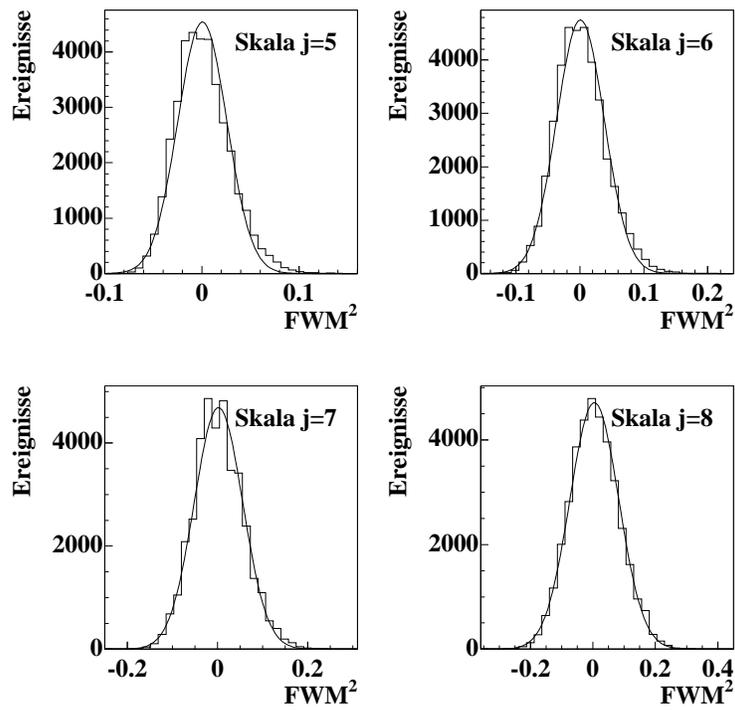


Abbildung B.144 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 2. Ordnung der Kontrollverteilungen.

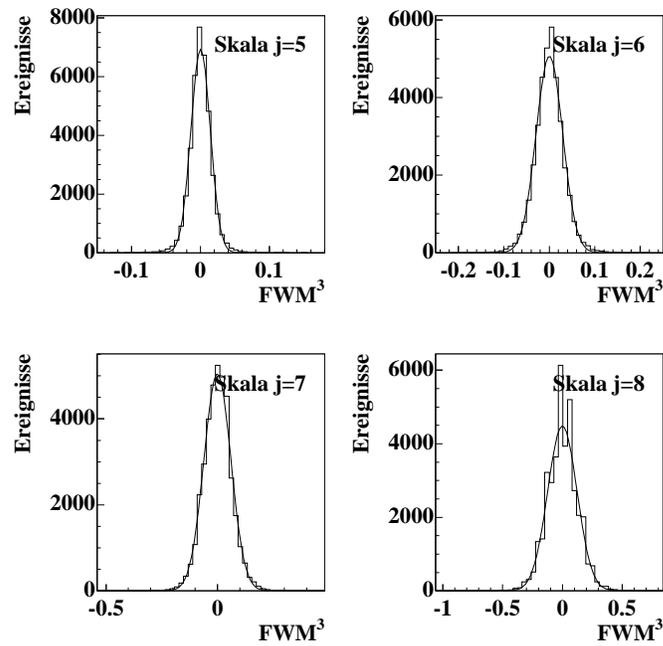


Abbildung B.145 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 3. Ordnung der Kontrollverteilungen.

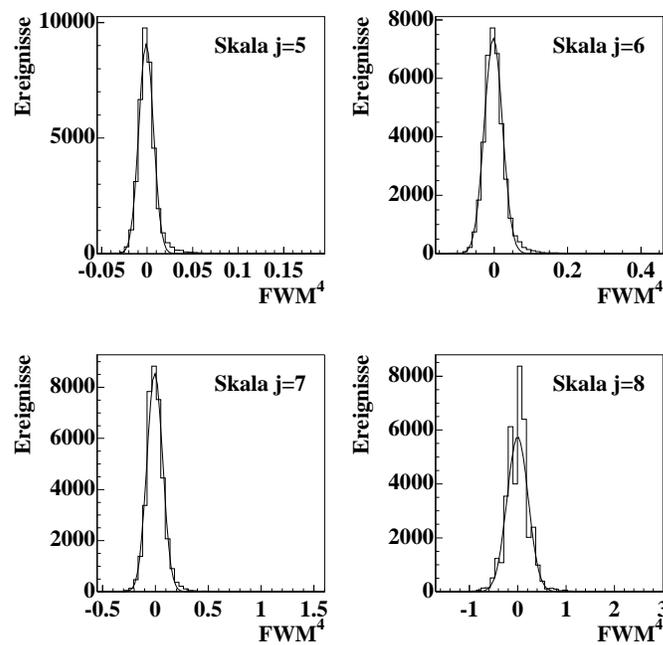


Abbildung B.146 Gaußanpassungen an Verteilungen faktorieller Waveletmomente 4. Ordnung der Kontrollverteilungen.

B.4.3 Verteilungsbreiten in Abhängigkeit von der Multiplizität (simuliert) mit eingetragenen Datenpunkten

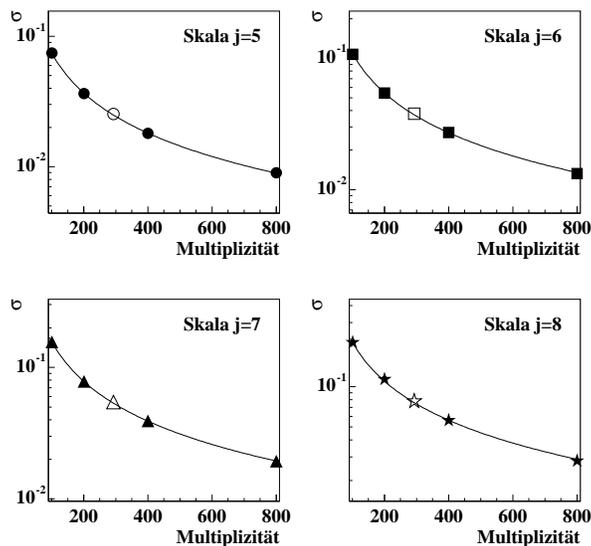


Abbildung B.147 Datenpunkte (offen) in den Anpassungen von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$ (2 freie Parameter) an die Momente simulierter Verteilungen der Ordnung $q = 2$.

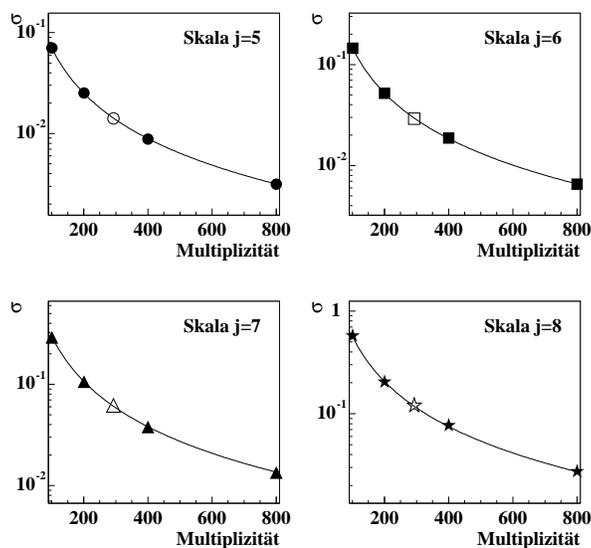


Abbildung B.148 Datenpunkte (offen) in den Anpassungen von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$ (2 freie Parameter) an die Momente simulierter Verteilungen der Ordnung $q = 3$.

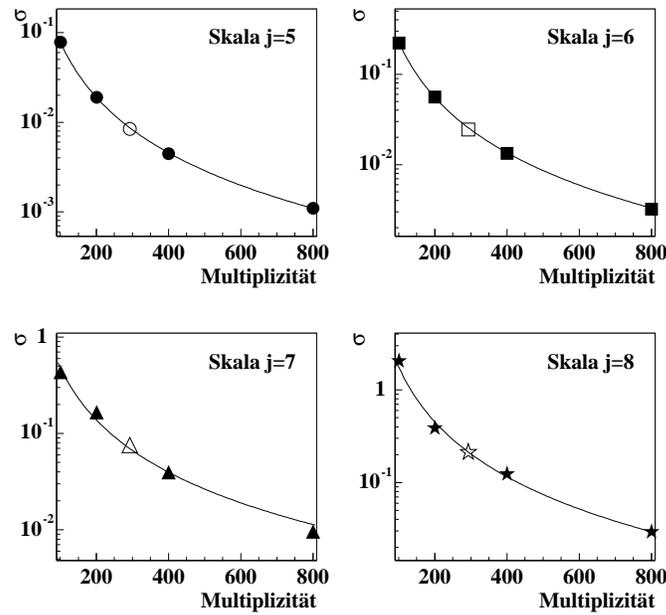


Abbildung B.149 Datenpunkte (offen) in den Anpassungen von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$ (2 freie Parameter) an die Momente simulierter Verteilungen der Ordnung $q = 4$.

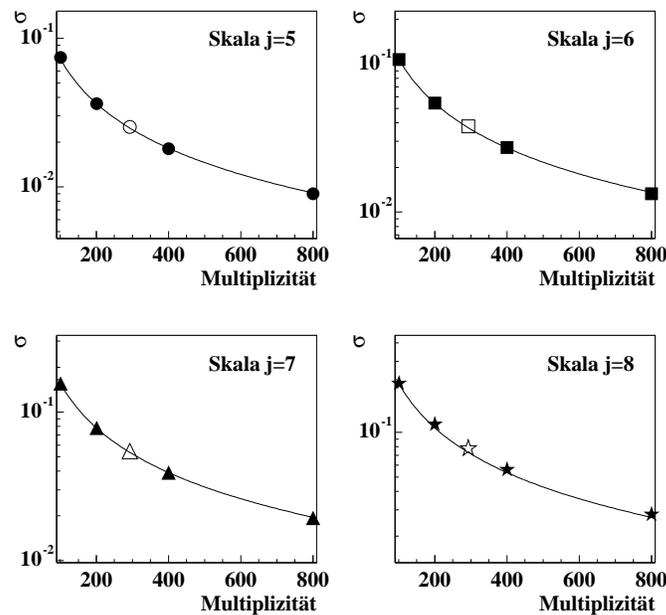


Abbildung B.150 Datenpunkte (offen) in den Anpassungen von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$ (1 freier Parameter) an die Momente simulierter Verteilungen der Ordnung $q = 2$.

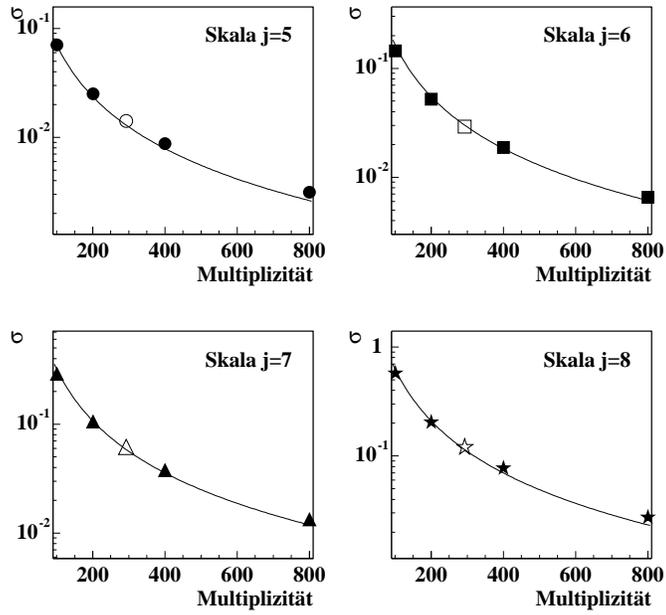


Abbildung B.151 Datenpunkte (offen) in den Anpassungen von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^3}$ (1 freier Parameter) an die Momente simulierter Verteilungen der Ordnung $q = 3$.

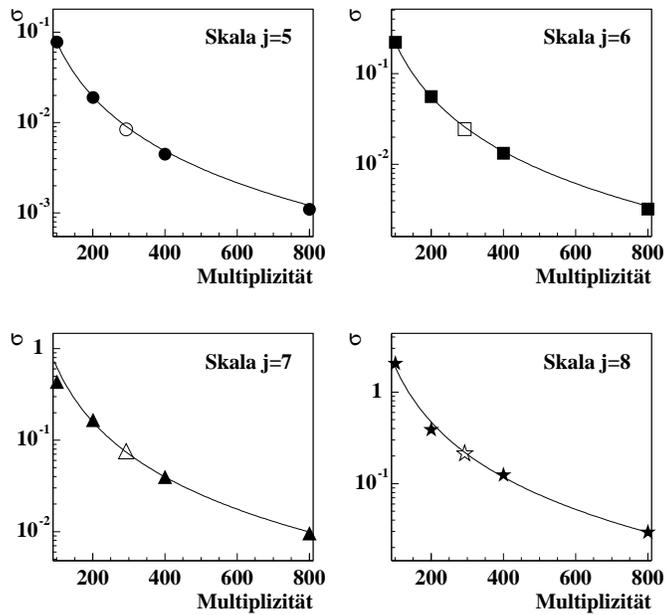


Abbildung B.152 Datenpunkte (offen) in den Anpassungen von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^4}$ (1 freier Parameter) an die Momente simulierter Verteilungen der Ordnung $q = 4$.

Tabellenverzeichnis

4.1	RMS der Gaußanpassungen an FWM ² .	45
4.2	Parameter a für die Multiplizitätsabhängigkeit von RMS.	45
4.3	Quotienten der Parameter a von verschiedenen Skalen j (2. Ordnung).	46
4.4	RMS der Gaußanpassungen an FWM 3. und 4. Ordnung.	49
4.5	Parameter für die Multiplizitätsabhängigkeit von RMS.	50
4.6	Parameter a , 2., 3. und 4. Ordnung.	51
4.7	Quotienten der Parameter a .	51
4.8	RMS der Gaußanpassungen an FWM von Gaußverteilungen.	60
4.9	Parameter für die Abhängigkeit $\sigma(\sigma_G)$.	62
5.1	Schnitte zur Teilchen- und Ereignisselektion.	74
5.2	RMS der Gaußanpassungen an FWM experimenteller Daten.	78
B.1	RMS aus Gaußanpassungen an FWM von Signalen mit Untergrund.	156

Abbildungsverzeichnis

1.1	Fluktuationen der Energiedichte.	4
1.2	Fluktuationen des mittleren Transversalimpulses.	5
2.1	Aufbau des Experiments NA49.	8
2.2	Schematischer Aufbau einer Vertex-TPC.	12
2.3	Driftstrecke von Elektronen in einer TPC.	13
3.1	Multiskalenanalyse mit dem Haar-Wavelet.	25
4.1	Testfunktion.	36
4.2	Waveletkoeffizienten der Testfunktion.	36
4.3	Absolutbetrag der Waveletkoeffizienten der Testfunktion.	37
4.4	Waveletkoeffizienten der Testfunktion, geordnet nach Absolutbetrag.	37
4.5	Waveletkoeffizienten nach Schnitt bei $\tilde{\epsilon}_{jk} = 10^{-5}$.	38
4.6	Rücktransformation.	39
4.7	Absolutbetrag der Abweichung.	39
4.8	Simulation von 400 zufälligen Einträgen.	41
4.9	FWM ² (400 zufällige Einträge).	42
4.10	Gaußanpassung an verschiedene Waveletmomente.	44
4.11	Anpassung von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$, $\lambda = \frac{\ln q}{\ln 2}$.	46
4.12	FWM ³ (400 zufällige Einträge).	47
4.13	FWM ⁴ (400 zufällige Einträge).	48
4.14	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).	52
4.15	FWM ² ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).	53
4.16	FWM ³ ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).	55
4.17	FWM ⁴ ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).	56
4.18	FWM ² ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).	57
4.19	FWM ³ ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).	58
4.20	FWM ⁴ ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).	59
4.21	Verteilungsbreitenabhängigkeit, 4. Ordnung, zwei freie Parameter.	61
4.22	Gaußverteilung mit Untergrund (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	63
4.23	FWM ² (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	64
4.24	$\sigma(m_G)$, 3. Ordnung.	66

5.1	Verteilung der rückextrapolierten Vertexposition.	70
5.2	Anzahl der Spurpunkte in der Main-TPC.	71
5.3	Benutzte gegen mögliche Spurpunkte.	72
5.4	Multiplizitätsverteilung.	73
5.5	Inklusives Transversalimpulsspektrum.	74
5.6	FWM ² der Daten.	75
5.7	FWM ³ der Daten.	76
5.8	FWM ⁴ der Daten.	77
5.9	Anpassung von Funktionen vom Typ $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$.	79
5.10	Sensitivität der faktoriellen Waveletmomente.	81
6.1	Φ_{p_T} (Fritiof und experimentelle Daten).	86
A.1	Gaußverteilung mit Untergrund (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	89
B.1	Simulation von 100 zufälligen Einträgen.	92
B.2	FWM ² (100 zufällige Einträge).	92
B.3	FWM ³ (100 zufällige Einträge).	93
B.4	FWM ⁴ (100 zufällige Einträge).	93
B.5	Simulation von 200 zufälligen Einträgen.	94
B.6	FWM ² (200 zufällige Einträge).	94
B.7	FWM ³ (200 zufällige Einträge).	95
B.8	FWM ⁴ (200 zufällige Einträge).	95
B.9	Simulation von 400 zufälligen Einträgen.	96
B.10	FWM ² (400 zufällige Einträge).	96
B.11	FWM ³ (400 zufällige Einträge).	97
B.12	FWM ⁴ (400 zufällige Einträge).	97
B.13	Simulation von 800 zufälligen Einträgen.	98
B.14	FWM ² (800 zufällige Einträge).	98
B.15	FWM ³ (800 zufällige Einträge).	99
B.16	FWM ⁴ (800 zufällige Einträge).	99
B.17	Gaußanpassungen an Waveletmomente 2. Ordnung (100 Einträge).	100
B.18	Gaußanpassungen an Waveletmomente 2. Ordnung (200 Einträge).	100
B.19	Gaußanpassungen an Waveletmomente 2. Ordnung (400 Einträge).	101
B.20	Gaußanpassungen an Waveletmomente 2. Ordnung (800 Einträge).	101
B.21	Gaußanpassungen an Waveletmomente 3. Ordnung (100 Einträge).	102
B.22	Gaußanpassungen an Waveletmomente 3. Ordnung (200 Einträge).	102
B.23	Gaußanpassungen an Waveletmomente 3. Ordnung (400 Einträge).	103
B.24	Gaußanpassungen an Waveletmomente 3. Ordnung (800 Einträge).	103
B.25	Gaußanpassungen an Waveletmomente 4. Ordnung (100 Einträge).	104
B.26	Gaußanpassungen an Waveletmomente 4. Ordnung (200 Einträge).	104
B.27	Gaußanpassungen an Waveletmomente 4. Ordnung (400 Einträge).	105

B.28	Gaußanpassungen an Waveletmomente 4. Ordnung (800 Einträge).	105
B.29	$\sigma(m)$, 2. Ordnung, zwei freie Parameter.	106
B.30	$\sigma(m)$, 3. Ordnung, zwei freie Parameter.	106
B.31	$\sigma(m)$, 4. Ordnung, zwei freie Parameter.	107
B.32	$\sigma(m)$, 2. Ordnung, ein freier Parameter.	107
B.33	$\sigma(m)$, 3. Ordnung, ein freier Parameter.	108
B.34	$\sigma(m)$, 4. Ordnung, ein freier Parameter.	108
B.35	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).	110
B.36	FWM ² ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).	110
B.37	FWM ³ ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).	111
B.38	FWM ⁴ ($\sigma = 1.25 \cdot 10^{-4}$).	111
B.39	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4}$).	112
B.40	FWM ² ($\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4}$).	112
B.41	FWM ³ ($\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4}$).	113
B.42	FWM ⁴ ($\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4}$).	113
B.43	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 5.0 \cdot 10^{-4}$).	114
B.44	FWM ² ($\sigma = 5.0 \cdot 10^{-4}$).	114
B.45	FWM ³ ($\sigma = 5.0 \cdot 10^{-4}$).	115
B.46	FWM ⁴ ($\sigma = 5.0 \cdot 10^{-4}$).	115
B.47	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	116
B.48	FWM ² ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	116
B.49	FWM ³ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	117
B.50	FWM ⁴ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	117
B.51	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$).	118
B.52	FWM ² ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$).	118
B.53	FWM ³ ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$).	119
B.54	FWM ⁴ ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$).	119
B.55	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).	120
B.56	FWM ² ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).	120
B.57	FWM ³ ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).	121
B.58	FWM ⁴ ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-3}$).	121
B.59	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-3}$).	122
B.60	FWM ² ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-3}$).	122
B.61	FWM ³ ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-3}$).	123
B.62	FWM ⁴ ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-3}$).	123
B.63	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	124
B.64	FWM ² ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	124
B.65	FWM ³ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	125
B.66	FWM ⁴ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	125
B.67	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).	126
B.68	FWM ² ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).	126

B.69	FWM ³ ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).	127
B.70	FWM ⁴ ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).	127
B.71	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).	128
B.72	FWM ² ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).	128
B.73	FWM ³ ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).	129
B.74	FWM ⁴ ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).	129
B.75	Gaußverteiltes Zufallsereignis ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).	130
B.76	FWM ² ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).	130
B.77	FWM ³ ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).	131
B.78	FWM ⁴ ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).	131
B.79	Gaußanpassungen an Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	132
B.80	Gaußanpassungen an Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).	132
B.81	Gaußanpassungen an Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).	132
B.82	Gaußanpassungen an Waveletmomente 2. Ordnung ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).	132
B.83	Gaußanpassungen an Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	133
B.84	Gaußanpassungen an Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).	133
B.85	Gaußanpassungen an Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).	133
B.86	Gaußanpassungen an Waveletmomente 3. Ordnung ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).	133
B.87	Gaußanpassungen an Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	134
B.88	Gaußanpassungen an Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2}$).	134
B.89	Gaußanpassungen an Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 4.0 \cdot 10^{-2}$).	134
B.90	Gaußanpassungen an Waveletmomente 4. Ordnung ($\sigma = 8.0 \cdot 10^{-2}$).	134
B.91	$\sigma(\sigma_G)$, 2. Ordnung, zwei freie Parameter.	135
B.92	$\sigma(\sigma_G)$, 3. Ordnung, zwei freie Parameter.	135
B.93	$\sigma(\sigma_G)$, 4. Ordnung, zwei freie Parameter.	135
B.94	Gaußverteilung mit Untergrund (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	136
B.95	FWM ² (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	136
B.96	FWM ³ (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	137
B.97	FWM ⁴ (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	137
B.98	Gaußverteilung mit Untergrund (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	138
B.99	FWM ² (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	138
B.100	FWM ³ (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	139
B.101	FWM ⁴ (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	139
B.102	Gaußverteilung mit Untergrund (25/775, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	140
B.103	FWM ² (25/775, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	140
B.104	FWM ³ (25/775, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	141
B.105	FWM ⁴ (25/775, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	141
B.106	Gaußverteilung mit Untergrund (10/790, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	142
B.107	FWM ² (10/790, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	142
B.108	FWM ³ (10/790, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	143
B.109	FWM ⁴ (10/790, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-3}$).	143

B.110	Gaußverteilung mit Untergrund (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	144
B.111	FWM ² (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	144
B.112	FWM ³ (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	145
B.113	FWM ⁴ (100/700, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	145
B.114	Gaußverteilung mit Untergrund (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	146
B.115	FWM ² (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	146
B.116	FWM ³ (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	147
B.117	FWM ⁴ (50/750, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	147
B.118	Gaußverteilung mit Untergrund (25/775, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	148
B.119	FWM ² (25/775, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	148
B.120	FWM ³ (25/775, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	149
B.121	FWM ⁴ (25/775, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	149
B.122	Gaußverteilung mit Untergrund (10/790, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	150
B.123	FWM ² (10/790, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	150
B.124	FWM ³ (10/790, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	151
B.125	FWM ⁴ (10/790, $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$).	151
B.126	Gaußanpassungen an FWM ² ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{100}{700}$).	152
B.127	Gaußanpassungen an FWM ² ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{50}{750}$).	152
B.128	Gaußanpassungen an FWM ² ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{25}{775}$).	152
B.129	Gaußanpassungen an FWM ² ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{10}{790}$).	152
B.130	Gaußanpassungen an FWM ³ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{100}{700}$).	153
B.131	Gaußanpassungen an FWM ³ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{50}{750}$).	153
B.132	Gaußanpassungen an FWM ³ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{25}{775}$).	153
B.133	Gaußanpassungen an FWM ³ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{10}{790}$).	153
B.134	Gaußanpassungen an FWM ⁴ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{100}{700}$).	154
B.135	Gaußanpassungen an FWM ⁴ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{50}{750}$).	154
B.136	Gaußanpassungen an FWM ⁴ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{25}{775}$).	154
B.137	Gaußanpassungen an FWM ⁴ ($\sigma = 1.0 \cdot 10^{-2}$, $\frac{S}{R} = \frac{10}{790}$).	154
B.138	$\sigma(m_G)$, 2. Ordnung.	157
B.139	$\sigma(m_G)$, 3. Ordnung.	157
B.140	$\sigma(m_G)$, 4. Ordnung.	157
B.141	Gaußanpassungen an FWM ² experimenteller Daten.	158
B.142	Gaußanpassungen an FWM ³ experimenteller Daten.	159
B.143	Gaußanpassungen an FWM ⁴ experimenteller Daten.	159
B.144	Gaußanpassungen an FWM ² der Kontrollverteilungen.	160
B.145	Gaußanpassungen an FWM ³ der Kontrollverteilungen.	161
B.146	Gaußanpassungen an FWM ⁴ der Kontrollverteilungen.	161
B.147	Datenpunkte in $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$, 2 freie Parameter, 2. Ordnung.	162
B.148	Datenpunkte in $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$, 2 freie Parameter, 3. Ordnung.	162
B.149	Datenpunkte in $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$, 2 freie Parameter, 4. Ordnung.	163

B.150	Datenpunkte in $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$, 1 freier Parameter, 2. Ordnung.	163
B.151	Datenpunkte in $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$, 1 freier Parameter, 3. Ordnung.	164
B.152	Datenpunkte in $\sigma(m) = \frac{a}{m^\lambda}$, 1 freier Parameter, 4. Ordnung.	164

Literaturverzeichnis

- [1] H. Satz, *Nature* **324** (1986), 116–120.
- [2] Frank Wilczek, 10^{12} Degrees in the Shade, *The Sciences*, January/February 1994.
- [3] S. Margetis et al., Transverse Energy Production in $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$ Collisions at 158 AGeV, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), 3814–3817.
- [4] H. Appelshäuser et al., Hadronic Expansion Dynamics in Central Pb + Pb Collisions at 158 AGeV, *Eur. Phys. J.* **C2** (1998), 661–670.
- [5] Marcus Bleicher et al., *Nuclear Physics A / Quark Matter '97 Proceedings*, in print.
- [6] Gunther Roland, International Workshop XXV on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, 1997, Hirschegg.
- [7] Jørgen Randrup, Mean-field treatment of the linear σ model in dynamical calculations of DCC observables, *Nuclear Physics A*, LBNL-39328, December 18, 1996.
- [8] K. Rajagopal and F. Wilczek, *Nucl. Phys.* **B379** (1993), 395.
- [9] Ichita Endo et al., Systematic Shifts of Evaluated Charge Centroid for the Cathode Read-out Multiwire Proportional Chamber, *Nuclear Instruments and Methods* **188** (1981), 51–58.
- [10] M. Fuchs, *Nuclear Instruments and Methods* **A367** (1995), 394–397.
- [11] A. Kühmichel, *Nuclear Instruments and Methods* **A360** (1995), 52–56.
- [12] J. Günther, Dissertation (1997), Universität Frankfurt am Main.
- [13] The NA49 Large Acceptance Hadron Detector, NA49-Kollaboration, Draft 1.0, CERN-EP/98-xx.
- [14] W. Greiner, H. Stöcker, Hrsg., The Nuclear Equation of State A (1987), The HISS TPC 187–195, Plenum Press, New York.
- [15] Andreas Mock, Dissertation (1997), MPI für Physik, München.
- [16] A. Bialas and M. Gaździcki, A new variable to study intermittency, *Physics Letters* **B252**, number 3, p. 483, 20 December 1990.

- [17] Numerical recipes in C, Second Edition 1992, Cambridge University Press, Chapter 12.
- [18] Klaus Jähnich, Lineare Algebra, 5. Auflage 1993, Springer-Verlag, Abschnitt 8.3.
- [19] Martin Greiner, Peter Lipa, Peter Carruthers, Wavelets, *Complexity*, Volume 2, November/December 1996.
- [20] mit freundlicher Genehmigung von Martin Greiner, siehe [19], p.32.
- [21] Ingrid Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [22] Gerald Kaiser, A Friendly Guide to Wavelets, Birkhäuser 1994, Chapter 8.
- [23] Numerical recipes in C, Second Edition 1992, Cambridge University Press, page 604.
- [24] Stefan Schönfelder, Dissertation, Januar 1997, Abschnitt 4.3.1.
- [25] F.Cooper, Y.Kluger, E.Mottola, Anomalous Transverse Distribution of Pions as a signal for the production of DCC's, LBL-38585, March 26, 1996.
- [26] Krishna Rajagopal, Disorienting the Chiral Condensate at the QCD Phase Transition, CALT-68-2104, hep-ph/9703258.
- [27] Z.Huang et al., *Phys. Rev.* **D54** (1996), 750.
- [28] J. Huang, How to find a Disoriented Chiral Condensate, RHIC/INT Winter Workshop, LBL, 1997.
- [29] Martin Greiner, MPI für komplexe Systeme, Dresden, private Mitteilung.

Danksagung

Zuallererst gilt mein Dank Herrn Prof. R. Stock. Seinem engagierten Einsatz habe ich nicht nur meine Sommerstudentenzeit 1996 am CERN, sondern auch die anschließende dauerhafte Aufnahme in der NA49-Kollaboration zu verdanken. Prof. H. Ströbele verdanke ich tiefe Einblicke in das Detektorsystem von NA49. Ohne es zu wissen, war er daher maßgeblich an Kapitel 2 dieser Arbeit beteiligt.

Dr. Dieter Röhrich danke ich, daß ich ihm in den letzten Wochen vor der Abgabe unendlich viel Zeit rauben durfte. Ohne seine Vorschläge und Ideen wären große Teile dieser Arbeit nicht möglich gewesen. Dr. Marek Gaździcki habe ich für seine Kompetenz, physikalische Inhalte begreiflich zu machen, zu danken. Die Diskussionen mit ihm haben wesentlich zu meinem Verständnis der Physik beigetragen. Außerdem hatte er zu jeder Frage die Kopie des passenden Papers parat.

Dr. Martin Greiner¹ und Jens Giesemann² danke ich für die freundliche Bereitstellung ihres Programmpakets zur Berechnung der Waveletmomente. Ihre andauernde Hilfe und unermüdliche Suche nach der richtigen Normierung, gepaart mit dem eisernen Willen, mir die zugrundeliegende Mathematik näher zu bringen, haben nicht nur in Kapitel 3 bleibenden ‚Abdruck‘ hinterlassen.

Dr. Gunther Roland ist der letzte Schliff in den letzten Stunden zu verdanken, und Christof Roland verdanke ich einige Inkonsistenzen weniger.

Clemens Adler, Jens Berger und Dominik Flierl danke ich dafür, daß sie oft mit ähnlichen Problemen zu kämpfen hatten und dadurch den Blick für das *eine Boot* schärften. Jens Berger hat sich außerdem in der gemeinsamen heißen Phase als echter ROOT-Experte verdient gemacht.

Christian Bormann, Frank Gabler und Jörg Günther danke ich für die Unterstützung in allen Fragen, die die Computerei angingen, auch wenn es nicht ganz zu einem absturzsicheren Window-Manager gereicht hat.

Ohne Anja Billmeier, Christina Markert und Peter Beckerle wäre das Leben am IKF nur halb so abwechslungsreich gewesen. Sie verliehen der Gruppe allein durch ihre Anwesenheit eine angenehm heitere Arbeitsatmosphäre.

¹MPI für Physik komplexer Systeme, Dresden

²Technische Universität Dresden

Die Fertigstellung dieser Arbeit wäre ohne die andauernde Unterstützung durch meine Freundin Bettina Hoßner nicht ohne größere psychologische Schäden und doppelt so viele Kommafehler möglich gewesen, weshalb ihr meine besondere Dankbarkeit zuteil wird.

Schließlich darf auf privater Seite der Dank an meine Familie nicht vergessen werden, wobei ich meiner Schwester für die aufmunternde und meinem Vater für die finanzielle Unterstützung, ohne die mein Studium nicht möglich gewesen wäre, besonders danken möchte. Letzterem ist zudem sein 7. Sinn für Orthographie und Ausdruck hoch anzurechnen.