

Thesis-1987-Krieger

EX BOMN-IR 87-18

UNIVERSITÄT BONN

cl

REC. 1987

Physikalisches Institut

Spurerkennung in der Jetkammer
des OPAL-Detektors
mit der Billoir-Fit-Methode

Diplomarbeit
von
Roland Krieger

CM-P00051646



CERN LIBRARIES, GENEVA

Post address:
Nussallee 12
D - 5300 Bonn 1
W-Germany



PLEASE
MAKE A
PHOTOCOPY
or check out as
NORMAL
LOAN

BONN - IR-87-18
Bonn University
Juni 1987
ISSN - 0172 - 8741

UNIVERSITÄT BONN

Physikalisches Institut

Spurerkennung in der Jetkammer
des OPAL-Detektors
mit der Billoir-Fit-Methode

Diplomarbeit
VON
Roland Krieger



Post address:
Nussallee 12
D - 5300 Bonn 1
W-Germany

BONN - IR-87-18
Bonn University
Juni 1987
ISSN - 0172 - 8741

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Spurenerkennung in der OPAL-Jetkammer	3
2.1 Detektor- und Jetkammer-Beschreibung	3
2.1.1 Die Komponenten des OPAL-Detektors	3
2.1.2 Aufbau und Wirkungsweise einer Jetkammer	4
2.1.3 Aufbau der OPAL-Jetkammer	6
2.1.4 Die Datennahme	7
2.2 Die Weiterverarbeitung der Meßdaten	9
2.3 Spezielle Probleme und Lösungsansätze für die Spurenerkennung .	10
2.4 Hilfsmittel zur Programmentwicklung: Die Simulation	15
3. Die Billoir-Fit-Methode	18
3.1 Fit mit Vielfachstreuung	18
3.2 Beschreibung der Billoir-Fit-Methode	19
3.3 Die Billoir-Fit-Methode zur Spurenerkennung	26
4. Implementierung des Fits	28
4.1 Wahl des Koordinatensystems	28
4.2 Die Parabelapproximation	31
4.3 Der Kreisfit	32
4.3.1 Parametrisierung des Kreises	33
4.3.2 Propagation	34
4.3.3 Berücksichtigung der Vielfachstreuung	42
4.3.4 Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes zum Fit	44
4.3.5 Berechnung der Startparameter	45
4.3.6 Begründung der Parameterwahl	47
4.3.7 Zusammenfassung	49

5. Berücksichtigung der Vielfachstreuung während der Spurerkennung	52
5.1 Der Impuls-Term	52
5.2 Der Massen-Term	56
6. Auflösung der Links-Rechts-Ambiguität	61
6.1 Allgemeines Verfahren	61
6.2 Links-Rechts-Auflösung mit der Billoir-Fit-Methode	63
6.3 Das angewandte Verfahren	70
7. Korrektur von Spürwinkeleffekten	78
7.1 Die JADE-Approximation	78
7.2 Probleme für die Spurerkennung	81
7.3 Winkelkorrektur während der Spurverfolgung	84
8. Der Algorithmus zur Spurerkennung	90
8.1 Beschreibung der Eingabedaten	90
8.2 Das globale Verfahren	91
8.3 Die Suche nach Startkombinationen	93
8.4 Die Spurverfolgung	96
9. Die Effizienz der implementierten Spurerkennung	100
9.1 Der Effizienz-Begriff	100
9.2 Ergebnisse	101
10. Zusammenfassung	110
Anhang: Zusammenstellung der benutzten Formeln zum Billoir-Fit	111
Verzeichnis der Abbildungen	119
Literaturangaben	121
Danksagung	123

1. Einleitung

Die Instrumentierung moderner Experimente der Hochenergiephysik zeigt einen stetigen Trend zu immer größerer Präzision: Neben den immer größer werdenden Energien, die von den Teilchenbeschleunigern zur Verfügung gestellt werden, wächst auch die Impuls- und Energieauflösung bei den Detektoren. Dies geht Hand in Hand mit einer ständig wachsenden Zahl von Meßdaten, deren schnelle Bearbeitung immer mehr an Bedeutung gewinnt. Insbesondere ist eine Reduktion der anfallenden Meßdaten im Hinblick auf ihre physikalische Relevanz notwendig, da eine Speicherung aller Messungen zur späteren Verarbeitung schon aufgrund ihrer großen Zahl nicht mehr ohne weiteres möglich ist.

Dies trifft auch auf den Detektor OPAL (Omni Purpose Apparatus at LEP) zu, dessen Inbetriebnahme mit der Fertigstellung der ersten Ausbaustufe des 100(200) GeV Elektron-Positron-Speicherrings LEP am CERN Mitte 1989 erfolgen wird. Um eine effiziente Verarbeitung und Speicherung der anfallenden Daten bereits von Anfang an vornehmen zu können, muß natürlich die dazu notwendige Software-Entwicklung bis zur Inbetriebnahme des Detektors abgeschlossen sein.

Ein spezieller Teil der zu entwickelnden Software ist die Spurerkennung in den einzelnen Komponenten des Detektors. Dabei kommt der zentralen Jetkammer aufgrund der genauen Ortsbestimmung der Teilchen (100 – 200 μm) und der entsprechenden Datenmenge von ca. 200 kB/Ereignis ein besonderes Gewicht zu.

Die vorliegende Arbeit beschreibt eines der vier Spurerkennungs-Verfahren, die zur Zeit für den späteren Einsatz bei der Analyse der OPAL-Jetkammer-Daten entwickelt bzw. getestet werden. Zielsetzung ist dabei die Untersuchung einer neuen Fit-Methode (Billoir-Fit) auf ihre Verwendbarkeit für die Spurerkennung, die Entwicklung eines entsprechenden Spurerkennungs-Verfahrens und dessen Implementierung.

Die Arbeit ist dabei folgendermaßen gegliedert:

Kapitel 2: Nach der Beschreibung des Aufbaus und der Wirkungsweise der OPAL-Jetkammer werden die speziellen Probleme beschrieben, die sich aus den Eigenschaften der Jetkammermessungen für die Spurerkennung ergeben.

Kapitel 3: Der Billoir-Fit wird vorgestellt, und die Verwendbarkeit dieser rekursiven Fit-Methode für die Spurverfolgung aufgezeigt.

Kapitel 4: Es wird gezeigt, daß die Parabelapproximation, wie sie in der Literatur von P. Billoir vorgestellt wird, für die speziellen Belange der Spurerkennung in der OPAL-Jetkammer nicht ausreichend ist. Die Modifikation des Billoir-Fits zu einem Kreisfit ist notwendig. Die dabei auftretenden numerischen Probleme und ihre Lösung werden beschrieben.

Kapitel 5: Die zur Berücksichtigung der Vielfachstreuung im Billoir-Fit benötigten Parameter (Impuls und Masse) sind während der Spurerkennung noch nicht oder nur teilweise bekannt. Die Wahl möglichst effektiver Schätzwerte für diese Parameter ist Inhalt dieses Kapitels.

Kapitel 6: Eines der Hauptprobleme für die Spurerkennung ist die Links-Rechts-Ambiguität der Einzelmessungen. Dieses Kapitel zeigt die Verwendbarkeit des Billoir-Fits für die frühzeitige Links-Rechts-Auflösung während der Spurverfolgung.

Kapitel 7: Ähnlich wie bei der Auflösung der Links-Rechts-Ambiguität können die systematischen Fehler der Messungen, die aus den Spurwinkeleffekten resultieren, normalerweise erst nach der Spurerkennung aufgelöst werden. Kapitel 7 stellt das implementierte Verfahren vor, das eine Berücksichtigung der Spurwinkel effekte bereits während der Spurerkennung ermöglicht.

Kapitel 8: Dieses Kapitel beschreibt den Algorithmus des implementierten Spurerkennungs-Verfahrens. Vorgestellt werden die Struktur der Eingabedaten, das globale Verfahren und Besonderheiten, die sich bei der Startsuche und bei der Spurverfolgung ergeben.

Kapitel 9: Einige Ergebnisse zur Effizienz des implementierten Programms werden vorgestellt. Diese sollen später zum Vergleich mit anderen Spurerkennungs-Verfahren dienen.

Kapitel 10: Zusammenfassung.

Im *Anhang* sind die für den modifizierten Billoir-Fit benutzten Formeln in übersichtlicher Form zusammengestellt.

2. Spurerkennung in der OPAL-Jetkammer

2.1 Detektor- und Jetkammer-Beschreibung

Um die speziellen Probleme und Lösungsansätze für eine Spurerkennung in der OPAL-Jetkammer darstellen zu können, seien zunächst einmal der Aufbau und die Wirkungsweise der Kammer, die Datennahme und die daraus resultierenden Eigenschaften der Messungen, die letztlich als Eingabe für eine solche Spurerkennung dienen, beschrieben. Dabei soll die Beschreibung des Detektors im wesentlichen auf eine für diese Spurerkennung relevante Darstellung beschränkt sein.

2.1.1 Die Komponenten des OPAL-Detektors

Der OPAL-Detektor (Abb. 2.1) besteht aus den folgenden Hauptkomponenten [OPA83]:

- a) Der **Zentraldetektor**, der sich aus drei Elementen zusammensetzt: die hochauflösende Vertex-Kammer in der Nähe des Wechselwirkungspunktes, die Jetkammer als Hauptkomponente zur Orts- und Impulsbestimmung der Teilchen, und um diese herum eine Reihe weiterer Driftkammern zur genauen Bestimmung der z-Koordinate der Spuren ("z-Kammern").
- b) Ein **Magnet** mit einer nominalen Feldstärke von 4kG. Dieser ist - im Gegensatz zu vielen anderen modernen Detektoren - in der ersten Ausbaustufe von OPAL nicht supraleitend.
- c) **Elektromagnetisches Kalorimeter** (Bleiglassähler).
- d) **Hadronkalorimeter**.
- e) **Myon-Kammern** (Driftkammern zum Nachweis von Myonen).

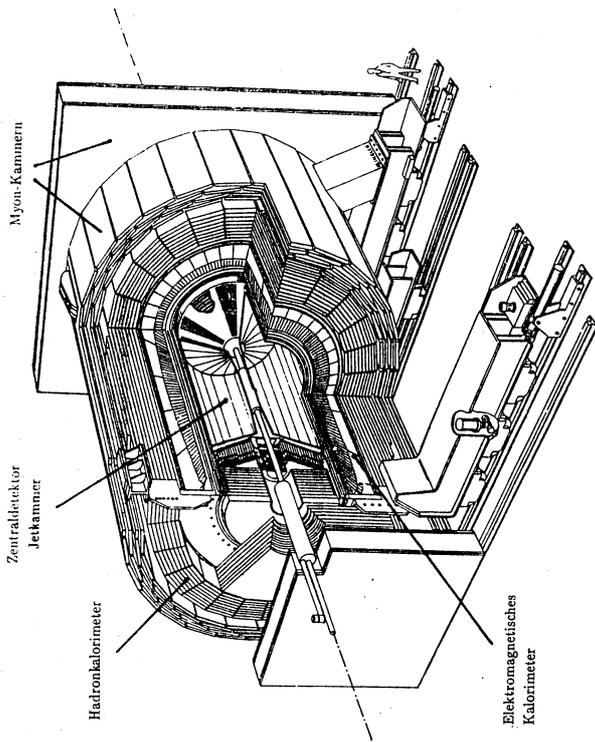


Abb. 2.1: Der OPAL-Detektor

2.1.2 Aufbau und Wirkungsweise einer Jetkammer

Eine Jetkammer ist eine spezielle Variante einer Driftkammer. Die spannungsführenden Drähte sind dabei so angeordnet, daß sich - im Gegensatz zur herkömmlichen Driftkammer - ein möglichst homogenes elektrisches Feld über einen großen Bereich des sensitiven Volumens ergibt, um eine konstante Driftgeschwindigkeit zu erhalten.

Abb. 2.2 zeigt den prinzipiellen Aufbau einer solchen Kammer (senkrechter Schnitt zu den Drähten). In der Mittelebene zwischen den Kathoden befinden sich die Anodendrähte. Als Signaldrähte (Anoden) werden dabei dünne (~

20 - 50 μm) Drähte benutzt. Um ein möglichst homogenes elektrisches Feld zu erhalten, sind zwischen diesen weitere, dickere Drähte - die sogenannten Potentialdrähte - gespannt.

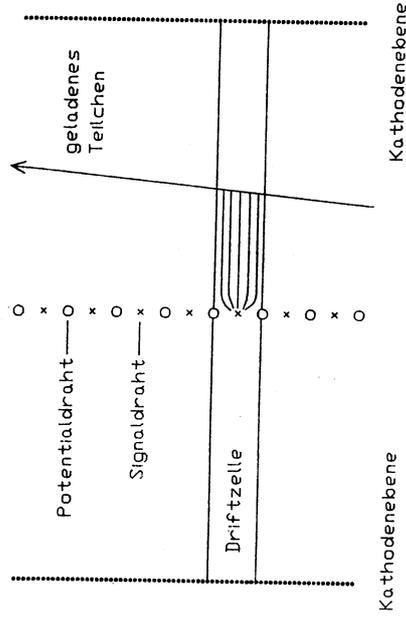


Abb. 2.2: Aufbau einer Jetkammer

Durchlaufen geladene Teilchen die mit Gas gefüllte Kammer, werden durch Ionisation Elektronen freigesetzt, die dann mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit auf die Signaldrähte zudriften. Unmittelbar vor den Signaldrähten gelangen sie in einen Bereich, in dem das elektrische Feld so stark anwächst, daß eine Gasverstärkung (Avalanche-Effekt) auftritt. Das Wegdriften der dabei zahlreich entstehenden positiven Ionen erzeugt am Signaldraht ein meßbares negatives Signal.

Die Zeitdifferenz zwischen dem Teilchendurchgang durch die Kammer und diesem Signal liefert nun bei bekannter Driftgeschwindigkeit $v_D(\vec{r})$ den Abstand y der Teilchenbahn vom Signaldraht:

$$y = \int_0^{t_D} v_D(\vec{r}) dt = v_D \cdot t_D.$$

Da die Elektronen nahezu parallel zur Anodenebene zudriften, werden durch die Signaldrahtpositionen die

Driftzellen definiert: Alle in einer Driftzelle freigesetzten Elektronen driften zu demselben Signaldraht. Die Teilung des sensitiven Volumens in diese Driftzellen wird dabei unterstützt durch die Potentialdrähte, die die einzelnen Driftzellen dadurch abtrennen, daß Feldlinien am Rand der Zellen auf diesen enden.

Definiert man ein kartesisches Koordinatensystem dertart, daß die z -Achse entlang der Drähte und die y -Achse entlang der Driftzellen liegt, stellen die gemessenen Driftzeiten Ortsmessungen der Teilchenspur in der xy -Ebene dar:

$$x = x_{Dracht}$$

$$y = v_D \cdot t_D.$$

2.1.3 Aufbau der OPAL-Jetkammer

Die OPAL-Jetkammer besteht aus 24 torenstückähnlichen Sektoren, die ringförmig um den Wechselwirkungspunkt herum angeordnet sind. Der so gebildete Zylinder besitzt eine Länge von ungefähr 4 m, der äußere Durchmesser beträgt 3,7 m, der innere 0,5 m.

Jeder der Sektoren besitzt eine Anodendrahtebene mit 159 Signaldrähten und zwei begrenzende Kathodendrahtebenen, wobei alle Drähte der Kammer entlang der Strahlachse gespannt sind. In radialer Richtung sind die Sektoren durch feldformende Streifen bzw. durch weitere Drähte abgeschlossen. Die Kathodendrahte, die die Grenze zwischen zwei Sektoren bilden, dienen beiden Sektoren gemeinsam als Kathoden. Meßtechnisch jedoch stellt jeder der 24 Sektoren eine eigenständige Jetkammer dar.

Der Abstand zwischen den einzelnen Signaldrähten eines Sektors beträgt 1 cm. Die maximale Driftstrecke variiert von 3,4 cm am innersten Signaldraht bis zu 24,3 cm am äußersten Draht.

Aufgrund des im Zentraldetektor vorhandenen Magnetfeldes, das parallel zu den Drähten gerichtet ist, driften die Elektronen nicht entlang der elektrischen Feldlinien; sie werden durch die Lorentzkraft abgelenkt. Makroskopisch resultiert daraus eine Drehung der effektiven Driftzellen um den sogenannten Lorentz-Winkel α_L , der bei der OPAL-Jetkammer ungefähr 15° beträgt (Abb. 2.3).

6

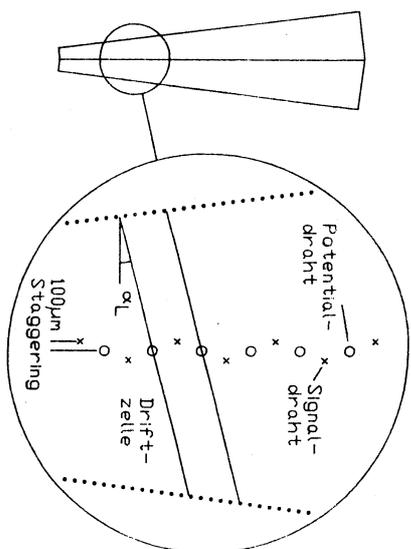


Abb. 2.3: Aufbau eines Sektors der OPAL-Jetkammer

Wegen des symmetrischen Aufbaus eines Sektors (Anoden als Mittelebene) ist es zunächst nicht möglich, zu entscheiden, ob ein Signal durch ein Teilchen links oder rechts der Anodendrahtebene erzeugt wurde (Links-Rechts-Ambiguität). Um eine solche Entscheidung möglich zu machen, sind die Signaldrähte abwechselnd von der Mittelebene versetzt (Abb. 2.3). Diese abwechselnde Versetzung der Signaldrähte wird als Staggering bezeichnet, es beträgt bei der OPAL-Jetkammer 100 µm. Dadurch erscheinen die Spiegelpunkte einer Spur (falsche Zuordnung der Seite) gegeneinander versetzt. Ein Erkennen dieses Versatzes - z.B. mit Hilfe eines Spurfürs¹⁾ - bedeutet dann das Erkennen der "richtigen Seite".

2.1.4 Die Datennahme

Neben den physikalischen Eigenschaften der Jetkammer (Diffusion der Driftelektronen, Bildung von Sekundärelektronen) bestimmt hauptsächlich die

¹⁾ Die Verfahren zur Auflösung der Links-Rechts-Ambiguität werden in Kapitel 6 näher erläutert.

7

Art der Datennahme die Genauigkeit der Ortsmessungen. Bei der OPAL-Jetkammer werden die an den Signaldrähten entstehenden Impulse mittels FADC's (Flash Analog Digital Converter) ausgelesen, und aus diesen dann die Driftzeit t_D bestimmt. Dabei beträgt die Genauigkeit Δy der Ortsmessungen

$$y = v_D \cdot t_D :$$

$$\Delta y \approx 100 \mu m, \quad \text{für kleine } (\sim 3 \text{ cm}),$$

$$\Delta y \approx 200 \mu m, \quad \text{für große } (\sim 25 \text{ cm}) \text{ Driftstrecken [SCH86].}$$

Diese hohe Ortsauflösung ergibt sich, da neben den sehr genauen Driftzeitmessungen mittels FADC's auch die Driftgeschwindigkeit in der Kammer mit hoher Genauigkeit bekannt ist. Dies wird durch wiederholte Messungen der Driftgeschwindigkeit mit UV-Laserstrahlen erreicht [HAU83].

Im Gegensatz zu den bisher üblichen Driftzeitbestimmungen mittels Diskriminatoren ist bei der Benutzung von FADC's für die Datennahme auch die Form (zeitlicher Verlauf) des am Signaldraht entstehenden Pulses bekannt. Insbesondere lassen sich durch Benutzung dieser zusätzlichen Information zeitlich nahe zusammenliegende Pulse noch gut voneinander trennen: Die Doppelpurauflösung in der OPAL-Jetkammer beträgt ca. 2 mm [SCH86].

Mit dem bisher angegebenen Verfahren erhält man nur eine Ortsmessung in der xy -Projektion (Ebene senkrecht zu den Drähten). Für die Bestimmung der z -Koordinate (Richtung entlang der Drähte) wird bei der OPAL-Jetkammer die Methode der Ladungsteilung benutzt: Die Pulse werden an beiden Enden des Signaldrahtes gemessen, aus den beiden Ladungen die z -Koordinate bestimmt:

$$z = \frac{Q_l - Q_r}{2(Q_l + Q_r)} \cdot l_{eff},$$

wobei Q_l , Q_r die Ladung am linken bzw. rechten Drahtende und l_{eff} die effektive Drahtlänge ist. Die mit dieser Methode erreichbare z -Auflösung ist um zwei Größenordnungen kleiner als die Ortsauflösung in der xy -Projektion, die Genauigkeit beträgt ca. 1%, d.h. etwa 4 cm.

Wie auch bei den anderen Detektorcomponenten werden bei der Jetkammer die ursprünglichen Meßdaten (FADC-Pulse) von Mikroprozessoren ausgelesen. Dabei sind jeweils 96 Signaldrähte der Jetkammer einem dieser sogenannten Front-End-Prozessoren zugeordnet, insgesamt werden 40 dieser Mikroprozessoren eingesetzt. Verwendet werden Prozessoren aus der 68000er Familie,

die untereinander durch ein Bussystem vernetzt sind und Zugriff auf einen gemeinsamen Arbeitsspeicher haben [OPA87].

Ihre hauptsächlichste Aufgabe ist neben der eigentlichen Datennahme die Pulsformanalyse, die Bestimmung der Driftzeiten und der z -Koordinaten. Weiterhin sollen bereits online notwendige Korrekturen der Messungen vorgenommen werden. Als Beispiel sei hier die Berücksichtigung eventueller Feldinhomogenitäten genannt.

Man geht allerdings zur Zeit davon aus, daß für die genannten Aufgaben nur ca. 50% der insgesamt vorhandenen Prozessorleistung benötigt wird. Das führt zu der Überlegung, ob eine Spurerkennung im Front-End-Prozessorsystem - also bereits bei der Online-Analyse - möglich ist. In diesem Zusammenhang erlangt die Frage nach dem Zeitverhalten der im Test befindlichen Spurerkennungs-Verfahren eine besondere Bedeutung.

2.2 Die Weiterverarbeitung der Meßdaten

Für die Offline-Analyse der OPAL-Ereignisse wird zur Zeit ein Rekonstruktionsprogramm entwickelt. Dieses - ROPE (Reconstruction of OPAL Events) genannte - Programm [OPA87] hat die Aufgabe, die Informationen der individuellen Detektorcomponenten aufzubereiten und miteinander zu verbinden. Es stellt damit gleichsam den Rahmen dar, in den die verschiedenen Analyseprogramme eingebunden werden sollen. Insbesondere ist auch die Spurerkennung in der Jetkammer ein Teil dieses Programms.

Um den Stellenwert der Spurerkennung bei der Analyse der Jetkammerdaten zu zeigen, und damit auch eine Definition des Begriffs "Spurerkennung" zu geben, sei im folgenden das Verfahren der Spurrekonstruktion in der OPAL-Jetkammer grob skizziert:

a) Kalibration:

Nach der Bestimmung der Driftzeiten und der Ladungen der Einzelsignale aus den gemessenen Rohdaten (FADC-Pulse) sind weitere Korrekturen der Daten notwendig. Dazu gehören z.B. die Berücksichtigung unterschiedlicher Driftgeschwindigkeiten an den verschiedenen Stellen der Kammer, Inhomogenitäten des elektrischen Feldes usw. Ganz allgemein sei hier mit

Kalibration der gesamte Vorgang bezeichnet, der die Detektorsignale soweit aufbereitet und korrigiert, daß sie die bestmögliche Ortsbeschreibung der Teilchenbahnen in den einzelnen Driftzellen darstellen. Dies gilt natürlich nur insoweit, wie dies vor der Spurerkennung möglich ist. Eine Korrektur der in Kapitel 7 beschriebenen Spurwinkel effekte kann erst erfolgen, wenn bekannt ist, welche Punkte zu einer Spur gehören.

b) Spurerkennung:

Die Spurerkennung ist nun die Zusammenfassung der einzelnen Punkte zu Mengen (Spursegmente). Aufgrund der Kalibration der Jetkammer mit Laserstrahlen sind von Anfang an die Positionen der Signaldrähte und damit die Ortsmessungen relativ zueinander innerhalb eines Sektors sehr gut bekannt. Dies ist jedoch für die Positionen der einzelnen Sektoren zueinander nicht unbedingt der Fall, die Spurerkennung wird deshalb zunächst sektorweise durchgeführt.

Man muß im Regelfall davon ausgehen, daß ein von der Spurerkennung geleitetes Segment nicht die gesamte Teilchenbahn innerhalb eines Sektors umfaßt. Die zu einer Spur gehörenden Segmente müssen also noch zusammengefaßt werden (Merging).

c) Verknüpfung (Merging):

Es werden zunächst die Bahnparameter der einzelnen Segmente bestimmt, mittels dieser Parametrisierung wird dann die Zuordnung der Segmente zu Spuren vorgenommen. Dies erfolgt zuerst innerhalb der Sektoren und dann auch sektorübergreifend.

2.3 Spezielle Probleme und Lösungsansätze für die Spurerkennung

Aufgrund der um zwei Größenordnungen besseren Ortsauflösung in der xy -Ebene gegenüber der Auflösung der z -Koordinate benutzen die für die OPAL-Jetkammer untersuchten Spurerkennungs-Verfahren nur die xy -Informationen der Messungen. Da die OPAL-Ereignisse bei einer LEP-Energie von 100 GeV einen ausgeprägten Jetcharakter besitzen, liegen die Teilchenbahnen, die in der xy -Projektion eng benachbart sind, auch im Raum eng beieinander. Bei der

Entscheidung, ob ein Punkt zu einer Spur gehört, würde also die z -Koordinate aufgrund ihres großen Fehlers keine große Hilfe darstellen.

Andererseits könnte die Benutzung der z -Information verhindern, daß spur-fremde Punkte, die eine von der Spur sehr verschiedene z -Koordinate besitzen, in diese Spur aufgenommen werden. Solche Meßpunkte werden z.B. von Teilchen aus Sekundärprozessen, die in den Kammerwänden entstehen, verursacht. Gerade diese Teilchen sind es aber, die eine Benutzung der z -Information nahezu verbieten. Dies soll im folgenden gezeigt werden.

Ist der Abstand zweier benachbarter Teilchenbahnen in der xy -Projektion kleiner als die Doppelspurauflösung (ca. 2 mm), können die entstehenden FADC-Pulse nicht mehr voneinander getrennt werden. Die Folge ist, daß zwar die Driftzeit des ersten Pulses hinreichend genau gemessen wird, die Information des zweiten Pulses aber verloren geht (Abb. 2.4).

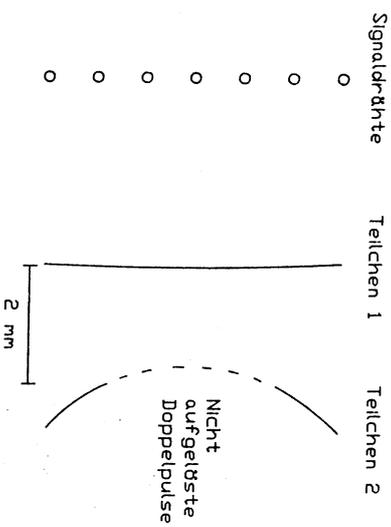


Abb. 2.4: Nicht aufgelöste Doppelpulse

Weil die an den beiden Enden des Signaldrahtes gemessenen Ladungen eines solchen, nicht aufgelösten Doppelpulses aber die Summen der Einzel Ladungen sind, resultiert daraus ein systematischer Fehler bei der z -Bestimmung des ersten Pulses (Methode der Ladungsteilung). Da es weiterhin vor der Spurer-

kennung nicht möglich ist, unaufgelöste Doppelpulse als solche zu erkennen, ist auch während der Spurerkennung nicht bekannt, ob die z -Koordinate einer Messung korrekt oder durch diesen systematischen Fehler verfälscht ist.

Solche Doppelpulse treten besonders häufig in Gebieten mit hoher Punktdichte auf, die sich z.B. durch spiralisierende Teilchen (Elektronen) aus Sekundärprozessen ergeben. Wollte man nun die z -Koordinate als zusätzliches Kriterium für die Zugehörigkeit eines Punktes zu einer Spur an den Stellen hoher Punktdichte benutzen, würde man Informationen verwenden, die aufgrund dieser Punktdichte verfälscht sind.

Damit stellen die systematischen Fehler bei nicht aufgelösten Doppelpulsen den eigentlichen Grund für den Verzicht auf die Benutzung der z -Information bei der Spurerkennung dar.

Eine weitere, typische "Eigenschaft" der Eingabedaten für die Spurerkennung ist die große Zahl der Einzelmessungen in einem Sektor. Wie die Computersimulation zeigt [KRI87], muß pro Ereignis ($\sqrt{s} = 96 \text{ GeV}$) im Mittel mit ca. 3500 Einzelmessungen in der gesamten Jetkammer gerechnet werden. Aufgrund der Jetstruktur verteilen diese sich aber nicht gleichmäßig auf die Sektoren; 1000 Meßpunkte in einem Sektor können durchaus als typisch bezeichnet werden.

Die Zahl der Messungen resultiert natürlich direkt aus der besonderen Geometrie der Jetkammer: Ein vom Wechselwirkungspunkt kommendes Teilchen erzeugt auf einer Strecke von 1,60 m bis zu 159 Meßpunkte in einem einzelnen Sektor. Dabei ist neben meßtechnischen Gründen (möglichst geringe Feldverzerrungen) gerade der Wunsch nach maximaler Spurlänge innerhalb eines sensitiven Detektorvolumens der Grund für die Wahl dieses Aufbaus: Aufgrund der Laserkalibration sind die Geometrie und die physikalischen Eigenschaften eines Sektors gut bekannt, die große Zahl von Messungen einer Spur ergibt eine hohe Orts- und Impulsaufösung.

Indessen stellt die große Zahl von Messungen durchaus auch ein Problem für die Spurerkennung dar. Je mehr Punkte als Eingabe vorliegen, desto mehr Punktkombinationen müssen als mögliche Teilchen Spuren untersucht werden. Die Zahl der möglichen Kombinationen wächst dabei natürlich nicht linear mit der Anzahl der Einzelmessungen, sondern in weit stärkerem Maße: Wollte man das Problem durch Enumeration lösen, hätte man in einem Sektor bei n Punk-

ten pro Driftzelle n^{159} Punktombinationen zu überprüfen.

Diese Zahl ergibt sich, wenn man davon ausgeht, daß die $159 \cdot n$ Messungen aus n Spuren resultieren, die den Sektor jeweils vollständig in radialer Richtung durchlaufen. Sie erhöht sich aber noch durch die Tatsache, daß auch Teilchen existieren, die nur in einem Teil des Sektors Signale erzeugen. Weiterhin gehören nicht alle Punkte zu einer Spur (Rauschen der Kammer), oder es fehlen Spurpunkte. Noch weitgehend kompliziert sich das Spurerkennungsproblem durch die Links-Rechts-Ambiguität der Einzelmessungen. Gerade diese Sonderfälle sind es auch, die eine formale, mathematische Beschreibung des Spurerkennungs-Problems sehr schwierig bzw. unmöglich machen¹⁾.

Ein gangbarer Weg zur Verringerung der zu untersuchenden Punktombinationen wäre die Partitionierung des Gesamtproblems in kleinere Teilprobleme, im Falle der Jetkammer also eine (willkürliche) Teilung eines Sektors in kleinere Bereiche, in denen dann getrennt eine Spurerkennung durchgeführt werden könnte. Abgesehen von den algorithmischen Schwierigkeiten durch die Links-Rechts-Ambiguität würde ein solches Vorgehen jedoch gerade die Vorteile der Jetkammer (möglichst große Spurstücke in einem sensitiven Volumen) zunichte machen. Nach Möglichkeit sollte also die Spurerkennung das gesamte Sektorvolumen berücksichtigen.

In der Hochenergiephysik gibt es inzwischen eine ganze Reihe verschiedener Spurerkennungs-Verfahren, die für die unterschiedlichen Detektoren eingesetzt werden [STB80] [CAS81] [PIM85]. Aufgrund der hohen Punktzahl im Falle der OPAL-Jetkammer kommt jedoch nur das Prinzip der Spurverfolgung in Betracht:

- 1) Ganz allgemein läßt sich das Spurerkennungs-Problem wie folgt darstellen: Gesucht ist die Aufteilung der Menge aller Messungen in Teilmengen, so daß
 - jede Teilmenge die Punkte umfaßt, die von einem Teilchen erzeugt wurden,
 - und weiterhin eine Teilmenge existiert, in der alle Punkte, die keiner Teilchenspur entsprechen (Rauschen), zusammengefaßt sind.

Für die mathematische Formulierung besteht nun die Schwierigkeit, eine Ordnung auf den möglichen Kombinationen derart zu definieren, daß sie die "physikalische Richtigkeit" der verschiedenen Kombinationen beschreibt, und so den Vergleich der Punktzuordnungen ermöglicht.

Unter Verwendung eines mathematischen Modells - das ist z.B. die Annahme von Kreisbahnen für die Jetkammer Spuren - wird die Spur punkt- oder stückweise durch das Detektorvolumen verfolgt. Ist erst einmal ein Teil einer Spur gefunden, kann mit wenigen Vergleichen ($O(n) = n$) entschieden werden, ob ein Punkt in der nächsten Ebene des Detektors zur angenommenen Teilbahn kompatibel ist. Da die Spuren im äußeren Bereich des Detektors größeren Abstand zueinander besitzen als im inneren Bereich, erfolgt die Punktuche in der Regel von außen nach innen.

Tatsächlich besitzen alle für die OPAL-Jetkammer im Test befindlichen Spurerkennungs-Verfahren dieses Grundmuster. Unterschiedlich sind allerdings die Darstellungsart der Messungen und weiterhin die zugrundegelegten Annahmen über den Spurverlauf. Um die Unterschiede deutlich zu machen, seien die Verfahren im folgenden kurz skizziert:

a) Conformal Mapping [HAN86]:

Dieses Verfahren benutzt zur Darstellung der Messungen nicht den normalen Ortsraum. Die Punkte werden durch eine konforme Abbildung in den sogenannten invertierten Raum dertart transformiert, daß - geht man von einer Kreisbahn im Ortsraum aus - die zu einer Spur gehörenden Punkte im invertierten Raum auf einer Geraden liegen. Die eigentliche Spurerkennung kann sich damit auf das Erkennen dieser Geraden beschränken. Ist eine bestimmte Menge von Punkten gefunden, wird ein Geradenfit durchgeführt und die Spur auf diese Weise extrapoliert. Befinden sich innerhalb einer bestimmten StraÙe um diese Extrapolation weitere Punkte, werden sie zur Spur hinzugenommen, eine neue Gerade angepaßt, usw.

b) Chain-Methode:

Bei diesem Verfahren wird nach geeignet gewählten Kriterien aus mehreren Meßpunkten ein "Spurkanndat" definiert. Aus den Punkten des Spurkanndatens wird dann eine Punktvorhersage für die nächste Driftzelle berechnet. Nach der Aufnahme eines kompatiblen Punktes ergibt sich dann die nächste Vorhersage, usw. Da immer nur eine **kleine Zahl der zuletzt** aufgenommenen Punkte (Chain) für die Punktvorhersage benutzt wird, die Spur also nur lokal beschrieben werden muß, kann für die Bahnkurve eine einfachere Beschreibung als ein Kreis - z.B. eine Parabel - gewählt werden.

Es existieren momentan zwei Spurerkennungs-Verfahren für die OPAL-

Jetkammer, die diese Methode benutzen: Das eine führt die Spurverfolgung im normalen Ortsraum [KRE86] aus, das andere benutzt direkt die nicht transformierten Driftzeiten [BOG86].

c) Billoir-Methode:

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren kann als eine spezielle Anwendung der Chain-Methode angesehen werden. Es benutzt für die Punktvorhersage jedoch die Information aller, zu einem Spurkanndaten gehörenden Punkte: Die Punktvorhersage ergibt sich aus einem Fit (Billoir-Fit, Kapitel 3) der bereits gefundenen Spurpunkte. Die Spurverfolgung wird im Ortsraum durchgeführt.

2.4 Hilfsmittel für die Programmentwicklung: Die Simulation

Um die Verfahren der Spurerkennung oder allgemein der Datenanalyse testen zu können, müssen natürlich zuerst einmal Daten für die einzelnen Schritte der Analyse vorhanden sein. Können für den Test der Kalibrationsverfahren - z.B. die Bestimmung der Driftzeiten aus den FADC-Pulsen - die Messungen an Testkammern benutzt werden, so trifft dies für die Spurerkennung nicht mehr zu.

Die Qualität und das Zeitverhalten einer Spurerkennung sind nämlich von der **Struktur der Eingabedaten** abhängig, wie sie sich z.B. aus der Multiplizität und dem Jet-Charakter der Ereignisse ergibt. Um also das Verhalten eines Spurerkennungs-Verfahrens beim späteren Detektor beurteilen zu können, ist eine **Computersimulation** notwendig, die möglichst genaue, den späteren Messungen entsprechende Eingabedaten liefert.

Ein solches Simulationsprogramm ist das Programm GOPAL [GOP87], das unter Benutzung des GEANT3-Systems [GEA86] den gesamten OPAL-Detektor simuliert. Als Ereignisgenerator wird innerhalb von GOPAL ein an der Lund-Universität in Schweden entwickeltes Simulationsprogramm verwendet [SJÖ85].

Dieses - im folgenden auch als LUND-Generator bezeichnete - Programm benutzt zur Bestimmung der aus der e^+e^- -Annihilation entstehenden Teilchen

das Stringmodell der Quantenchromodynamik. Die Ausgabedaten beschreiben dabei nicht mehr die einzelnen Quarks, sondern die "zusammengesetzten", messbaren Teilchen (Pionen, Kaonen usw.). Geliefert werden:

- a) Teilchenart (Masse und Ladung),
- b) Viererimpuls und
- c) Ort der Entstehung.

Die durch diese Angaben beschriebenen Primärteilchen¹⁾ dienen als Eingabe für das GOPAL-Programm, das die Teilchen dann schrittweise durch den Detektor verfolgt (sog. **Tracking**).

Dabei wird neben dem Einfluß der Vielfachstreuung und dem Energieverlust in den verschiedenen Detektorkomponenten auch die Möglichkeit eines Zerfalls berücksichtigt. Die aus einem solchen Zerfall hervorgehenden Sekundärteilchen werden dann ebenfalls weiterverfolgt. Dies gilt auch für Elektronen, die als δ -Elektronen in der Materie des Detektors entstehen. Die Verfolgung eines Teilchens wird erst dann gestoppt, wenn es den Detektor verläßt, oder sein Impuls aufgrund der berücksichtigten, physikalischen Effekte unter einem bestimmten Grenzwert liegt.

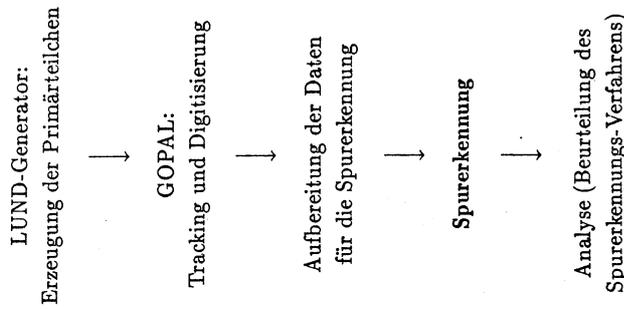
Nach dem Tracking sind die Teilchenorte und -impulse in den verschiedenen, sensitiven Volumina des Detektors bekannt; es können nun die eigentlichen Meßgrößen der einzelnen Detektorkomponenten bestimmt werden. Diese als **Digitisierung** bezeichnete Bestimmung der Meßgrößen liefert im Falle der Jetkammer direkt die Driftzeiten und die Ladungen der Einzelsignale. Berücksichtigt werden dabei neben der endlichen Doppelpurauflösung auch eventuelle Ineffizienzen und das Rauschen der Kammer.

Mit der Digitisierung ist die Simulation der Messungen abgeschlossen. Das im folgenden vorgestellte Spurerkennungsprogramm jedoch Raumkoordinaten als Eingabedaten benötigt, müssen diese noch aus den Driftzeiten und den

¹⁾ Im Rahmen dieser Arbeit wird mehrfach zwischen Primär- und Sekundärteilchen unterschieden. Dabei seien die Primärteilchen die vom Wechselwirkungspunkt kommenden, die Sekundärteilchen die durch Zerfall oder sonstige Effekte im Detektor entstehenden Teilchen. Im Falle der Computersimulation stellen die vom LUND-Generator gelieferten Teilchen *per definitionem* die Primärteilchen dar.

Ladungen berechnet werden. Diese Aufbereitung der von der Simulation gelieferten Rohdaten ist für jedes der vier untersuchten Spurerkennungs-Verfahren unterschiedlich, da jeweils verschiedene Eingabedaten verlangt werden. Die für die in dieser Arbeit vorgestellte Spurerkennung benötigten Eingaben sind in Kapitel 8 bei der Beschreibung des Algorithmus näher spezifiziert.

Zusammenfassend kann das Programmsystem für die Entwicklung und den Test der Spurerkennungs-Verfahren also folgendermaßen skizziert werden:



3. Die Billoir-Fit-Methode

3.1 Fit mit Vielfachstreuung

Geladene Teilchen in einem homogenen Magnetfeld, wie es z.B. in der OPAL-Jetkammer vorliegt, bewegen sich auf Spiralbahnen, deren Projektionen auf die Ebene senkrecht zum Magnetfeld Kreise sind. Bei Durchgang durch die Materie des Detektors erfahren die Teilchen jedoch zufällige Abweichungen von dieser Kreisbahn durch Vielfachstreuung. Bei einer Spuranpassung an die Messungen müssen also nicht nur die Fehler der Einzelmessungen, die aus der endlichen Auflösung des Detektors resultieren, berücksichtigt werden. Vielmehr müssen auch die Effekte der Vielfachstreuung in die Spuranpassung einbezogen werden, wenn diese Streuung nicht vernachlässigt werden kann. Dies ist hauptsächlich der Fall bei niederenergetischen Teilchen oder für die sehr genaue Bestimmung der Spurparameter.

Im Prinzip gibt es zwei Wege, einen Fit unter Berücksichtigung der Vielfachstreuung durchzuführen:

a) Der Standard-Fit.

Es werden nur die Meßfehler der Einzelmessungen berücksichtigt. Im Falle eines homogenen Magnetfeldes wird ein Standard-Kreisfit durchgeführt, der die Spurparameter und deren Kovarianzmatrix ohne direkte Berücksichtigung der Vielfachstreuung liefert. Die dabei erhaltene Kovarianzmatrix kann dann durch die Addition von entsprechenden Korrekturtermen (mittlere Winkelstreuung) verändert werden [BIL84].

Eine solche Spuranpassung ist nicht optimal. In extremen Fällen (hohe Genauigkeit der Einzelmessungen, sehr viele Einzelmessungen) nimmt die Abweichung der errechneten von den wahren Spurparametern sogar mit der Anzahl der Meßpunkte zu.

b) Der optimale Fit.

Aufgrund der Vielfachstreuung handelt es sich bei der zu bestimmenden Teilchenbahn nicht mehr um einen Kreis. Vielmehr kann die Teilchenbahn nur

lokal durch einen Kreis beschrieben werden. Bei N Messungen führt dies zu einer Beschreibung der gesamten Bahn durch eine N -parametrische Kurve.

Der optimale Fit benutzt nun die volle $(N \times N)$ Kovarianzmatrix der Einzelmessungen unter Berücksichtigung der Vielfachstreuung durch Korrekturterme. Zur Berechnung der optimal angepassten Bahnkurve muß diese Matrix invertiert werden. Im Falle vieler Messungen kann dies zu extremen Problemen bezüglich der numerischen Genauigkeit und dem Zeitverhalten eines solchen Verfahrens führen. Dabei muß das Zeitverhalten wegen der benötigten Matrix-Inversion mindestens mit $\mathcal{O}(N) = N^2$ [JERR86] angegeben werden, wenn N die Anzahl der Messungen ist. Für den Spurfit eines Teilchens, das die gesamte OPAL-Jetkammer in radialer Richtung durchquert, wäre also die Inversion einer (159×159) Matrix nötig.

3.2 Beschreibung der Billoir-Fit-Methode

Die Billoir-Fit-Methode [BIL84] ist eine rekursive Methode, die auf der Idee basiert, einen Meßpunkt nach dem anderen bei korrekter Berücksichtigung der Vielfachstreuung in den Fit einzubeziehen.

Die Beschreibung der Billoir-Fit-Methode sei im folgenden auf den zweidimensionalen Fall beschränkt. Gegeben sei ein Detektor, der in einem zweidimensionalen Koordinatensystem an den Stellen x_1, \dots, x_N Messungen der Ordinate eines Teilchens liefert. Dabei sei die Richtung des Detektor-Koordinatensystems so gewählt, daß kleine x -Koordinaten den Meßstellen in Vertikalnähe und große x -Koordinaten den Meßstellen im äußeren Bereich des Detektors entsprechen.

Gegeben sind also die als fehlerfrei angenommenen Meßstellen

$$x_1, \dots, x_N,$$

die Ordinatenmessungen

$$y_1, \dots, y_N,$$

und die Fehler dieser Messungen

$$\sigma_{y_1}, \dots, \sigma_{y_N}.$$

Im Prinzip ist nun für jede der Meßstellen x_i ($i = 1, \dots, N$) die bestmögliche Schätzung der Teilchenbahn gesucht. Jede dieser N lokalen Spurschätzungen wird dabei durch einen Parametersatz P_i beschrieben, der im Falle eines Kreises in der Ebene aus drei Parametern besteht. Bei der Suche nach den N Parametersätzen P_i ist natürlich der Parametersatz P_1 von größtem Interesse, da dieser die Teilchenspur in Vertexnähe beschreibt.

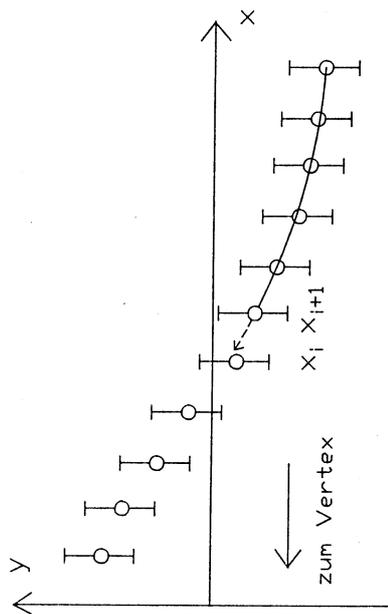


Abb. 3.1: Meßpunkte im Detektor

P. Billoir gibt nun zur Bestimmung dieses Parametersatzes folgende rekursive Methode an:

Man geht davon aus, daß ein optimaler Fit der Messungen an den Stellen x_{i+1}, \dots, x_N vorliegt, der die bestmöglichen Spurparameter P_{i+1} und deren Kovarianzmatrix V_{i+1} an der Stelle x_{i+1} liefert. Aus diesen Parametern P_{i+1} und der nächsten Messung y_i wird dann der optimale Fit (Parameter P_i) für die Stelle x_i berechnet. Eine sukzessive Anwendung dieses Verfahrens beginnend im äußeren Bereich des Detektors führt schließlich zu den optimalen Spurparametern P_1 an der Stelle x_1 .

Wie später gezeigt wird, gehen bei der Rekursion in die Bestimmung der neuen Parameter P_i und der Kovarianzmatrix V_i nur die bereits bestimmten

Parameter P_{i+1} und deren Kovarianzmatrix V_{i+1} ein. Die Einzelmessungen $i + 1, \dots, N$ sind in (P_{i+1}, V_{i+1}) enthalten und werden zum aktuellen Rekursionsschritt nicht mehr benötigt:

$$(P_{i+1}, V_{i+1}, y_i, \sigma_{y_i}) \longrightarrow (P_i, V_i).$$

Daraus läßt sich direkt ein lineares Zeitverhalten bezüglich der Anzahl der Meßpunkte folgern. Dieses lineare Zeitverhalten ist natürlich ein entscheidender Vorteil gegenüber einem Fit-Verfahren, das die volle $(N \times N)$ Kovarianzmatrix benutzt. Die schnellere Rekursion hat jedoch auch ihren Preis: Durch die Benutzung der $(N \times N)$ Kovarianzmatrix ist es prinzipiell möglich, die optimalen (alle Messungen beinhaltenden) Spurparameter für jede Stelle x_i ($i = 1, \dots, N$) anzugeben. Dies ist bei der Billoir-Methode nicht der Fall. Nur der Parametersatz P_1 enthält in der Tat die Information aller Messungen.

Zur einfacheren Darstellung des rekursiven Verfahrens beschreibt P. Billoir nun nicht einen wirklichen Kreisfit, sondern benutzt die Approximation des Kreises durch eine Parabel. Diese Näherung ist unter folgenden Annahmen zulässig:

- Es werden nur schwach gekrümmte Spuren berücksichtigt.
- Die Spuren besitzen im gegebenen Koordinatensystem nur eine geringe Steigung. Sie verlaufen nahezu parallel zur x -Achse.

Eine solche Parabel ist gegeben durch die quadratische Gleichung

$$y = Y_i + A_i x + \frac{C_i}{2} x^2 \quad (3.1)$$

mit den Parametern $P_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ A_i \\ C_i \end{pmatrix}$.

Start der Rekursion:

Für den Start der Rekursion schlägt P. Billoir zwei Methoden vor:

- a) Start der Rekursion am äußersten Meßpunkt. Die letzte Messung y_N ergibt den y -Achsenabschnitt Y_N der Startparabel, läßt aber die Steigung

A und die Krümmung C völlig unbestimmt. Für A_N und C_N werden näherungsweise Startwerte mit sehr großen Varianzen gewählt.

- b) Es werden die drei letzten Punkte zur Berechnung der Startparabel benutzt. Dabei kann, wenn nötig, der Einfluß der Vielfachstreuung zwischen x_{N-2} und x_N berücksichtigt werden.

Es sei bereits hier darauf hingewiesen, daß diese Startmethode für die Implementierung der Billoir-Fit-Methode in ein Spurerkennungs-Programm gewählt wurde. Dabei wurde die Vielfachstreuung für die drei Startpunkte vernachlässigt.

Durch Einsetzen der Messungen $(x_{N-2}, y_{N-2}), (x_{N-1}, y_{N-1}), (x_N, y_N)$ in die Parabelgleichung erhält man die Parameter

$$P_{N-2} = \begin{pmatrix} Y_{N-2} \\ A_{N-2} \\ C_{N-2} \end{pmatrix}.$$

Die zu diesem Parametersatz gehörige Kovarianzmatrix ist dann

$$V_{N-2} = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_C^2 \end{pmatrix},$$

wobei die σ_A, σ_C mittels Fehlerfortpflanzung aus den Fehlern der Einzelmessungen $\sigma_{y_{N-2}}, \sigma_{y_{N-1}}, \sigma_{y_N}$ berechnet werden.

Rekursion:

Gegeben seien die Parameter P_{i+1} und deren Kovarianzmatrix V_{i+1} , die die Teilchenbahn an der Stelle x_{i+1} bezüglich der Messungen $i+1, \dots, N$ bestmöglich beschreiben. Gesucht sind nun P_i und V_i , die die bestmögliche Beschreibung der Bahn an der Stelle x_i bezüglich der Messungen $i, i+1, \dots, N$ darstellen.

Dabei beziehe sich der Parametersatz P_{i+1} nicht auf das gegebene Detektor-Koordinatensystem sondern auf ein **lokales Koordinatensystem**, dessen Ursprung an der Stelle x_{i+1} des Detektor-Systems liegt. Diese **lokale Parametrisierung** hat entscheidende Vorteile bei der Berechnung der neuen Parameter P_i .

Die Rekursion wird nun in drei Einzelschritten durchgeführt:

Schritt 1: Extrapolation des Fits (Propagation).

Um die lokale Parametrisierung beizubehalten, muß die durch die Parameter P_{i+1} gegebene Parabel zuerst einmal in das neue lokale Koordinatensystem (Ursprung bei x_i) transformiert werden. Dies entspricht einer Verschiebung der Parabel um $\delta x = x_{i+1} - x_i$:

$$y = Y + Ax + \frac{C}{2}x^2 \longrightarrow y = Y + A(x - \delta x) + \frac{C}{2}(x - \delta x)^2.$$

Entsprechend wird die Kovarianzmatrix V_{i+1} transformiert.

In formaler Schreibweise:

$$P_i^t = D \cdot P_{i+1}, \tag{3.2a}$$

$$V_i^t = D \cdot V_{i+1} \cdot D^t, \tag{3.2b}$$

wobei die Jacobi-Matrix D für die Translation um δx folgende Form annimmt:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -\delta x & \frac{\delta x^2}{2} \\ 0 & 1 & -\delta x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta x = x_{i+1} - x_i.$$

Der so erhaltene Parametersatz P_i^t beschreibt natürlich dieselbe Parabel wie P_{i+1} (Abb. 3.2). Es wurde in diesem Schritt keine Information hinzugefügt.

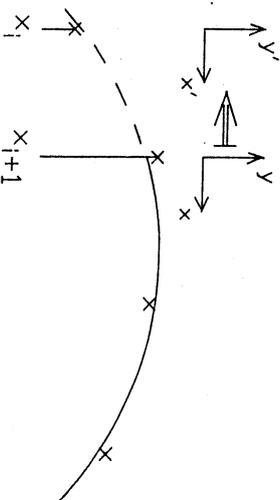


Abb. 3.2: Die Parabelpropagation

Schritt 2: Berücksichtigung der Vielfachstreuung.

Zwischen den Meßstellen x_i und x_{i+1} hat das Teilchen die im Detektor befindliche Materie durchquert. In diesem Schritt werden die dabei aufgetretenen Effekte der Streuung in den Fit einbezogen.

Nach Durchgang eines Teilchens durch eine Materieschicht bestimmter Dicke hat die Bahnkurve des Teilchens durch Streuung eine Änderung erfahren, die sich durch die folgenden drei Effekte beschreiben läßt (Abb. 3.3):

- Ortsversatz Δy ,
- Spurwinkelländerung $\Delta\alpha$,
- Krümmungsänderung durch Energieverlust.

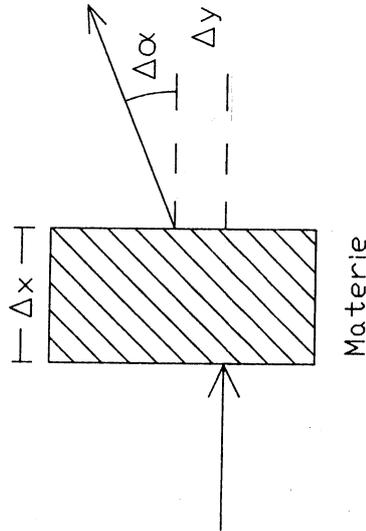


Abb. 3.3: Einfluß der Vielfachstreuung auf die Teilchenbahn

Für die Berücksichtigung der Streuung führt Billoir eine weitere Näherung ein. Er nimmt an, daß die Dicke δx der Materieschicht klein ist, und weiterhin, daß die Materie im Detektor eine geringe Dichte besitzt, so daß der Energieverlust des Teilchens vernachlässigt werden kann. Billoir vernachlässigt weiterhin den Ortsversatz und berücksichtigt nur die Winkeländerung der Teilchenbahn.

Für die OPAL-Jetkammer sind die Abstände der Meßpunkte in der Größenordnung von 1 cm. Die Materie im Detektor ist ein Gas (Argon-Methan-Isobutan, voraussichtlich 4 Bar). Es wäre also durchaus möglich, diese Näherung zu übernehmen. Tatsächlich aber wurde bei der später beschriebenen Implementierung des Fits der Ortsversatz nicht vernachlässigt.

Mit folgender Transformation der Parameter und der Kovarianzmatrix wird der Einfluß der Streuung berücksichtigt:

$$P_i'' = P_i' \quad (3.3a)$$

$$V_i'' = V_i' + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3b)$$

Der Parametersatz P_i' selbst wird nicht verändert, da der Mittelwert der Spurwinkelländerung $\Delta\alpha$ null ist. Durch die Streuung ist einzig und allein eine Unsicherheit im Spürwinkel (Näherung!) aufgetreten, die durch die Addition eines Korrekturterms zum (2, 2) Element der Kovarianzmatrix - das der Varianz des Parameters A entspricht - in die Rechnung eingeht.

Schritt 3: Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes zum Fit.

An der Stelle x_i besitzen wir nun eine Vorhersage der optimal angepassten Bahn (P_i'', V_i'') resultierend aus den Messungen $i+1, \dots, N$. Das zu minimierende χ^2 ergibt sich aus einem Anteil der Messungen $i+1, \dots, N$, repräsentiert durch (P_i'', V_i'') und einem Anteil der aktuellen Messung (y_i, σ_{y_i}).

Unter Verwendung der Methode kleinster Fehlerquadrate gelangt man zu einem linearen Gleichungssystem, das durch die lokale Parametrisierung folgende einfache Form annimmt¹⁾:

$$\left(V_i''^{-1} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} Y_i - Y_i'' \\ A_i - A_i'' \\ C_i - C_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_i - Y_i''}{\sigma_{y_i}^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4a)$$

1) Herleitung im Anhang.

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhält man die Parameter $P_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ A_i \\ C_i \end{pmatrix}$ und deren Kovarianzmatrix

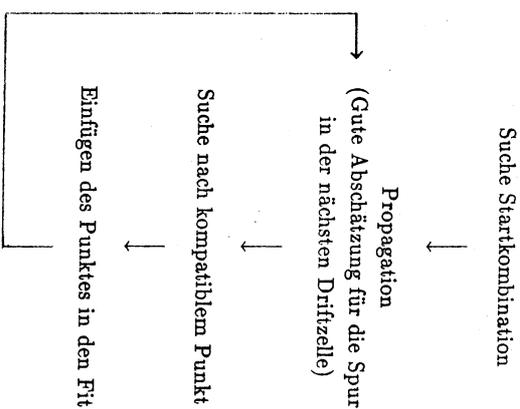
$$V_i = \left(Y_i^{T-1} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \quad (3.4b)$$

Damit ist ein einzelner Rekursionsschritt $(P_{i+1}, Y_{i+1}, y_i, \sigma_{y_i}) \rightarrow (P_i, Y_i)$ durchgeführt. Nach $N-3$ Rekursionsschritten ergeben sich die gesuchten Spurparameter P_i und deren Kovarianzmatrix V_i , die die beste Abschätzung der Teilchenbahn in Vertextnähe darstellen.

3.3 Die Billor-Fit-Methode zur Spurerkennung

Im vorhergehenden wurde eine Fit-Methode beschrieben, und es stellt sich nun die Frage, wie diese für ein Spurerkennungs-Verfahren zu verwenden ist. Im Falle der Jetkammer ergibt sich bei der Anwendung der Billor-Methode ein ständiger Wechsel zwischen der Extrapolation einer bereits gut bekannten Teilchenspur in die nächste Driftzelle und der Bestimmung der neuen Spurparameter durch Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes. Ist dieser aktuelle Meßpunkt jedoch nicht bekannt, wie es bei der Durchführung der Spurerkennung der Fall ist, so ist die in die aktuelle Driftzelle extrapolierte Spur immerhin eine ausgerechnete Vorhersage für den gesuchten Meßpunkt. Mit Hilfe dieser Vorhersage kann nun der zur Spur gehörende Punkt bestimmt und dann in den Fit eingefügt werden.

Damit ergibt sich folgendes Spurverfolgungsprinzip:



Das Grundmuster dieses Algorithmus findet sich auch in einem anderen Spurerkennungs-Verfahren, das momentan für die OPAL-Jetkammer untersucht wird (Chain-Verfahren) [KRE86]. Die Verfahren unterscheiden sich im wesentlichen in der Art der Vorhersage des nächsten Punktes.

Die Benutzung der Billor-Methode wird dabei motiviert durch die hohe Genauigkeit, die ein korrekter Fit für die Punktvorhersage erbringt, was sich letztendlich in der Effizienz einer solchen Spurerkennung widerspiegeln sollte. Weiterhin wäre zu untersuchen, ob die direkt von der Billor-Fit-Methode gelieferte Parametrisierung der gefundenen Spursegmente bereits ausreicht, diese zu Spuren zusammenzufassen (Merging).

4. Implementierung des Fits

Zur Implementierung des Fits speziell in einem Spurerkennungs-Programm muß zunächst einmal das Koordinatensystem, in dem die Meßpunkte der OPAL-Jetkammer dargestellt werden sollen, ausgewählt werden. Steht dieses System und damit die Darstellung der Detektor-Messungen fest, muß weiterhin untersucht werden, ob die von P. Billoir eingeführten, im vorigen Kapitel beschriebenen Näherungen für die Durchführung des Fits hinreichend sind. Wie gezeigt werden wird, ist die vorgestellte Parabelapproximation im Falle der Jetkammer-Messungen unzureichend, der Übergang zu einem Kreisfit-Verfahren notwendig. Die Wahl des Koordinatensystems und die Beschreibung des schließlich benutzten Kreisfits sind Inhalt dieses Kapitels.

4.1 Wahl des Koordinatensystems

Ist nur die Frage nach einer Spuranpassung gegeben, deren Zugehörigkeit zu einer Teilchenspur bereits bekannt ist, gestellt, so ist es wie im folgenden gezeigt wird - prinzipiell möglich, das Koordinatensystem für den Fit frei zu wählen. So könnte z.B. die x -Achse des Koordinatensystems durch den ersten und den letzten Meßpunkt der Spur gelegt werden. Bei einem solchen System ist dann die Steigung der zu bestimmenden Bahnkurve an jeder Stelle klein. Für Teilchen mit großem Impuls (kleine Krümmung) wäre dann die Anwendung der von P. Billoir vorgestellten Parabelapproximation möglich.

Unbedingt zu beachten ist dabei allerdings, daß durch die Drehung des Koordinatensystems auch die Darstellung der Einzelmessfehler betroffen ist:

Es seien in einem kartesischen Koordinatensystem S die Meßpunkte (x_i, y_i) nur mit einem Fehler σ_{y_i} in y -Richtung behaftet, die Werte x_i also fehlerfrei gegeben. Dann sind nach Transformation der Messungen in ein gedrehtes System S' nicht nur die y' -Werte, sondern auch die x' -Werte mit einem Fehler σ'_{x_i} behaftet.

Dies muß bei der Spuranpassung berücksichtigt werden. Bei fehlerfreien x -Werten genügt es, die y -Differenzen zwischen den Meßpunkten und der zu bestimmenden Kurve zu minimieren. Dies ist bei fehlerbehafteten x -Werten nicht

mehr der Fall. Das zu minimierende χ^2 ergibt sich vielmehr aus Beiträgen von x und y .

Es sei hier darauf hingewiesen, daß das bei der Beschreibung der Billoir-Methode angegebene lineare Gleichungssystem (3.4a), das in jedem Rekursionsschritt gelöst werden muß, die dargestellte einfache Form nur annimmt, weil die x -Werte der Messungen als fehlerfrei angenommen sind.

Eine weitere Einschränkung bei der Wahl des Koordinatensystems ist durch die Tatsache gegeben, daß der Billoir-Fit für die Spurerkennung verwendet werden soll. Dies sei am Beispiel des Detektor-Referenz-Systems (x -Achse in Richtung der Signaldrahtebene) erläutert.

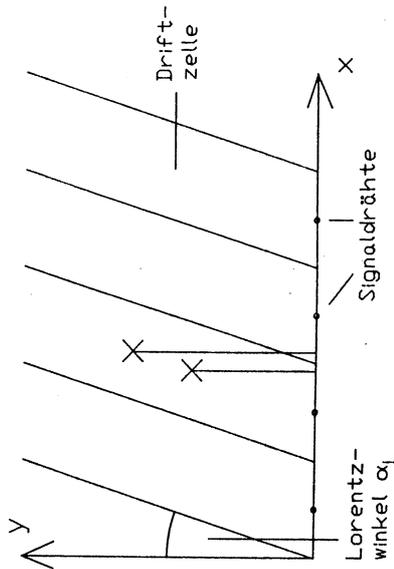


Abb. 4.1: Das Detektor-Referenz-System

Durch das Magnetfeld sind die Driftzellen um den Lorentz-Winkel ($\alpha_L \approx 15^\circ$) gegen die y -Achse geneigt. Meßpunkte in derselben Driftzelle unterscheiden sich dadurch nicht nur in y , sondern auch in x . Für eine normale Spuranpassung (Meßpunkte bekannt) wäre dies kein Nachteil. Während der Spurerkennung jedoch ist bei der Extrapolation der Spur der nächste Punkt noch nicht bekannt. Damit fehlt im Detektor-Referenz-System auch die Information, an welcher Stelle x die Spur extrapoliert werden muß.

Will man nun die Propagation für eine Spur pro Driftzelle nur einmal durchführen, so muß das Koordinatensystem wie in Abb. 4.2 dargestellt gewählt werden.

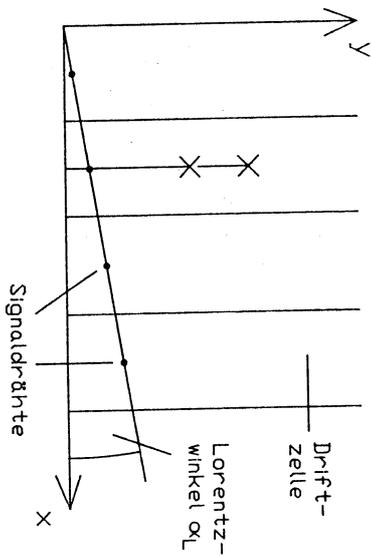


Abb. 4.2: Das Lorentz-gedrehte System

Dieses System, bei dem die Driftzellen parallel zur y -Achse liegen, sei im folgenden **Lorentz-gedrehtes System** genannt. Messungen in derselben Driftzelle besitzen hier dieselben x -Werte. Sieht man von den in Kapitel 7 beschriebenen Spurrinkelleffekten und Ungenauigkeiten der Kalibration ab, so ist das Lorentz-gedrehte System außerdem gerade das Koordinatensystem, das sich durch fehlerfreie x -Werte der Messungen auszeichnet, da die x -Werte durch die Signaldriftzelle vorgegeben sind.

Im Hinblick auf die speziellen Belange des Billoir-Fits und der Spurrenennung ist also nur das Lorentz-gedrehte System benutzbar.

4.2 Die Parabelapproximation

Zur Untersuchung, ob die von Billoir benutzte Parabelapproximation für einen Spurrift in der Jetkammer genügt, wurde das Verfahren ohne den Schritt der Berücksichtigung der Vielfachstreuung implementiert. Die Eingabedaten wurden mit dem OPAL-Simulationsprogramm GOPAL [GOP85] erzeugt. Da vorläufig nur nach dem Verhalten der Approximation bezüglich der korrekten Bahn (Kreis) gefragt war, wurde die Simulation der Effekte der Vielfachstreuung und der Meßfehler unterdrückt. Damit waren die von der Simulation gelieferten Spuren echte Kreise.

Abb. 4.3 zeigt das Verhalten des Fits für ein μ^+ mit einem Transversalimpuls von $p_T = 400 \text{ MeV}/c$. Bei geeignet gewähltem Eintrittswinkel durchquert ein Teilchen mit diesem Impuls gerade noch die gesamte Jetkammer bei maximaler Krümmung der Spur.

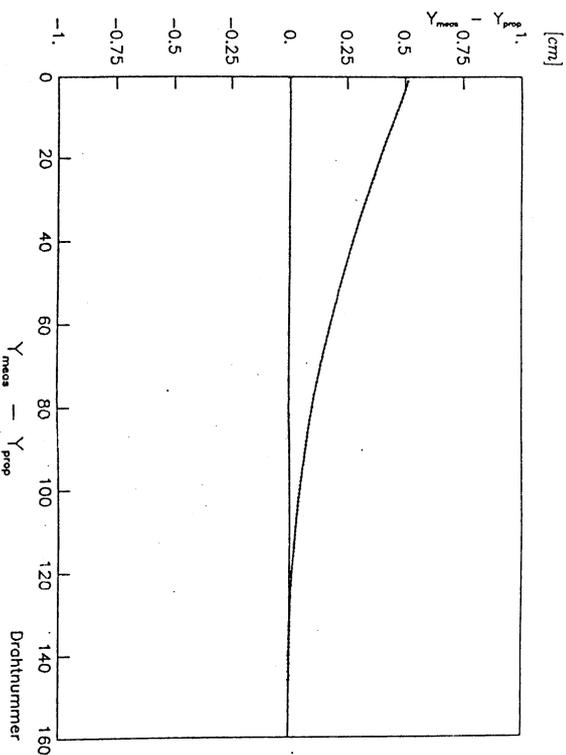


Abb. 4.3: Die Abweichungen des Parabelfits von den Meßpunkten

In der Abbildung ist die Differenz zwischen den propagierten (Fit) und den gemessenen y -Werten gegen die Drahtnummer aufgetragen. Der Fit startet im äußeren Bereich des Sektors (hohe Drahtnummer). Für die ersten ca. 20 Meßpunkte ergibt sich eine ausreichende Übereinstimmung der Propagation mit den Messungen. Nach Einbeziehung aller Meßpunkte in den Fit beträgt die Abweichung von den Messungen jedoch 0,5 cm. Eine solche Abweichung ist aber - verglichen mit der Ortsauflösung der Kammer (100 - 200 μ m) - nicht annehmbar. Die Ungenauigkeiten durch die Approximation sind größer als die durch Vielfachstreuung verursachten Effekte, die durch Benutzung eines optimalen Fits ja gerade korrigiert werden sollen.

Damit ergibt sich die Schlussfolgerung:

Eine Approximation der Spuren durch Parabeln ist im Falle der OPAL-Jetkammer unzureichend. Dies ist einerseits bedingt durch die hohe Anzahl der Messungen, andererseits durch das fest gewählte Koordinatensystem.

4.3 Der Kreisfit

Die unzureichende Genauigkeit der Parabelapproximation führt zur Benutzung eines Kreisfits. Da aber die Methode der Rekursion beibehalten werden soll, bleibt auch die grundsätzliche Teilung des Billoir-Verfahrens in die im vorigen Kapitel angegebenen Einzelschritte bestehen:

a) Rekursionsschritt:

Schritt 1: Propagation,

Schritt 2: Berücksichtigung der Vielfachstreuung,

Schritt 3: Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes zum Fit,

b) Start der Rekursion: Berechnung der Startparameter.

Entsprechend dieser Einteilung sind die Änderungen beim Übergang zum Kreisfit im folgenden beschrieben.

4.3.1 Parametrisierung des Kreises

Eine wesentliche Eigenschaft des Rekursionsschrittes im Billoir-Verfahren ist die Beschreibung der **lokalen Spuranpassungen durch lokale Parameter**. Bei der Approximation durch eine Parabel wurde zur Beschreibung der Spur die quadratische Gleichung

$$y = Y_i + A_i x + \frac{C_i}{2} x^2 \quad (4.1)$$

mit den Parametern $P_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ A_i \\ C_i \end{pmatrix}$ zugrundegelegt. Damit waren die so gewählten Parameter aber gerade die Ableitungen von (4.1) an der Stelle $x = 0$ im jeweiligen lokalen Koordinatensystem bzw. an der Stelle $x = x_i$ im Detektorsystem.

Es liegt nun nahe, auch im Falle des Kreisfits die Ableitungen der Bahnkurve zur Parametrisierung der Spur zu benutzen. Das bedeutet, daß der Parametersatz $P_i = \begin{pmatrix} Y \\ A_i \\ C_i \end{pmatrix}$ für die Beschreibung der Kreisbahn beibehalten werden

kann. $P = \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$ beschreibt nun gleichermaßen einen Kreis k mit den Ableitungen Y, A, C , als auch eine Parabel p mit denselben Ableitungen. Eine ausführliche Begründung für diese spezielle Kreisparametrisierung wird in Kapitel 4.3.6 gegeben werden.

Die Gleichungen für die Transformation F der Parameter $P = \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$, die im folgenden als Parabelparameter P_p bezeichnet werden, in die natürlichen Kreisparameter $P_k = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix}$ ist dann gegeben durch die Gleichheit der Ableitungen

$$k(0) = p(0),$$

$$k'(0) = p'(0),$$

$$k''(0) = p''(0),$$

wobei

$$p(x) = Y + Ax + \frac{C}{2}x^2$$

die Parabelgleichung, und

$$k(x) = \pm \sqrt{R^2 - (x - X_0)^2} + Y_0$$

die Kreisgleichung ist. Dabei sind (X_0, Y_0) die Koordinaten des Mittelpunktes und R der Radius des Kreises.

Für die Transformation F der Parabelparameter P_p in die Kreisparameter P_k

$$F: \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix}$$

erhält man dann

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A(1+A^2)}{C} \\ \frac{1+A^2}{C} + Y \\ \frac{(1+A^2)^2}{C^2} \end{pmatrix},$$

und für die Umkehrtransformation

$$F^{-1}: \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{R^2 - X_0^2} + Y_0 \\ \pm \frac{X_0}{\sqrt{R^2 - X_0^2}} \\ \mp \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - X_0^2}} \end{pmatrix}.$$

4.3.2 Propagation

Der Propagationsschritt stellt den Übergang von der Meßstelle x_{i+1} zur Stelle x_i dar. Das entspricht einem Wechsel des lokalen Koordinatensystems bzw. einer Translation der bisherigen Kurve um δx in x -Richtung. Dabei

beschrieb bisher beim Parabelfit der neue Parametersatz P_i dieselbe Parabel wie die alten Parameter P_{i+1} .

Das Prinzip der Propagation soll auch beim Kreisfit erhalten bleiben. Das bedeutet: Gesucht sind jetzt die Parameter P_i , die im neuen lokalen Koordinatensystem denselben Kreis wie die alten Parameter P_{i+1} beschreiben.

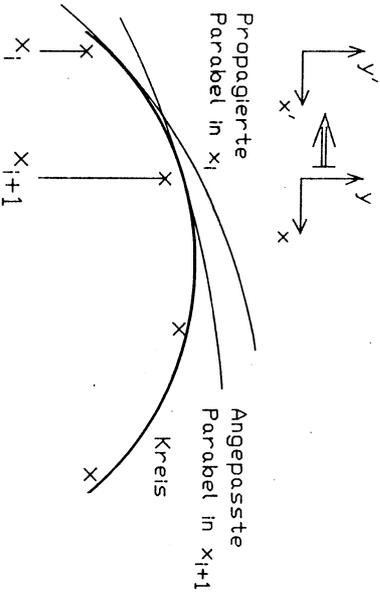


Abb. 4.4: Die Kreispropagation

Ausgehend von den Parabelparametern P_p an der Stelle x_{i+1} ergeben sich damit für die Propagation folgende drei Einzelschritte:

- Übergang zu den Kreisparametern P_k durch Anwendung der Parametertransformation F .
- Verschiebung des Kreises: Die Translation D ist im Falle der Kreisparameter X_0, Y_0, R^2 sehr einfach gegeben durch:

$$D: \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ R^2' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ R^2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 + \delta x \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix}.$$

c) Rückkehr zu den Parabelparametern P_p durch Anwendung der Umkehrtransformation F^{-1} .

Prinzip:

$$\begin{pmatrix} Y_{i+1} \\ A_{i+1} \\ C_{i+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} X_{0,i+1} \\ Y_{0,i+1} \\ R_{2,i+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} X_{0,i} \\ Y_{0,i} \\ R_{2,i} \end{pmatrix} \xleftarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} Y'_i \\ A'_i \\ C'_i \end{pmatrix}$$

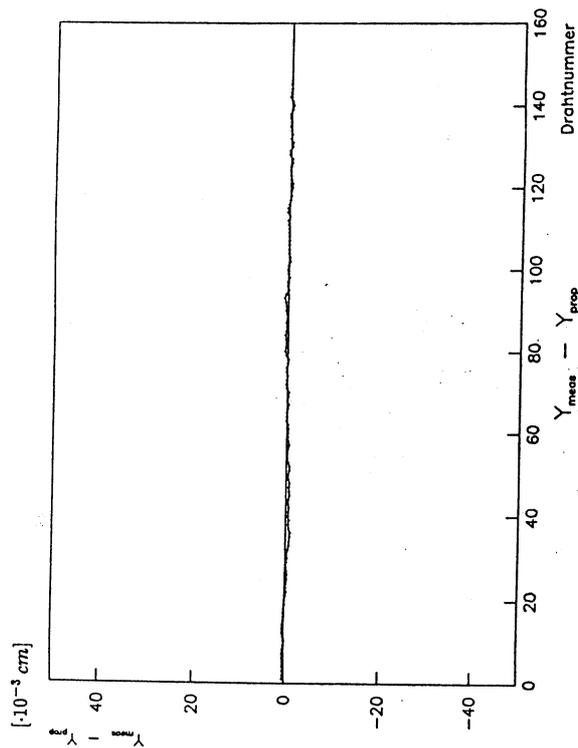


Abb. 4.5: Die Abweichungen des Kreisfits von den Meßpunkten

Die Propagation ist jetzt die Propagation eines Kreises. Die Implementierung dieser Änderung allein führt bereits zur exakten Spurverfolgung durch den Fit, wie Abb. 4.5 zeigt. Die noch sichtbaren, kleinen Schwankungen resultieren aus der endlichen numerischen Genauigkeit der Berechnung, liegen aber weit unter der Kameraauflösung. Zu beachten ist allerdings dabei, daß die Eingabedaten bisher weder mit Meßfehlern, noch mit Fehlern aus der Vielfachstreuung behaftet sind.

Für den exakten Fit fehlerbehafteter Daten ist die korrekte Wichtung der Messungen und insbesondere die korrekte Wichtung der lokalen Parameter, die entscheidend in den Fit eingehen, notwendig. Außer auf die richtige Propagation der Parameter ist also auch auf die **korrekte Transformation der zugehörigen Kovarianzmatrix** zu achten:

Die Propagation der Parameter ist jetzt die sequentielle Ausführung dreier Operationen:

$$P_k = F(P_p),$$

$$P'_k = D(P_k),$$

$$P'_p = F^{-1}(P'_k).$$

Für jede dieser drei Transformationen ist auch eine Transformation der Kovarianzmatrix nötig:

$$V_k = \mathcal{F} \cdot V_p \cdot \mathcal{F}^t,$$

$$V'_k = V_k,$$

$$V'_p = \mathcal{F}^{-1} \cdot V'_k \cdot \mathcal{F}^{-1^t},$$

wobei \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} die Jacobi-Matrizen der entsprechenden Operationen sind. Bei der Verschiebung D wird die Kovarianzmatrix nicht geändert, da es sich bei der Verschiebung nur um die Addition eines konstanten Terms zu einem der Parameter handelt.

Zur Bestimmung der Jacobi-Matrizen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} müssen die Ableitungen der Funktionen F und F^{-1} nach den Parametern berechnet werden:

$$\mathcal{F}_{mn} = \frac{\partial F_m}{\partial P_n}.$$

Da die Transformationen F und F^{-1} keine linearen Abbildungen sind, erhält man dabei im Gegensatz zur Parabelapproximation Ausdrücke, die noch von

den Parametern selbst abhängig sind. Insbesondere treten dabei Terme höherer Ordnung auf. Weiterhin sind für einen Propagationsschritt 4 Matrixmultiplikationen notwendig. Durch die hohe Zahl der Rechenoperationen macht sich dabei die endliche Rechengenauigkeit bemerkbar, in extremen Fällen (s.u.) treten Under-/Overflows auf. Das angegebene Verfahren zur Berechnung der Kreis-Kovarianzmatrix ist numerisch höchst instabil.

Als Beispiel diene Abb. 4.6. Sie zeigt die Fehler der Parameter Y, A, C (Diagonalelemente der Kovarianzmatrix) im Verlaufe des Fits für ein μ^+ mit einem Transversalimpuls von $pr = 10 \text{ GeV}/c$. Die Berechnung der Jacobi-Matrizen und die Matrixmultiplikationen wurden dabei bereits mit doppelter Genauigkeit ¹⁾ durchgeführt.

Die sichtbaren Schwankungen, bedingt durch die endliche numerische Genauigkeit des Rechners, sind umso größer, je höher der Impuls des betrachteten Teilchens ist. Mit wachsendem Impuls nimmt die Krümmung der Teilchenbahn ab, der Radius des Kreises geht gegen Unendlich. Eine Annäherung an diese Singularität führt dann zu den beobachteten Effekten.

Eine endliche Rechengenauigkeit ist aber immer gegeben. Das spezielle Problem in diesem Fall liegt darin, daß sich die numerischen Effekte bereits bei Impulsen von ca. $1 \text{ GeV}/c$ bemerkbar machen. Dies ist aber ein Impulsbereich, in dem ein Kreisfit ausgeführt werden muß, da eine Parabelapproximation, bei der prinzipiell keine Singularität auftritt, nicht mehr ausreichend ist. Weitere Untersuchungen ergeben, daß eine Teilchenbahn erst oberhalb von ca. $10 \text{ GeV}/c$ ohne nennenswerte Abweichungen durch eine Parabel approximierbar ist.

Es soll nun versucht werden, die Berechnung der Kovarianzmatrix so zu modifizieren, daß die Impulsgrenze, ab der das Verfahren instabil wird, sich so weit zu höheren Impulsen verschiebt, daß auf solche Teilchen die Parabelapproximation angewendet werden kann. Das bedeutet den Versuch, die Anzahl der Rechenoperationen bei der Matrixberechnung zu verringern. Dazu wird die neue Kovarianzmatrix nun nicht mehr in mehreren Einzelschritten, sondern in einem einzigen Schritt berechnet. Man faßt die drei Transformationen F, D, F^{-1} , die für die Propagation hintereinander ausgeführt werden müssen, zu einer Transformation G zusammen:

$$G(P_p) = F^{-1}(D(F(P_p)))$$

¹⁾ IBM 3081, 8 Bytes, 56 Bit-Mantisse

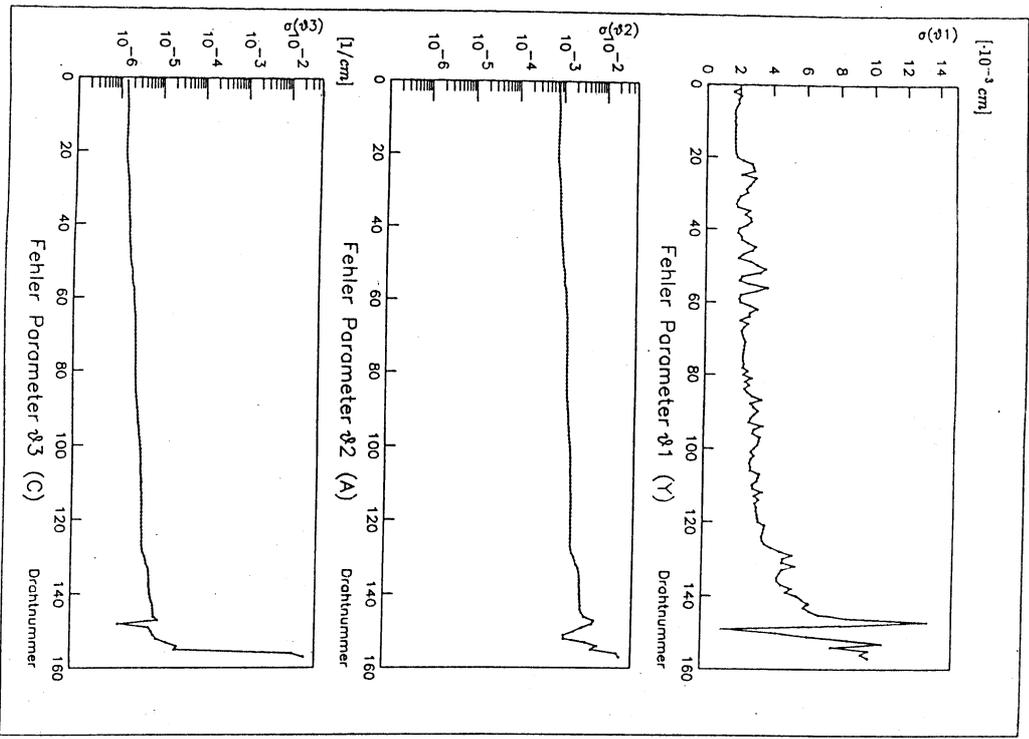


Abb. 4.6: Die Fehler der Parameter $\sigma_Y, \sigma_A, \sigma_C$ (Kovarianzmatrix-Berechnung in mehreren Schritten)

Die Transformation der Kovarianzmatrix ist dann gegeben durch:

$$V_p' = G \cdot V_p \cdot G^t,$$

wobei

$$G_{mn} = \frac{\partial G_m}{\partial P_n}$$

die Jacobi-Matrix der Abbildung G ist.

Einsetzen der Funktionen F , D , F^{-1} liefert die Transformation G :

$$G: \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y' \\ A' \\ C' \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} Y' \\ A' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} (1 + A^2 - \sqrt{d}) + Y \\ \frac{1}{\sqrt{d}} (A(1 + A^2) - C\delta x) \\ \frac{1}{\sqrt{d}^3} (1 + A^2)^3 \end{pmatrix},$$

$$d = (1 + A^2)^2 + (2A(1 + A^2) - C\delta x) C\delta x.$$

Durch Ableitung dieser Funktion nach den Parametern ergeben sich die Elemente der Jacobi-Matrix. Bei dieser Rechnung fallen in der Tat einige der Terme hoher Ordnung heraus. Weiterhin werden insgesamt nur noch zwei Matrixmultiplikationen für die Propagation benötigt.

Abb. 4.7 zeigt das Verhalten der Kovarianzmatrix-Elemente mit diesem Verfahren für das gleiche Testteilchen wie in Abb. 4.6. Weitere Tests ergaben, daß sich jetzt im untersuchten Impulsbereich unterhalb von 50 GeV keine numerischen Effekte mehr bemerkbar machen. Dabei müssen die genannten Impuls-
werte als ungefähre Angaben betrachtet werden, da neben der Krümmung auch die Steigung A der Bahnkurve den Bereich der numerischen Stabilität definiert.

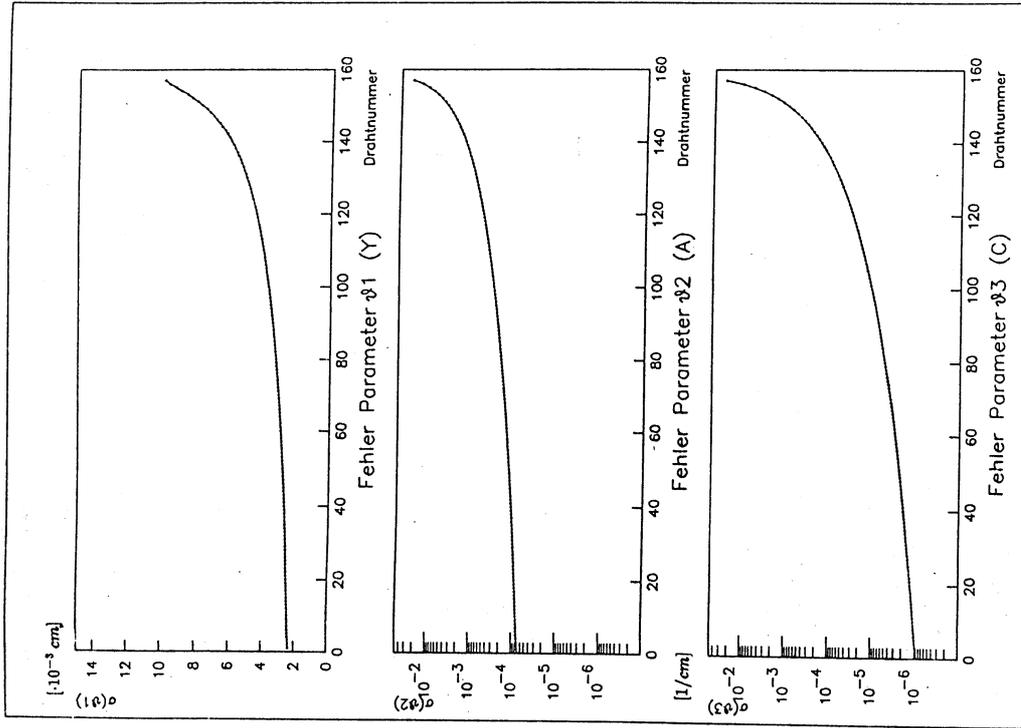


Abb. 4.7: Die Fehler der Parameter σ_Y , σ_A , σ_C (Kovarianzmatrix-Berechnung in einem Schritt)

4.3.3 Berücksichtigung der Vielfachstreuung

Für die Varianz des Streuwinkels eines einfach geladenen Teilchens kann folgende Formel angegeben werden:

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{(14,1 MeV/c)^2}{p^2 \beta^2} \cdot \frac{L}{L_R},$$

wobei p der Impuls, $\beta = \frac{v}{c}$, L_R die Strahlungslänge, und L die in der Materie zurückgelegte Wegstrecke ist [PAR86]¹⁾.

P. Billoir berücksichtigte die Streuung durch Addition dieses Korrekturterms σ_α^2 zum (2,2) Element der Kovarianzmatrix. Das ist aber in einem gegebenen Koordinatensystem nur für kleine Steigungen A der Bahnkurve korrekt, da nur für kleine Steigungen diese direkt mit den Spurwinkeln gleichgesetzt werden können ($A \approx \alpha$, für $|A| \ll 1$). Verläßt man die Näherung für kleine Spurwinkel, muß die Varianz der Steigung A unter Benutzung der Beziehung $A = \tan \alpha$ mit

$$\sigma_A^2 = (1 + A^2)^2 \sigma_\alpha^2$$

angegeben werden.

Des weiteren sind die Parameter A und C bei der Annahme einer Kreisbahn nicht länger voneinander unabhängig. Nimmt man an, das ein Teilchen zwar um einen gewissen Winkel gestreut wird, die Krümmung und damit der Radius der Kreisbahn aber konstant bleibt, so folgt aus der Beziehung

$$R^2 = \frac{(1 + A^2)^3}{C^2} = \text{const},$$

daß sich sowohl der Parameter A , als auch der Parameter C bei der Beschreibung der neuen Kreisbahn ändert.

1) Die vollständige, in [PAR86] angegebene Formel lautet:

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{(14,1 MeV/c)^2}{p^2 \beta^2} \cdot \frac{L}{L_R} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} \log_{10} \left(\frac{L}{L_R}\right)\right)^2.$$

Der Logarithmus-Term soll hier aber ebenso wie in der Simulation vernachlässigt werden.

Zur Berechnung der Korrekturterme unter Zugrundelegung einer Kreisbahn muß daher erst zu einem Satz unabhängiger Parameter übergegangen werden. Hier bieten sich zur einfachen Rechnung die Parameter $\begin{pmatrix} Y \\ A \\ R \end{pmatrix}$ an. Bei diesem Parametersatz ist einzig und allein A von einer Winkeländerung betroffen.

Prinzip:

$$\begin{pmatrix} Y' \\ A' \\ C' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y' \\ A' \\ R' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y'' \\ A'' \\ R'' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y'' \\ A'' \\ C'' \end{pmatrix}$$

↑
Addition von σ_A^2
zum (2,2) Element
der Kovarianzmatrix.

Nach Berechnung der Transformation in die unabhängigen Parameter und der Umkehrtransformation ergibt sich dann folgende Korrektur der Kovarianzmatrix bzgl. des Parametersatzes $\begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$:

$$V'' = V' + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + A^2)^2 \sigma_\alpha^2 & 3AC(1 + A^2) \sigma_\alpha^2 \\ 0 & 3AC(1 + A^2) \sigma_\alpha^2 & 9A^2 C^2 \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Bei der korrekten Berücksichtigung der Winkelunsicherheit unter Annahme einer Kreisbahn ist also nicht nur das (2,2) Element der Kovarianzmatrix, sondern die gesamte untere, rechte Teilmatrix betroffen.

Weiterhin soll nun noch der bisher vernachlässigte, durch die Vielfachstreuung verursachte Ortsversatz berücksichtigt werden. Dieser wirkt sich nur auf das (1,1) Element der Kovarianzmatrix aus, da A und C von Y unabhängig sind. Für σ_Y^2 ergibt sich der folgende Zusammenhang mit der Winkelvarianz σ_α^2 :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{3} (1 + A^2) L^2 \sigma_\alpha^2.$$

Insgesamt erhält man dann die Korrektur der Kovarianzmatrix V' als

$$V'' = V' + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+A^2)L^2\sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1+A^2)^2\sigma_\alpha^2 & 3AC(1+A^2)\sigma_\alpha^2 \\ 0 & 3AC(1+A^2)\sigma_\alpha^2 & 9A^2C^2\sigma_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Die Streuungskorrektur beinhaltet jetzt außer den Ungenauigkeiten der empirischen Formel für σ_α nur noch die Näherung, daß die Teilchen bei der Streuung keine Energie verlieren, was für die interessierenden Energiebereiche und Schichtdicken als ausreichend erfüllt gelten kann.

4.3.4 Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes zum Fit

Die Propagation und die Veränderung der Kovarianzmatrix bzgl. der Vielfachstreuung berücksichtigt jetzt in korrekter Weise die Kreisform der Teilchenbahn. Die Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes (y_i, σ_i) zum Fit bedeutet nun die Minimierung eines χ^2 , das sich zum einen aus dem Beitrag der propagierten Bahnkurve (P_i'', V_i'') und zum anderen aus dem Beitrag des Meßpunktes (y_i, σ_i) ergibt:

$$\chi^2 = \underbrace{\chi_{\min}^2}_{\text{Messungen } i+1, \dots, N} + \underbrace{\left(P_i - P_i'' \right)^{-1} \left(P_i - P_i'' \right)}_{\text{Messung } i} + \underbrace{\left(\frac{y_i - y_i}{\sigma_{y_i}} \right)^2}_{\text{Messung } i}$$

Da wir zur Beschreibung der Bahnkurve eine lokale Parametrisierung benutzen, ist das zu minimierende χ^2 von der vermuteten Form der Bahnkurve (Parabel oder Kreis) unabhängig. In die Rechnung gehen zwar die propagierten Parameter P_i'' und deren Wichtung (Kovarianzmatrix V_i'') ein, aber nicht die Parabel- bzw. die Kreisgleichung.

Dies gilt, da der Fit nur bezüglich der Ordinate der anzupassenden Bahnkurve optimiert werden muß, was wiederum eine Folgerung aus der Fehlerfreiheit der x -Werte war. Da weiterhin der Parameter Y sowohl für die Kreisbahn wie auch für die Parabelbahn unabhängig von den Parametern A und C ist, gelangt man zu der Schlußfolgerung:

Durch die besondere Wahl der Parameter $\begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$ zur Beschreibung des Kreises und die Annahme fehlerfreier Meßstellen x , ist beim Übergang vom Parabel- zum Kreisfit keine Änderung des Verfahrens für die Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes zum Fit erforderlich. Der Formalismus für Parabel- und Kreisfit ist identisch.

4.3.5 Berechnung der Startparameter

Wie bereits erwähnt, werden zur Berechnung der Startparameter die letzten drei Meßpunkte unter Vernachlässigung der Streuung benutzt. Wurde bisher aus diesen drei Punkten direkt die Parabel $P_p = \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$ berechnet, so muß nun

- zuerst der Kreis $P_k = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix}$ berechnet,

- und dann die Parametertransformation $P_k \rightarrow P_p$ ausgeführt werden, was der Berechnung der Parabel entspricht, die an der Stelle x_{N-2} dieselben Ableitungen wie der Kreis besitzt.

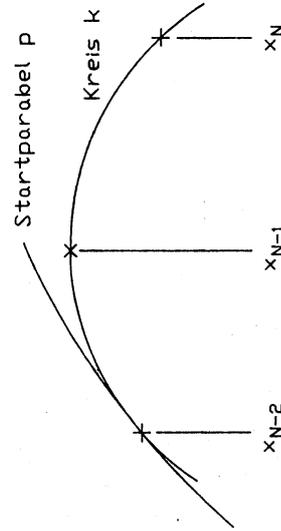


Abb. 4.8: Berechnung der Startparameter

Dabei wird das Prinzip der Kovarianzmatrix-Berechnung mittels Fehlerfortpflanzung beibehalten.

Zwar wird durch drei Punkte ein Kreis eindeutig bestimmt, aber man muß berücksichtigen, daß durch die Meßfehler die drei Startpunkte mehr oder weniger von der wahren Kreisbahn abweichen. Dies kann bei Kreisbahnen mit kleinen Radien zu extremen Falschschätzungen der Parameter führen. Diese Falschschätzungen werden durch den Fit zwar korrekt berücksichtigt, aber es existieren Sonderfälle, die abweichend behandelt werden müssen.

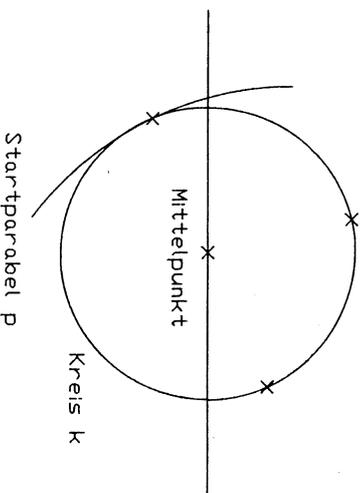


Abb. 4.9: Sonderfall bei der Berechnung der Startparameter

Ein solcher Sonderfall ist in Abb 4.9 wiedergegeben: Die drei Startpunkte definieren einen Kreis k mit dem Mittelpunkt (X_0, Y_0) . Legt man durch den Mittelpunkt des Kreises eine Gerade parallel zur x -Achse des vorgegebenen Koordinatensystems, so liegen die Punkte im dargestellten Fall auf unterschiedlichen Seiten des durch die Gerade geteilten Kreises. Die Parabel, die nun am Punkt (x_{N-2}, y_{N-2}) glatt an den Kreis angelegt wird, geht zwar durch den Punkt (x_{N-2}, y_{N-2}) , berührt aber nicht die beiden anderen Meßpunkte. Anstelle der richtigen Linkskrümmung der Bahn beschreibt die angepasste Parabel eine rechtsgekrümmte Spur. Für solche extremen Startkombinationen kann also

die angegebene Drei-Punkt-Methode nicht verwendet werden, es müssen andere Verfahren gesucht werden.

Zum Zeitpunkt der Spurerkennung ist aber noch nicht bekannt, ob die drei Punkte, die zur Startparameterberechnung dienen, tatsächlich zu einer Spur gehören. Bei näheren Untersuchungen zeigte es sich, daß eine Beschränkung auf Startkombinationen, die keine falschen Parabelparameter bei Anwendung der beschriebenen Start-Methode liefern, bereits ein starkes Kriterium für korrekte Spuren darstellt:

Startpunkte, die nach der Kreisberechnung nicht auf "derselben Seite" des Kreises liegen, werden nicht als Startkombination zugelassen.

4.3.6 Begründung der Parameterwahl

Der durch die im vorhergehenden beschriebenen Änderungen modifizierte Fit ist jetzt ein Kreisfit. Es wurde zur Beschreibung der lokalen Kreisbahnen die spezielle Parametrisierung $P = \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$ gewählt, was jetzt eingehender begründet werden soll:

a) **Parameter Y :** Y ist der y -Achsenabschnitt des beschriebenen Kreises. Aus der Unabhängigkeit dieses Parameters von den Parametern A und C folgt, daß die bereis für die Parabelapproximation benutzte, einfache Rechnung zur Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes zum Fit erhalten bleibt. Weiterhin ergibt sich ein Vorteil im Hinblick auf die Verwendung des Fits für die Spurerkennung: Nach der Extrapolation der Spur in die nächste Driftzelle kann das propagierte Y direkt mit den y -Werten der Meßpunkte verglichen werden, es ist keine Umrechnung erforderlich. Dabei ist das $(1, 1)$ Element der Kovarianzmatrix gerade die Varianz des propagierten Y . Aus der errechneten Kovarianzmatrix kann also direkt der Fehler der Propagation in y -Richtung entnommen und zur Entscheidung, ob ein Meßpunkt zur Spur gehört oder nicht, benutzt werden.

b) **Parameter A und C :** A und C sind die Ableitungen des Kreises (Steigung und Krümmung). Konnte bei der Parabelapproximation die Berücksichtigung der Vielfachstreuung einfach durch Addition einer Korrektur zum

(2,2) Element der Kovarianzmatrix erreicht werden, so ist dies jetzt komplizierter. Die notwendige Korrektur zur Berücksichtigung der Winkelunsicherheit betrifft jetzt Parameter A und C , da diese beim Kreis nicht länger unabhängig sind.

Grundsätzlich lassen sich aber Einschränkungen für die Wahl der Parameter angeben:

- Es sollte nicht der Spürwinkel α selbst, sondern eine trigonometrische Größe dieses Winkels ($\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha = A$) benutzt werden, da das vorgegebene Detektorsystem ein rechtwinkliges Koordinatensystem ist. Die Benutzung von α würde unnötigerweise zur Berechnung von trigonometrischen Funktionen während des Fits zwingen.
- Der Radius R der Kreisbahn kann nicht als Parameter benutzt werden, da R mit steigendem Impuls über alle Grenzen wächst ($R \rightarrow \infty$). Es muß also ein Parameter, der den Kehrwert des Radius R enthält, zur Beschreibung der Krümmung benutzt werden ($\frac{1}{R}$; $\frac{1}{R^2}$; $\frac{(1+A^2)^3}{R^2} = C^2$).

Die Wahl des Parametersatzes $\begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$ erfüllt diese Einschränkungen, die eigentliche Begründung speziell für die Parameter A und C liegt jedoch in der Identität mit dem bei der Parabelapproximation benutzten Parametersatz:

Der beschriebene Kreisfit ist bei vorgegebener Rechengenauigkeit nur für Teilchenbahnen ab einer gewissen Krümmung numerisch stabil. Als ungefähre Impulsgrenze wurde in Kapitel 4.3.2 ein Wert von 50 GeV angegeben. Da die Meßpunkte jedoch mit Fehlern behaftet sind, läßt es sich nicht verhindern, daß sich im Verlaufe des rekursiven Fits für die lokalen Bahnen Krümmungen ergeben, die unterhalb der numerischen Stabilitätsgrenze liegen. Das ist insbesondere zu Beginn der Fall, wenn erst wenige Punkte in den Fit einbezogen sind. Ergeben sich während des Fits aber solche geringen Krümmungen der lokalen Bahn, kann der Kreis durch eine Parabel approximiert werden. Die Approximation darf dabei aber nur lokal an den Stellen der Spur durchgeführt werden, an denen Bahnen kleiner Krümmung die beste Schätzung der Spur darstellen.

Durch die Wahl der identischen Parametersätze ist es jetzt auf einfache Weise möglich, die Spur in dem einen Fall als Kreis, im anderen Fall als Parabel zu extrapolieren. Dabei wird anhand der errechneten Krümmung C im Verlaufe

des Fits dynamisch entschieden, welche der beiden Extrapolationen möglich bzw. nötig ist:

Prinzip der dynamischen Propagation:

Wenn $C < C_{min}$, dann

Propagation von $\begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$ unter Annahme einer Parabel,

sonst

Propagation von $\begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$ unter Annahme eines Kreises.

Die Konstante C_{min} wird so gewählt, daß die bei der Kreispropagation durch die endliche Rechengenauigkeit entstehenden Fehler vernachlässigt werden können.

Durch die Verwendung der dynamischen Propagation ergibt sich damit letztendlich ein Fit-Verfahren für die Jetkammer-Messungen, das über das gesamte Impulsspektrum numerisch stabil ist.

4.3.7 Zusammenfassung

Wegen der ungenügenden Parabelapproximation wurde das von P. Billoir vorgestellte rekursive Fit-Verfahren zu einem Kreisfit modifiziert. Dazu wurde in jedem einzelnen Schritt der Rekursion die Spur-Berechnung, die sich durch die Annahme einer Parabelbahn ergab, so ersetzt, daß sich eine Kreisbahn als zugrundegelegte Teilchenspur ergab.

Aufgrund der speziellen Wahl der Parameter und der dadurch möglichen dynamischen Propagation konnten die sonst bei der Extrapolation der Spur auftretenden numerischen Probleme vermieden werden.

Abb. 4.10 zeigt das Verhalten des Fits (y -Differenz zwischen Meßpunkt und propagierter Spur) mit jetzt fehlerbehafteten Messungen und Vielfachstreuung. Wie im vorhergehenden wurden als Testteilchen wieder Myonen (μ^+) mit $p_T = 400 \text{ MeV}/c$ gewählt.

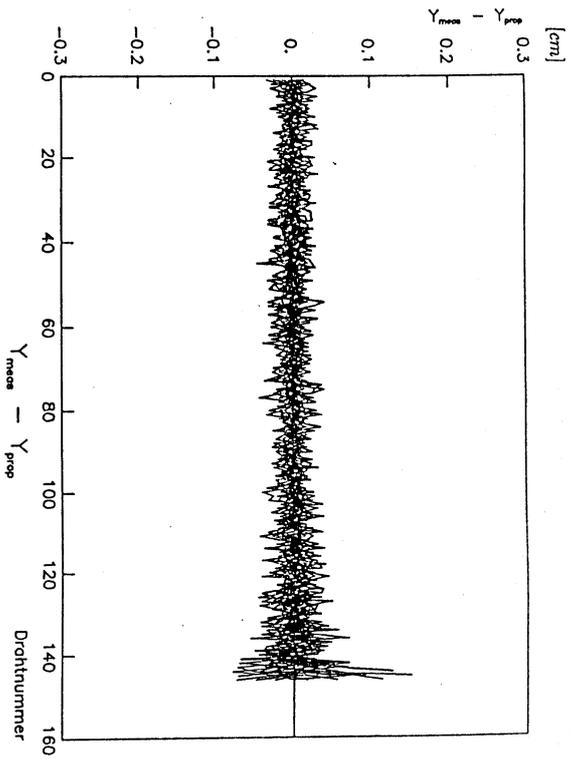


Abb. 4.10: Die Abweichungen des Kreisfits von den Meßpunkten (mit Meßfehlern und Vielfachstreuung)

Ein Standardverfahren zur Überprüfung der Güte einer Spuranpassung ist die Untersuchung der sich ergebenden Residuen mittels sogenannter "Pull"-Histogramme [FRO79]. Die Residuen ($\epsilon_i = y_i - y_{i,fit}$) werden dazu mit ihrem (errechneten) Fehler $\sigma(\epsilon_i)$ gewichtet:

$$z_i = \frac{\epsilon_i}{\sigma(\epsilon_i)}$$

Für gaußförmig verteilte Meßfehler sind die so erhaltenen Größen z_i auch wieder gaußförmig verteilt, was durch eine Häufigkeitsverteilung nachgewiesen werden kann. Bei guter Übereinstimmung des Fits mit den Messungen sollte sich eine Gauß-Verteilung der Breite $\sigma = 1$ um den Wert Null ergeben.

Dieses Verfahren wurde in modifizierter Form auch für den vorliegenden Fit durchgeführt: Da durch die Verwendung der Simulation die wahren Orte Y_{true}

der Teilchenbahn bekannt waren, konnten die Abweichungen des Fits von diesen Koordinaten benutzt werden. In Abb. 4.11 ist die erhaltene Häufigkeitsverteilung der Größe

$$z = \frac{Y_{true} - Y_{prop}}{\sigma(Y_{prop})}$$

wobei Y_{prop} die y -Koordinate der propagierten Spur ist, für 1000 Myonen (μ^+ , $p_T = 400 \text{ MeV}/c$) dargestellt. Der Mittelwert der Verteilung liegt hinreichend genau bei Null, die Breite ergibt sich zu $\sigma = 1,05$, was eine ausgezeichnete Übereinstimmung des Fits mit den Messungen bedeutet.

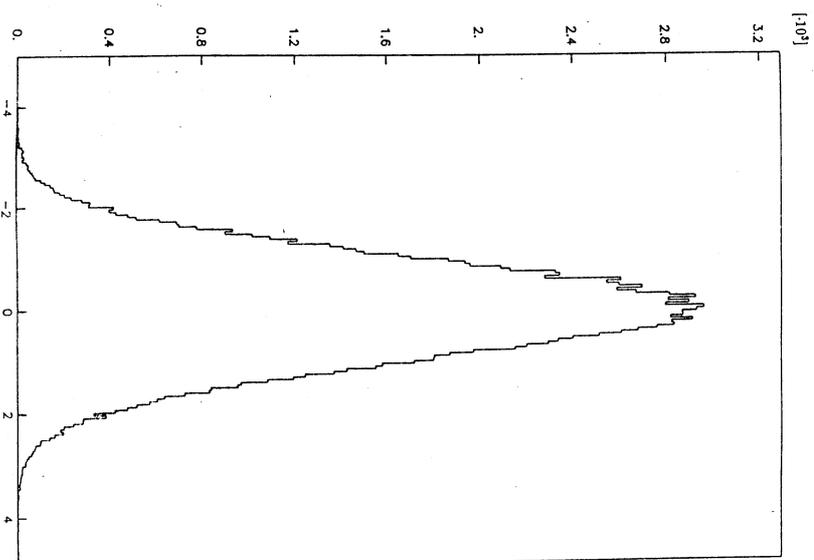


Abb. 4.11: Häufigkeitsverteilung der Größe $z = \frac{Y_{true} - Y_{prop}}{\sigma(Y_{prop})}$

5. Berücksichtigung der Vielfachstreuung während der Spurerkennung

Die Elemente der in Kapitel 4.3.3 angegebenen Korrekturmatrix zur Berücksichtigung der Vielfachstreuung beinhalten außer den Parametern Y, A, C die Varianz des Streuwinkels σ_α^2 . Diese Varianz wurde mit

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{(14,1 \text{ MeV}/c)^2}{p^2 \beta^2} \cdot \frac{L}{L_R}$$

oder unter Verwendung der Beziehung $\beta^2 = \frac{p^2}{p^2 + m^2}$ mit

$$\sigma_\alpha^2 = (14,1 \text{ MeV}/c)^2 \frac{L}{L_R} \frac{1}{p^4} (p^2 + m^2) \quad (5.1)$$

angegeben.

Es muß nun noch diskutiert werden, welche Werte für den Impuls p , die Weglänge L und die Masse m im einzelnen in die Formel einzusetzen sind, da grundsätzlich das Problem besteht, daß diese Größen während des Fits bzw. der Spurverfolgung noch nicht bekannt sind, sondern durch Schätzwerte angenähert werden müssen.

5.1 Der Impuls-Term

Ist die Krümmung der Bahn bekannt, läßt sich unter Annahme eines einfach geladenen Teilchens direkt der Transversalimpuls p_T mit

$$p_T = e \cdot B \cdot R$$

angeben, wobei e die Elementarladung, B die magnetische Feldstärke und R der Radius der Kreisbahn ist. Damit ist aber die beste Schätzung für p_T durch die beste Schätzung für den Radius R und damit durch die propagierten Parameter A und C des Billoir-Fits gegeben.

Die gleichen Überlegungen gelten auch für die in der Materie zurückgelegte Wegstrecke L . Hier stellt die aus den Parametern berechnete Kreisbogenlänge zwischen den Meßpunkten die beste Schätzung der Weglänge in der xy -Projektion dar.

Um nun den in die Winkelvarianz eingehenden Gesamtimpuls bzw. Gesamtweg zu erhalten, muß noch die dritte Impulskomponente p_z bzw. Wegkomponente L_z bestimmt werden. Dies stellt aus folgenden Gründen jedoch ein Problem dar: Da die z -Koordinaten der Messungen in der OPAL-Jetkammer mit großen Fehlern (mehrere Zentimeter) behaftet sind, sollte auf die Verwendung der z -Informationen bei der Spurerkennung verzichtet werden. Deshalb beschränken wir die Implementierung des Billoir-Fits auf den zweidimensionalen Fall, der Fit benutzt nur die xy -Projektionen der Meßpunkte. Eine optimale Schätzung des in z -Richtung zurückgelegten Weges des Teilchens und damit der Impulskomponente p_z liegt nicht vor. Weiterhin ist die Berechnung von L_z und p_z direkt aus zwei Einzelmessungen aufgrund der großen Fehler in z nicht zulässig, die Folge wären extreme Falschschätzungen des Gesamtimpulses.

Es stellt sich also die Frage, inwieweit die z -Komponenten des Impulses und der Wegstrecke bei der Berechnung der Winkelvarianz σ_α^2 vernachlässigt werden können. Wie groß ist der systematische Fehler von σ_α , wenn in die Bestimmungsgleichung (5.1) statt der Beträge L und p die gut bekannten Transversalkomponenten L_T und p_T eingesetzt werden?

Abb. 5.1 und 5.2 zeigen das Verhältnis der so angenähert berechneten Winkelabweichung $\sigma_{\alpha T}$ zur wahren Winkelabweichung σ_α in Abhängigkeit vom Polarwinkel Θ für Elektronen und Pionen.

Wie man aus den Abbildungen entnehmen kann, weicht das genäherte $\sigma_{\alpha T}$ bei hohen Impulsen und im dargestellten Winkelbereich höchstens um den Faktor 1,8 von dem wahren σ_α ab. Dies ist für einen Polarwinkel von $\Theta = 20^\circ$ der Fall, bei dem aber aufgrund der Geometrie der Jetkammer nur in wenigen Driftzellen überhaupt ein Signal erzeugt wird.

Prinzipiell gilt jedoch: Je weniger Meßpunkte für den Spurfit zur Verfügung stehen, desto weniger wichtig ist die korrekte Berücksichtigung der Vielfachstreuung. Die systematisch falsche Bewertung der Streueffekte für Teilchen mit hohem Impuls in z -Richtung stellt also keine große Einschränkung für die Gültigkeit des Fits dar.

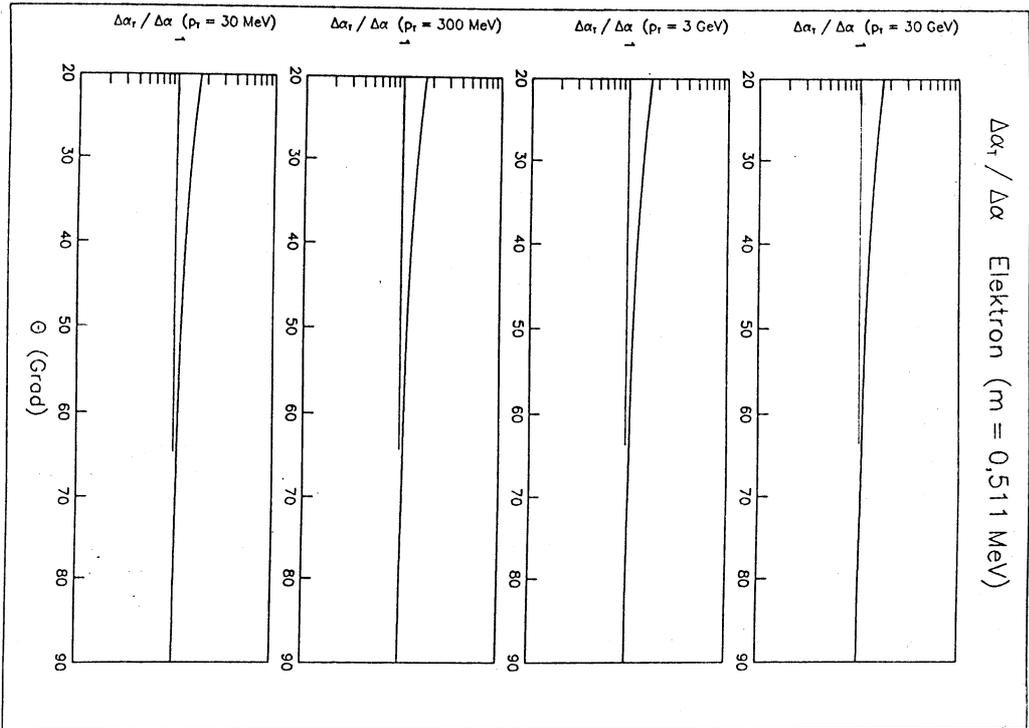


Abb. 5.1: Das Verhältnis $\sigma_{\alpha_T} / \sigma_{\alpha}$ ($= \Delta\alpha_T / \Delta\alpha$) für ein Elektron

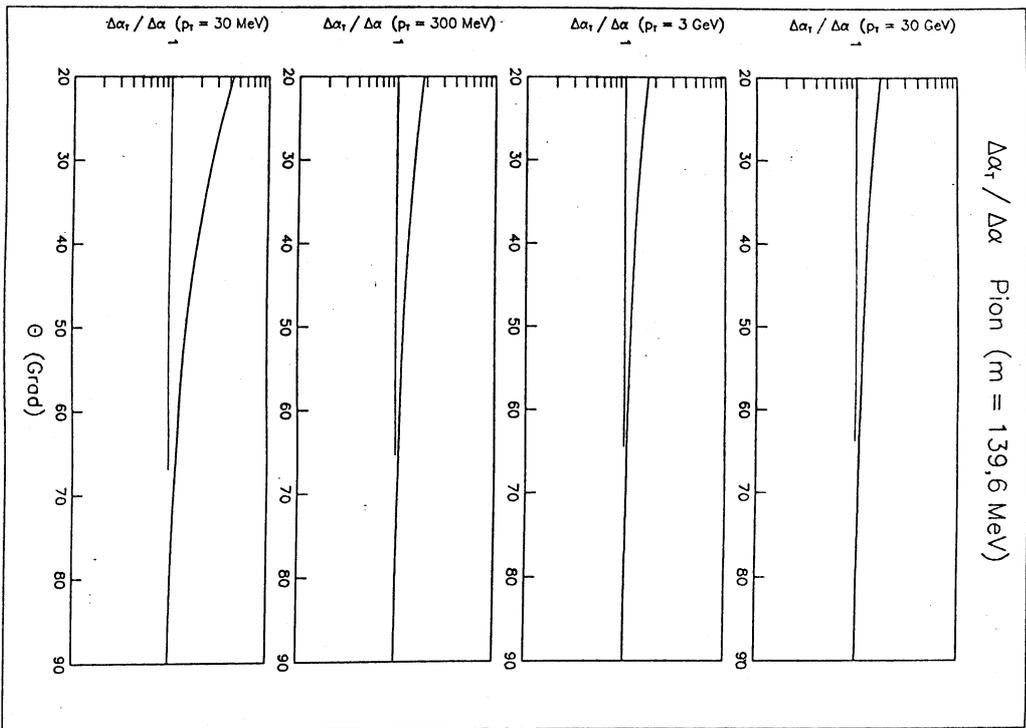


Abb. 5.2: Das Verhältnis $\sigma_{\alpha_T} / \sigma_{\alpha}$ ($= \Delta\alpha_T / \Delta\alpha$) für ein Pion

Die beim Pion im Vergleich zum Elektron größere Abweichung für sehr kleine Impulse erklärt sich durch die dabei vorliegende Dominanz des Massenterms gegenüber dem Impuls-Term in Gleichung (5.1):

$$\sigma_{\alpha}^2 \sim \frac{1}{p^2} \quad \text{für } p \gg m,$$

$$\sigma_{\alpha}^2 \sim \frac{1}{p^4} \quad \text{für } p \ll m.$$

Dieser Unterschied in der funktionalen Abhängigkeit von p zwischen Teilchen mit sehr kleiner Masse (Elektronen) und Teilchen großer Masse (Pionen, Kaonen, Protonen) hat Konsequenzen für die Wahl der in die Gleichung (5.1) einzusetzenden Teilchenmasse.

5.2 Der Massen-Term

Im Gegensatz zu der vom Fit zumindest teilweise gelieferten Information über den Impuls ist die Masse des Teilchens zum Zeitpunkt der Spurenerkennung völlig unbekannt.

Zur Lösung dieses Problems stehen einzig und allein Wahrscheinlichkeitsaussagen über die Häufigkeit der verschiedenen Teilchen in der Jetkammer zur Verfügung. In der Tat sind ca. 70 Prozent der erzeugten Primärteilchen Pionen, was die Benutzung der Pionenmasse ($m_{\pi} = 140 \text{ MeV}/c^2$) als "Standardmasse" bei der Berechnung der Winkelvarianz σ_{α} nahelegt.

Zur Kontrolle der mit diesem Massenwert durchgeführten Streuungskorrektur wurden 100 simulierte OPAL-Ereignisse untersucht. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.3 bis 5.6 dargestellt:

Bei jedem Rekursionsschritt des Billoir-Fits wurde die Abweichung des aktuellen Meßpunktes von der propagierten Spur in Einheiten des für diesen Wert berechneten Fehlers bestimmt, und der gemittelte Absolutbetrag dieser Größe dann gegen die Anzahl der Punkte aufgetragen, die bereits im Fit enthalten

waren. Bei korrekter Berechnung der Fehler der propagierten Spur, d.h. bei Benutzung der richtigen Winkelvarianz, müßte sich dabei der Wert 0,8 als Mittelwert des gaußförmigen Fehlers ergeben¹⁾.

Abb. 5.3 zeigt das Ergebnis für alle in der Jetkammer vorhandenen Teilchen. Man erkennt, daß sich der Mittelwert von 0,8 nur dann ergibt, wenn bereits viele Punkte ($N > 20$) im Fit enthalten sind. Der Anstieg zu Beginn läßt sich erklären, wenn man nicht alle Teilchen, sondern nur die Teilchen mit einem Impuls von $pt < 100 \text{ MeV}/c$ in ein solches Histogramm aufnimmt (Abb. 5.4). Solche Teilchenbahnen sind stark gekrümmt und durchlaufen deshalb nicht die gesamte Jetkammer, die Zahl der Meßpunkte ist kleiner als für Teilchen mit hohem Impuls. Daraus resultieren die großen, statistischen Schwankungen und der Abbruch der in Abb. 5.4 dargestellten Kurve bei höherer Punktzahl.

Läßt man diesen Bereich des Histogramms außer Betracht, ergibt sich der Mittelwert der Abweichung bei Beginn des Fits zu ca. 0,4. Das bedeutet aber, daß der Fehler der propagierten Spur zwar für hohe Impulse korrekt, für kleine Impulse aber im Mittel um den Faktor 2 zu groß angenommen wird.

1) Gaußkurve:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle |x| \rangle &= 2 \int_0^{\infty} x f(x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[-\sigma^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sigma \\ &= 0,8\sigma. \end{aligned}$$

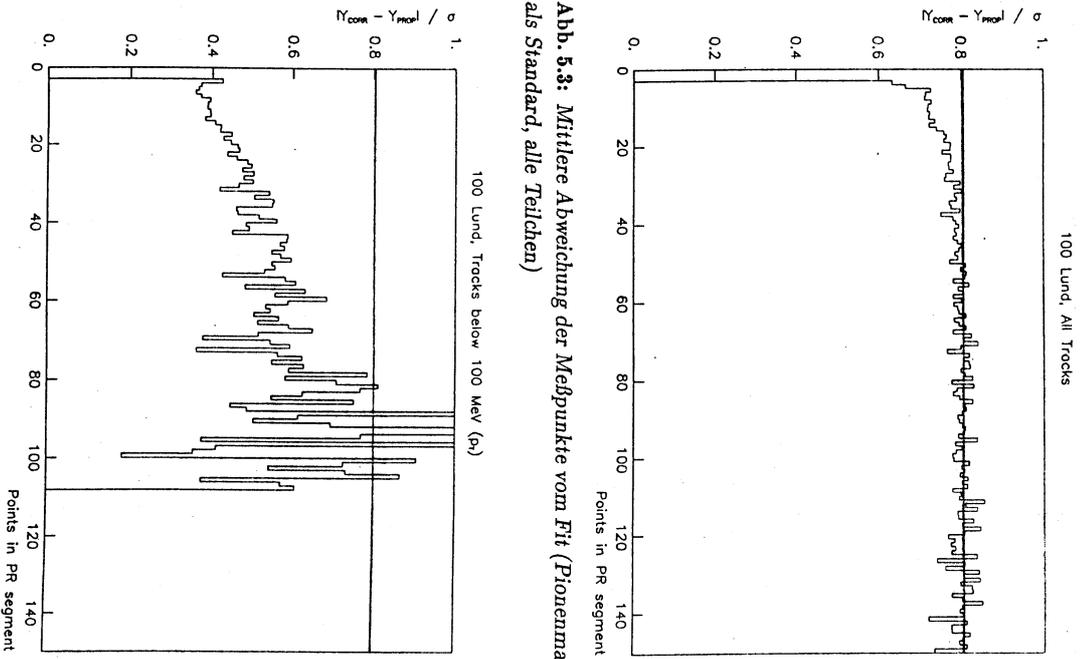


Abb. 5.3: Mittlere Abweichung der Meßpunkte vom Fit (Pionenmasse als Standard, alle Teilchen)

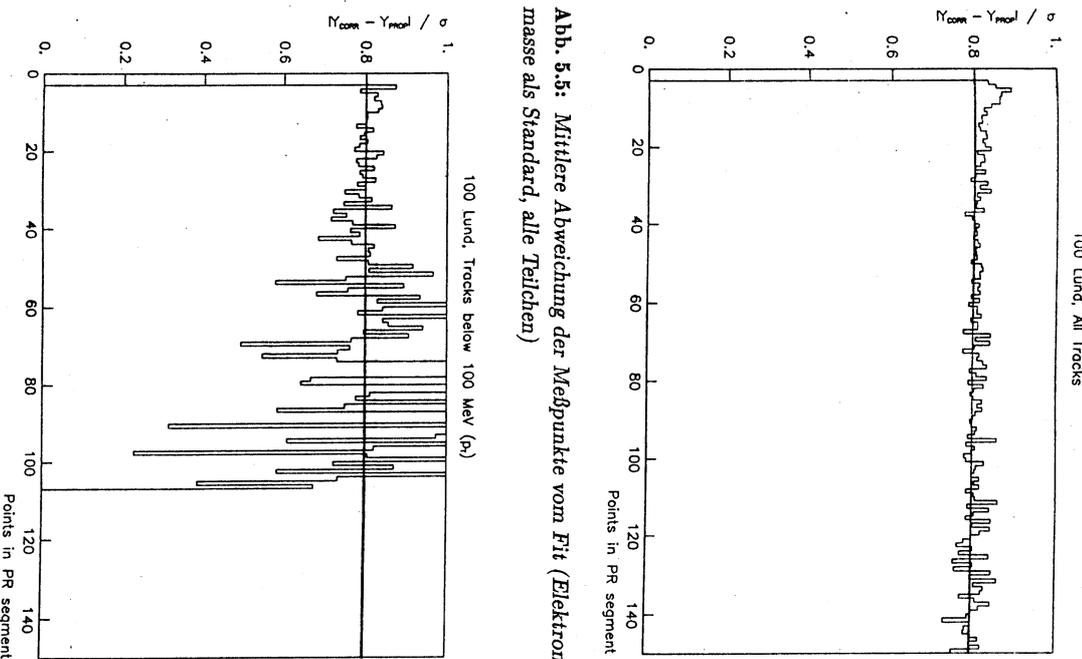


Abb. 5.5: Mittlere Abweichung der Meßpunkte vom Fit (Elektronenmasse als Standard, alle Teilchen)

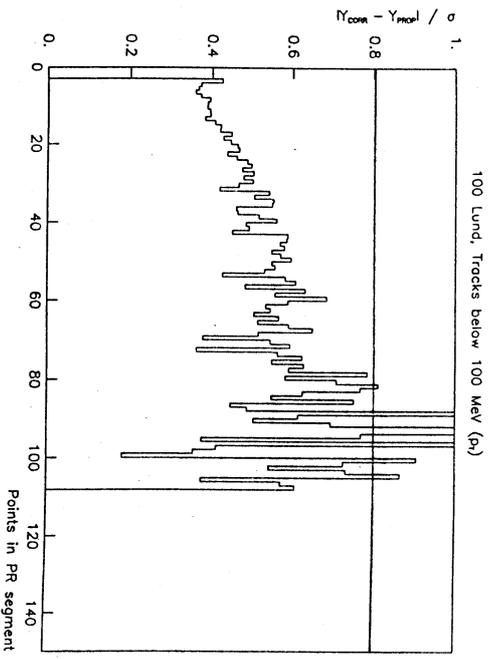


Abb. 5.4: Mittlere Abweichung der Meßpunkte vom Fit (Pionenmasse als Standard, Teilchen mit kleinem Impuls)

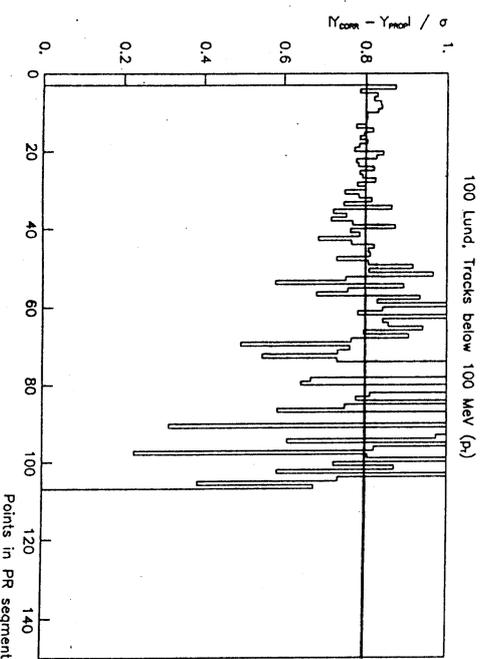


Abb. 5.6: Mittlere Abweichung der Meßpunkte vom Fit (Elektronenmasse als Standard, Teilchen mit kleinem Impuls)

Tatsächlich sind die Teilchen in der Jetkammer mit niedrigem Impuls keineswegs Pionen, sondern hauptsächlich Elektronen, die aus γ -Konversionen oder als δ -Elektronen entstehen. Ein solches niederenergetisches Elektron, das u.U. auch noch in der Zentralkammer spiralisiert, erzeugt eine Vielzahl von Spursegmenten in den einzelnen Sektoren der Jetkammer.

Um diese Elektronen korrekt zu behandeln, darf nicht die Pionenmasse ($m_\pi = 280$) in die Streuungskorrektur eingesetzt werden, für Teilchen mit niedrigem Impuls muß die Elektronenmasse verwendet werden. Andererseits kann für ausreichend hohe Impulse, bei denen die Zahl der Pionen dominiert, der Massen-Term in Gleichung (5.1) vernachlässigt werden. Das legt nahe, als "Standardmasse" direkt die Masse des Elektrons ($m_e = 0,5 \text{ MeV}/c^2$) für das gesamte Impulsspektrum zu benutzen.

Abb. 5.5 und 5.6 zeigen die Ergebnisse dieser Vorgehensweise: Die Abweichungen vom theoretischen Wert liegen jetzt für kleine und große Impulse in derselben Größenordnung.

In der Tat ergaben sich auch bezüglich der Effizienz des implementierten Spurenerkennungsprogramms die besten Ergebnisse bei der Benutzung der Elektronenmasse in der Streuungskorrektur des Billoir-Fits.

6. Auflösung der Links-Rechts-Ambiguität

6.1 Allgemeines Verfahren

Aufgrund der Links-Rechts-Ambiguität in der OPAL-Jetkammer können den einzelnen Driftzeitmessungen nicht eindeutig Raumpunkte zugeordnet werden. Jede Messung wird zunächst einmal durch zwei Punkte dargestellt, wobei - nur unter Verwendung einer Einzelmessung - nicht bekannt ist, welcher der beiden Punkte den wahren Teilchenort beschreibt. Erst nach der Zuordnung der Punkte zu Spuren, kann die Entscheidung zwischen wahrer und sog. Spiegelspur vorgenommen werden.

Eine Spiegelspur, das sei die Spur, die sich ausschließlich aus den Spiegelpunkten einer Teilchenbahn (gespiegelt an der Signaldrahtebene) zusammensetzt, besitzt die beiden folgenden Eigenschaften, die die Unterscheidung von ihrem Original möglich machen:

a) Bedingt durch den Lorentz-Winkel sind die Punkte zwar an der Signaldrahtebene, jedoch nicht in senkrechter Richtung zu dieser gespiegelt. Man kann die Spiegelung an der Anodenebene mit der an einem Stufenspiegel vergleichen. Insbesondere bleibt dabei die Bahnkrümmung nicht konstant: Spiegelspuren sind keine Kreise.

Dieser Effekt nimmt jedoch mit kleiner werdender Krümmung der Teilchenbahn ab - die Spiegelung einer Geraden ergibt wieder eine Gerade -, und ist daher praktisch nur für Teilchen mit sehr kleinem Impuls ($pt < 100 \text{ MeV}/c$) sichtbar, weshalb er für die Links-Rechts-Auflösung nicht in Frage kommt.

b) Aufgrund der abwechselnden Versetzung der Signaldrähte gegeneinander (Staggering) sind auch die Spiegelpunkte gegeneinander verschoben (Abb. 6.1).

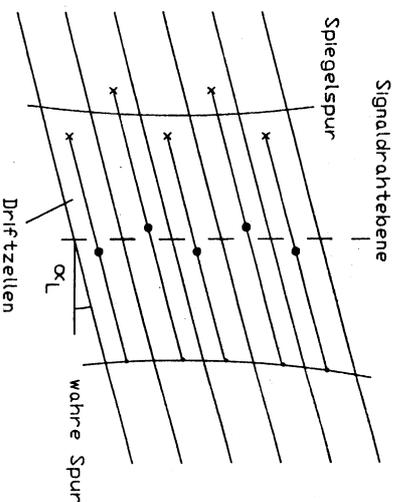


Abb. 6.1: Die Versetzung der Spiegelpunkte

Unter Ausnutzung des Stagging kann ein Standardverfahren wie folgt angewendet werden: Bei beiden Punktmengen, von denen zunächst nicht bekannt ist, welche die korrekte Teilchenbahn beschreibt, wird jeweils eine Spuransatzung durchgeführt. Da bei der Spiegelspur sich zu den Einzelmessfehler noch der Ortsversatz addiert, sollte das erhaltene χ^2 des Fits für die Originalspur kleiner sein als für die gespiegelte. Im allgemeinen ergeben sich Probleme mit diesem Verfahren nur, wenn die Einzelmessfehler in der Größenordnung des Stagging liegen oder nur sehr wenige Punkte für den Fit zur Verfügung stehen.

Für die Spurerkennung stellt die Links-Rechts-Ambiguität jedoch noch ein algorithmisches Problem dar. Solange die "richtige Seite" einer Spur noch nicht bekannt ist, bedeutet die Verfolgung dieser Spur in der Kammer eigentlich die Verfolgung zweier Spuren. Bei der Suche nach weiteren Punkten kann es daher durchaus vorkommen, daß ein Punkt zwar zu einer der Spuren, sein Spiegelbild aber nicht zur anderen Spur kompatibel ist. Die Frage ist nun, ob dieser Punkt zu einem, zu beiden oder zu keinem der beiden Spurkandidaten hinzugefügt werden soll.

Eine spezielle Lösung dazu wird in Kapitel 8 bei der Beschreibung des

Algorithmus vorgestellt. Hier soll nur festgehalten werden, daß eine möglichst frühe Links-Rechts-Auflösung im Verlauf der Spurverfolgung solche Probleme vermeiden hilft.

Es bleibt also die Frage, inwieweit der bei der Spurverfolgung durchgeführte Billoir-Fit zur Links-Rechts-Entscheidung für die aktuelle Spur eingesetzt werden kann, und nach wieviel Punkten eine solche Entscheidung möglich ist.

6.2 Links-Rechts-Auflösung mit der Billoir-Fit-Methode

Bei der im vorhergehenden beschriebenen Standardmethode werden die Abweichungen der Meßpunkte (χ^2) von einer angepassten Spur als Entscheidungskriterium benutzt. Diese Vorgehensweise kann direkt auf die Verwendung des Billoir-Fits übertragen werden.

Grundsätzlich stellt die Billoir-Fit-Methode an jeder Stelle, an der ein weiterer Punkt in den Fit aufgenommen wird, zwei Schätzungen der Teilchenbahn zur Verfügung, einerseits die durch $(Y_{prop}, A_{prop}, C_{prop})$ gegebene propagierte, andererseits die nach Einbeziehung des aktuellen Meßpunktes ermittelte Spurschätzung $(Y_{fit}, A_{fit}, C_{fit})$.

Im Prinzip könnten beide Schätzungen als Referenz für die Abweichung der Meßpunkte benutzt werden. Es muß daher untersucht werden, welche der beiden die besseren Ergebnisse für die Links-Rechts-Auflösung liefert.

Dazu wurde in jedem Rekursionsschritt des Billoir-Fits die Abweichung der aktuellen Messung von der bisher besten Schätzung der Bahn berechnet ($|Y_{meas} - Y_{fit}|$). Der Mittelwert dieser Differenzen

$$f_N = \frac{1}{N-3} \sum_{i=4}^N |Y_{meas} - Y_{fit}|$$

wurde dann gegen die Anzahl der bereits im Fit enthaltenen Punkte N aufgetragen. Die Summation der Abweichungen wurde dabei erst ab dem vierten Meßpunkt der Spur ausgeführt, da die ersten drei Spurpunkte die Startparameter der Kreisbahn bestimmen.

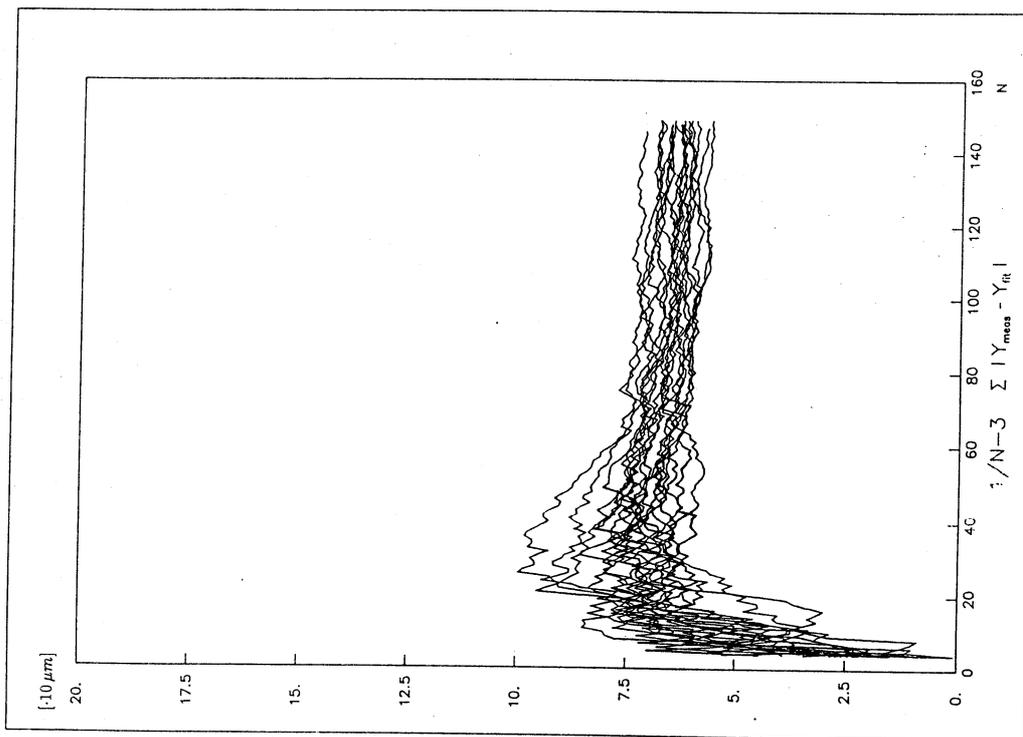


Abb. 6.2: Originalspur: Abweichungen der Meßpunkte vom Fit (Referenz: Y_{fit})

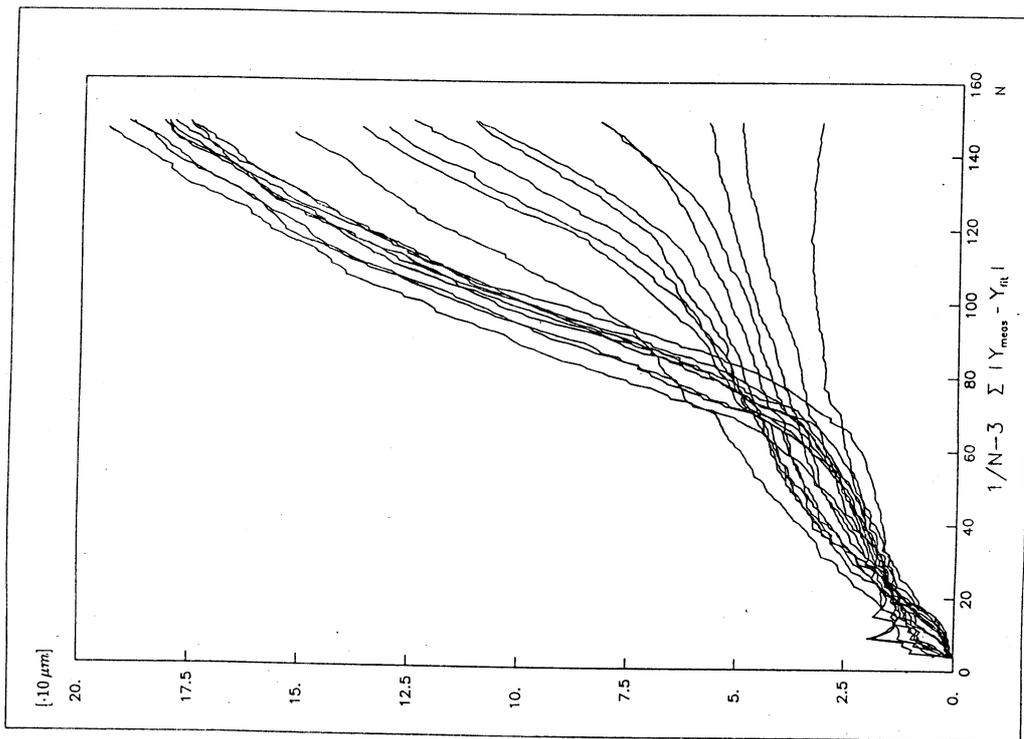


Abb. 6.3: Spiegelspur: Abweichungen der Meßpunkte vom Fit (Referenz: Y_{fit})

Abb. 6.2 zeigt dies für die Original-, Abb. 6.3 für die Spiegelspuren. Als Testteilchen wurden wieder Myonen (μ^+) mit einem Transversalimpuls von $p_T = 400 \text{ MeV}/c$ gewählt.

Bei den Originalspuren liegt die Abweichung nach dem ersten Rekursions-schritt in einem Bereich von 0 bis $70 \mu\text{m}$, nach der Hinzunahme mehrerer Punkte beträgt der Mittelwert konstant ca. $70 \mu\text{m}$. Bei den Spiegelspuren jedoch wird ein Mittelwert von $70 \mu\text{m}$ frühestens nach 60 Punkten erreicht. Die Abweichungen der Messungen vom Fit sind bei der Spiegelspur zu Beginn kleiner als bei der Originalspur und wachsen erst mit zunehmender Punktzahl stark an.

Dieses zunächst überraschende Ergebnis läßt sich jedoch recht einfach erklären (Abb. 6.4): Durch die Versetzung der Spiegelpunkte gegeneinander ergibt sich bei der Berechnung der Startparameter eine viel zu starke Krümmung der Bahn und damit eine extreme Falschschätzung des Teilchenimpulses. Der zu niedrig angenommene Impuls bedeutet aber eine zu starke Korrektur der Kovarianzmatrix bezüglich der Vielfachstreuung ($\sigma_a^2 \sim \frac{1}{p^4}$), was wiederum zu einer zu kleinen Wichtung der Parameter nach der Propagation führt. Bei der dann folgenden Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes zum Fit besitzt dieser also ein zu großes Gewicht im Vergleich zu den Parametern der extrapolierten Spur. Die neu geschätzte Spur verläuft damit aber zu nah am aktuellen Meßpunkt, was die kleinen Abweichungen der Meßpunkte vom Fit in Abb. 6.3 erklärt.

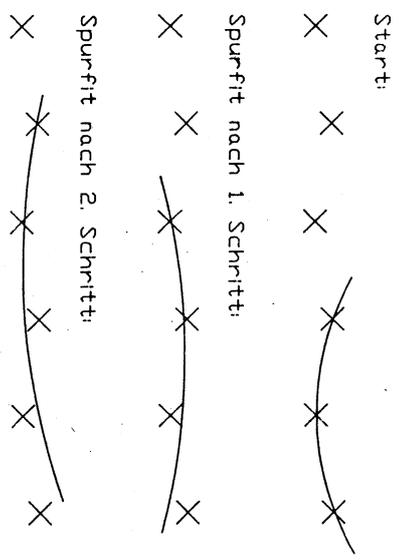


Abb. 6.4: Das Verhalten des Fits bei der Spiegelspur

Wie genauere Untersuchungen zeigten, besitzt die neue Spurschätzung wieder eine zu starke Krümmung, diesmal jedoch in der anderen Richtung (Abb. 6.4). Bei der Hinzunahme weiterer Punkte führt dies zu Oszillationen des Fits, der sich dem Ortsversatz der Spiegelpunkte anpaßt.

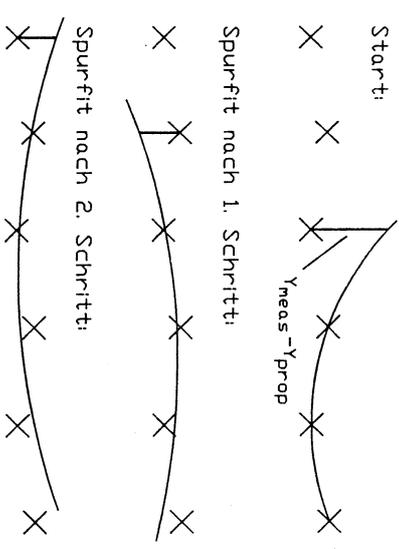


Abb. 6.5: Das Verhalten der Propagation bei der Spiegelspur

Dieses Schwingungsverhalten des Fits kann aber für die Links-Rechts-Auflösung genutzt werden, wenn man statt Y_{fit} die Propagation Y_{prop} als Referenz verwendet. Abb. 6.5 macht dies deutlich: Durch die zu kleine Krümmung der angepassten Spur ist die Propagation in der nächsten Driftzelle weit vom zugehörigen Meßpunkt entfernt.

Abb. 6.6 und 6.7 zeigen das Verhalten des Mittelwerts der Abweichungen

$$p_N = \frac{1}{N-3} \sum_{i=4}^N |Y_{meas} - Y_{prop}|$$

Für die Spiegelspuren liegen die Werte jetzt im Millimeter-Bereich, wogegen auf der Originalseite die mittlere Abweichung mit zunehmender Punktzahl gegen $200 \mu\text{m}$ strebt.

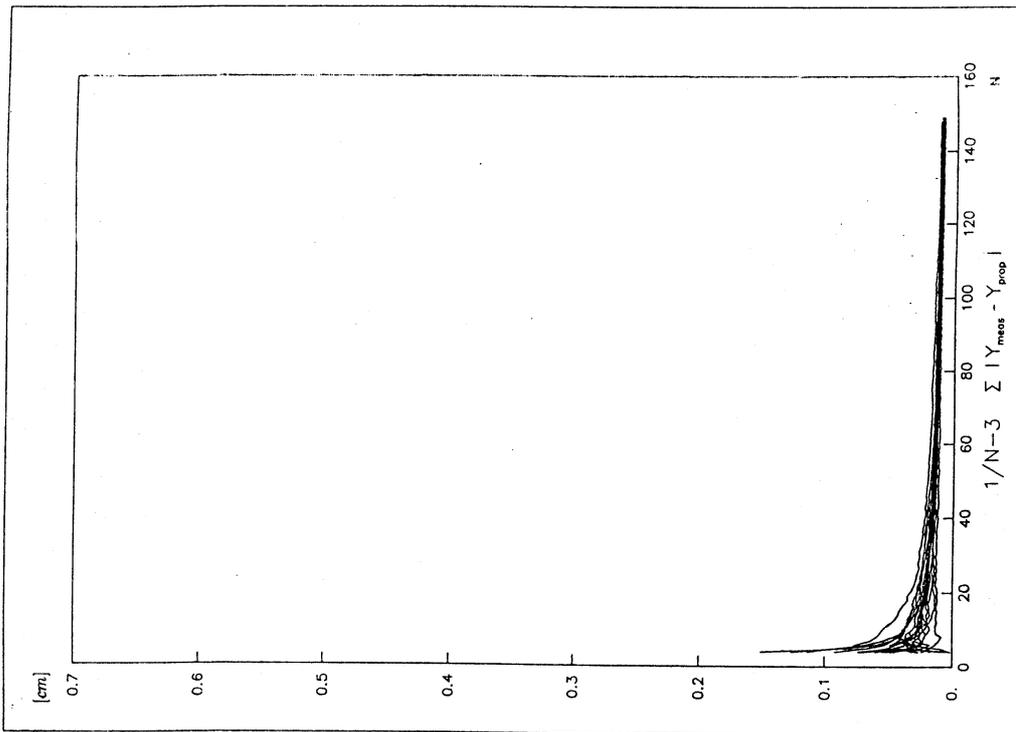


Abb. 6.6: Originalspur: Abweichungen der Meßpunkte vom Fit (Referenz: Y_{prop})

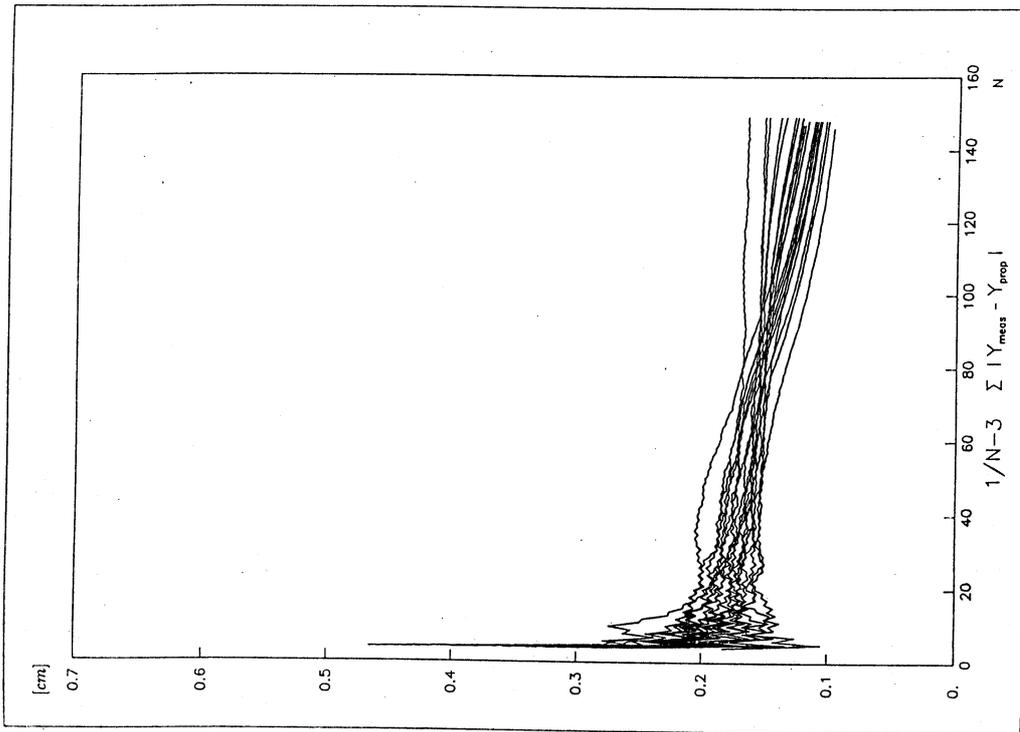


Abb. 6.7: Spiegelspur: Abweichungen der Meßpunkte vom Fit (Referenz: Y_{prop})

Damit gelangen wir zu der Folgerung:

Für die Belange der Rechts-Links-Auflösung müssen zur Bestimmung der Abweichungen der Meßpunkte vom Fit die propagierten Spurparameter Y_{prop} als Referenz verwendet werden. Diese erlauben - im Gegensatz zu den Parametern Y_{fit} - eine "frühzeitige" Unterscheidung der Original- von der Spiegelspur.

6.3 Das angewandte Verfahren

Durch die eben beschriebenen Untersuchungen ist das Verfahren bereits im wesentlichen festgelegt: Für beide Spurkandidaten (Original- und Spiegelspur) wird die Testgröße

$$p_N = \frac{1}{N-3} \sum_{i=4}^N |Y_{meas} - Y_{prop}|$$

bestimmt. Der Spurkandidat, der das kleinere p_N besitzt, ist das Original.

Da bei Verwendung der Billoir-Fit-Methode die Spurschätzung Y_{prop} an jeder Stelle, an der ein Meßpunkt zur Spur hinzugefügt wird, zur Verfügung steht, kann p_N für jedes beliebige $N > 3$ berechnet und zur Links-Rechts-Entscheidung benutzt werden.

Wären die Meßpunkte nicht mit Fehlern behaftet, könnte bereits mit vier Punkten eindeutig die "richtige Seite" der Spur festgestellt werden: Drei Punkte legen die Teilchenbahn fest, durch den vierten wird entschieden, ob ein Ortsversatz vorliegt oder nicht.

Durch die Verschmierung der Ortsmessungen mit den Meßfehlern wird dies jedoch unmöglich gemacht, da die Fehler (100 - 200 μm) sich durchaus in der Größenordnung des Staggingins bewegen. Gesucht ist also die Zahl der Punkte, die der Fit enthalten muß, damit die Links-Rechts-Auflösung durch den Vergleich der p_N korrekt durchgeführt werden kann.

Dazu wurden Häufigkeitsverteilungen der Größen p_N mit Hilfe der Simulation angefertigt. Abb. 6.8a zeigt eine solche Verteilung für die Größe p_5 (Mittelwert der Abweichungen nach der Aufnahme von 5 Punkten in die Spur). Als

Testteilchen wurden 1000 μ^+ ($p_T = 400 \text{ MeV}/c$, $\Theta = 90^\circ$)¹⁾ verwendet, wobei in das dargestellte Histogramm sowohl die Werte der Original- als auch die der Spiegelspuren aufgenommen wurden.

Man erkennt jeweils eine Häufung der p_5 -Werte in der Nähe von Null, die den Original-, und bei 0,2 cm , die den Spiegelspuren entspricht. Die beiden Verteilungen gehen jedoch ineinander über, was nichts anderes bedeutet, als daß die Links-Rechts-Unterscheidung mit $N = 5$ Punkten nicht eindeutig durchführbar ist.

Abb. 6.8b macht dies deutlicher: Dargestellt ist die Häufigkeitsverteilung der Differenz der p_5 -Werte zwischen Original- und Spiegelseite ($p_5(S) - p_5(O)$). Der Großteil der Einträge im Histogramm ist positiv, was eine korrekte Entscheidung der Seite bereits mit 5 Punkten bedeutet, 6 Einträge sind jedoch negativ, d.h. bei 6 der 1000 Myonen wäre bei Verwendung der p_5 -Werte eine falsche Links-Rechts-Entscheidung vorgenommen worden.

Eine eindeutige Entscheidung wird mit 7 Punkten möglich. Jetzt wird die Seite der Spur immer richtig aufgelöst, die Verteilungen für Original- und Spiegelspur sind getrennt, die Differenzen $p_7(S) - p_7(O)$ immer positiv (Abb. 6.9a und 6.9b).

Wie bereits erwähnt, sind die eben beschriebenen Untersuchungen unter "Optimalbedingungen" durchgeführt worden. Die Verschiebung der Signaldrähte gegeneinander ist tatsächlich nicht über den gesamten Bereich der Jetkammer konstant. Vielmehr ergibt sich der wahre Drahtort in der xy -Projektion neben dem mechanischen Ortsversatz (eigenliches Stagging) noch aus Verschiebungen durch die elektrostatische Abstoßung der Drähte und die Gravitation:

$$y_{Drakt} = y_{nominal} + y_{mechanisch} + y_{elektrostatisch} + y_{Gravitation}$$

1) Die Verschiebung der Signaldrähte gegeneinander ist nicht über den gesamten Bereich der Jetkammer konstant (elektrostatische Abstoßung). Aufgrund des hier für die Testteilchen gewählten Polarwinkels ($\Theta = 90^\circ$) war die Versetzung der Spiegelpunkte maximal.

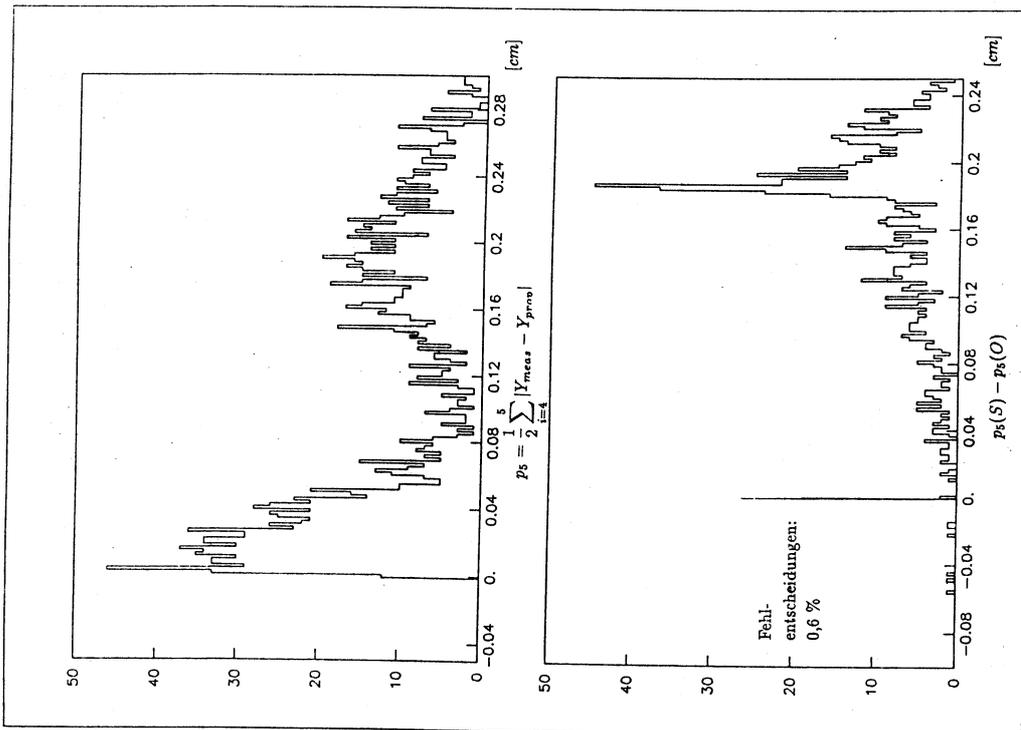


Abb. 6.8a und b: Häufigkeitsverteilungen der Größe p_s (Maximales Staggering)

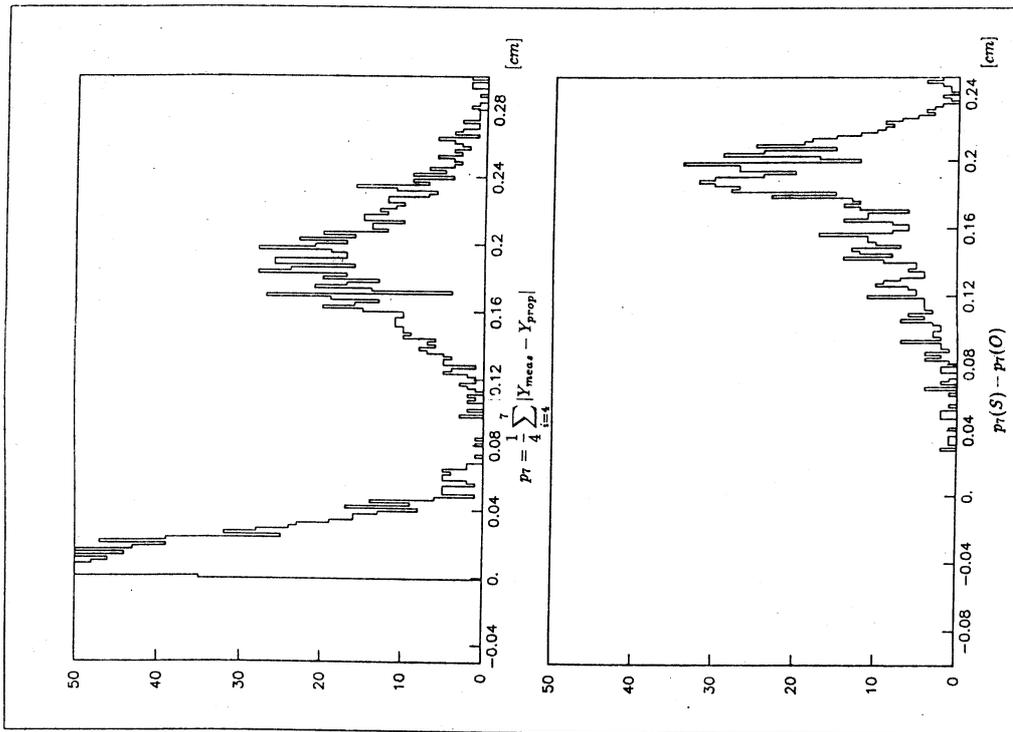


Abb. 6.9a und b: Häufigkeitsverteilungen der Größe p_t (Maximales Staggering)

Dabei bewirkt die Gravitation eine Durchbiegung aller Drähte eines Sektors in derselben Richtung und hat damit in der zy -Projektion keinen Einfluß auf die Position der Drähte relativ zueinander. Dies ist bei der elektrostatischen Abstößung jedoch anders: Die Durchbiegung der Drähte erfolgt von der Anodenebene des Sektors nach außen, das mechanische Staggering wird also um diese Drahtverbiegung vergrößert, was eine Verbesserung der Links-Rechts-Auflösung bedeutet.

Allerdings ist der Ortsversatz der Drähte gegeneinander in z -Richtung des Detektors (entlang der Drähte) nicht mehr konstant: An den Enden der Jetkammer (Aufhängung der Drähte) beträgt das Staggering (Abweichung vom Nominalwert) $100 \mu\text{m}$ [OPA83], in der Mitte der Kammer - also an der Stelle maximaler Durchbiegung - jedoch $170 \mu\text{m}$ [HEU87].

Die bisher gezeigten Histogramme stellen nun insofern den günstigsten Fall dar, als daß zum Test Teilchenbahnen senkrecht zur z -Achse des Detektors benutzt wurden. Der Ortsversatz der Spiegelpunkte war damit immer maximal.

Um nun die Tests für den ungünstigsten Fall, d.h. für Teilchenbahnen mit großen z -Koordinaten, durchführen zu können, wurde der Einfachheit halber die Addition der elektrostatischen Abstößung bei der Berechnung des Drahtortes in der Simulation unterdrückt. Das Staggering war damit an allen Stellen der Kammer konstant $100 \mu\text{m}$.

Abb 6.10 und 6.11 zeigen dazu die Ergebnisse für p_T und p_{11} unter ansonsten gleichen Bedingungen wie für die vorhergehenden Abbildungen. Die Links-Rechts-Unterscheidung ist in diesem ungünstigsten Fall weder nach 7 noch nach 11 Punkten eindeutig möglich.

Das letztlich benutzte Verfahren sei anhand der Abb. 6.11b (Häufigkeitsverteilung von $p_{11}(S) - p_{11}(O)$) erläutert: Wie man aus dem Histogramm entnehmen kann, ist der kleinste auftretende Wert für die Differenz $p_{11}(S) - p_{11}(O)$ gleich $-0,04 \text{ cm}$. Werden nun für die zwei möglichen Lösungen (1 und 2) einer Spur mit 11 Punkten die Werte $p_{11}(1)$ und $p_{11}(2)$ berechnet, so liegt die Differenz $p_{11}(1) - p_{11}(2)$ in einem der drei folgenden Bereiche:

- a) $p_{11}(1) - p_{11}(2) < -0,04$,
- b) $-0,04 \leq p_{11}(1) - p_{11}(2) \leq 0,04$,
- c) $0,04 < p_{11}(1) - p_{11}(2)$

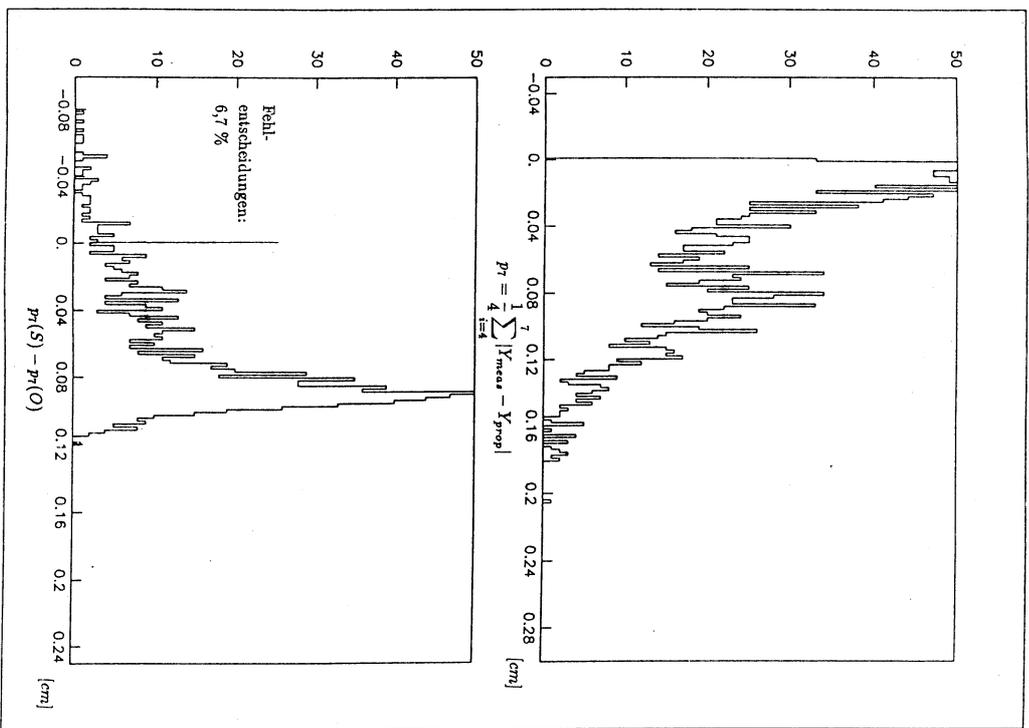


Abb. 6.10a und b: Häufigkeitsverteilungen der Größe p_T (Minimales Staggering)

Für die Fälle a) und c) ist dann eindeutig entscheidbar, welche der beiden Lösungen der Originalspur entspricht (im Falle a) die Lösung 1, im Falle c) die Lösung 2).

Wie man weiterhin aus Abb. 6.11b entnimmt, liegen ca. 80 Prozent der Einträge im Histogramm außerhalb des Intervalls $[-0,04, 0,04]$, was die Möglichkeit bedeutet, die Entscheidung in 80 Prozent der (ungünstigen) Fälle eindeutig vornehmen zu können.

Dieses Verfahren läßt sich verallgemeinern, wenn nach jeder Hinzunahme eines Punktes zum Fit (insgesamt N Punkte) dynamisch entschieden wird, ob es genügt, eine Spur zu verfolgen, oder ob beide Lösungen weiterverfolgt werden müssen.

Prinzip der dynamischen Links-Rechts-Auflösung:

Wenn $|p_N(1) - p_N(2)| > \text{Grenzwert } g_N$, dann
Entscheidung möglich, Verfolgung einer Spur,

sonst

Entscheidung nicht möglich, Verfolgung beider Spurkandidaten.

Die für dieses Verfahren benötigten Grenzwerte g_N , die eine fallende Funktion in Abhängigkeit von der Punktzahl N sind, können aus der Simulation bestimmt werden.

Das vorgestellte Verfahren ist noch nicht in vollem Umfang implementiert, es wird momentan konstant der Grenzwert $g_{11} = 0,05$ benutzt, die Links-Rechts-Auflösung frühestens mit 11 Punkten vorgenommen.

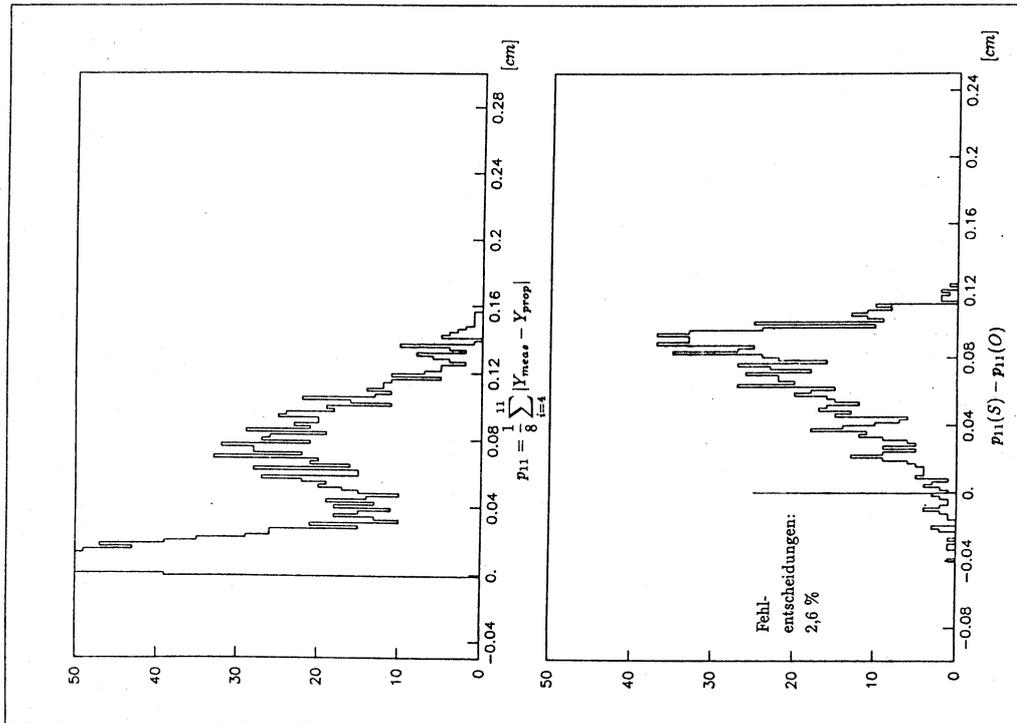


Abb. 6.11a und b: Häufigkeitsverteilungen der Größe p_{11} (Minimales Staggering)

7. Korrektur von Spurrinkeleffekten

7.1 Die JADE-Approximation

Das implementierte Spurenerkennungsprogramm benutzt als Eingabe die im Lorentz-gedrehten Koordinatensystem dargestellten Meßpunkte. Diese Koordinaten sind jedoch teilweise mit großen, systematischen Fehlern behaftet, die aus den im folgenden beschriebenen Winkelfeffekten resultieren.

Um die bisher dargestellten Untersuchungen z.B. zur Qualität des Fits oder der Links-Rechts-Auflösung ohne Verfälschung durch diese systematischen Fehler durchführen zu können, wurde das Simulationsprogramm GOPAL so verändert, daß die benutzten Rohdaten nicht mit diesen Fehlern behaftet waren: **Alle bisher gezeigten Histogramme basieren auf idealisierten Rohdaten.**

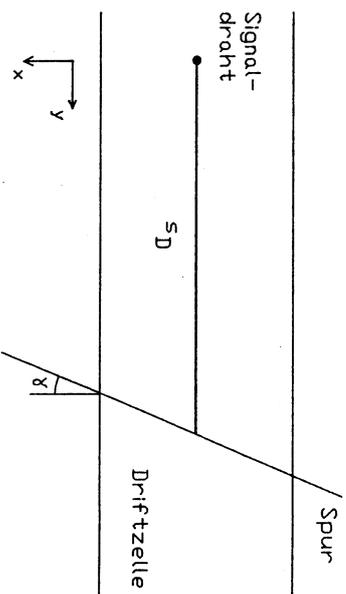


Abb. 7.1: Die idealisierte Driftstrecke s_D

Abb. 7.1 zeigt die im veränderten GOPAL benutzte Näherung: Ein Teilchen durchläuft unter dem Neigungswinkel γ die Driftzelle. In der Simulation wird

nun aus der Entfernung s_D der Spur zum Signaldraht die "gemessene" Driftzeit der Elektronen mittels der Driftgeschwindigkeit v_D berechnet:

$$t_D = \frac{s_D}{v_D}.$$

Zu der Driftzeit t_D wird dann der Meßfehler (gaußisch verteilt) addiert. Dabei wurde bisher der Schnittpunkt der Spur mit der Geraden berechnet, die vom Signaldraht ausgeht und parallel zur Driftzelle verläuft. Der Abstand dieses Schnittpunktes vom Signaldraht wurde dann als Driftstrecke s_D verwendet. Die Rückrechnung der so erhaltenen, idealisierten Driftzeiten in die Koordinaten des Lorentz-gedrehten Systems ($s_D = v_D \cdot t_D$) lieferte also immer **Meßpunkte ohne systematische Fehler.**

Diese Berechnung der Driftzeit ist jedoch ein grobe Näherung: Die experimentell gemessene Zeit t_D ist im Prinzip die Driftzeit des ersten am Signaldraht ankommenden Elektrons. Zur Berechnung dieser Zeit muß dabei in der Simulation der Verlauf des elektrischen Feldes in der Driftzelle berücksichtigt werden.

Eine sehr gute Näherung für die von den Elektronen in der Driftzelle verfolgten Wege stellt die **JADE-Approximation** dar [NOZ81]:

- Gegeben sei ein Kreis um den Signaldraht, dessen Durchmesser gerade die Dicke der Driftzelle ist. Dann driften die Elektronen, die sich innerhalb dieses Kreises befinden, **radial** auf den Draht zu.
- Elektronen außerhalb des Kreises bewegen sich **parallel** zur Driftzelle.

Damit ergibt sich für ein Teilchen, das die Driftzelle außerhalb dieses Kreises durchquert, die in Abb. 7.2 dargestellte Driftstrecke s_D .

Zwischen der gesuchten y -Koordinate des Teilchens relativ zum Draht und der durch die JADE-Approximation gegebenen Driftstrecke s_D , lassen sich folgende geometrische Beziehungen aufstellen:

$$y = s_D \cdot \frac{1}{\cos \gamma}, \quad \text{für } s_D \leq R, \quad (7.1a)$$

$$y = s_D + R \left(\frac{1}{\cos \gamma} - 1 \right), \quad \text{für } s_D \geq R, \quad (7.1b)$$

wobei R die halbe Driftzellendicke, und γ der Neigungswinkel der Spur gegen die Driftzelle ist.

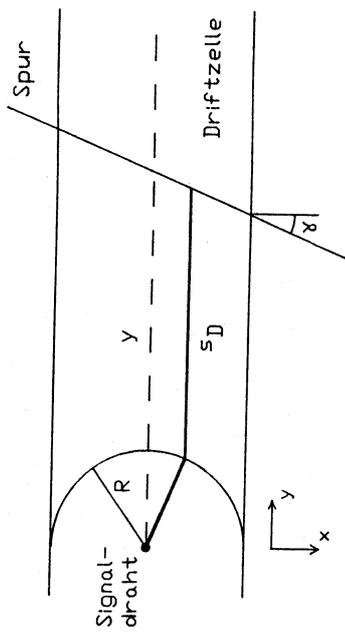


Abb. 7.2: Die JADE-Approximation

Für die Rekonstruktion der Teilchenbahnen bedeutet das, daß die mit $s_D = v_D \cdot t_D$ aus der Messung bestimmte Driftstrecke s_D noch mit den angegebenen Korrekturen (7.1) kalibriert werden muß. Da der Neigungswinkel γ der Spur aber für ein einzelnes Driftkammersignal unbekannt ist, kann diese Kalibration nicht vor der Spurerkennung durchgeführt werden. Erst wenn wir wissen, welche Meßpunkte zu einer Spur gehören, ist der Neigungswinkel und damit der Wert der anzubringenden Korrektur bekannt.

Vorerst, d.h. vor der Spurerkennung, kann als Näherung der Neigungswinkel γ zu Null angenommen werden, und so trotzdem die Transformation der gemessenen Driftzeiten in Raumkoordinaten, z.B. in das Lorentz-gedrehte System erfolgen.

Die so rekonstruierten Koordinaten sind aber nun mit besagten, systematischen Fehlern behaftet, die umso größer sind, je mehr die erzeugende Teilchenspur gegen die Driftzelle geneigt ist. Die rekonstruierte Distanz zum Signaldraht ist dabei immer kleiner als die wahre Distanz der Spur (Abb. 7.3).

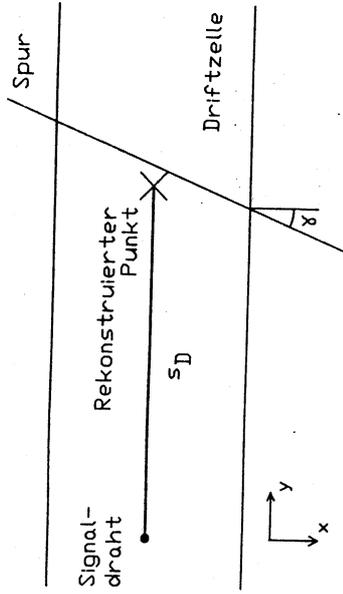


Abb. 7.3: Rekonstruktion eines Meßpunktes

7.2 Probleme für die Spurerkennung

Betrachtet man nun mehrere zu einer Spur gehörende Punkte, so erscheint jeder der rekonstruierten Punkte um $\Delta = R \left(\frac{1}{\cos \gamma} - 1 \right)$ in Richtung der Signaldrahtebene verschoben. Abb. 7.4 zeigt dies für eine gerade Teilchenbahn, bei der also der Neigungswinkel γ für jede Driftzelle gleich ist.

Da die Verschiebung immer auf die Signaldrahtebene hin erfolgt, erscheint die Spur links der Anode nach rechts und rechts der Anode nach links verschoben. Die rekonstruierte Spur eines Teilchens, das die Anode kreuzt, besitzt also in Anodennähe einen Versatz von 2Δ .

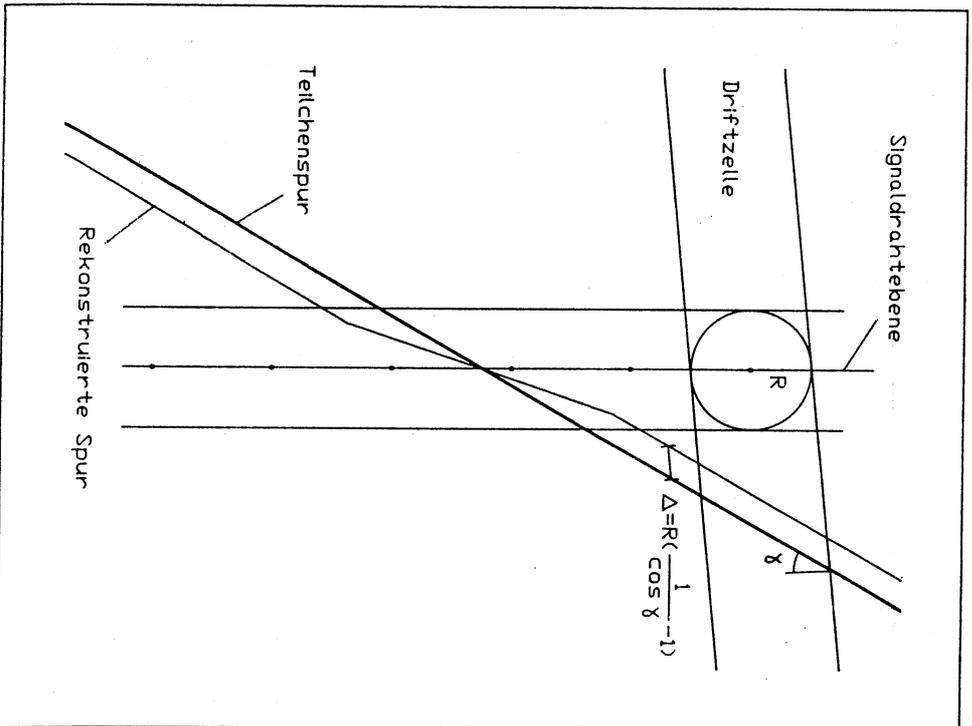


Abb. 7.4: Spurrekonstruktion ohne Winkelkorrektur

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die systematische Spurrenschiebung sich in zwei Effekten darstellt:

- a) Spuren, die nicht die Anoden kreuzen, sind um einen gewissen Betrag zur Anode hin verschoben. Bei gekrümmten Spuren, deren Neigungswinkel gegen die Driftzellen natürlich nicht konstant ist, ändert sich die Größe der Verschiebung entlang der Bahn. Daraus folgt direkt, daß es sich bei den rekonstruierten Spuren nicht mehr um Kreisbahnen handelt. In der Regel gilt aber, daß dieser Effekt für die Spurrekennung vernachlässigbar ist, da die Abweichung der interessierenden Spuren von der Kreisform klein im Vergleich z.B. zum Einfluß der Vielfachstreuung ist.
- b) Das eigentliche Problem für die Spurrekennung stellt der Versatz der Spur beim Kreuzen der Anode dar. Bei entsprechend großem Versatz wird die Bahn von den angewendeten Spurrefolgungsprogrammen an der Anode verloren, oder aber es werden falsche, nicht zur Spur gehörende Punkte aufgesammelt. Häufig werden dabei die Spiegelpunkte der wahren Spur als Fortsetzung hinter der Anodenebene gefunden. Für ein Teilchen z.B. mit dem Neigungswinkel $\gamma = 60^\circ$ ergibt sich ein Ortsversatz von $2\Delta = 1 \text{ cm}$. Die Größenordnung macht deutlich, daß dieser Effekt bei der Spurrekennung nicht vernachlässigt werden darf.

Generell gibt es zwei Möglichkeiten, den Versatz bei der Spurrefolgung zu berücksichtigen, die im folgenden kurz diskutiert werden sollen:

- a) Bei Erreichen der Anodendrahthebene wird die Spurrefolgung gestoppt. Auf der anderen Seite der Anode muß dann wieder eine neue Starkkombination gesucht, die Spurrefolgung erneut gestartet werden. Anodenkreuzende Spuren werden so grundsätzlich in zwei Segmente aufgespalten, die dann mit dem jetzt bekannten Neigungswinkel korrigiert und zu einem Spursegment zusammengefaßt werden können. Wäre die Links-Rechts-Ambiguität der Meßpunkte nicht gegeben, entspräche diese Methode der Aufspaltung der Eingabedaten in Messungen links und rechts der Anode und **getrennter Spurrekennung für die beiden Halbspektoren**.

Bei Anwendung dieses Verfahrens treten allerdings folgende Probleme auf:

- In dem Bereich von 1 cm um die Anodendrahthebene (Kreis der JADE-Approximation) besitzen die Meßpunkte nicht die volle Verschiebung der restlichen Spurrepunkte. Dies kann zum Aufsummieren falscher Punkte

te bereits bei der Annäherung an die Anodendrahtebene führen. Weiterhin sind unkorrigierte Punkte in diesem Bereich keine guten Startkombinationen, da die Abweichung von der Kreisform der Bahnen je nach Neigungswinkel hier groß sein kann.

- Wird eine Spur durch die Anodenebene geteilt, besteht die Möglichkeit, daß eines der beiden Segmente nicht gefunden wird, da es für die Spurerkennung zu wenig Punkte besitzt. Bei Nichterkennung der Segmente geht sogar die Information der gesamten Spur in diesem Sektor verloren, obwohl die Gesamtzahl der Punkte für eine Spurerkennung ausreichen müßte.

b) Im Prinzip ist der Neigungswinkel für die im Verlauf der Spurverfolgung aufgesammelten Punkte bekannt und kann daher für die Korrektur der Spur schon während der weiteren Punktssuche verwendet werden. Zunächst einmal bedeutet das einen erhöhten Rechenaufwand, da die Korrektur für jeden weiteren Spurpunkt durchgeführt werden muß. Insbesondere gilt dies auch für Spurkandidaten, die letztendlich wieder verworfen werden. Andererseits erübrigt sich die erneute Suche nach einer Startkombination auf der anderen Seite der Anode, wenn es gelingt, die Spur über die Anode hinweg zu verfolgen. Dabei hängt natürlich die Qualität der Korrektur entscheidend davon ab, wie genau der Neigungswinkel aus den bisher gefundenen Punkten bestimmt werden kann.

Da bei der Spurverfolgung unter Verwendung des Billoir-Fits sehr gute Schätzungen des Spürwinkels vorliegen, wurde ein Verfahren zur Winkelkorrektur während der Spurverfolgung implementiert, das im folgenden beschrieben werden soll.

7.3 Winkelkorrektur während der Spurverfolgung.

Die nicht-winkelkorrigierten Raumpunkte beschreiben die Teilchenbahn nicht im normalen Ortsraum (x, y) , vielmehr muß man sie als Darstellung der Messungen in einem anderen Raum, dem Driftstreckenraum (x, s_D) auffassen. Bei bekanntem Spürwinkel lassen sich die Punkte des Driftstreckenraums mit

den Korrekturformeln (7.1a) und (7.1b) in den Ortsraum transformieren:

$$y = s_D \cdot \frac{1}{\cos \gamma}, \quad \text{für } s_D \leq R,$$

$$y = s_D + R \left(\frac{1}{\cos \gamma} - 1 \right), \quad \text{für } s_D \geq R.$$

Damit stehen nun grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Bahnbeschreibung bei der Spurverfolgung zur Wahl:

- a) *Darstellung im Driftstreckenraum:* Die Punkte werden zunächst nicht korrigiert, die Startkombinationssuche und die Spurverfolgung werden ohne Berücksichtigung des Ortsversatzes durchgeführt. Erst bei Erreichen der Anodendrahtebene verschiebt man die bereits gefundenen Punkte entsprechend dem ermittelten Spürwinkel. Bei diesem Verfahren wird, da die Punkte anfangs unkorrigiert in die Spur aufgenommen werden, also nicht die Abweichung von der Kreisbahn, sondern nur der Effekt des Ortsversatzes an der Anode berücksichtigt.
 - b) *Darstellung im Ortsraum:* Jeder Punkt, der zu dem bereits existierenden Spurkandidaten hinzugefügt werden soll, wird vorher in den Ortsraum transformiert, unabhängig davon, auf welcher Seite der Anodendrahtebene er sich befindet. Die errechneten Bahnparameter beschreiben also während der gesamten Spurverfolgung das Teilchen im Ortsraum, die Annahme einer Kreisbahn ist wieder korrekt.
- Da die Benutzung der Billoir-Fit-Methode durch eine möglichst hohe Genauigkeit bei der Spurextrapolation motiviert wird, wurde zur Berücksichtigung der Winkeleffekte die Darstellung der Spur im Ortsraum gewählt.

Ausgehend von einem bekannten Spurkandidaten stellt sich die Suche nach weiteren, zur bisherigen Spur kompatiblen Punkten dann wie folgt dar:

1. Propagation der Spur in die nächste Driftzelle. Die dabei erhaltenen Parameter $\begin{pmatrix} Y_{prop} \\ A_{prop} \\ C_{prop} \end{pmatrix}$ beschreiben die Spur im Ortsraum.
2. Transformation des Parameters Y_{prop} in den Driftstreckenraum $(Y_{prop} \rightarrow s_{prop})$. Für diese Transformation wird der Parameter A_{prop} benutzt, der

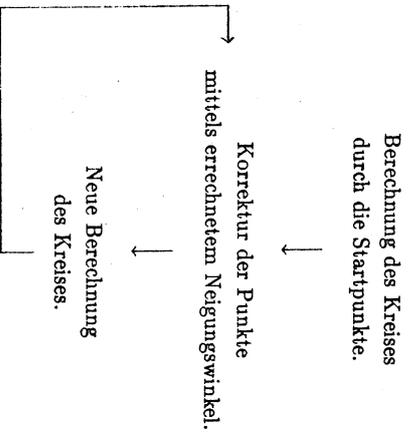
die bisher beste Schätzung des Spurwinkels γ darstellt:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + A_{prop}^2}}$$

3. Mit der jetzt im Driftreckenraum vorhandenen Punktvorhersage s_{prop} kann dann die Suche nach kompatiblen Punkten erfolgen, ohne die in Frage kommenden Messungen vorher transformieren zu müssen.
4. Würde ein kompatibler Punkt (s_{meas}) gefunden, wird dieser jetzt durch Anbringen der Winkelkorrektur in den Ortsraum transformiert ($s_{meas} \rightarrow y_{meas}$).
5. Hinzunahme des Punktes zum Fit.

Zur Anwendung des angegebenen Verfahrens ist es allerdings notwendig, daß bereits die Startparameter der Rekursion die Kurve im Ortsraum beschreiben. Sind drei Punkte (s_{D1} , s_{D2} , s_{D3}) als Startkombination ausgewählt, genügt es jetzt nicht mehr, den Kreis durch diese Punkte und daraus direkt die Startparameter zu berechnen. Die Punkte müssen einzeln korrigiert werden, dann erst kann die Berechnung des Kreises und damit der Startparameter erfolgen. Dabei ist die Einzelkorrektur der Punkte vom Neigungswinkel der Spur und damit vom Neigungswinkel des zu berechnenden Kreises abhängig.

Dieses Problem kann durch folgenden iterativen Ansatz gelöst werden:



86

Bei Anwendung dieser Methode konvergieren die Koordinaten der Startpunkte gegen die gesuchten Ortsraumkoordinaten.

In der Praxis hat sich dabei die dreimalige Anwendung der Iteration als völlig ausreichend für die benötigte Genauigkeit der Startparameter erwiesen. Trotzdem stellt die Anwendung eines Iterationsverfahrens grundsätzlich einen erheblichen Aufwand an Rechenzeit dar. Eine direkte Berechnung der Startparameter durch analytische Formeln ist geplant, aber momentan noch nicht implementiert.

Die Auswirkungen der angewendeten Winkelkorrektur auf die Spurverfolgung sind in Abb. 7.5 bis 7.7 dargestellt. Als Testteilchen wurde ein vom Vertex kommendes μ^+ mit einem Transversalimpuls von $pr = 160 \text{ MeV}/c$ benutzt. Wie in Abb. 7.5 gezeigt, durchquert ein solches Teilchen vor dem Verlassen des Zentraldetektors drei Sektoren der Jetkammer. Dabei betragen die Neigungswinkel der Spur gegen die Driftzellen an den drei Stellen der Anodenkreuzungen ungefähr 20° (Sektor 1), 40° (Sektor 2) und 60° (Sektor 3). Der Ortsversatz an den Anoden beträgt dann ungefähr $0,6 \text{ mm}$ (Sektor 1), 3 mm (Sektor 2) und 10 mm (Sektor 3).

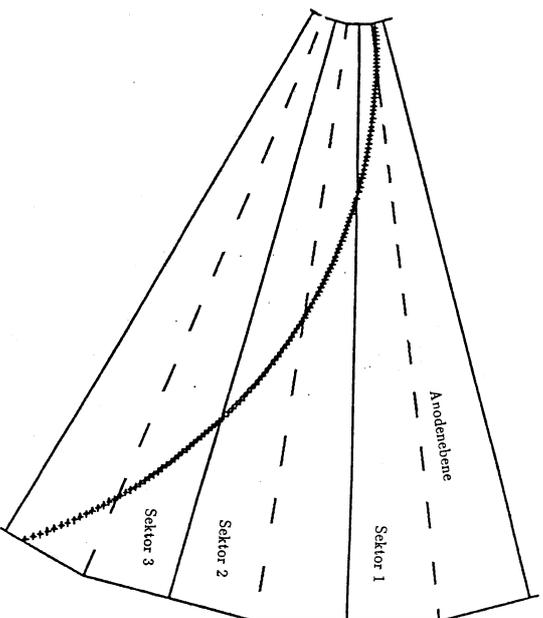


Abb. 7.5: Bahn eines μ^+ , $pr = 160 \text{ MeV}/c$

87

Die Straßenbreite, d.h. der Abstand, den ein kompatibler Punkt von der propagierten Spur höchstens haben darf, wurde auf konstant $\pm 1 \text{ mm}$ gesetzt. Bei nicht durchgeführter Winkelkorrektur verlor das Spurverfolgungsprogramm die Bahn in Sektor 2 und Sektor 3 jeweils an der Anode (Abb. 7.6). In den Abbildungen ist die Differenz zwischen propagiertem und gemessenem y -Wert gegen die Drahtnummer aufgetragen¹⁾.

Abb. 7.7 zeigt die Spurenerkennung mit Winkelkorrektur, die Bahnen werden durch die Anodenebene hindurch weiterverfolgt.

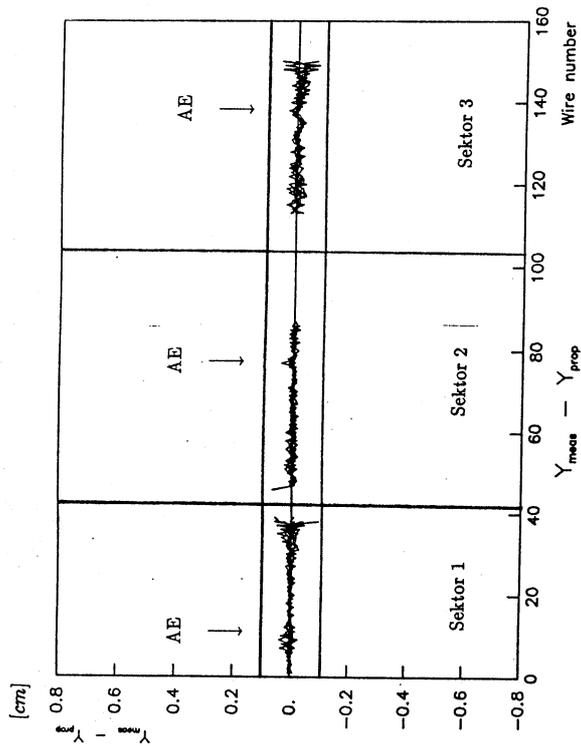


Abb. 7.7: Spurverfolgung mit Winkelkorrektur (AE = Anodenebene)

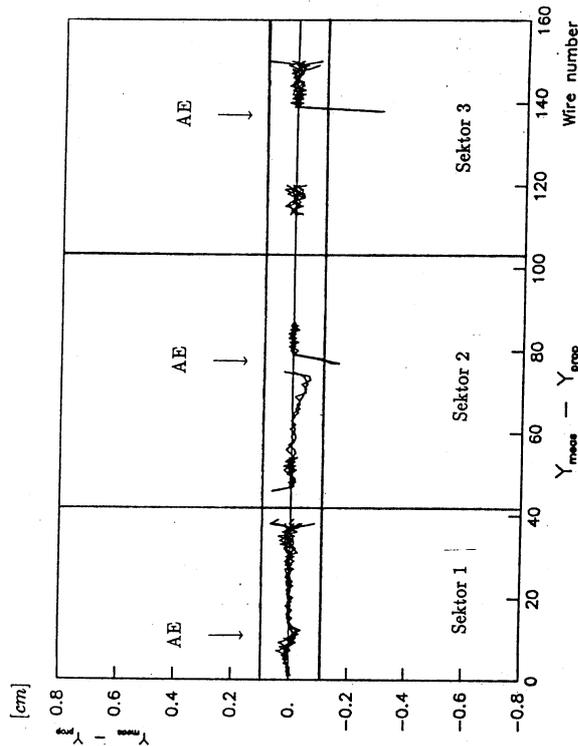


Abb. 7.6: Spurverfolgung ohne Winkelkorrektur (AE = Anodenebene)

¹⁾ Die Lücken der Kurven zwischen den Sektoren 1 und 2 bzw. zwischen 2 und 3 resultieren aus dem Lorentzwinkel: Aufgrund der Drehung der Driftzellen sind die Nummern der beiden Driftzellen, die ein Teilchen beim Kreuzen der Sektorgrenze durchläuft, verschieden.

8. Der Algorithmus zur Spurerkennung

8.1 Beschreibung der Eingabedaten

Entsprechend der sektorweisen Durchführung der Spurerkennung beschreiben die gegebenen Eingabedaten die Messungen in der Jetkammer sektorweise.

Soweit es vor der Spurerkennung möglich ist, werden die gemessenen Driftzeiten kalibriert und in Raumkoordinaten transformiert. Aufgrund der Links-Rechts-Ambiguität ergeben sich dabei für jede Messung zwei Punkte in dem zur Darstellung benutzten Lorentz-gedrehten Koordinatensystem. Für die korrekte Durchführung des Billoir-Fits werden weiterhin die Fehler der Einzelmessungen als Eingabe verlangt, da diese in der Driftzelle nicht konstant und von der Kalibration abhängig sind.

Pro Messung sind also die folgenden Daten gegeben:

$$M = (y_{links}, y_{rechts}, \sigma_{y_{links}}, \sigma_{y_{rechts}}).$$

Diese Einzelmessungen sind nach Driftzellen geordnet, wobei für jede Driftzelle noch die Anzahl N der Messungen und die entsprechende x -Koordinate gegeben ist:

$$D = (N, x, \{M_i | i = 1, \dots, N\}).$$

Insgesamt werden also die Messungen in einem Sektor durch 159 Variablen dieses Datentyps beschrieben (Anzahl der Driftzellen):

$$S = (D_1, D_2, \dots, D_{159}).$$

Die Ausgabe der Spurerkennung ist die Menge der gefundenen Spursegmente, wobei man sich zu deren Beschreibung auf eine Referenzierung der Eingabedaten - einschließlich der Angabe der Links-Rechts-Auflösung - beschränken kann [CJW86].

Wie bei anderen Experimenten der Hochenergiephysik wird auch bei der OPAL-Kollaboration zur Implementierung der Algorithmen die Programmiersprache FORTRAN benutzt. Allerdings bietet dabei der sehr begrenzte Sprachumfang von FORTRAN nicht von vornherein die Möglichkeit einer dynamischen

Speicherverwaltung, die aber z.B. für die Realisierung der oben angegebenen Datenstrukturen notwendig ist.

Um dennoch die dynamische Speicherung der Daten zu ermöglichen, wird das von CERN entwickelte Unterprogramm-Paket ZEBRA [ZEB85] benutzt. Die Datenspeicherung erfolgt hier in sogenannten Bänken, die über doppelt verkettete Listen in Form von Bäumen verwaltet werden. Auf die spezielle Form der benutzten Baumstrukturen soll hier nicht näher eingegangen werden. Eine genaue Beschreibung u.a. auch der Ausgabedaten der Spurerkennung findet man in [CJW86].

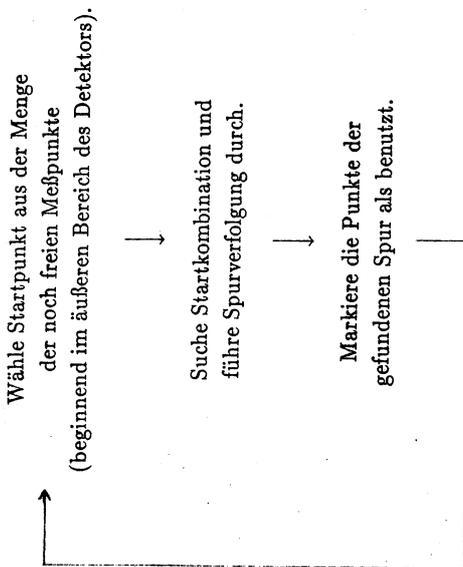
8.2 Das globale Verfahren

Implementiert wurde ein serieller Spurverfolgungs-Algorithmus. Das Grundprinzip wurde bereits in Kapitel 3.3 erläutert: Der bisher gefundene Spurkandidat wird in die nächste, dem Vertex nähere Driftzelle extrapoliert, mittels dieser Vorhersage dann nach kompatiblen Punkten gesucht. Der kompatible, innerhalb einer bestimmten Straßenbreite liegende Punkt, der am besten mit der Spurschätzung übereinstimmt, wird in den Spurkandidaten mit aufgenommen. Die sukzessive Anwendung dieses Verfahrens, bis die innerste Driftzelle erreicht oder kein weiterer kompatibler Punkt mehr gefunden wird, liefert schließlich die Menge der zur aktuellen Spur gehörenden Meßpunkte.

Diese Spurverfolgung wird für einen Spurkandidaten nach dem anderen durchgeführt (serielles Verfahren). Erst wenn die Suche nach weiteren kompatiblen Punkten für den aktuellen Kandidaten abgeschlossen ist, wird erneut eine Startkombination im äußeren Bereich des Detektors gewählt, und die Spurverfolgung für diese durchgeführt.

Um zu verhindern, daß ein und derselbe Meßpunkt zwei verschiedenen Spuren zugeordnet wird, werden die Punkte einer gefundenen Spur vor der weiteren Suche nach Startkombinationen aus der Grundmenge der noch freien Meßpunkte entfernt (bzw. als benutzt markiert). Die Menge der für die Suche zu berücksichtigenden Punkte verkleinert sich also im Verlauf des Gesamtverfahrens.

Prinzip:



Damit beschränkt sich die folgende Beschreibung des Algorithmus auf die Erkennung einer Spur, die gesamte Spurerkennung ist die sequentielle Ausführung dieses Einzelschritts.

Wie im weiteren gezeigt werden wird, ergeben sich, je nachdem wieviele Punkte in die Spur aufgenommen sind, oder ob die Links-Rechts-Auflösung bereits durchgeführt werden konnte, für die Suche nach kompatiblen Punkten unterschiedliche Regeln. Entsprechend diesen Regeln wird eine Klassifizierung der aktuellen Spur in vier Typen vorgenommen:

- a) **Startpunkt:** Die aktuelle Spur besteht aus nur einem Punkt. Winkel und Krümmung der Bahn sind völlig unbestimmt, die Wahl eines weiteren Punktes ist frei.
- b) **Bipunkt:** Jetzt sind zwei Punkte und damit die Richtung der Bahn gegeben. Es besteht die Möglichkeit, die Suche nach einem dritten Punkt auf bestimmte Winkelbereiche zu beschränken.
- c) **Doppelspur:** Es sind mindestens drei Punkte vorhanden und damit Spurschätzungen mit der Billoir-Fit-Methode möglich. Die Links-Rechts-Auf-

lösung ist allerdings noch nicht durchgeführt. Neben der aktuellen Spur muß also auch ihr Spiegelbild als mögliche Lösung berücksichtigt werden.

d) **Spurkandidat:** Die Links-Rechts-Auflösung ist vorgenommen worden. Der während der Spurverfolgung durchgeführte Billoir-Fit beschränkt sich jetzt auf eine der beiden Seiten.

Im Verlauf der Spurverfolgung durchläuft die aktuelle Spur durch Hin- und Zurück weitere Punkte die angegebenen Typen. So entsteht aus einem Startpunkt durch Punktaufnahme ein Bipunkt, usw.:

- Startpunkt → Bipunkt,
- Bipunkt → Doppelspur,
- Doppelspur → Doppelspur, oder
- Doppelspur → Spurkandidat,
- Spurkandidat → Spurkandidat.

Die unterschiedlichen Regeln bei der Hinzunahme weiterer Punkte zu diesen vier Objekten, die sich bei der Startsuche (Startpunkt, Bipunkt) und bei der eigentlichen Spurverfolgung (Doppelspur, Spurkandidat) ergeben, sollen im folgenden näher beschrieben werden.

8.3 Die Suche nach Startkombinationen

Ist erst einmal ein Spurkandidat gefunden, so kann das Zeitverhalten für die Suche nach einem kompatiblen Punkt mit $O(n) = n$ angegeben werden, wenn n die Anzahl der Punkte in der aktuellen Driftzelle ist: Es müssen n Punkte mit der propagierten Spur verglichen werden.

Bei der Suche nach einer Startkombination - es werden drei Punkte für die Festlegung der Kreisbahn benötigt - ergibt sich jedoch ein völlig anderes Zeitverhalten. Im Prinzip müssen alle Kombinationen der in Frage kommenden Punkte geprüft werden, da die Parameter der erzeugenden Teilchen noch völlig unbekannt sind. Befinden sich in jeder der drei Driftzellen, in denen die Startkombination gesucht werden soll, n Punkte, ergibt sich also ein Zeitverhalten von $O(n) = n^3$.

Als Beispiel diene eine einzelne Spur, die in der Nähe der Signaldrahtebene verläuft. Aufgrund der Links-Rechts-Ambiguität ergeben sich zwei Punkte pro Driftzelle (Abb. 8.1). Damit müssen aber nun $2^3 = 8$ verschiedene Startkombinationen geprüft werden.

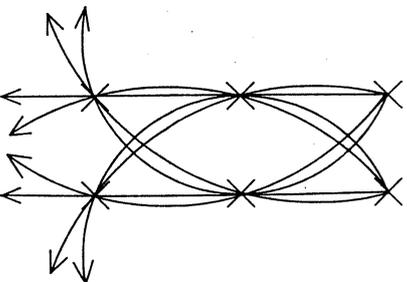


Abb. 8.1: Die große Zahl möglicher Startkombinationen

In der Tat bestimmt hauptsächlich die Methode der Startsuche, die sich als ein kombinatorisches Problem darstellt, das Zeitverhalten des gesamten Spurenerkennungs-Algorithmus. Dabei hat die Qualität der eigentlichen Spurverfolgung insofern noch einen Einfluß, als daß umso öfter nach einer neuen Startkombination gesucht werden muß, je öfter bei der Spurverfolgung die korrekte Bahn verloren wird.

Man kann nun versuchen, die Anzahl der zu untersuchenden Startkombinationen durch die Einführung bestimmter Restriktionen zu verringern. So ist z.B. die Beschränkung der Spursuche auf Bahnen unterhalb einer gewissen Krümmung möglich. Ein solches Vorgehen wäre insofern legitim, da in erster Linie die höherenergetischen Primärteilchen für die physikalische Interpretation interessant sind. Eine Vernachlässigung niederenergetischer Sekundärteilchen (γ -Konversionen, δ -Elektronen, "zurückgestreute" Teilchen) würde keine große

Einschränkung für die Bewertung des Ereignisses bedeuten.

Ein solches Verfahren zieht jedoch zwei gegenteilige Effekte nach sich: Einerseits wird die Zahl der zu untersuchenden Kombinationen pro Startpunkt eingeschränkt (Zeitgewinn). Andererseits verkleinert sich die Grundmenge der noch freien Meßpunkte nicht in dem Maße, wie dies bei einer Verfolgung auch der niederenergetischen Teilchen der Fall wäre (Zeitverlust).

Ausführliche Tests ergaben, daß eine Beschränkung auf bestimmte Impuls- oder Winkelbereiche bei der Startsuche in der Tat weder die Effizienz noch das Zeitverhalten des Spurenerkennungs-Programms positiv beeinflussen. Bei der Implementierung des Verfahrens wurden deshalb nur solche Beschränkungen der Startkombinationen zugelassen, soweit diese sich aus den räumlichen Grenzen des sensitiven Detektorvolumens ergaben.

Grundsätzlich hat jedoch die Reihenfolge der Untersuchung der verschiedenen, möglichen Startkombinationen einen großen Einfluß auf das Zeitverhalten des Algorithmus. Dies sei an dem bereits benutzten, einfachen Beispiel von zwei Punkten pro Driftzelle (Abb. 8.1) erläutert: Insgesamt sind 8 Startkombinationen zu überprüfen, von denen aber aufgrund der Links-Rechts-Ambiguität nur eine zur Verfolgung der korrekten Teilchenbahn führt. Wird diese "richtige" Startkombination (zufällig) als erste gewählt, erübrigt sich die Betrachtung der restlichen 7 Kombinationen, da die Spur in der Regel als richtig erkannt und aus der Grundmenge der noch freien Meßpunkte entfernt wird.

Es stellt sich die Frage, ob die zu berücksichtigenden Startkombinationen so geordnet werden können, daß sich möglichst frühzeitig die Verfolgung einer "korrekten" Spur ergibt. Wie Tests ergaben, ist eine solche Ordnung stark abhängig von der Beschaffenheit der Eingabedaten. Ausgehend von einer vereinfachten Ereignissimulation, die nur die Messungen der primär erzeugten Teilchen (hochenenergetische Teilchen, schwache Bahnkrümmungen) beinhaltet, ergab sich die kürzeste Laufzeit des Programms, wenn die Startkombinationen mit kleiner Krümmung favorisiert wurden.

Überraschenderweise war dies bei voll simulierten Ereignissen (Zerfälle, sekundäre Wechselwirkungen) nicht mehr der Fall. Die meiste Zeit wird hier für die Startsuche in Gebieten großer Punktdichten benötigt. Solche großen Punktdichten werden jedoch in der Regel durch niederenergetische, spiralisierte Elektronen aus Sekundärprozessen verursacht. Tatsächlich besaß das

Spurerkennungs-Programm bei der bevorzugten Behandlung der Startkombinationen mit starker Krümmung im Mittel die kürzeste Laufzeit.

8.4 Die Spurverfolgung

Die globale Vorgehensweise bei der Suche und Addition von kompatiblen Punkten zur Spur (Propagation, Hinzunahme zum Fit) ist im vorhergehenden bereits hinreichend beschrieben. Es fehlt aber noch die Definition eines "kompatiblen Punktes". Wie ist die Straße beschaffen, innerhalb der ein Punkt zur Spur hinzugenommen wird?

Auch für die Definition der Straßenbreite kann wieder die Billoir-Fit-Methode verwendet werden: Neben dem Parameter Y_{prop} für die propagierte Spur liefert der Fit auch die Varianz $\sigma_{Y_{prop}}^2$ dieses Wertes ((1, 1)-Element der Kovarianzmatrix). Unter der Annahme, daß der zu untersuchende Meßpunkt zur aktuellen Spur gehört, erhält man für die Varianz der Abweichung des Meßpunktes von der Propagation ($Y_{meas} - Y_{prop}$):

$$\sigma_{Y_{meas} - Y_{prop}}^2 = \sigma_{Y_{meas}}^2 + \sigma_{Y_{prop}}^2,$$

wobei $\sigma_{Y_{meas}}^2$ die Varianz des Messung Y_{meas} ist.

Ein Vielfaches des so erhaltenen $\sigma_{Y_{meas} - Y_{prop}}$ kann nun als Straßenbreite benutzt werden. Dabei ergab sich die höchste Effizienz der Spurerkennung bei einer Straßenbreite von $\pm 3,4\sigma$. Ein Punkt mit der y -Koordinate Y_{meas} wird also genau dann als kompatibel bezeichnet und zur Spur hinzugefügt, wenn gilt:

$$(Y_{meas} - Y_{prop})^2 \leq (3,4)^2 \sigma_{Y_{meas} - Y_{prop}}^2.$$

Da die benutzte Straßenbreite dabei von den errechneten Fehlern der aktuellen Spurschätzung abhängt, wird dadurch direkt die Zahl der bereits im Fit enthaltenen Punkte berücksichtigt. Zu Beginn sind die Unsicherheiten in den Parametern groß, werden aber im Verlauf des Fits kleiner. Entsprechend verhält sich jetzt auch die Straßenbreite. Zu Beginn der Spurverfolgung werden größere Abweichungen der Meßpunkte von der Propagation zugelassen. Durch Aufnahme weiterer Punkte zur Spur ergeben sich dann aber immer besser bekannte Bahnparameter. Die Vorhersage wird genauer, die Straßenbreite kleiner.

Als Beispiel diene Abb. 4.7, die u.a. den Fehler des Parameters Y der propagierten Spur für ein μ^+ mit $p_T = 10 \text{ GeV}/c$ zeigt.

Weiterhin hängen die Fehler der Parameter auch von dem (geschätzten) Impuls des Teilchens ab. Bei kleinem Impuls ist der Einfluß der Vielfachstreuung und damit die Breite der benutzten Straße größer als bei hohen Impulsen.

Bei den Spurkandidaten, für die die Links-Rechts-Auflösung durchgeführt ist, genügt es nun, den Billoir-Fit für die als richtig erkannte Links-Rechts-Lösung mitzuführen. Die Entscheidung, ob ein Punkt kompatibel zum aktuellen Spurkandidaten ist, ist also immer eindeutig möglich.

Dies ist zunächst einmal für die "Doppelspuren" (Billoir-Fit für beide möglichen Lösungen) nicht gegeben. Hier kann das Problem auftreten, daß ein Punkt zwar zu einer der beiden Spuren, sein Spiegelbild aber nicht zur Spiegelspur kompatibel ist. Würde der Punkt nun zur passenden Spur hinzugefügt, die Spiegelspur aber unverändert gelassen, ginge die Identität der beiden Spuren - Lösung 1 ist die Spiegelspur von Lösung 2 - und damit die Möglichkeit der Links-Rechts-Auflösung verloren.

Häufiger tritt jedoch noch ein anderes Problem auf: Zu beiden Spurlösungen wird jeweils ein kompatibler Punkt gefunden, von denen der eine aber nicht der Spiegelpunkt des anderen ist. Es stellt sich nun die Frage, welcher der beiden Punkte zur Doppelspur hinzugefügt werden soll. Die Berücksichtigung beider Punkte ist nicht möglich, da wieder die Identität der beiden Lösungen verloren ginge.

Im folgenden sollen nun drei Möglichkeiten zur Lösung dieser Probleme diskutiert werden:

a) Beide Seiten der Doppelspur sind gleichberechtigt. Es wird immer der Punkt ausgewählt, der die kleinsten Abweichungen von einer der beiden Spurschätzungen besitzt, egal um welche der beiden Schätzungen es sich dabei handelt.

Die Spurschätzung, die durch die (wahren) Spiegelpunkte gegeben ist, stellt aber eine erhebliche Falschschätzung der wirklichen Teilchenbahn dar. In Gebieten hoher Punktdichte ist damit auch die Wahrscheinlichkeit sehr groß, daß ein spurfremder Punkt als der zur Spiegelspur kompatibelste Punkt ausgewählt wird. Diese Methode begünstigt also das Aufsammeln falscher Punkte, weshalb sie für das hier vorgestellte Spurerkennungspro-

gramm nicht in Betracht kommt.

b) Eine der beiden Seiten ist favorisiert. Ist durch die im vorigen Kapitel beschriebene Methode die Links-Rechts-Auflösung bei einer Doppelspur noch nicht eindeutig möglich, so kann doch immerhin die Seite angegeben werden, die bisher die geringsten Abweichungen von den Meßpunkten aufweist und damit wahrscheinlich die Originalspur darstellt. Man bezieht sich nun bei der Suche nach einem weiteren kompatiblen Punkt immer auf die so favorisierte Spur. Im Verlauf der Spurverfolgung kann die Favorisierung der einen Spurschätzung auf die andere wechseln.

c) Von vornherein ist eine der beiden Seiten fest favorisiert. Die Entscheidung, ob ein Punkt bzw. welcher Punkt aufgenommen wird, ergibt sich immer nur unter Berücksichtigung der ersten Spurschätzung, und zwar unabhängig davon, welche der beiden Spuren die kleineren Abweichungen zu den Meßpunkten aufweist.

Diese Vorgehensweise entspricht im Prinzip der Verfolgung einer Spur. Der Billoir-Fit der Spiegelpunkte wird nur zur Kontrolle und späteren Links-Rechts-Auflösung mitgeführt. Die Links-Rechts-Entscheidung, die sich nach einer gewissen Zahl aufgenommenener Punkte ergibt, wird jetzt nicht mehr als Entscheidung darüber interpretiert, welche der beiden möglichen Seiten die korrekte ist. Vielmehr liefert sie die Aussage, ob die bisher gefundene Spur richtig (das Original) oder falsch (die Spiegelspur) ist.

Erweist sich eine Doppelspur als "falsch", wird sie verworfen, und eine neue Startsuche und Spurverfolgung vorgenommen. Das Verwerfen beider Lösungen ist notwendig, da nicht sichergestellt ist, daß die Punkte der zweiten Lösung tatsächlich zu einer Spur gehören: Bei der Punktaufnahme wurde ja nur die erste Lösung berücksichtigt. In Gebieten geringer Punktdichten wird dann bei der erneuten Spursuche in der Regel das Spiegelbild der alten, verworfenen Spur gefunden.

Zunächst einmal bedeutet die unter c) angegebene Methode einen Mehraufwand bei der Spurverfolgung, da die Information des mitgeführten Spiegelfits verloren geht, wenn die Doppelspur verworfen wird. Trotzdem wurde dieses Verfahren für diese Spurerkennung gewählt.

Prinzipiell gelten nämlich die Gründe, die bereits zur Ablehnung der Methode a) führten, auch für Methode b): Bei hoher Punktdichte läßt es sich nicht

verhindern, daß auch falsche Punkte aufgesammelt werden. Diese spurfernden Punkte verfälschen die vom Billoir-Fit gelieferten und für die Links-Rechts-Auflösung benötigten Größen. Die Kriterien für eine korrekte Links-Rechts-Entscheidung sind dann nicht mehr ohne weiteres anwendbar.

Unter Verwendung der Methode c) ergeben sich damit nun zwei Kriterien für den Abbruch der Spurverfolgung:

a) Es existiert kein weiterer kompatibler Punkt zur Doppelspur oder zum Spurkandidaten.

Es muß nun entschieden werden, ob die gefundene Punktmenge eine "wahre Spur" darstellt. Als Kriterium werden dazu für die Übernahme eines Spurkandidaten in die Ausgabeliste des Programms - und der damit verbundenen Verkleinerung der Menge der noch freien Meßpunkte - mindestens 7 gefundene Punkte verlangt. Eine Doppelspur wird nur dann übernommen, wenn weiterhin die angegebenen Links-Rechts-Kriterien auf die Verfolgung der Originalseite hinweisen. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, wird die aktuelle Spur verworfen.

b) Wird die Links-Rechts-Auflösung einer Doppelspur durch die Aufnahme eines weiteren Punktes möglich, und erweist sich dabei die verfolgte Seite als "falsch", wird der Übergang von der Doppelspur zum Spurkandidaten nicht vollzogen, sondern die Spurverfolgung gestoppt, die Doppelspur verworfen.

9. Die Effizienz der implementierten Spurerkennung

9.1 Der Effizienz-Begriff

Zur Zeit sind vier verschiedene Spurerkennungs-Verfahren für die OPAL-Jetkammer im Test (s. Kapitel 2) und es stellt sich die Frage, wie diese Verfahren miteinander verglichen werden können. Was sind die Kriterien für die Qualität eines Spurerkennungs-Programms?

Die Brauchbarkeit einer Spurerkennung für die spätere Datenanalyse wird hauptsächlich durch zwei Faktoren bestimmt:

- a) **Die Effizienz des Verfahrens.** Wie gut beschreiben die Ausgabedaten die wahren Teilchenbahnen? Wird die Links-Rechts Auflösung korrekt vorgenommen? Werden Knicke in den Teilchenbahnen (Zerfälle) erkannt? Diese Kriterien, die sich nur auf die Ausgabedaten eines Algorithmus beziehen, beschreiben allgemein die Einsetzbarkeit einer Spurerkennung sowohl für die Online-, als auch für die Offline-Analyse.
- b) **Das Zeitverhalten.** Wieviel Zeit wird für die Rekonstruktion eines Ereignisses benötigt? Wie verhält sich die Laufzeit des Programms in Abhängigkeit von der Anzahl der Eingabedaten? Dies sind die entscheidenden Fragen für die Einsetzbarkeit eines Spurerkennungs-Programms bereits während der laufenden Datennahme (Online-Analyse).

Im Gegensatz zum Zeitverhalten (Laufzeit des Programms) läßt sich die Effizienz nur schwer in einer einzigen Zahl fassen. Es ist jedoch bei der Untersuchung von Spurerkennungs-Programmen hilfreich, die Effizienz des Algorithmus mit einer einzigen Maßzahl E anzugeben. Zur korrekten und umfassenderen Beurteilung ist es dann aber immer notwendig, über diese Effizienzmaßzahl E hinaus weitere Eigenschaften des Algorithmus zu betrachten¹⁾.

¹⁾ Es sei darauf hingewiesen, daß die in der Literatur angegebenen Effizienzzahlen der Spurerkennungsverfahren für die verschiedenen Detektoren, nicht direkt miteinander verglichen werden dürfen, da in der Regel die Definitionen unterschiedlich sind.

Als Definition der Effizienz E für die Spurerkennung in der OPAL-Jetkammer wird die Prozentzahl der gefundenen Spursegmente benutzt [KRE86a]:

$$E = \frac{\text{Anzahl gefundener Spursegmente}}{\text{Anzahl Spursegmente}}$$

Ein Spursegment ist dabei der Teil einer Spur in einem Sektor mit mindestens 16 Punkten (10% der maximal möglichen Punktzahl) und einem Transversalimpuls $p_T > 200 \text{ MeV}/c$.

Ein solches Spursegment heißt gefunden, wenn wenigstens ein rekonstruiertes Segment mit mindestens 16 Punkten existiert, von dem 90% der Punkte zu dem Original-Spursegment gehören. Weiterhin muß die Links-Rechts-Ambiguität korrekt aufgelöst sein.

Um die Messung der so definierten Effizienz und gleichzeitig eine umfassendere Beurteilung der einzelnen Algorithmen zu ermöglichen, wurde ein entsprechendes Analyse-Programm entwickelt und implementiert [KRI87]. Dieses benutzt die Ausgabedaten des jeweiligen Spurerkennungs-Programms und zur Kontrolle die Daten der Simulation (z.B. Impuls des Originalteilchens). Es liefert neben Laufzeitmessungen und der Effizienz E eine Reihe von Statistiken in Form von Tabellen und Histogrammen - z.B. über die Prozentzahl falscher Punkte in den rekonstruierten Spursegmenten.

Einige der damit erhaltenen Ergebnisse für die Spurerkennung mit der Billoir-Fit-Methode sollen im folgenden vorgestellt werden.

9.2 Ergebnisse

Als Testdaten wird ein Standardsatz von 100 LUND-Ereignissen bei voller Detektorsimulation benutzt. Abb. 9.1 bis 9.4 zeigen zwei dieser Ereignisse. Dargestellt sind einerseits die Punkte der Originalspuren in der xy -Projektion (mit Sektor Grenzen und Anodenebenen), andererseits die rekonstruierten Spursegmente.

Die hohe Genauigkeit der Spurverfolgung zeigt sich anhand der *Abb. 9.5a*: In dieses Schaubild sind die rekonstruierten Spursegmente mit korrekter Links-Rechts-Auflösung in Abhängigkeit von der Prozentzahl spurfremder Punkte und der Gesamtpunktzahl eingetragen. Unbedingt zu beachten ist dabei, daß nur Segmente mit mindestens 1% falscher Punkte dargestellt sind - bei den 100 untersuchten LUND-Ereignissen wurden insgesamt 6170 Segmente rekonstruiert.

Wie man aus *Abb. 9.5a* entnimmt, werden bei den rekonstruierten Spursegmenten mit großen Punktzahlen nur wenige Prozent falscher Punkte aufgenommen. Vereinzelt treten allerdings Segmente auf, die trotz ihrer großen Punktzahl viele spurfremde Punkte (bis zu 50%) besitzen. Diese sind auf nicht erkannte Zerfälle bzw. Spurkrenzungen zurückzuführen.

Die nur wenige Punkte enthaltenden Segmente, von denen viele Punkte falsch zugeordnet wurden, sind sogenannte "Geister": Es werden dabei Punkte zu Spuren zusammengefaßt, die zu mehreren verschiedenen Teilchenbahnen gehören. Dies tritt hauptsächlich in Gebieten großer Punktdichte auf, wo eine korrekte Spurverfolgung - u.a. wegen der Auslöschung von Spurpunkten aufgrund der endlichen Doppelspuraufösung - nicht möglich ist.

Die ausgezeichnete Links-Rechts-Auflösung der implementierten Spurerkennung zeigt *Abb. 9.5b*: In dieses Schaubild sind die falsch links-rechts aufgelösten Spursegmente eingetragen. Es finden sich nur Einträge bei geringer Gesamtpunktzahl und einem hohen Prozentsatz falscher Punkte.

Abb. 9.6b zeigt, inwieweit die Originalspuren bei der Spurerkennung in einzelne Segmente geteilt werden (Fragmentierung). Die in der Abbildung dargestellten Objekte sind diesmal die Original-Spursegmente. In y -Richtung ist deren Punktzahl und in x -Richtung die Punktzahl des längsten, zugehörigen rekonstruierten Segments aufgetragen.

Man erkennt eine Häufung der Einträge um die Winkelhalbierende, was der vollständigen Rekonstruktion der einzelnen Spursegmente entspricht. Die links der Winkelhalbierenden liegenden Spursegmente wurden nicht als ein einziges Segment gefunden, sondern in mehrere aufgeteilt.

Trägt man nun nicht die Punktzahl eines rekonstruierten Segments, sondern die Summe aller gefundenen Punkte auf (*Abb. 9.6a*), verschieben sich diese Einträge bis auf wenige Ausnahmen zur Winkelhalbierenden hin.

Entsprechend der vorgestellten Definition wurde für die 100 untersuchten Ereignisse im Mittel eine Effizienz von 97,7% ermittelt.

Die für die Spurerkennung eines Ereignisses benötigte Zeit betrug im Mittel 16,3 sec auf einer IBM 3081-D (\cong 49 sec auf einer IBM 370/168), die Zeit pro Spursegment 0,11 sec.

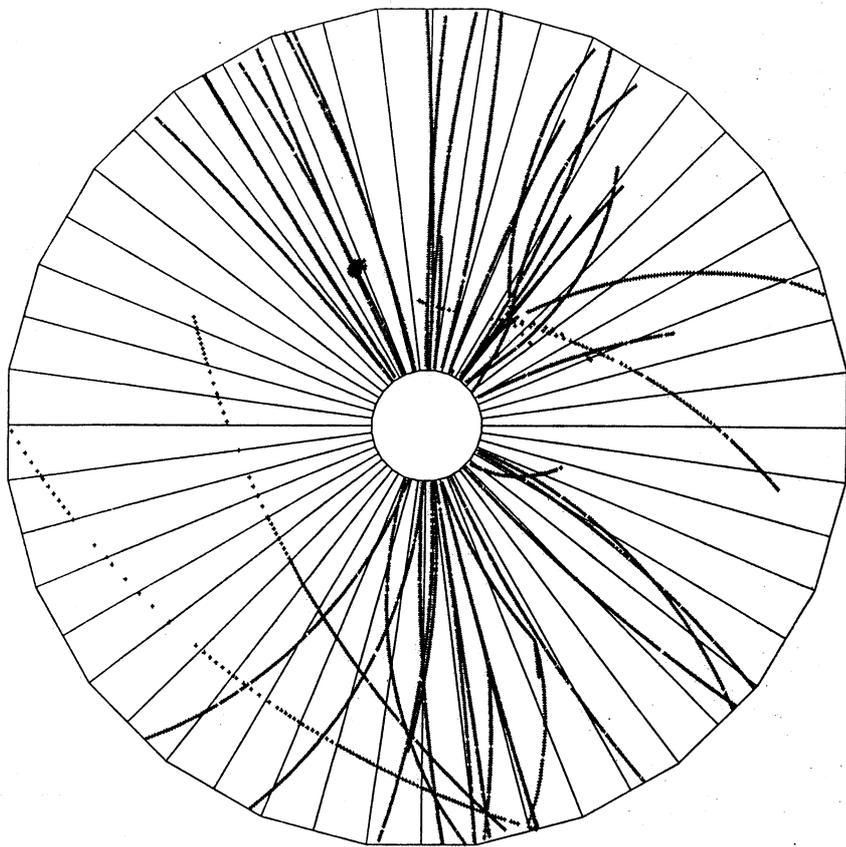


Abb. 9.1: Originalspuren

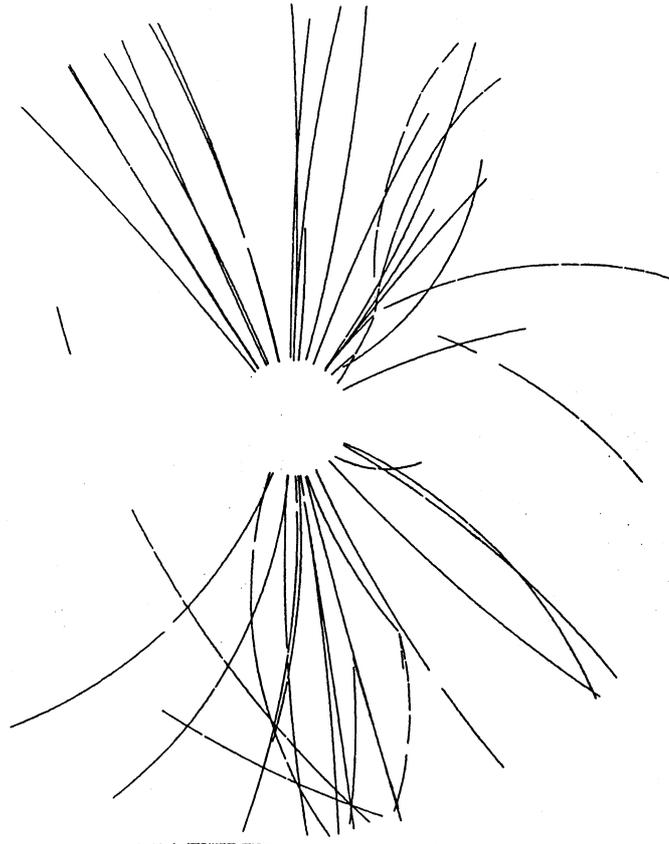


Abb. 9.2: Rekonstruierte Spursegmente

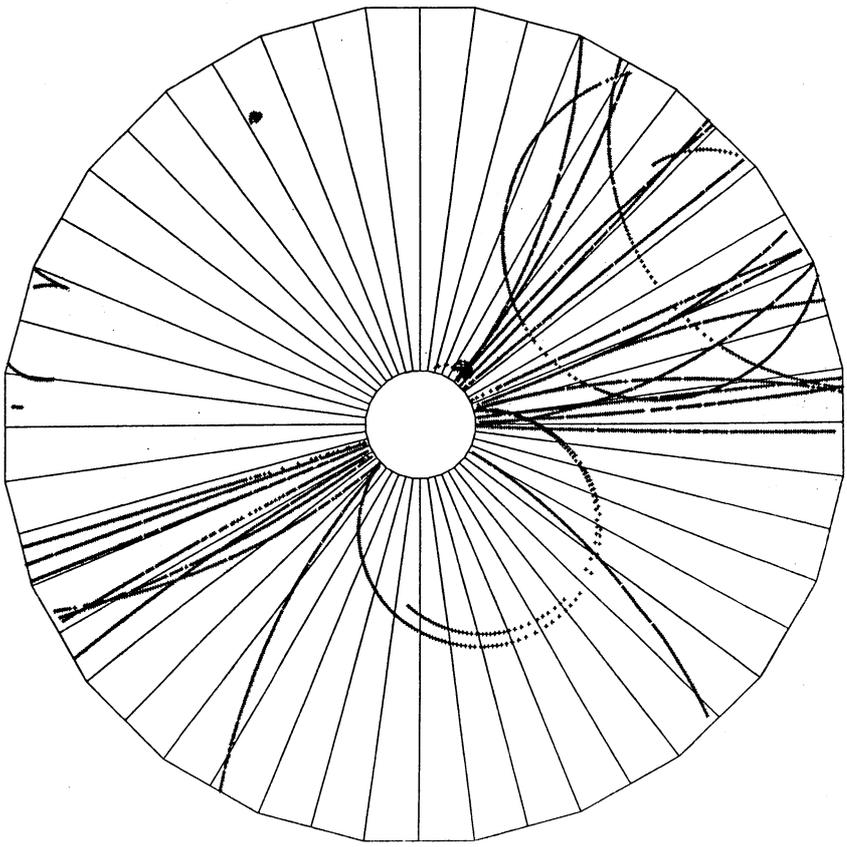


Abb. 9.3: Originalspuren



Abb. 9.4: Rekonstruierte Spursegmente

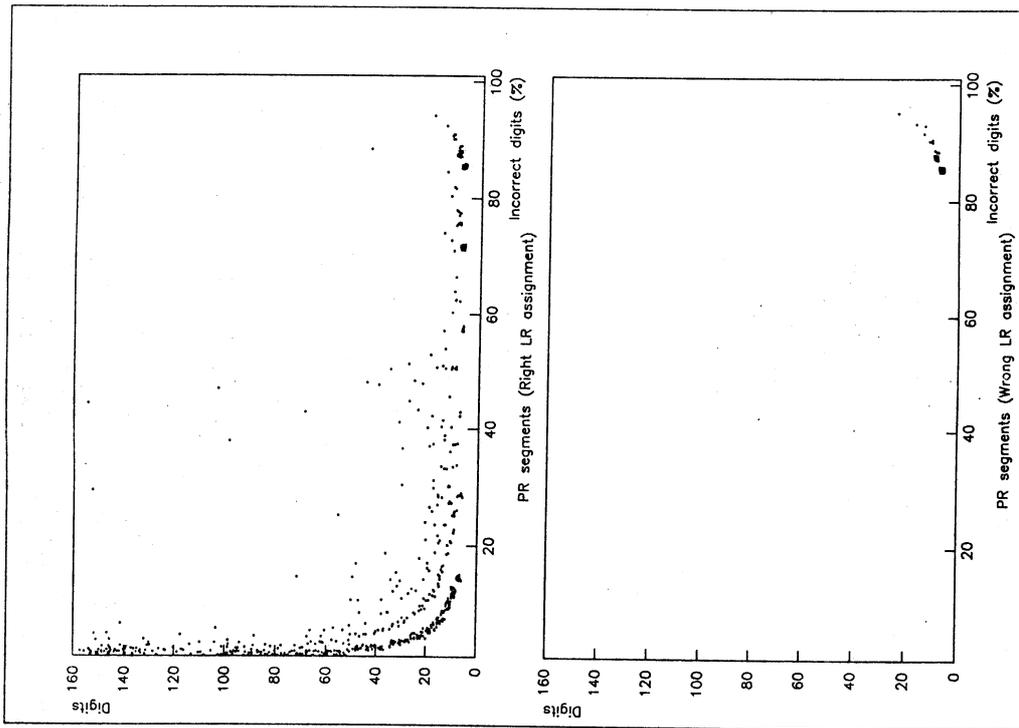


Abb. 9.5a und b: Prozentzahl spurfreier Punkte in Abhängigkeit von der Gesamtanzahl der rekonstruierten Spursegmente

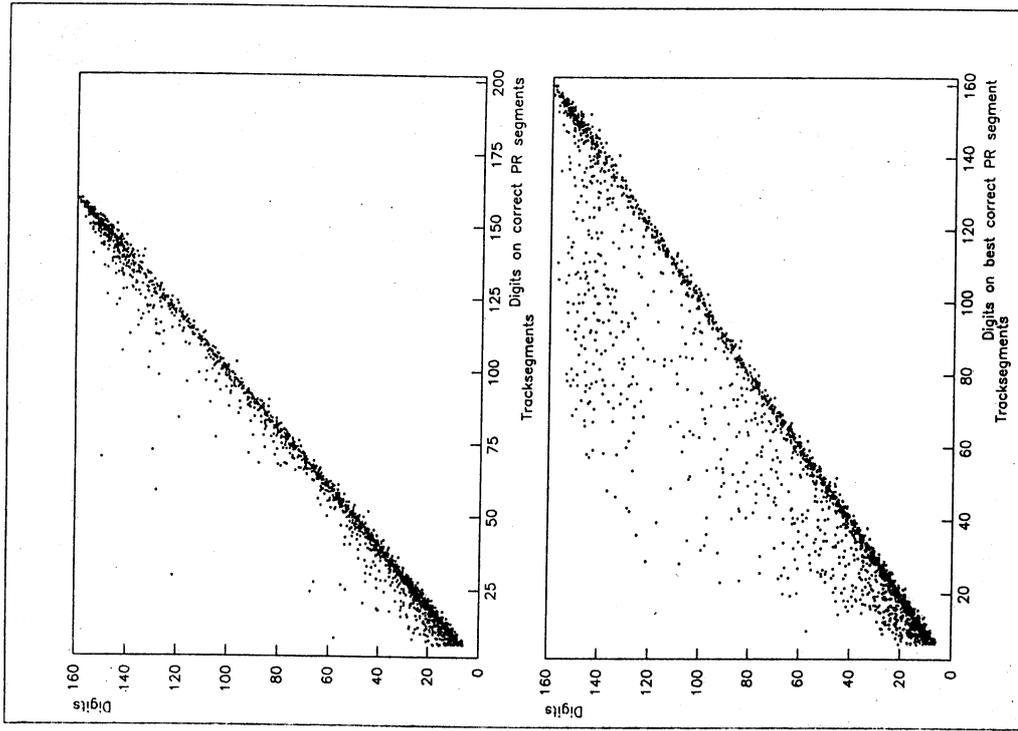


Abb. 9.6a und b: Fragmentierung der Spursegmente

10. Zusammenfassung

Die Billoir-Fit-Methode ist ein neues Spurraupassungs-Verfahren, das - aufgrund der rekursiven Vorgehensweise - sukzessive Punktvorhersagen für die diskreten Meßstellen eines Detektors liefert. Trotz der korrekten Berücksichtigung der Vielfachstreuung (optimaler Fit) weist es ein lineares Zeitverhalten bzgl. der Zahl der gegebenen Meßpunkte auf.

In der vorliegenden Arbeit sollte überprüft werden, inwieweit die Billoir-Fit-Methode - unter Verwendung dieser Punktvorhersagen - für eine Spurerkennung in der OPAL-Jetkammer eingesetzt werden kann. Die Motivation dafür war die hohe Genauigkeit, die durch einen solchen Fit erreicht wird, und sich in der Effizienz der Spurerkennung widerspiegeln sollte.

Wie gezeigt wurde, war die in der Literatur vorgestellte Parabelapproximation für die speziellen Belange einer Spurerkennung in der OPAL-Jetkammer nicht ausreichend. Das ursprüngliche Verfahren wurde daher zu einem Kreisfit modifiziert. Die sich dabei ergebenden numerischen Instabilitäten konnten durch die Verwendung einer speziellen Spurextrapolation umgangen werden.

Neben der hohen Genauigkeit bei der Punktvorhersage lieferte dieser Kreisfit auch die Möglichkeit einer frühzeitigen Links-Rechts-Auflösung während der Spurverfolgung. Weiterhin konnte er zur Korrektur von systematischen Fehlern - verursacht durch die sich in der Jetkammer ergebenden Spurwinkel Effekte - eingesetzt werden.

Implementiert und getestet wurde ein serialer Spurverfolgungs-Algorithmus. Die Effizienz dieses Programms ergab sich zu 97,7%. Ein Vergleich mit anderen, ebenfalls im Test befindlichen Spurerkennungsprogrammen für die OPAL-Jetkammer-Daten ist in Vorbereitung, Ergebnisse liegen aber zur Zeit noch nicht vor.

Anhang: Zusammenstellung der benutzten Formeln zum Billoir-Fit

Im folgenden werden die Formeln für den in Kapitel 4 beschriebenen Kreisfit hergeleitet und in übersichtlicher Form dargestellt. Dabei soll auf die prinzipiellen Überlegungen, die z.B. zur Wahl der speziellen Parametrisierung führten, nicht mehr eingegangen werden. Der Anhang stellt damit eine Erweiterung der Kapitel 3 und 4 dar.

Propagation:

Die Gleichungen für die Transformation F der Parameter $P_p = \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$ in

die natürlichen Kreisparameter $P_k = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix}$ sind gegeben durch die Gleichheit

der Ableitungen

$$k(0) = p(0),$$

$$k'(0) = p'(0),$$

$$k''(0) = p''(0),$$

wobei

$$p(x) = Y + Ax + \frac{C}{2}x^2$$

die Parabelgleichung, und

$$k(x) = \pm \sqrt{R^2 - (x - X_0)^2} + Y_0$$

die Kreisgleichung ist. Dabei sind (X_0, Y_0) die Koordinaten des Mittelpunktes und R der Radius des Kreises.

Durch Ableiten und Einsetzen erhält man für die Transformation F :

$$F: \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix} :$$

$$X_0 = \frac{A(1+A^2)}{C}, \quad (A.1a)$$

$$Y_0 = \frac{1+A^2}{C} + Y, \quad (\text{A.1b})$$

$$R^2 = \frac{(1+A^2)^2}{C^2}, \quad (\text{A.1c})$$

und für die Umkehrtransformation F^{-1} :

$$F^{-1}: \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix} :$$

$$Y = \pm \sqrt{R^2 - X_0^2} + Y_0, \quad (\text{A.2a})$$

$$A = \pm \frac{X_0}{\sqrt{R^2 - X_0^2}}, \quad (\text{A.2b})$$

$$C = \mp \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - X_0^2}}. \quad (\text{A.2c})$$

Die Propagation entspricht einer Verschiebung des Kreises um $\delta x = x_{i+1} - x_i$. Die Berechnung der neuen Parabelparameter erfolgt dabei in drei Schritten:

a) Übergang zu den Kreisparametern P_k durch Anwendung der Transformation F .

b) Verschiebung des Kreises: Die Translation D ist im Falle der Kreisparameter X_0, Y_0, R^2 sehr einfach gegeben durch:

$$D: \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ R^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \\ R'^2 \end{pmatrix} :$$

$$X'_0 = X_0 + \delta x, \quad (\text{A.3a})$$

$$Y'_0 = Y_0, \quad (\text{A.3b})$$

$$R'^2 = R^2. \quad (\text{A.3c})$$

c) Rückkehr zu den Parabelparametern P_p durch Anwendung der Umkehrtransformation F^{-1} .

Diese drei Einzelschritte sollen nun zusammengefaßt werden.

Unter korrekter Berücksichtigung des Vorzeichens erhält man aus den Transformationsgleichungen (A.1c) und (A.2c) die folgende Beziehung:

$$\pm \sqrt{R^2 - X_0^2} = -\frac{1}{C} \sqrt{C^2 (R^2 - X_0^2)}. \quad (\text{A.4})$$

Führt man dann weiterhin die Hilfsgröße

$$d = C^2 (R^2 - X_0^2) \quad (\text{A.5})$$

ein, so folgt aus den Gleichungen der Umkehrtransformation F^{-1} :

$$Y' = -\frac{1}{C} \sqrt{d} + Y_0, \quad (\text{A.6a})$$

$$A' = -C \frac{1}{\sqrt{d}} X_0, \quad (\text{A.6b})$$

$$C' = C^3 \frac{1}{\sqrt{d}} R^2 \quad (\text{A.6c})$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (A.1) und (A.3a) erhält man die gesuchten Propagationsgleichungen:

$$P^k: \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y' \\ A' \\ C' \end{pmatrix} :$$

$$Y' = \frac{1}{C} (1 + A^2 - \sqrt{d}) + Y, \quad (\text{A.7a})$$

$$A' = \frac{1}{\sqrt{d}} [A(1 + A^2) - C\delta x], \quad (\text{A.7b})$$

$$C' = C \frac{1}{\sqrt{d}} (1 + A^2)^3, \quad (\text{A.7c})$$

mit

$$d = (1 + A^2)^2 + [2A(1 + A^2) - C\delta x] C\delta x. \quad (\text{A.7d})$$

Die entsprechende Kovarianzmatrix V' der neuen Parameter ist dann:

$$V' = P^k \cdot V \cdot P^{kT}, \quad (\text{A.8})$$

wobei P^* die Jacobi-Matrix der Abbildung P^* ist. Durch Berechnung der Ableitungen erhält man die Elemente dieser Matrix:

$$P^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y'}{\partial Y} & \frac{\partial Y'}{\partial A} & \frac{\partial Y'}{\partial C} \\ \frac{\partial A'}{\partial Y} & \frac{\partial A'}{\partial A} & \frac{\partial A'}{\partial C} \\ \frac{\partial C'}{\partial Y} & \frac{\partial C'}{\partial A} & \frac{\partial C'}{\partial C} \end{pmatrix} :$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial Y} = 1,$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial A} = \frac{1}{C} \left(2A - \frac{1}{\sqrt{d}} [2A(1+A^2) + (1+3A^2)C\delta x] \right),$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial C} = \frac{1}{C^2} \left(\sqrt{d} - (1+A^2) - \frac{1}{\sqrt{d}} [A(1+A^2) - C\delta x] C\delta x \right),$$

$$\frac{\partial A'}{\partial Y} = 0,$$

$$\frac{\partial A'}{\partial A} = \frac{1}{\sqrt{d}^3} (1+A^2)^2 [(1+A^2) + 3AC\delta x],$$

$$\frac{\partial A'}{\partial C} = -\frac{1}{\sqrt{d}^3} (1+A^2)^3 \delta x,$$

$$\frac{\partial C'}{\partial Y} = 0,$$

$$\frac{\partial C'}{\partial A} = -3C \frac{1}{\sqrt{d}^5} (1+A^2)^2 [(1-A^2)(1+A^2) + 2AC\delta x] C\delta x$$

$$\frac{\partial C'}{\partial C} = \frac{1}{\sqrt{d}^5} (1+A^2)^3 \{ (1+A^2)^2 + [2C\delta x - A(1+A^2)] C\delta x \}$$

Zur Entscheidung, ob die Propagation unter der Annahme einer Kreisbahn möglich oder aber eine Parabelpropagation notwendig ist (dynamische Propagation, Kapitel 4.3.6), wird die Hilfsgröße d benutzt. Liegt d unter einem bestimmten Grenzwert (hier: 10^{-5}) wird nicht die oben angegebene Kreis sondern eine Parabelpropagation durchgeführt:

$$P^P : \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y' \\ A' \\ C' \end{pmatrix} :$$

$$Y' = Y - \delta x A + \frac{\delta x^2}{2} C,$$

$$A' = A - \delta x C,$$

$$C' = C$$

Für diese Parabelpropagation erhält man die neue Kovarianzmatrix sehr einfach durch:

$$V' = P^P \cdot V \cdot P^{PT},$$

mit der entsprechenden Jacobi-Matrix

$$P^P = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y'}{\partial Y} & \frac{\partial Y'}{\partial A} & \frac{\partial Y'}{\partial C} \\ \frac{\partial A'}{\partial Y} & \frac{\partial A'}{\partial A} & \frac{\partial A'}{\partial C} \\ \frac{\partial C'}{\partial Y} & \frac{\partial C'}{\partial A} & \frac{\partial C'}{\partial C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta x & \frac{\delta x^2}{2} \\ 0 & 1 & -\delta x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berücksichtigung der Vielfachstreuung:

Die Vielfachstreuung wird durch die Addition entsprechender Korrekturterme zur Kovarianzmatrix berücksichtigt, zum ersten durch das dem Ortsversatz entsprechende Korrekturlement σ_Y^2 , weiterhin durch die der Winkeländerung entsprechende Korrektur σ_A^2 . Da die Parameter A und C voneinander abhängig sind, werden auch Nebendiagonalelemente von der Winkelkorrektur betroffen. Zur Berechnung der Korrekturterme muß daher erst zu einem Satz unabhängiger Parameter übergegangen werden. Dazu bieten sich aufgrund der einfachen Berechnung die Parameter Y, A, R an.

Prinzip:

$$\begin{pmatrix} Y' \\ A' \\ C' \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} Y' \\ A' \\ R' \end{pmatrix} \xrightarrow{A''} \begin{pmatrix} Y'' \\ A'' \\ R'' \end{pmatrix} \xrightarrow{G^{-1}} \begin{pmatrix} Y'' \\ A'' \\ C'' \end{pmatrix}$$

↑

Addition von σ_Y^2 und σ_A^2
zu den entsprechenden Elementen
der Kovarianzmatrix.

Entsprechend den Transformationsgleichungen (A.1c) und (A.2c) ergeben sich die Transformation G und ihre Umkehrtransformation G^{-1} :

$$G: \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y \\ A \\ R \end{pmatrix}; \quad (A.9)$$

$$R = \frac{1}{C}(1 + A^2)^{\frac{3}{2}},$$

und

$$G^{-1}: \begin{pmatrix} Y \\ A \\ R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix};$$

$$C = \frac{1}{R}(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (A.10)$$

Die neue Kovarianzmatrix V'' ist dann

$$V'' = G^{-1} \cdot (G \cdot V' \cdot G^T + \Sigma) \cdot G^{-1T},$$

wobei G und G^{-1} die entsprechenden Jacobi-Matrizen sind, und Σ die Korrekturmatrix ist:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält:

$$V'' = G^{-1} \cdot G \cdot V' \cdot G^T \cdot G^{-1T} + G^{-1} \cdot \Sigma \cdot G^{-1T} \\ = V' + G^{-1} \cdot \Sigma \cdot G^{-1T}, \quad (A.11)$$

da G^{-1} die Umkehrabbildung von G ist.

Durch Berechnung der Ableitungen von Gleichung (A.10) ergibt sich die Jacobi-Matrix G^{-1} :

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & G^{-1}_{32} & G^{-1}_{33} \end{pmatrix},$$

mit

$$G^{-1}_{32} = \frac{3}{R}(1 + A^2)^{\frac{1}{2}} A, \\ G^{-1}_{33} = -\frac{1}{R^2}(1 + A^2)^{\frac{3}{2}},$$

bzw. unter Benutzung der Gleichung (A.9):

$$G^{-1}_{32} = 3C \frac{A}{1 + A^2}.$$

Einsetzen von G^{-1} in Gleichung (A.11) liefert schließlich die Korrektur der Kovarianzmatrix V'' :

$$V'' = V' + \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 & G^{-1}_{32}\sigma_A^2 \\ 0 & G^{-1}_{32}\sigma_A^2 & G^{-12}\sigma_A^2 \end{pmatrix} \\ = V' + \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 & 3C \frac{A}{1+A^2} \sigma_A^2 \\ 0 & 3C \frac{A}{1+A^2} \sigma_A^2 & 9C^2 \frac{A^2}{(1+A^2)^2} \sigma_A^2 \end{pmatrix},$$

oder unter Benutzung der Beziehungen

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{3}(1 + A^2)L^2\sigma_\alpha^2,$$

$$\sigma_A^2 = (1 + A^2)^2 \sigma_\alpha^2;$$

$$V'' = V' + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1 + A^2)L^2\sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + A^2)^2\sigma_\alpha^2 & 3AC(1 + A^2)\sigma_\alpha^2 \\ 0 & 3AC(1 + A^2)\sigma_\alpha^2 & 9A^2C^2\sigma_\alpha^2 \end{pmatrix},$$

wobei σ_α^2 die Varianz des Streuwinkels ist.

Hinzunahme des aktuellen Meßpunktes zum Fit:

Gegeben ist die bisher beste Bahnscätzung (P''_i, V''_i) - resultierend aus den Messungen $i + 1, \dots, N$ - und der aktuelle Meßpunkt (y_i, σ_{y_i}), der in diesem

Zusammenhang ebenfalls eine Spurschätzung darstellt. Entsprechend ergibt sich das gesamte χ^2 bzgl. der Messungen i, \dots, N als eine Summe der einzelnen χ_i^2 :

$$\chi^2 = \chi_{i+1}^2 + \chi_i^2,$$

wobei χ_{i+1}^2 dem Beitrag der Messungen $i + 1, \dots, N$ und χ_i^2 dem Beitrag der aktuellen Messung i entspricht.

Schreibt man χ_{i+1}^2 als eine Funktion der gesuchten, neuen Parameter P_i , so erhält man:

$$\chi_{i+1}^2 = \chi_{min}^2(P_i'') + (P_i - P_i'')^T \cdot V_i''^{-1} \cdot (P_i - P_i'').$$

Dabei entspricht das χ_{min}^2 den Abweichungen der Messungen $i + 1, \dots, N$ von der alten Spurschätzung P_i'' , ist also nicht von den gesuchten Parametern P_i abhängig.

Entsprechend erhält man für χ_i^2 sehr einfach (aufgrund der lokalen Parametrisierung):

$$\chi_i^2 = \left(\frac{Y_i'' - y_i}{\sigma_{y_i}} \right)^2.$$

Die Minimierung von $\chi^2 = \chi_{i+1}^2 + \chi_i^2$ führt dann zu dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} V_i''^{-1} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Y_i - Y_i'' \\ A_i - A_i'' \\ C_i - C_i'' \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_i - Y_i''}{\sigma_{y_i}^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems ergeben sich die neuen Parameter $P_i = \begin{pmatrix} Y \\ A \\ C \end{pmatrix}$ und deren Kovarianzmatrix als

$$V_i = \begin{pmatrix} V_i''^{-1} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ V_i''^{-1} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Verzeichnis der Abbildungen

- 2.1 Der OPAL-Detektor
- 2.2 Aufbau einer Jetkammer
- 2.3 Aufbau eines Sektors der OPAL-Jetkammer
- 2.4 Nicht aufgelöste Doppelpulse
- 3.1 Meßpunkte im Detektor
- 3.2 Die Parabelpropagation
- 3.3 Einfluß der Vielfachstreuung auf die Teilchenbahn
- 4.1 Das Detektor-Referenz-System
- 4.2 Das Lorentz-gedrehte System
- 4.3 Die Abweichungen des Parabelfits von den Meßpunkten
- 4.4 Die Kreispropagation
- 4.5 Die Abweichungen des Kreisfits von den Meßpunkten
- 4.6 Die Fehler der Parameter $\sigma_Y, \sigma_A, \sigma_C$ (Kovarianzmatrix-Berechnung in mehreren Schritten)
- 4.7 Die Fehler der Parameter $\sigma_Y, \sigma_A, \sigma_C$ (Kovarianzmatrix-Berechnung in einem Schritt)
- 4.8 Berechnung der Startparameter
- 4.9 Sonderfall bei der Berechnung der Startparameter
- 4.10 Die Abweichungen des Kreisfits von den Meßpunkten (mit Meßfehlern und Vielfachstreuung)
- 4.11 Häufigkeitsverteilung der Größe $z = \frac{Y_{true} - Y_{reco}}{\sigma(Y_{reco})}$
- 5.1 Das Verhältnis $\sigma_{\alpha_T} / \sigma_{\alpha} (= \Delta\alpha_T / \Delta\alpha)$ für ein Elektron
- 5.2 Das Verhältnis $\sigma_{\alpha_T} / \sigma_{\alpha} (= \Delta\alpha_T / \Delta\alpha)$ für ein Pion
- 5.3 Mittlere Abweichung der Meßpunkte vom Fit (Pionenmasse als Standard, alle Teilchen)
- 5.4 Mittlere Abweichung der Meßpunkte vom Fit (Pionenmasse als Standard, Teilchen mit kleinem Impuls)
- 5.5 Mittlere Abweichung der Meßpunkte vom Fit (Elektronenmasse als Standard, Teilchen mit kleinem Impuls)

- Standard, alle Teilchen)
- 5.6 Mittlere Abweichung der Meßpunkte vom Fit (Elektronenmasse als Standard, Teilchen mit kleinem Impuls)
- 6.1 Die Versetzung der Spiegelpunkte
- 6.2 Originalspur: Abweichungen der Meßpunkte vom Fit (Referenz: Y_{fit})
- 6.3 Spiegelspur: Abweichungen der Meßpunkte vom Fit (Referenz: Y_{fit})
- 6.4 Das Verhalten des Fits bei der Spiegelspur
- 6.5 Das Verhalten der Propagation bei der Spiegelspur
- 6.6 Originalspur: Abweichungen der Meßpunkte vom Fit (Referenz: Y_{prop})
- 6.7 Spiegelspur: Abweichungen der Meßpunkte vom Fit (Referenz: Y_{prop})
- 6.8 Häufigkeitsverteilungen der Größe p_5 (Maximales Staggering)
- 6.9 Häufigkeitsverteilungen der Größe p_7 (Maximales Staggering)
- 6.10 Häufigkeitsverteilungen der Größe p_7 (Minimales Staggering)
- 6.11 Häufigkeitsverteilungen der Größe p_{11} (Minimales Staggering)
- 7.1 Die idealisierte Driftstrecke s_D
- 7.2 Die JADE-Approximation
- 7.3 Rekonstruktion eines Meßpunktes
- 7.4 Spurrekonstruktion ohne Winkelkorrektur
- 7.5 Bahn eines μ^+ , $p_T = 160 \text{ MeV}/c$
- 7.6 Spurverfolgung ohne Winkelkorrektur
- 7.7 Spurverfolgung mit Winkelkorrektur
- 8.1 Die große Zahl möglicher Startkombinationen
- 9.1 Originalspuren
- 9.2 Rekonstruierte Spursegmente
- 9.3 Originalspuren
- 9.4 Rekonstruierte Spursegmente
- 9.5 Prozentzahl spurfremder Punkte in Abhängigkeit von der Gesamtanzahl der rekonstruierten Spursegmente
- 9.6 Fragmentierung der Spursegmente
- 120
- ### Literaturverzeichnis
- [BILL84] P. Billoir, *Track Fitting with Multiple Scattering: A New Method*, NIM 225 (1984) 352
- [BOC86] P. Bock, *Private Mitteilungen*
- [CAS81] D. G. Cassel, H. Kowalski, *Pattern Recognition in Layered Track Chambers Using a Tree Algorithm*, Nucl. Instr. and Meth. 185 (1981) 235
- [CJW86] *Working Paper on Combined Online/Offline CJ Processing and Data Structures*, OPAL CJW-03 (1986)
- [FRO79] A. G. Frodesen, O. Skjeggstad, H. Tofte, *Probability and Statistics in Particle Physics*, Universitetsforlaget (1979)
- [GEA86] R. Brun et al., *GEANT3*, CERN DD/EE/84-1 (May 1986)
- [GOP87] D. Ward, *The GOPAL User's Guide (Version 1.11)*, CERN (February 7, 1987)
- [HAN86] M. Hansroul, *Private Mitteilungen*
- [HAU83] M. Hauschild, *Diplomarbeit*, Phys. Inst. d. Univ. Bonn, BONN-IR-83-42
- [HEU87] R. Heuer, A. Wagner, *The OPAL Jet Chamber*, Proceedings of the International Conference on Advances in Experimental Methods for Colliding Beam Physics, (to be published)
- [JER86] H. Jeremie, *Comparison of Track-Fitting Algorithms for the OPAL Central Detector*, OPAL ROPE-0093 (1986)
- [KRE86] H. Kreuztzmann, *Private Mitteilungen*
- [KRE86a] H. Kreuztzmann, *Minutes of Pattern Recognition Meeting held on 11/12-Nov-86*, Internal OPAL-Report (1986)

- [KR187] R. Krieger, *CJPERFF (Pattern Recognition Analysis Program) - Programmdokumentation*, Phys. Inst. d. Univ. Bonn (unveröffentlicht)
- [NOZ81] T. Nozaki,
JADE Note No. 67 (1981)
- [OPA83] *OPAL, Technical Proposal*,
CERN/LEPC/83-4, LEPC/P3 (May 83)
- [OPA87] *OPAL, Report on Data Acquisition and Analysis*,
CERN/LEPC/87-4, LEPC/MT9, OPAL 16/OFFL/0215
(March 1987)
- [PAR86] *Particle Properties Data Booklet*,
CERN (April 1986)
- [PIM85] M. Pimiä, *Track Finding in the UA1 Central Detector at the CERN p \bar{p} Collider*
University of Helsinki, HU-P-D45 (1985)
- [SCH86] D. Schaile et al.,
Nucl. Instr. and Meth. A242 (1986) 247
- [SJO85] T. Sjöstrand, *The Lund Monte Carlo for Jet Fragmentation and e $^+$ e $^-$ Physics - JETSET Version 6.2*,
LU TP 85-10, University of Lund (1985)
- [STE80] P. Steffen, *Pattern Recognition Programs for the JADE Jet-Chambers*,
JADE Note No. 51 (1980)
- [ZEB85] R. Brun, M. Goossens, J. Zoll, *ZEBRA - Data Management System*
CERN DD/EE/85-6 (May 13, 1985)

Danksagung

Herrn Prof. Dr. B. Nellen und Herrn Prof. Dr. B. Korte möchte ich für die umfangreiche Betreuung und Unterstützung der Arbeit herzlichst danken.

Mein besonderer Dank gilt Hubert Kreuzmann, der jederzeit ein kompetenter Ansprechpartner für die Probleme der Spurenkennung und für die Organisation der OPAL-Software war.

Horst Roeder und Edgar Schwietzke danke ich für den Rat und die Unterstützung bei der Modifizierung des Fits.