RIETI Discussion Paper Series 05-J-022

債務の期間構造と信用リスク評価
Modeling Credit Risk with Long-term and Short-term Debts

小林 孝雄
経済産業研究所

池田 亮一
東京大学

Research Institute of Economy, Trade & Industry, IAA
独立行政法人経済産業研究所
http://www.rieti.go.jp/jp/

RIETI Discussion Paper Series 05-J -022

債務の期間構造と信用リスク評価

Modeling Credit Risk with Long-term and Short-term Debts

2005 年 6 月

小林 孝雄
東京大学大学院経済学研究科 教授

池田 亮一
東京大学大学院経済学研究科 院生

要約

この論文では構造型アプローチによる企業の信用リスク評価の新たなフレームワークを提示する。一般に、企業の抱える債務は、返済までの期間がより近い短期債務とより遠い長期債務に分けられ、短期債務の割合が大きいほど企業の短期的信用リスクは大きくなる。しかし、既存モデルの多くは債務を全て単一の満期にして考えるためそのような分析ができなかった。この論文では債務を短期債務と長期債務の二つに分けてインプットすることにより、短期・長期の信用リスクが同時に求められ、かつ短期債務の割合が多いほど短期的な信用リスクが大きくなるモデルを構築する。

また、新たなモデルでは、もし企業が債務を返済できない場合に債権者が返済を猶予すると、債券の価値が上がる場合がある。これにより、債権者が保有する債券全体の価値を最大化するように行動すると新たに仮定した場合、短期債務と長期債務の債権者が同一であるかどうかによって、異なる信用リスクが求められるモデルになる。

1. はじめに

この論文では、構造型アプローチによる企業の信用リスクの新たなフレームワークを提示する。

信用リスクの計量化における構造型アプローチとは、企業の会計情報から保有する株式や債券の価格や倒産確率を算出するものであり、バランスシート・アプローチとも呼ばれる。構造型アプローチでは企業の資産価値を確率過程として外生的に与え、将来の契約によって定められた時刻における資産価値の分布を求め、契約によって定められた額をどれぐらいの確からしさで返済できるかを推定する。これを初めてモデル化したのは Merton(1974)である。Merton(1974)では、企業が期限前償還のない一種類の割引債を債務として保有しているとき、株式価値は原資産を資産価値とするヨーロピアンコールオプションのブラック・ショールズ価格になることを示した。

Merton(1974)のモデルにおける一つの問題点は、通常企業は様々な満期の債務を抱えているものの、保有している債務を単純化のために一種類としたことである。このため、期限前償還は行われないと仮定する限り、その割引債の満期以前で倒産する確率は 0 になってしまい、より短期的な倒産確率をそれで計算することはできない。さらに、保有している債務を一種類としているので、その満期をいつに設定するかについては恣意性がある。

いくつかの論文では、Merton(1974)のモデルにおいて債務の満期を一種類としていた仮定を緩め、より複雑な負債の期間構造をモデルにインプットすることができる。Delianedis and Geske(1998)では、短期債と長期債という異なる二種類の満期の割引債を債務として保有し、短期債の償還は増資によって行うと仮定したモデルを提示した。これによって、短期的な倒産リスクを考えることができる。

また、Leland and Toft(1996)では、様々な満期を持つ数種類の債券を、倒産しない限り永遠に毎時刻連続して、それぞれ一定の大きさの額面を発行し続けている企業を仮定する。時間が十分たったとき、以前に発行した債券が毎時刻、一定額面だけ満期を迎えるが、それらの償還はまた新たに発行される債券と増資によって行うとする。このモデルでは、短期的な倒産リスクを考えることができるだけほかに、各証券の価格やある時刻までに倒産する確率を解析解として求めることができることが特徴である。

これらのモデルの性質の一つは、短期的な倒産リスクを求めようとすると負債全体の額面に大きく依存し、負債構成にはほとんど無関係に決まる点である。現実では、負債全体の額面が同じ場合、返済までの期間がより短い債務の割合が多い企業のほうが短期的な倒産リスクが高くなると考えられるので、この点は問題である。

このうち、Delianedis and Geske(1998)で短期的な倒産リスクが負債全体の額面に大きく依存してしまうのは、短期債の償還を増資によって行っているためである。株式は企業解散時の配分においてもっとも優先順位が低くリスクの高い証券であり、そのため投資家は発行時における資産価値がより高くなければ株式を購入しないのである。そこで、この問題点を克服するため、短期債の償

還を増資によって行う仮定を改め、新たに短期債を発行することにより行うと仮定するモデルを構築する。このように仮定すると、株式と比べてよりリスクの小さい証券によって短期債の償還を行うことになるので、短期債発行時の資産価値はより低くても短期債の償還ができるようになる。さらに、短期債を一定期間おきにロールオーバーすることにより、長期債の満期以前に倒産の可能性が何度もあるモデルになり、前述したモデルの欠点が克服される。

さらに、新たなモデルは債権者が償還猶予についての分析を可能にする。現実の世界では、企業が債券の償還ができなかった場合、債権者はその場ですぐ倒産させずに償還を猶予することがある。経済学的には、債権者がすぐに倒産させ回収できる場合の価値と、償還を猶予することによって将来のペイオフによる期待現在価値を比べ、猶予した方が債権者の価値が大きいときには債権者は償還を猶予していると解釈できる。新たに構築したモデルでは、債権者が債券の価値を最大化するように行動すると仮定すると、短期債の償還時の資産価値によって猶予が合理的な場合とそうでない場合があるモデルになる。さらに、短期債債権者が同時に長期債債権者であった場合とそうでない場合についても異なる結果を生み出す。

以下、第二章では文献サーベイの結果として、Delianedis and Geske(1998)と Leland and Toft(1996)のモデルを紹介する。第三章では短期債をロールオーバーする基本モデルの説明をする。第四章では第三章のモデルを応用し、償還の猶予をする場合についてのモデルを説明する。第五章では、既存モデルを含めたモデルについて実際に証券価値や倒産確率を計算した結果とその考察である。第六章は結論である。

２． 文献サーベイ

ここでは、構造型アプローチのうち、企業が初期時点に保有する債務の満期が 2 種類以上に分けられるモデルについてサーベイした結果として、Leland and Toft(1996)と Delianedis and Geske(1998)の2つを説明する。

Leland and Toft(1996)

Leland and Toft(1996)は、Black and Cox(1976)を拡張したモデルを構築している。Black and Cox(1976)では、一定額のクーポンを時間的に連続して支払うコンソル債のプライシングモデルを構築した。クーポンの支払いは増資によって行うと仮定している。このモデルでは、負債の期間構造が変化しないため、株主がクーポンの支払いをせず倒産したほうが合理的な資産価格は常に一定で内生的に求められる。

これを応用し、Leland and Toft(1996)では企業はクーポンを支払うだけでなく、満期が有限で常に等しい額面の債券を毎時刻発行するという仮定を置くことによって、満期が有限の複数の債券の価格を求めることができるモデルを構築した。

原論文では、法人税、倒産費用、債券のクーポン支払いを仮定しているが、以下ではそれらを

考慮しないより単純なモデルで説明する。

企業は毎時刻、倒産しない限り常に額面 $\dfrac{f_{i,T_i}}{T_i}dt$ の T_i 年債（発行時から満期までの期間が T_i である債券）を発行し続けるものとする。時間が十分たった後に、毎時刻 $\dfrac{f_{i,T_i}}{T_i}dt$ の T_i 年債 $i\ (i=1,\cdots,N)$ が連続的に満期を迎えるが、その償還は常に発行し続けている額面 $\dfrac{f_{i,T_i}}{T_i}dt$ の T_i 年債と増資によって行うと仮定する。

このように仮定した場合、企業は時間が十分たった後のどの時刻においてもすべての i について T_i 年債を f_{i,T_i} 単位ずつ保有していることになり、債務の期間構造は時間的に変化しない。株主が株式価値を最大化するように行動すると仮定すると、増資をするよりも倒産したほうが得であると判断したときに企業は倒産する。

t 時点における資産価格 A_t はリスク中立過程における幾何ブラウン運動

$$dA_t = A_t(rdt + \sigma dW_t) \quad W_t\text{は標準ブラウン運動}$$

をすると仮定する。利子率 r 、資産価格のボラティリティー σ は一定とし、配当は払われない。

現在の資産価格が A_0 、倒産が起こる資産価値の閾値を A_B とすると、残存期間 t 、額面 $\dfrac{f_{i,T_i}}{T_i}dt$ の債券の現在価値 $d_i(A_0;A_B,t)dt$ は、

$$\begin{aligned} d_i(A_0;A_B,t)dt &= \exp(-rt)(1-F(t;A_0,A_B))\frac{f_{i,T_i}}{T_i}dt \\ &\quad + \int_0^t \exp(-rs)\rho_i A_B f(s;A_0,A_B)ds \end{aligned} \tag{1}$$

と表される。ただし、$f(s;A_0,A_B)$ は現在から s 時間後に初めて閾値 A_B にたどり着く確率の密度関数、$F(t;A_0,A_B)$ はその累積密度関数である。ρ_i は倒産した際の資産価格 A_B に対する債券 d_i への配分率を表す。発行済みの T_i 年債の総価値 D_i は上式を残存期間 t で積分して

$$D_i(A_0;A_B,T_i) = \int_0^{T_i} d(A_0;A_B,t)dt \tag{2}$$

と求められる。株式価値 S_0 は

$$S_0 = A_0 - \sum_{i=1}^{N} D_i(A_0;A_B,T_i) \tag{3}$$

である。

いま、株主は株式価値が最大となるように閾値 A_B^* を決め、資産価値がその値を下回った場合に企業は倒産する。閾値 A_B^* は(3)式の一回条件を解くことによって得られるので、A_B^* は

$$\frac{\partial}{\partial A_B}\left(\sum_{i=1}^{N} D_i(A_0; A_B^*, T_i)\right) = 0 \tag{4}$$

を満たすように決まる。

よって、現在からt年後に企業が倒産していない確率$P(t; A_0, A_B^*)$は

$$P(t; A_0, A_B^*) = 1 - F(t; A_0, A_B^*) \tag{5}$$

と求められる。 (1)~(5)は陽関数解が存在するがここでは省略する。

Delianedis and Geske(1998)

Delianedis and Geske(1998)では、初期時点において、額面f_{1,T_1}、満期T_1の短期債と額面f_{2,T_2}、満期T_2 ($T_2 > T_1$)の長期債の2種類の債務を保有すると仮定する。ただし利子の支払いはない。企業は短期債の満期T_1において、増資して額面の償還をするが、株主が増資するよりも倒産したほうが得であると判断した場合、企業は倒産すると仮定する。

前と同様にt時点における資産価格A_tがリスク中立過程における幾何ブラウン運動

$$dA_t = A_t(rdt + \sigma dW_t) \quad W_t\text{は標準ブラウン運動}$$

をすると仮定する。利子率r、資産価格のボラティリティーσは一定とし、配当はないものとする。このとき、時点tにおける、短期債および長期債の満期において企業が倒産しない確率$P_1(t)$、$P_2(t)$を求める。

企業が短期債の満期T_1において倒産しない場合、増資後の株式全体の価値が短期債の額面より大きいので、企業がT_1において倒産しない条件は

$$S_{T_1}^{+}(A_{T_1}) > f_{1,T_1} \tag{6}$$

である。$S_{T_1}^{+}$はT_1における増資後の株式全体の価値を表す。$S_{T_1}^{+}(A_{T_1})$は初期原資産価格A_{T_1}、権利行使価格f_{2,T_2}のコールオプションと見なせるので、ブラック・ショールズ公式を用いて

$$S_{T_1}^{+}(A_{T_1}) = A_{T_1} N(x_1) - f_{2,T_2} \exp(-r(T_2 - T_1)) N(x_2) \tag{7}$$

ただし

$$x_1 = \frac{\log(A_{T_1} / f_{2,T_2}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}$$

$$x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{T_2 - T_1}$$

$N(\cdot)$：標準正規分布の累積密度関数

と表される。いま、コールオプションは原資産価格に対して単調に増加するので

$$S_{T_1}^{+}(A_{T_1}) = f_{1,T_1} \tag{8}$$

となる $A_{T_1}^{*}$ はただ一つに決まり、また $A_{T_1} > A_{T_1}^{*}$ であるような A_{T_1} は(6)式を満たす。よって、時点 $t\ (t < T_1)$ から見た、短期債の満期での生存確率は

$$P_1(t) = \Pr(A_{T_1} > A_{T_1}^{*} \mid t) \quad 0 \le t < T_1 \tag{9}$$

である。

同様に、長期債の満期での生存確率は

$$P_2(t) = \begin{cases} \Pr(A_{T_1} > A_{T_1}^{*} \text{かつ} A_{T_2} > f_{2,T_2} \mid t) & if \quad 0 \le t < T_1 \\ \Pr(A_{T_2} > f_{2,T_2} \mid t) & if \quad T_1 \le t < T_2 \end{cases} \tag{10}$$

と求められる。

モデルのインプリケーションと問題点

一般に企業の保有する債務の構造は非常に複雑であるが、Leland and Toft(1996)のモデル(L モデル)では、債務の期間構造が時間的に変化しないように債券を連続的に発行する仮定をおくことによって資産価値の閾値が一定になった。これによって企業の倒産リスクの分析が簡単化し、倒産確率および各証券の価値の解析解を求めることに成功している。さらに、満期や返済の優先順位が異なるより複雑な債務を企業が抱えている場合でも、同様に倒産確率や証券の価値を解析的に求めることができ、この点は以前のモデルでは得られなかった成果である。しかし、L モデルでは債券を連続的に発行するという仮定は実際には非現実的な場合も多い。例えば、数年後に大きな額面の債券の満期が来るような企業に対してこのモデルを当てはめると、明らかに短期的な倒産リスクが過大に評価されるという欠点がある。

一方、Delianedis and Geske(1998)のモデル (G モデル)では、企業が保有する債券が短期債と長期債の 2 種類のみと仮定した場合に、債務の期間構造を一定にすることなく短期的倒産リスクを考えることができる。しかし、このモデルでは、短期債は増資によって額面を償還すると仮定していることにより、短期債の満期と長期債の満期の間では倒産は起こらない。よって、例えば 1 年後、2 年後・・・、といったより細かい倒産リスクの期間構造をこのモデルでは考えることができない。

さらに、G モデルは短期的倒産リスクが長期債の大きさにも強く依存するという性質を持つ。これは、株式は企業解散時の配分における優先順位が最も低く、債券と比べてリスクが高い証券であることによる。例え短期債償還日における資産価値が短期債の額面を上回っていたとしても、長期債の満期において十分なペイオフが期待できなければ、株式を発行しても短期債の額面を償還できるだけの額を売却できない。

このように、企業の倒産リスクを求める際には、既存のどちらのモデルにおいても、短期的倒産リスクが償還期限の遠い債券の影響を強く受けるモデルになっている。現実の世界では、負債額が多くても償還期限の遠い債券が多い場合に短期的倒産リスクはあまり大きくならないため、このような点を改善するモデルの構築が必要である。

そこで、Delianedis and Geske(1998)で短期債の償還を増資によって行う仮定を改め、新たに短期債を発行することにより行うと仮定するモデルを構築する。このように仮定すると、株式と比べてよりリスクの小さい証券によって短期債の償還を行うことになるので、短期債発行時の資産価値はより低くても短期債の償還ができるようになると考えられる。さらに、短期債を一定期間おきにロールオーバーすることにより、長期債の満期以前に倒産の可能性が何度もあるモデルになり、より細かい倒産リスクの期間構造が求められる。次章ではこのモデルについて説明する。

３．短期債をロールオーバーするモデル（G モデルの発展モデル）

この章では、第二章で述べた既存モデルの問題点を克服するため、G モデルを基に新たなモデルを構築する。ここで作られたモデルは後に、債権者が債券の償還を猶予するモデルに発展される。

債務構成と優先順位

初期時点において企業は、満期 T_1、額面 f_{1,T_1} の短期債、満期 T_2、額面 f_{2,T_2} の長期債を 1 単位ずつ債務として保有している。債務はどちらも利子支払はなく、債務返済の優先順位は短期債の方が高いものと仮定する。

長期債の満期以前の短期債の償還[1]

長期債の満期以前に満期を迎える短期債は T_1 年おきにロールオーバーされ、その償還は新たに時価がちょうど償還額となるような短期債を発行することによって行うと仮定する。他の資金調達手段は用いない。短期債の償還が出来ない場合、新たに長期債や株式を発行はせず、企業は破産手続きをして資産を現金化し、短期債債権者、長期債際権者の優先順に分配する。破産手続きの際には、資産価値の $(1-\alpha)$ 倍が費用として資産から差し引かれた後、短期債債権者、長期債債権者へと配分される。

以下、企業が破産手続を行うことを「倒産」と呼び、α を資産回収率と定義する（ただし$0 \le \alpha \le 1$。とする）。

長期債の償還

長期債の満期以前に企業が倒産しなかった場合、長期債の満期では2つの債券が同時に満期を迎えるものと仮定する。すなわち$T_2 = N \cdot T_1 (N$自然数$)$があらかじめ成立する。また、長期債の満期において企業は解散することがあらかじめ決まっている。長期債の満期における資産価値が負債総額を上回る場合は、資産の現金化は「私的整理」によって行うため費用がかからないが、下回る場合は破産手続を行い、資産価値の$(1-\alpha)$倍が費用としてかかるものとする。

長期債の満期における資産価値が負債総額を上回る場合、短期債、長期債は額面が償還され、残りが株主の取り分となる。資産価値が負債総額を下回る場合には企業は倒産し、資産価値の$(1-\alpha)$倍が費用として差し引かれた後、短期債債権者、長期債債権者の順に分配される。

株主の行動原理

株主は、倒産や新たに発行する短期債の額面に関する決定を、株式価値が最大化するように行うとする。また、配当の支払いは一切行われないとする。

資産価値の変動

資産価値A_tはリスク中立確率の下で幾何ブラウン運動をすると仮定する。リスクフリーレート及び資産価格のボラティリティーは一定と置く。

$$dA_t = A_t \left(rdt + \sigma dW_t \right) \quad 0 \le t \le T_2 \qquad (W_t \text{は標準ブラウン運動}) \tag{13}$$

短期債の価値と「償還のクリティカルバリュー」

いま、$(i-1) \cdot T_1 \le t \le i \cdot T_1$における、$t = i \cdot T_1 (i = 1, \cdots N)$に満期を迎える額面$f_{1, i \cdot T_1}$の短期債$i$の価値を求める。

そのためには、$t = i \cdot T_1$における資産価値$A_{i \cdot T_1}$に対応する短期債のペイオフ関数が分からなくてはいけないが、資産価値がどのような場合に倒産するかは直観的には求められない。一見資産価値が償還する額面より大きければ企業は倒産しないように思えるかもしれないが、$\alpha < 1$の場合には、資産価値が短期債の額面より大きい場合に短期債を償還できない場合がある。

これは以下のように直観的に説明される。$\alpha = 1$ の場合、短期債の償還日において、新たに発行する短期債の額面を変えることによって変化する短期債の価値の上限は現在の資産価値に等しい。なぜなら、いまは倒産費用がかからないため、資産価値は短期債債権者、長期債債権者、及び株式の三者に帰属する。このうち、短期債は倒産時の配分順位が最も高いので、新たに発行する短期債の額面を無限に大きくすることによって、企業の資産をすべて支配することができる。よって、短期債の償還日には資産価値が償還する短期債の額面を少しでも上回ってさえいれば、新たに発行する短期債の価値が償還する短期債の額面と等しくなるような新たな短期債の額面を決めることができる。しかし、$\alpha < 1$ の場合、短期債の償還日において、新たに発行する短期債の価値の上限は現在の資産価値より小さくなる。なぜなら、$\alpha < 1$ の場合は倒産時に費用がかかり、資産価値の一部は先ほどの三者のどこにも属さない。そのため、前と同じのように新たに発行する短期債の額面を上げていくと、倒産費用も上がっていき、無限大にしたときの新たに発行する短期債の価値は現在の資産価値より倒産費用の分だけ必ず小さくなるのである。よって、新たに発行する短期債の価値の上限は現在の資産価値より小さくなり、短期債の償還日に資産価値が短期債の額面を上回っていたとしても、短期債を償還できるとは限らないことが言える。

そこで、$A_{i \cdot T_1}$ がある値より高いときに企業は倒産せずに短期債の償還が可能だが、ある値より小さいときには短期債を償還できないというような閾値が存在すると予想する。このような $t = i \cdot T_1$ における資産価値の閾値を、$\underline{A}_{i \cdot T_1}(f_{1,i \cdot T_1})$ とし「償還のクリティカルバリュー（償還 CV）」と呼ぶことにする[2]。

短期債 i の、$(i-1) \cdot T_1 \le t \le i \cdot T_1$ における価値を $F_{1,i \cdot T_1}(t, A_t; f_{1,i \cdot T_1}, \underline{A}_{i \cdot T_1}(f_{1,i \cdot T_1}))$ と表す[3]と $t = i \cdot T_1$ における短期債のペイオフは

$$F_{1,i \cdot T_1}(i \cdot T_1, A_{i \cdot T_1}; f_{1,i \cdot T_1}, \underline{A}_{i \cdot T_1}(f_{1,i \cdot T_1})) = \begin{cases} f_{1,i \cdot T_1} & \text{if } A_{i \cdot T_1} > \underline{A}_{i \cdot T_1}(f_{1,i \cdot T_1}) \\ \min(\alpha A_{i \cdot T_1}, f_{1,i \cdot T_1}) & \text{if } A_{i \cdot T_1} \le \underline{A}_{i \cdot T_1}(f_{1,i \cdot T_1}) \end{cases} \tag{14}$$

である。

よって $(i-1) \cdot T_1 \le t \le i \cdot T_1$ における短期債 i の価値は、

$$\begin{aligned} &F_{1,i \cdot T_1}(t, A_t; f_{1,i \cdot T_1}, \underline{A}_{i \cdot T_1}(f_{1,i \cdot T_1})) \\ &= E_t[\exp(-r(i \cdot T_1 - t))(f_{1,i \cdot T_1} \cdot 1_{\{A_{i \cdot T_1} > \underline{A}_{i \cdot T_1}(f_{1,i \cdot T_1})\}} + \min(\alpha A_{i \cdot T_1}, f_{1,i \cdot T_1}) \cdot 1_{\{A_{i \cdot T_1} \le \underline{A}_{i \cdot T_1}(f_{1,i \cdot T_1})\}})] \end{aligned} \tag{15}$$

である。

償還 CV が満たす条件

次に、$t = i \cdot T_1$ における償還 CV $\underline{A}_{i \cdot T_1}(f_{1,i \cdot T_1})$ はどのように決まるかを論ずる。そもそも、$i \le N-1$

の償還 CV は、新たに発行される短期債の価値の上限が、いま償還する短期債の額面に等しくなるような資産価格と呼ぶことができる。$t = i \cdot T_1$ における資産価格に対する、新たに発行される短期債の価値の上限を

$$F^*_{1,(i+1)\cdot T_1}(A_{i\cdot T_1}) \equiv \sup_{f_{1,(i+1)\cdot T_1}\in(0,\infty)} F_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T, A_{i\cdot T_1}; f_{1,(i+1)\cdot T_1}, \underline{A}_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1})) \tag{16}$$

とおくと、$\underline{A}_{i\cdot T_1}$ は

$$F^*_{1,(i+1)\cdot T_1}(\underline{A}_{i\cdot T_1}) = f_{1,i\cdot T_1} \tag{17}$$

を満たす。

上の式は、$\underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})$ を求めるためには $\underline{A}_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1})$ が先に求められていることが必要であることを意味している。

$\underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})$ の導出

$i = N$ のときの償還CVは、資産価値が額面総額を上回っていればどちらの債券も償還されるので、

$$\underline{A}_{N\cdot T_1}(f_{1,N\cdot T_1}) = f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1} \tag{18}$$

である。(15)式より $F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, \underline{A}_{N\cdot T_1}(f_{1,N\cdot T_1}))$ が求められ、さらに(17)式より

$\underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})$ が求められる。以下ではその導出を説明する。

(ｉ) $f_{1,N\cdot T_1} > \alpha(f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1})$ のとき

企業が倒産した場合は短期債債権者に倒産費用を差し引いた後の資産が配分されるので、$t = N\cdot T_1$ におけるペイオフ $F_{1,N\cdot T_1}(N\cdot T_1)$ は

$$F_{1,N\cdot T_1}(N\cdot T_1, A_{N\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1}) = \begin{cases} f_{1,N\cdot T_1} & if\ A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1} \\ \alpha A_{N\cdot T_1} & if\ A_{N\cdot T_1} \le f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1} \end{cases} \tag{19}$$

と書くことができ、$(N-1)\cdot T_1 \le t \le N\cdot T_1$ における短期債の価値は、

$$
\begin{aligned}
&F_{1,N\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}) \\
&= E_t\left[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\left(f_{1,N\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}\right\}} + \alpha A_{N\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{N\cdot T_1} \le f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}\right\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_t - E_t\left[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\left((\alpha A_{N\cdot T_1} - f_{1,N\cdot T_1})\cdot 1_{\left\{A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}\right\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_t - \alpha A_t\cdot N(x_1) + \exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\} f_{1,N\cdot T_1}\cdot N(x_2)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ただし、

$$
x_1 = \frac{\log(\dfrac{A_{N\cdot T_1}}{f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}}) + (r+\dfrac{1}{2}\sigma^2)(N\cdot T - t)}{\sigma\sqrt{N\cdot T - t}}
$$

$$
x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{N\cdot T - t}
$$

（ⅱ）$f_{1,N\cdot T_1} \le \alpha(f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1})$ のとき

企業が倒産した場合にも、短期債の額面が全て償還されることがある。償還されないのは、倒産費用を差し引いた後の資産が短期債の額面を下回った場合である。$t = N\cdot T_1$ におけるペイオフは

$$
F_{1,N\cdot T_1}(N\cdot T_1, A_{N\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}) = \begin{cases} f_{1,N\cdot T_1} & \mathit{if}\ \alpha A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1} \\ \alpha A_{N\cdot T_1} & \mathit{if}\ \alpha A_{N\cdot T_1} \le f_{1,N\cdot T_1} \end{cases}
\tag{21}
$$

と書くことができ、$(N-1)\cdot T_1 \le t \le N\cdot T_1$ における短期債の価値は、

$$
\begin{aligned}
&F_{1,N\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}) \\
&= E_t\left[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\left(f_{1,N\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{\alpha A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1}\right\}} + \alpha A_{N\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{\alpha A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1}\right\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_t - E_t\left[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\left((\alpha A_{N\cdot T_1} - f_{1,N\cdot T_1})\cdot 1_{\left\{\alpha A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1}\right\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_t - \alpha A_t\cdot N(x_1) + \exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\} f_{1,N\cdot T_1}\cdot N(x_2)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

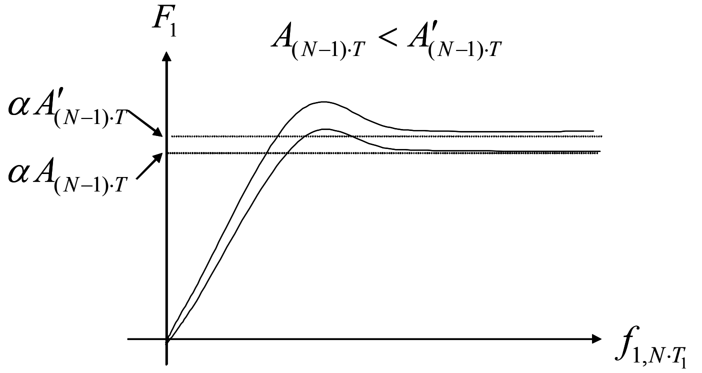
ただし、

$$
x_1 = \frac{\log(\dfrac{\alpha A_{N\cdot T_1}}{f_{1,N\cdot T_1}}) + (r+\dfrac{1}{2}\sigma^2)(N\cdot T - t)}{\sigma\sqrt{N\cdot T - t}}
$$

$$
x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{N\cdot T - t}
$$

横軸を $f_{1,N\cdot T_1}$ として、他の条件を一定としたときの $F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1})$ のグラフは以下の

ようになる。



短期債の額面を上げていくと、最初は現在価値が上がる。しかし、次第に倒産確率が高くなり、額面が高くなることによる価値の上昇分より、倒産して資産の一部が費用として失われることによる価値の減少分が上回り、現在価値は徐々に下がり始める[4]。さらに、無限大にすると、短期債は必ずデフォルトするので、$F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1})$ は $\alpha A_{(N-1)\cdot T}$ に収束する。

また、(15)式より、他の条件を一定としたとき、$F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1})$ は $A_{(N-1)\cdot T_1}$ の単調増加関数になるので、$F^*_{1,N\cdot T_1}(A_{(N-1)\cdot T_1})$ も $A_{(N-1)\cdot T_1}$ の単調増加関数である。さらに $F^*_{1,N\cdot T_1}(A_{(N-1)\cdot T_1})$ は正のあらゆる値をとりうるので、$F^*_{1,N\cdot T_1}(\underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}) = f_{1,(N-1)\cdot T_1}$ を満たす $\underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}$ はただ一つ決まる。よって、$\underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})$ が求められる。

このように求められた $\underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})$ について、$A_{(N-1)\cdot T_1} < \underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})$ のとき、

$$F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, \underline{A}_{N\cdot T_1}(f_{1,N\cdot T_1})) = f_{1,(N-1)\cdot T_1} \tag{23}$$

となる $f_{1,N\cdot T_1}$ は存在せず、逆に $A_{(N-1)\cdot T_1} \geq \underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})$ のときは $f_{1,N\cdot T_1}$ 存在する。よって、このように求められた $\underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})$ は償還 CV の十分条件満たしている。

$i \leq N-2$ のときの償還 CV $\underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})$ の導出

次に $i = N-2$ のときの償還 CV を求める。

ここで前の議論と異なるのは、$t=(N-1)\cdot T_1$ で企業が倒産する際のペイオフについてである。

$t=(N-1)\cdot T_1$ で資産価値が $A_{(N-1)\cdot T_1} < \underline{A}_{(N-1)\cdot T_1}$ を満たす場合に企業は倒産するが、このとき、定義より

$$F^*_{1,N\cdot T_1}(A_{(N-1)\cdot T_1}) \le f_{1,(N-1)\cdot T_1} \tag{24}$$

で、かつ

$$F^*_{1,N\cdot T_1}(A_{(N-1)\cdot T_1}) \ge \alpha A_{(N-1)\cdot T_1} \tag{25}$$

なので、

$$f_{1,(N-1)\cdot T_1} \ge \alpha A_{(N-1)\cdot T_1} \tag{26}$$

が成立する。

(26)式は、$t=(N-1)\cdot T_1$ で倒産するとき、倒産費用を差し引いた後の資産価値は短期債の額面より小さく、倒産後の資産配分は短期債債権者へしか行われないことを意味する。これは、$\alpha A_{(N-1)\cdot T_1}$ という値は、もし倒産した際の債権者全体へ支払われる資産額であるとともに、新たに発行する短期債の額面を無限大にしたときの短期債の価値の収束値でもあるためである。償還する短期債の額面がこの収束値以下であれば償還が可能なので、償還する短期債の額面 $f_{1,(N-1)\cdot T_1}$ がもし倒産したとして倒産費用を差し引いた後の資産価値 $\alpha A_{(N-1)\cdot T_1}$ よりも小さければ倒産することはない。この対偶をとると、倒産する場合には短期債の額面 $f_{1,(N-1)\cdot T_1}$ は $\alpha A_{(N-1)\cdot T_1}$ より大きいことを意味する。逆は一般には言えない。

これは一般に、$i \le N-1$ 満たすすべての i について言える。$i=N$ では、短期債の償還は新たな短期債を発行するのではなく資産を現金化して行うので、この結論は当てはまらない。

これより、$i \le N-1$ について、$t=i\cdot T_1$ における短期債のペイオフは

$$F_{1,i\cdot T_1}(i\cdot T_1, A_{i\cdot T_1}; f_{1,i\cdot T_1}, \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})) = \begin{cases} f_{1,i\cdot T_1} & if\ A_{i\cdot T_1} > \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}) \\ \alpha A_{i\cdot T_1} & if\ A_{i\cdot T_1} \le \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}) \end{cases} \tag{27}$$

と書くことができる。よって $(i-1)\cdot T_1 \le t \le i\cdot T_1$ における短期債の価値は、

$$\begin{aligned}
&F_{1,i\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,i\cdot T_1}, \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})) \\
&= E_t\left[\exp\left\{-r\left(i\cdot T_1 - t\right)\right\}\left(f_{1,i\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{i\cdot T_1} > \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})\right\}} + \alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{i\cdot T_1} \le \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})\right\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_t - E_t\left[\exp\left\{-r\left(i\cdot T_1 - t\right)\right\}\left((\alpha A_{i\cdot T_1} - f_{1,i\cdot T_1})\cdot 1_{\left\{A_{i\cdot T_1} > \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})\right\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_t - \alpha A_t\cdot N(x_1) + \exp\left\{-r\left(i\cdot T_1 - t\right)\right\} f_{1,iT_1}\cdot N(x_2)
\end{aligned} \tag{28}$$

ただし、

$$x_1 = \frac{\log\left(\dfrac{A_{i\cdot T_1}}{\underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(i\cdot T - t)}{\sigma\sqrt{i\cdot T - t}}$$

$$x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{i\cdot T - t}$$

以降、$i = N-1$ の場合と同様に、$F^*_{1,(N-1)\cdot T_1}(\underline{A}_{(N-2)\cdot T_1}) = f_{1,(N-2)\cdot T_1}$ を満たす $\underline{A}_{(N-2)\cdot T_1}$ がただ一つ決まり、$\underline{A}_{(N-2)\cdot T_1}(f_{1,(N-2)\cdot T_1})$ が求められる。

同じことを $i = N-3,\cdots 1$ で繰り返し行うことにより、すべての $\underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,iT_1})$ が求められる。以上により、すべての時点における短期債の価値が求められる。

長期債、株式、倒産費用の価値

$(i-1)\cdot T_1 \le t \le i\cdot T_1$ における満期 $N\cdot T_1$ の長期債、株式、及び倒産費用の価値をそれぞれ $F_{2,N\cdot T_1}(t, A_t; i\cdot T_1, f_{1,i\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1})$ 、$S(t, A_t; i\cdot T_1, f_{1,i\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1})$ 、$D(t, A_t; i\cdot T_1, f_{1,i\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1})$ と表す。

前節より、長期債の満期以前に企業が倒産した場合には短期債のみペイオフが起こることが言えたので、長期債・株式のペイオフは 0 である。したがって、長期債、株式のペイオフ関数は長期債の満期においてのみ考えればよい。

$t = N\cdot T_1$ における長期債のペイオフは

$$F_{2,N\cdot T_1}(N\cdot T_1, A_{N\cdot T_1}; N\cdot T_1, f_{1,N\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = \begin{cases} f_{2,N\cdot T_1} & if \quad A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1} \\ \max(\alpha A_{N\cdot T_1} - f_{1,N\cdot T_1}, 0) & if \quad A_{N\cdot T_1} \le f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1} \end{cases} \tag{29}$$

株式のペイオフは

$$S(N\cdot T_1, A_{N\cdot T_1}; N\cdot T_1, f_{1,N\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = \begin{cases} A_{N\cdot T_1} - (f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1}) & if \quad A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1} \\ 0 & if \quad A_{N\cdot T_1} \le f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1} \end{cases} \tag{30}$$

である。

また、$t = i\cdot T_1 (i \le N)$ における倒産費用は

$$D(i\cdot T_1, A_{i\cdot T_1}; i\cdot T_1, \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})) = \begin{cases} 0 & if\ A_{i\cdot T_1} > \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}) \\ (1-\alpha)A_{i\cdot T_1} & if\ A_{i\cdot T_1} \le \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}) \end{cases} \tag{31}$$

と表される。

よって、$(i-1)\cdot T_1 \le t \le i\cdot T_1$ における長期債、株式及び倒産費用の価値は、

$$\begin{aligned} &F_{2,N\cdot T_1}(t, A_t; i\cdot T_1, f_{1,i\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) \\ &= E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot\left(f_{2,N\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}} + \max(\alpha A_{N\cdot T_1} - f_{1,N\cdot T_1}, 0)\cdot 1_{d_{N\cdot T_1}}\right)] \end{aligned} \tag{32}$$

$$S(t, A_t; i\cdot T_1, f_{1,i\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(A_{N\cdot T_1} - (f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1}))\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}}] \tag{33}$$

$$D(t, A_t; i\cdot T_1, f_{1,i\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = E_t[\sum_{j=i}^{N}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(1-\alpha)A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}] \tag{34}$$

と表される。ただし

$$d_{j\cdot T_1} = \left\{t = j\cdot T_1 \text{で初めて} A_{j\cdot T_1} \le \underline{A}_{j\cdot T_1}(f_{1,j\cdot T_1}) \text{になる事象}\right\}$$

$$\bar{d}_{j\cdot T_1} = \left\{\text{全ての} t = k\cdot T_1 (k \le j) \text{で} A_{k\cdot T_1} > \underline{A}_{k\cdot T_1}(f_{1,k\cdot T_1}) \text{である事象}\right\}$$

である。

モンテカルロシミュレーションによる長期債、株式、倒産費用の価値の計算

$f_{1,N\cdot T_1}$ の値や長期債の満期以前に倒産するかどうかは、長期債の満期における資産価値のみではなく、$t = i\cdot T_1$ $(i \le N-1)$ における資産価値に依存して決まるため、長期債や株式も資産価値の経路に依存する。これらの解析的な解を求めるのは難解と思われるので数値計算をする必要がある。数値計算の方法には一般に再結合ツリーによる方法とモンテカルロシミュレーションによる方法があるが、再結合ツリーによる経路依存型商品のプライシングは一般に複雑で時間がかかることが多いので、今回はモンテカルロシミュレーションによって求める。

以下では一般性を失うことなく、0 時点における長期債、株式および倒産費用の価値を求めるモ

ンテカルロシミュレーションの具体的な手順を述べる。まず、(13)式に従う、初期値が A_0 の幾何ブラウン運動 A_t のパスを M 個発生させ、それぞれのパスのうち $t = i \cdot T_1 \ (i \le N)$ の A_t を取り出す。m 個目のパスから取り出したものを $A_m = (A^m_{T_1}, A^m_{2T_1}, \cdots, A^m_{N \cdot T_1})$ とし、そのパスに対応する長期債、株式および倒産費用の 0 時点における現在価値をそれぞれ $F^m_{2,N\cdot T_1}(0, A_0; T_1, f_{1,T_1}, f_{2,N\cdot T_1})$ 、$S^m(0, A_0; T_1, f_{1,T_1}, f_{2,N\cdot T_1})$ 、$D^m(0, A_0; T_1, f_{1,T_1}, f_{2,N\cdot T_1})$ とする。

まず、このパスのときに $t = T_1$ で短期債が償還できるか否か、また償還できる場合にはいくらの額面の短期債を発行するかを計算する。$t = T_1$ で償還する額面は $f^m_{1,T_1} = f_{1,T_1}$ と与えられているので、$t = T_1$ における償還 CV $\underline{A}_{T_1}(f^m_{1,T_1})$ は求められる。もし

$$A^m_{T_1} < \underline{A}_{T_1}(f^m_{1,T_1}) \tag{35}$$

であれば、短期債は償還されず企業は倒産するので

$$F^m_{2,N\cdot T_1}(0, A_0; T_1, f_{1,T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = 0 \tag{36}$$

$$S^m(0, A_0; T_1, f_{1,T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = 0 \tag{37}$$

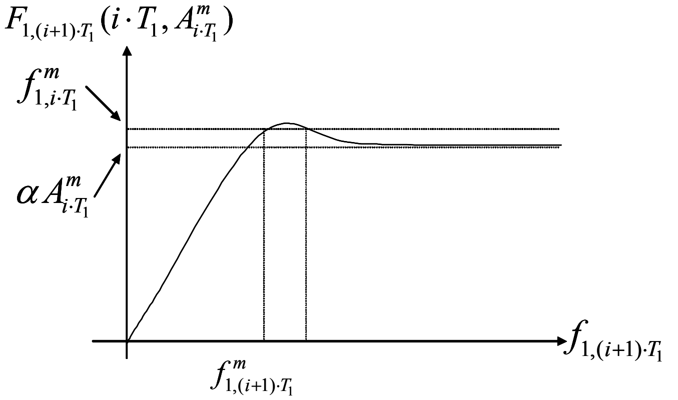
$$D^m(0, A_0; T_1, f_{1,T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = \exp(-rT_1) \cdot (1-\alpha) A^m_{T_1} \tag{38}$$

となり、m 個目のパスについてはこれで終了である。

もし $A^m_{T_1} \ge \underline{A}_{T_1}(f^m_{1,T_1})$ の場合、もとの短期債は新たな短期債を発行することによって償還される。新たに発行される短期債の額面 $f^m_{1,2T_1}$ は

$$F_{1,2T_1}(T_1, A^m_{T_1}; f^m_{1,2T_1}, \underline{A}_{2T_1}(f^m_{1,2T_1})) = f^m_{1,T_1} \tag{39}$$

となるように決まるが、ここでグラフからわかるように f^m_{1,T_1} が $f^m_{1,T_1} > \alpha A^m_{T_1}$ を満たす場合、(39)式を満たす $f^m_{1,2T_1}$ の解は二つ存在する。



いま、新たに発行する短期債の額面を決定する権限は株主にあり、株主は株式価値を最大にするように行動すると仮定しているので、新たに発行する短期債の額面はより小さい方を選んだ方が、明らかに株式の価値はより大きくなる。よって、$f^m_{1,2T_1}$ は(39)式の解のうちの小さい方とするのが正しい。

$t = i\cdot T_1\ (i \le N-1)$ でも同様である。もし

$$A^m_{i\cdot T_1} < \underline{A}_{i\cdot T_1}(f^m_{1,i\cdot T_1}) \tag{40}$$

であれば、短期債は償還されず企業は倒産するので

$$F^m_{2,N\cdot T_1}(0, A_0; T_1, f_{1,T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = 0 \tag{41}$$

$$S^m(0, A_0; T_1, f_{1,T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = 0 \tag{42}$$

$$D^m(0, A_0; T_1, f_{1,T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = \exp(-r(i\cdot T_1))\cdot(1-\alpha)A^m_{i\cdot T_1} \tag{43}$$

として終了する。もし $A^m_{i\cdot T_1} \ge \underline{A}_{T_1}(f^m_{1,i\cdot T_1})$ の場合、新たに

$$F_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T_1, A^m_{i\cdot T_1}; f^m_{1,(i+1)\cdot T_1}, \underline{A}_{(i+1)\cdot T_1}(f^m_{1,(i+1)\cdot T_1})) = f^m_{1,i\cdot T_1} \tag{44}$$

となるような短期債の額面 $f^m_{1,(i+1)\cdot T_1}$ を決定する。$f^m_{1,i\cdot T_1} > \alpha A^m_{i\cdot T_1}$ の場合は(44)式を満たす解のうち小さいものを $f^m_{1,(i+1)\cdot T_1}$ とする。企業が倒産しなかった場合は、続けて $t = (i+1)\cdot T_1$ について計算する。

$t \le (N-1)\cdot T_1$ で短期債がデフォルトしなかった場合、

$$
F_{2,N\cdot T_1}^{m}(0,A_0;T_1,f_{1,T_1},f_{2,N\cdot T_1})
= \begin{cases} \exp(-r(N\cdot T_1))\cdot f_{2,N\cdot T_1} & if\ A_{N\cdot T_1}^{m} > f_{1,N\cdot T_1}^{m}+f_{2,N\cdot T_1} \\ \exp(-r(N\cdot T_1))\cdot \max(\alpha A_{N\cdot T_1}^{m}-f_{1,N\cdot T_1}^{m},0) & if\ A_{N\cdot T_1}^{m} \le f_{1,N\cdot T_1}^{m}+f_{2,N\cdot T_1} \end{cases} \tag{45}
$$

$$
S^{m}(0,A_0;T_1,f_{1,T_1},f_{2,N\cdot T_1})
= \begin{cases} \exp(-r(N\cdot T_1))\cdot (A_{N\cdot T_1}^{m}-(f_{1,N\cdot T_1}^{m}+f_{2,N\cdot T_1})) & if\ \ A_{N\cdot T_1}^{m} > f_{1,N\cdot T_1}^{m}+f_{2,N\cdot T_1} \\ 0 & if\ \ A_{N\cdot T_1}^{m} \le f_{1,N\cdot T_1}^{m}+f_{2,N\cdot T_1} \end{cases} \tag{46}
$$

$$
D^{m}(0,A_0;T_1,f_{1,T_1},f_{2,N\cdot T_1})
= \begin{cases} 0 & if\ \ A_{N\cdot T_1}^{m} > f_{1,N\cdot T_1}^{m}+f_{2,N\cdot T_1} \\ \exp(-r(N\cdot T_1))\cdot (1-\alpha)A_{N\cdot T_1}^{m} & if\ \ A_{N\cdot T_1}^{m} \le f_{1,N\cdot T_1}^{m}+f_{2,N\cdot T_1} \end{cases} \tag{47}
$$

と表され、m 個目のパスに関する計算は終了する。この作業を M 個のパス全てで行う。M が十分大きい場合には大数の法則より、

$$
F_{2,N\cdot T_1}(0,A_0;T_1,f_{1,T_1},f_{2,N\cdot T_1}) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} F_{2,N\cdot T_1}^{m}(0,A_0;T_1,f_{1,T_1},f_{2,N\cdot T_1}) \tag{48}
$$

$$
S(0,A_0;T_1,f_{1,T_1},f_{2,N\cdot T_1}) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} S^{m}(0,A_0;T_1,f_{1,T_1},f_{2,N\cdot T_1}) \tag{49}
$$

$$
D(0,A_0;T_1,f_{1,T_1},f_{2,N\cdot T_1}) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} D^{m}(0,A_0;T_1,f_{1,T_1},f_{2,N\cdot T_1}) \tag{50}
$$

と求められる。

各証券と倒産費用の現在価値の和

直観的に短期債、長期債、株式及び倒産費用の現在価値の和は現在の資産価値に等しい。つまり、

$$
F_{1,i\cdot T_1}(t,A_t)+F_{2,N\cdot T_1}(t,A_t)+S(t,A_t)+D(t,A_t)=A_t \tag{51}
$$

である。
これは、Appendix で証明する。

４．債権者が債券の償還を猶予するモデル

一般に現実の世界において、債券が満期を迎えても償還できない場合に債権者が償還を猶予することがある。これを経済学的に考えると、企業には償還の義務があるにも関わらず、債権者がその猶予をするのは、いま企業を倒産させて資産を回収することによって得られるペイオフより、あ

えて償還を猶予したほうがより大きいペイオフが将来に期待していると解釈できる。

しかし、いま債権者が債券の現在価値を最大化するように行動すると仮定したとき、3 章で述べたモデルで倒産費用がかからない場合（$\alpha = 0$）においては、債権者が償還を猶予することによって債券の価値が上がることはない。これは以下のような理由による。いま、短期債の償還日においてそのままでは償還が不可能であったとする。短期債債権者は簡単化のため一人とし、株式・長期債の一部を保有していてもよいものとする。このとき、もしそのまま倒産することになれば、短期債債権者へはすべての資産が配分される。ここで、短期債債権者が償還を猶予したとする。このとき、猶予しなければ株式の長期債の価値は 0 であったが、猶予したことによって株式や長期債の価値は正の値をとることになる。短期債債権者はすべての証券を持っているわけではないと仮定しているので、償還を猶予することによって短期債債権者は資産の一部を失っていることになる。よって、倒産費用を考えない場合、短期債債権者が償還を猶予することは合理的ではない。

しかし、債権者が債券の現在価値を最大化するように行動するという仮定は崩さずに、倒産の際に費用がかかるようにした場合（$0 \le \alpha < 1$）、債権者にとって償還を猶予することが合理的になることがある。例えば、倒産するときの費用が資産全額だった場合を考える。債券が償還できなかったとき、そのまま倒産すれば債券の価値は 0 だが、償還を猶予した場合には債券の価値は必ず正になる。よってこの場合、債権者は額面が償還されない場合には、常に償還を猶予することが合理的になる。倒産費用が資産の一部である場合には、償還を猶予するか否かは、債券の額面や資産価値のボラティリティーなどの要因によって異なる結果が出てくる。

さらに、債券が短期債と長期債の 2 種類がある場合、それらを異なる債権者が保有しているか、同一の債権者が保有しているかによっても、償還を猶予するかの判断は異なってくる。以下では、前章のモデルを基にして、定量的に償還の猶予をするか否かを決定するモデルを構築する。

新たな仮定

企業の短期債は一人の債権者がすべて保有しており、短期債の満期において債券の償還ができない場合にのみ償還を猶予する権利を持つとする。償還の猶予は一度猶予した後その額面全額を T_1 年間猶予するものとし、猶予は何度でもできるが、長期債の満期を越えて猶予をすることはできない。また、短期債債権者は株式を全く保有していないものとし、さらに長期債は償還を猶予できないものとする。

（1）短期債と長期債の債権者が異なる場合

まず、短期債債権者が長期債を全く保有していない場合について分析する。

短期債債権者が償還を猶予するための条件

短期債と長期債の債権者が異なるときに、短期債債権者が償還を猶予する権利をもつ場合、$(i-1)\cdot T_1 \le t \le i\cdot T_1$における短期債の価値を新たに$F^d_{1,i\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,i\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1})$と表すことにする。

いま、$t = i\cdot T_1$ $(i \le N-1)$において企業が短期債の額面$f_{1,i\cdot T_1}$の償還ができないとき、短期債債権者が償還を猶予するための条件は、償還日に猶予をせず企業が倒産したとしたときの短期債のペイオフより、償還を猶予して新たにT_1年後に額面$f_{1,(i+1)\cdot T_1} = f_{1,i\cdot T_1}$を償還するという契約の価値の方が大きいことである。

短期債が償還を猶予するモデルにおける償還 CV を$\underline{A}^d_{i\cdot T_1}$と表すと、短期債債権者が償還を猶予するための条件は$A_{i\cdot T_1} \le \underline{A}^d_{i\cdot T_1}$を満たす$A_{i\cdot T_1}$が

$$\alpha A_{i\cdot T_1} < F^d_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T_1, A_{i\cdot T_1}; f_{1,i\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) \tag{52}$$

を満たすことである。

$t=(N-1)\cdot T_1$における猶予の条件と「猶予のクリティカルバリュー」

上の式では$A_{i\cdot T_1}$がどのようなときに償還を猶予するかが分からないので、このままでは$F^d_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T_1, A_{i\cdot T_1}; f_{1,i\cdot T_1}, f_2)$が求められない。しかし$i = N-1$のとき、仮定より$t = N\cdot T_1$では短期債は償還猶予ができないので、

$$F^d_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1}) = F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}) \tag{53}$$

である。

いま、$A_{(N-1)\cdot T_1}$の関数として見たとき、$F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1})$と$\alpha A_{(N-1)\cdot T_1}$の大小関係を考える。これは、負債に占める短期債の割合と資産回収率との大小関係に依存する。

（ｉ）$f_{1,N\cdot T_1} > \alpha(f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1})$のとき

$t=(N-1)\cdot T_1$における短期債の価値は、

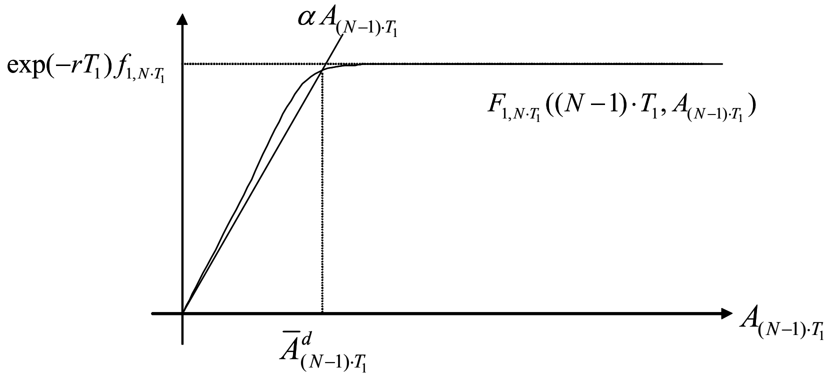
$$
\begin{aligned}
&F^d_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}) \\
&= E_t\left[\exp(-rT_1)\left(f_{1,N\cdot T_1}\cdot 1_{\{A_{N\cdot T_1}>f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}\}}+\alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{\{A_{N\cdot T_1}\le f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_{(N-1)\cdot T_1} - E_t\left[\exp(-rT_1)\left((\alpha A_{N\cdot T_1}-f_{1,N\cdot T_1})\cdot 1_{\{A_{i\cdot T_1}>f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_{(N-1)\cdot T_1} - \alpha A_{(N-1)\cdot T_1}\cdot N(x_1) + \exp(-rT_1) f_{1,N\cdot T_1}\cdot N(x_2)
\end{aligned}
\tag{54}
$$

ただし、

$$
x_1 = \frac{\log\left(\dfrac{A_{(N-1)\cdot T_1}}{f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}}\right)+\left(r+\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}
$$

$$
x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{T_1}
$$

である。横軸に資産価値、縦軸に短期債の価値と倒産時の回収額を共にグラフにすると以下のようになる。



このとき、ある $f_{1,N\cdot T_1}$ に対し

$$
F^d_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, \overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}) = \alpha \overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1} \tag{55}
$$

になるような $\overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1} > 0$ が一つ存在し、$A_{(N-1)\cdot T_1} < \overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}$ では、

$$
F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}) > \alpha A_{(N-1)\cdot T_1} \tag{56}
$$

が計算により確かめられる。

つまりこの場合、短期債の償還を猶予するような $t=(N-1)\cdot T_1$ における資産価値が $A_{(N-1)\cdot T_1} < \underline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}$ かつ $A_{(N-1)\cdot T_1} < \overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}$ を満たすとき、短期債の償還は猶予される。以後

$\overline{A}^{d}_{(N-1)\cdot T_1}$ を $t=(N-1)\cdot T_1$ における「猶予のクリティカルバリュー(猶予 CV)」と呼ぶ。

債権者が償還を猶予する場合は、猶予 CV を上回ったときではなく下回ったときである。これより、資産価値が償還 CV より少し小さい場合には倒産するが、資産価値が 0 に近く償還 CV を大きく下回るときには猶予するという状況があり得るわけである。日常的な感覚で言えば償還 CV より少し小さいような場合に次回のチャンスを与えて猶予しそうであるが、このモデルでは逆で、次回償還できる望みがほとんどないような場合に猶予することになっている。これは次のように説明できる、もし資産価値が償還 CV より少し小さい場合には、確かに次の期に償還される確率は高いものの、逆に今より資産価値が大きく低下する確率も高い。さらに、償還されたとしても高々いまの短期債の額面しか受け取れないのであれば、いま企業を倒産させた方が短期債の価値は高いと考えることができる。一方、もし資産価値が償還 CV を大きく下回るときについては、償還される確率は低いものの、今より資産価値が大きく低下することはあまりない。かつ、資産価値が急激に大きくなり次期に償還できる確率も 0 ではなく、それは短期債の価値を押し上げることになる。よって、このように資産価値が償還 CV を大きく下回るようなときほど猶予したほうが得になる。

(ⅱ) $f_{1,N\cdot T_1} \le \alpha(f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1})$ のとき

$t=(N-1)\cdot T_1$ における短期債の価値は、

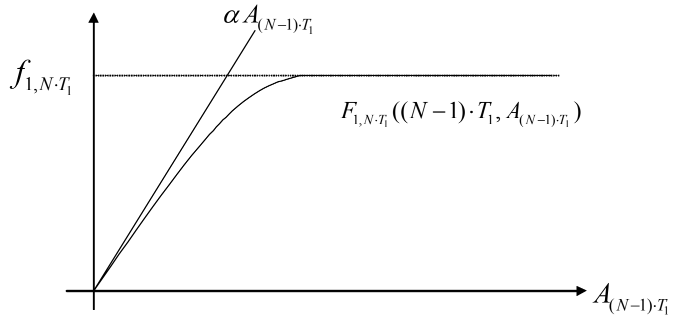
$$
\begin{aligned}
&F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}) \\
&= E_t\left[\exp(-rT_1)\left(f_{1,N\cdot T_1}\cdot 1_{\{\alpha A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1}\}} + \alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{\{\alpha A_{N\cdot T_1} \le f_{1,N\cdot T_1}\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_{(N-1)\cdot T_1} - E_t\left[\exp(-rT_1)\left((\alpha A_{N\cdot T_1} - f_{1,N\cdot T_1})\cdot 1_{\{\alpha A_{N\cdot T_1} > f_{1,N\cdot T_1}\}}\right)\right] \\
&= \alpha A_{(N-1)\cdot T_1} - \alpha A_{(N-1)\cdot T_1}\cdot N(x_1) + \exp(-rT_1) f_{1,N\cdot T_1}\cdot N(x_2) \\
&= \alpha A_{(N-1)\cdot T_1} - \alpha BSCall(A_{(N-1)\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}/\alpha, T_1)
\end{aligned}
\tag{57}
$$

ただし、

$$
x_1 = \frac{\log(\dfrac{\alpha A_{N\cdot T_1}}{f_{1,N\cdot T_1}}) + (r+\dfrac{1}{2}\sigma^2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}
$$

$$
x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{T_1}
$$

である。また $BSCall(A_{(N-1)\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}/\alpha, T_1)$ は、初期原資産価格 $A_{(N-1)\cdot T_1}$ 、権利行使価格 $f_{1,N\cdot T_1}/\alpha$ 、満期までの期間 T_1 のヨーロピアンコールオプションのブラック・ショールズ価格である。



$BSCall(A_{(N-1)\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1}/\alpha, T_1) > 0$ なので、このときは常に

$$\alpha A_{(N-1)\cdot T_1} > F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1}) \tag{58}$$

が成立する。すなわちこの場合、短期債が償還できないときには、償還を猶予せず企業が倒産したほうが短期債債権者は有利になるので、$A_{(N-1)\cdot T_1} < \overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}$ において常に、

$$\alpha A_{(N-1)\cdot T_1} < F_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1} + f_{2,N\cdot T_1}) \tag{59}$$

になるような $\overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1} > 0$ は存在しない。このような場合には形式的に

$$\overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,N\cdot T_1}) = 0 \tag{60}$$

と置くことにする。(55)式、(60)式とより関数 $\overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})$ は一意に求まる[5]。

このように、短期債債権者が猶予するかどうかは短期債の額面だけではなく長期債の額面と資産回収率にも依存し、長期債の額面、資産回収率がともに大きいほど短期債債権者は猶予したがらない。これは以下のように説明される。まず、長期債の額面が大きい場合、小さいときと比べて長期債の満期において倒産する確率が高く、そのために倒産費用を差し引いた後の資産価値が短期債の額面を下回る確率が高くなる。そのために、長期債の額面が大きいときにはそのようなリスクをとらずにあえて長期債の償還がない時刻で倒産させた方が価値は高くなる。次に資産回収率についてだが、資産回収率が上がるにつれ、同じ資産価値に対して短期債のデフォルトするリスクは小さくなる。このため、猶予させても高々償還されるのが現在の額面でそれ以上のペイオフがないのならば、いま倒産させた方が得であると考えるようになる。

$t \le (N-1)\cdot T_1$ における短期債の価値

猶予 CV を用いて、短期債と長期債の債権者が異なる場合に、短期債債権者が償還を猶予する

権利を持っているときの、$(N-2)\cdot T_1 \le t \le (N-1)\cdot T_1$ における短期債の価値は

$$\begin{aligned}
&F^d_{1,(N-1)\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,(N-1)\cdot T_1}, \overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1}), \underline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1}))\\
&= E_t[\exp\{-r((N-1)\cdot T_1 - t)\}(f_{1,(N-1)\cdot T_1}\cdot 1_{\{A_{(N-1)\cdot T_1} > \underline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})\}}\\
&+(F^d_{1,N\cdot T_1}((N-1)\cdot T_1, A_{(N-1)\cdot T_1}; f_{1,(N-1)\cdot T_1}, \overline{A}^d_{N\cdot T_1}(f_{1,N\cdot T_1}), \underline{A}^d_{N\cdot T_1}(f_{1,N\cdot T_1}))\cdot 1_{\{A_{(N-1)\cdot T_1} \le \overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})\}}\\
&+\alpha A_{(N-1)\cdot T_1}\cdot 1_{\{A_{(N-1)\cdot T_1} > \overline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})\}})\cdot 1_{\{A_{(N-1)\cdot T_1} \le \underline{A}^d_{(N-1)\cdot T_1}(f_{1,(N-1)\cdot T_1})\}})]
\end{aligned} \tag{61}$$

と表現される。

これを一般化すると、$t=(i+1)\cdot T_1$ の償還 CV および猶予 CV が既知の場合、$t=i\cdot T_1$ の償還 CV $\underline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})$ は、

$$\sup_{f_{1,(i+1)\cdot T_1}\in(0,\infty)} F^d_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T, \underline{A}^d_{i\cdot T_1}; f_{1,(i+1)\cdot T_1}, \overline{A}^d_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1}), \underline{A}^d_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1})) = f_{1,i\cdot T_1} \tag{62}$$

から決まる。

また $t=i\cdot T_1$ の猶予 CV $\overline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})$ は、

$$F^d_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T, A^*_{i\cdot T_1}; f_{1,(i+1)\cdot T_1}, \overline{A}^d_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1}), \underline{A}^d_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1})) = \alpha A^*_{i\cdot T_1} \tag{63}$$

となる $A^*_{i\cdot T_1} > 0$ が存在する場合

$$\overline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}) = A^*_{i\cdot T_1}、 \tag{64}$$

$A^*_{i\cdot T_1} > 0$ が存在しない場合、

$$\overline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}) = 0 \tag{65}$$

と求められる。

よって、$(i-1)\cdot T_1 \le t \le i\cdot T_1$ における短期債の価値は

$$\begin{aligned}
&F^d_{1,i\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,i\cdot T_1}, \overline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}), \underline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}))\\
&= E_t[\exp\{-r(i\cdot T_1 - t)\}(f_{1,i\cdot T_1}\cdot 1_{\{A_{i\cdot T_1} > \underline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})\}}\\
&+(F^d_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T_1, A_{i\cdot T_1}; f_{1,i\cdot T_1}, f_2)\cdot 1_{\{A_{i\cdot T_1} \le \overline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})\}} + \alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{\{A_{i\cdot T_1} > \overline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})\}})\cdot 1_{\{A_{i\cdot T_1} \le \underline{A}^d_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})\}})]
\end{aligned} \tag{66}$$

と表される。これを $i=N-1,\cdots,1$ で繰り返し行うことにより、すべての時点における短期債の価値を求めることができる。

長期債、株式、倒産費用の価値

$(i-1)\cdot T_1 \le t \le i\cdot T_1$における長期債、株式および倒産費用の価値は、

$$F^d_{2,N\cdot T_1}(t,A_t;i\cdot T_1,f_{1,i\cdot T_1},f_{2,N\cdot T_1})$$
$$=E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot\left(f_{2,N\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}^d_{N\cdot T_1}}+\max(\alpha A_{N\cdot T_1}-f_{1,N\cdot T_1},0)\cdot 1_{d^d_{N\cdot T_1}}\right)] \qquad (67)$$

$$S^d(t,A_t;i\cdot T_1,f_{1,i\cdot T_1},f_{2,N\cdot T_1})=E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot(A_{N\cdot T_1}-(f_{1,N\cdot T_1}+f_{2,N\cdot T_1}))\cdot 1_{\bar{d}^d_{N\cdot T_1}}] \qquad (68)$$

$$D^d(t,A_t;i\cdot T_1,f_{1,i\cdot T_1},f_{2,N\cdot T_1})=E_t[\sum_{j=i}^{N}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot(1-\alpha)A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d^d_{i\cdot T_1}}] \qquad (69)$$

と表される。ただし

$$d^d_{j\cdot T_1}=\left\{t=j\cdot T_1\text{で初めて}\bar{A}^d_{j\cdot T_1}(f_{1,j\cdot T_1})\le A_{j\cdot T_1}\le \underline{A}^d_{j\cdot T_1}(f_{1,j\cdot T_1})\text{になる事象}\right\}$$

$$\bar{d}^d_{j\cdot T_1}=\left\{\text{全ての}t=k\cdot T_1(k\le j)\text{で}A_{k\cdot T_1}>\underline{A}^d_{k\cdot T_1}(f_{1,k\cdot T_1})\text{または}A_{k\cdot T_1}<\bar{A}^d_{k\cdot T_1}(f_{1,k\cdot T_1})\text{である事象}\right\}$$

である。これらはモンテカルロシミュレーションで求められるが、償還猶予しない場合と同様の方法なので、詳細は割愛する。

（２）短期債と長期債の債権者が同一の場合

短期債と長期債の債権者が同一の場合、各証券の価値は上で求めた式の添え字のdを変えてsにするだけである。ただし、猶予 CV に関する条件が変わることに注意する。

$t=(i+1)\cdot T_1$の償還 CV および猶予 CV が既知の場合、$t=i\cdot T_1$の猶予 CV $\bar{A}^s_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})$は、

$$F^s_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T,A^*_{i\cdot T_1};f_{1,(i+1)\cdot T_1},\bar{A}^s_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1}),\underline{A}^s_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1}))$$
$$+F^s_{2,N\cdot T_1}(i\cdot T,A^*_{i\cdot T_1};f_{1,(i+1)\cdot T_1},\bar{A}^s_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1}),\underline{A}^s_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1}))=\alpha A^*_{i\cdot T_1} \qquad (70)$$

となる$A^*_{i\cdot T_1}>0$が存在する場合

$$\bar{A}^s_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})=A^*_{i\cdot T_1}\text{、} \qquad (71)$$

$A^*_{i\cdot T_1}>0$が存在しない場合、

$$\overline{A}^{s}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}) = 0 \tag{72}$$

と求められる。

５．結果

これまで述べてきたモデルについて、実際に計算した結果を考察する。

考察するモデルは、短期債を単にロールオーバーするモデル（N モデル）、短期債を同様にロールオーバーするが短期債債権者が償還を猶予する権利を持ち、かつ短期債債権者が長期債債権者と異なる場合のモデル（D モデル）及び同じ場合のモデル（S モデル）、さらに文献サーベイで述べた既存モデルの Delianedis and Geske(1998)（G モデル）、Leland and Toft(1996)（L モデル）の 5 種類である。

このうち、オリジナルの G モデルでは倒産費用が入っておらず、また債券の価格は求められていない。また L モデルでは債券が 2 種類の場合の解析解が求められていない。この結果は Appendix に記す(ともに短期債のほうが償還の優先順位は高いと仮定している)。

パラメーター

以下のパラメーターは予め固定し、$(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}) = (10,10),(10,20),(20,10)$ 、$\alpha = 0.5, 0.9$ の 6 通りの場合に、初期資産価格を $A_0 = 10, 20, 30, 40, 50$ に変化させたときの各モデルでの証券の価値および企業の倒産確率をそれぞれ求めた。

各パラメーターの値

短期債満期（T1）	1
長期債満期（T2）	4
リスクフリーレート（r）	0.01
資産価値ボラティリティー（σ）	0.2

以下が結果である[6]。

表 (f1,f2,α)=(10,20,0.9)のとき

初期資産価値	モデル	証券価値					倒産確率				4年目までの
		短期債	長期債	負債合計	株式	倒産費用	0〜1年目	1〜2年目	2〜3年目	3〜4年目	生存確率
10	N	8.61	0.38	8.99	0.01	0.99	0.72	0.14	0.04	0.10	0.00
	D	8.61	0.38	8.99	0.01	0.99	0.64	0.15	0.11	0.10	0.00
	S	8.13	1.20	9.33	0.00	0.99	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
	G	8.61	0.38	8.99	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	L										
20	N	9.90	7.59	17.49	0.84	1.54	0.00	0.03	0.06	0.79	0.12
	D	9.90	7.59	17.49	0.84	1.54	0.00	0.03	0.06	0.79	0.12
	S	9.90	7.98	17.88	0.83	1.55	0.00	0.00	0.00	0.88	0.12
	G	9.90	8.10	18.00	0.07	1.91	0.97	0.00	0.00	0.00	0.03
	L										
30	N	9.90	13.71	23.61	5.01	1.18	0.00	0.00	0.00	0.55	0.45
	D	9.90	13.71	23.61	5.01	1.18	0.00	0.00	0.00	0.55	0.45
	S	9.90	13.88	23.78	5.00	1.19	0.00	0.00	0.00	0.56	0.44
	G	9.90	15.96	25.86	2.91	1.19	0.45	0.00	0.00	0.05	0.51
	L	9.96	16.22	26.18	1.55	2.27	0.37	0.17	0.08	0.05	0.33
40	N	9.90	16.89	26.79	12.28	0.66	0.00	0.00	0.00	0.28	0.72
	D	9.90	16.89	26.79	12.28	0.66	0.00	0.00	0.00	0.28	0.72
	S	9.90	16.97	26.87	12.28	0.66	0.00	0.00	0.00	0.28	0.72
	G	9.90	18.74	28.64	11.10	0.22	0.06	0.00	0.00	0.04	0.90
	L	9.95	18.80	28.75	9.28	1.97	0.02	0.09	0.09	0.07	0.73
50	N	9.90	18.29	28.19	21.17	0.31	0.00	0.00	0.00	0.13	0.87
	D	9.90	18.29	28.19	21.17	0.31	0.00	0.00	0.00	0.13	0.87
	S	9.90	18.31	28.21	21.17	0.31	0.00	0.00	0.00	0.13	0.87
	G	9.90	19.15	29.05	20.86	0.03	0.00	0.00	0.00	0.01	0.98
	L	9.95	19.40	29.35	18.89	1.76	0.00	0.02	0.04	0.04	0.90

表 (f1,f2,α)=(20,10,0.9)のとき

初期資産価値	モデル	証券価値					倒産確率				4年目までの
		短期債	長期債	負債合計	株式	倒産費用	0〜1年目	1〜2年目	2〜3年目	3〜4年目	生存確率
10	N	8.99	0.00	8.99	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	D	9.01	0.00	9.02	0.00	0.99	0.02	0.06	0.61	0.32	0.00
	S	8.99	0.03	9.02	0.00	0.99	0.00	0.00	0.00	0.99	0.00
	G	8.99	0.00	8.99	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	L										
20	N	17.22	0.54	17.75	0.41	1.81	0.72	0.14	0.04	0.05	0.05
	D	17.22	0.54	17.76	0.41	1.81	0.64	0.15	0.11	0.05	0.05
	S	17.14	0.85	17.99	0.43	1.79	0.37	0.09	0.00	0.49	0.05
	G	17.22	0.78	18.00	0.05	1.93	0.98	0.00	0.00	0.00	0.02
	L										
30	N	19.68	4.20	23.88	4.54	1.39	0.07	0.16	0.13	0.25	0.38
	D	19.68	4.20	23.88	4.54	1.39	0.07	0.15	0.14	0.25	0.38
	S	19.68	4.60	24.28	4.49	1.40	0.06	0.08	0.00	0.48	0.38
	G	19.68	6.38	26.06	2.64	1.26	0.50	0.00	0.00	0.00	0.50
	L	19.91	6.33	26.24	1.47	2.29	0.38	0.16	0.08	0.05	0.32
40	N	19.80	7.23	27.03	11.97	0.73	0.00	0.03	0.06	0.22	0.69
	D	19.80	7.23	27.03	11.97	0.73	0.00	0.03	0.06	0.22	0.69
	S	19.80	7.38	27.18	11.94	0.74	0.00	0.02	0.00	0.29	0.69
	G	19.80	9.22	29.02	10.73	0.20	0.08	0.00	0.00	0.00	0.92
	L	19.90	8.97	28.87	9.14	1.98	0.02	0.09	0.09	0.07	0.73
50	N	19.80	8.64	28.44	20.88	0.34	0.00	0.00	0.01	0.12	0.86
	D	19.80	8.64	28.44	20.88	0.34	0.00	0.00	0.01	0.12	0.86
	S	19.80	8.69	28.49	20.87	0.34	0.00	0.00	0.00	0.14	0.86
	G	19.80	9.59	29.39	20.54	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.99
	L	19.90	9.59	29.49	18.74	1.77	0.00	0.02	0.04	0.04	0.90

表 (f1,f2,α)=(10,10,0.9)のとき

初期資産価値	モデル	証券価値					倒産確率				4年目までの
		短期債	長期債	負債合計	株式	倒産費用	0〜1年目	1〜2年目	2〜3年目	3〜4年目	生存確率
10	N	8.61	0.36	8.97	0.06	0.96	0.72	0.14	0.04	0.08	0.02
	D	8.61	0.36	8.97	0.06	0.96	0.64	0.15	0.11	0.08	0.02
	S	8.21	0.98	9.20	0.07	0.95	0.00	0.00	0.00	0.98	0.02
	G	8.61	0.38	8.99	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	L										
20	N	9.90	5.88	15.78	3.28	0.81	0.00	0.03	0.06	0.48	0.44
	D	9.90	5.88	15.78	3.28	0.81	0.00	0.03	0.06	0.48	0.44
	S	9.90	6.06	15.95	3.26	0.82	0.00	0.00	0.00	0.57	0.43
	G	9.90	7.44	17.34	1.82	0.82	0.49	0.00	0.00	0.01	0.51
	L	9.96	7.52	17.47	1.01	1.52	0.38	0.16	0.08	0.05	0.32
30	N	9.90	8.60	18.50	10.99	0.31	0.00	0.00	0.00	0.19	0.81
	D	9.90	8.60	18.50	10.99	0.31	0.00	0.00	0.00	0.19	0.81
	S	9.90	8.64	18.54	10.98	0.31	0.00	0.00	0.00	0.20	0.80
	G	9.90	9.54	19.44	10.49	0.04	0.02	0.00	0.00	0.00	0.98
	L	9.95	9.53	19.48	9.28	1.24	0.00	0.04	0.06	0.06	0.84
40	N	9.90	9.36	19.26	20.38	0.09	0.00	0.00	0.00	0.06	0.94
	D	9.90	9.36	19.26	20.38	0.09	0.00	0.00	0.00	0.06	0.94
	S	9.90	9.36	19.26	20.38	0.09	0.00	0.00	0.00	0.06	0.94
	G	9.90	9.61	19.51	20.45	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	L	9.95	9.76	19.71	19.21	1.08	0.00	0.00	0.01	0.02	0.96
50	N	9.90	9.54	19.44	30.19	0.03	0.00	0.00	0.00	0.02	0.98
	D	9.90	9.54	19.44	30.19	0.03	0.00	0.00	0.00	0.02	0.98
	S	9.90	9.54	19.44	30.19	0.03	0.00	0.00	0.00	0.02	0.98
	G	9.90	9.61	19.51	30.43	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	L	9.95	9.80	19.75	29.29	0.96	0.00	0.00	0.00	0.01	0.99

表 (f1,f2,α)=(10,20,0.5)のとき

初期資産価値	モデル	証券価値					倒産確率				4年目までの
		短期債	長期債	負債合計	株式	倒産費用	0〜1年目	1〜2年目	2〜3年目	3〜4年目	生存確率
10	N	4.99	0.00	4.99	0.00	4.99	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	D	5.01	0.00	5.01	0.00	4.98	0.06	0.09	0.68	0.17	0.00
	S	4.95	0.09	5.04	0.01	4.95	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
	G	4.99	0.00	4.99	0.00	4.99	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	L										
20	N	9.16	1.65	10.81	0.61	8.49	0.52	0.21	0.08	0.12	0.08
	D	9.16	1.65	10.81	0.61	8.49	0.48	0.19	0.12	0.12	0.08
	S	8.74	3.26	12.00	0.60	8.30	0.00	0.00	0.00	0.91	0.09
	G	9.16	1.20	10.36	0.07	9.55	0.97	0.00	0.00	0.00	0.03
	L										
30	N	9.88	8.80	18.69	4.92	6.20	0.02	0.10	0.11	0.34	0.43
	D	9.88	8.80	18.69	4.92	6.20	0.02	0.09	0.12	0.34	0.43
	S	9.86	9.73	19.59	4.62	6.59	0.00	0.00	0.00	0.60	0.40
	G	9.88	11.23	21.12	2.91	5.93	0.45	0.00	0.00	0.05	0.51
	L										
40	N	9.90	14.22	24.12	12.26	3.34	0.00	0.01	0.03	0.24	0.71
	D	9.90	14.22	24.12	12.26	3.34	0.00	0.01	0.03	0.24	0.71
	S	9.90	14.61	24.51	11.99	3.56	0.00	0.00	0.00	0.30	0.70
	G	9.90	17.86	27.76	11.10	1.10	0.06	0.00	0.00	0.04	0.90
	L	9.96	12.28	22.25	1.11	16.64	0.56	0.13	0.06	0.04	0.22
50	N	9.90	17.04	26.94	21.16	1.56	0.00	0.00	0.01	0.12	0.87
	D	9.90	17.04	26.94	21.16	1.56	0.00	0.00	0.01	0.12	0.87
	S	9.90	17.16	27.06	20.95	1.66	0.00	0.00	0.00	0.14	0.86
	G	9.90	19.02	28.92	20.86	0.16	0.00	0.00	0.00	0.01	0.98
	L	9.95	16.99	26.94	8.17	14.88	0.09	0.15	0.11	0.08	0.58

表 (f1,f2,α)=(20,10,0.5)のとき

初期資産価値	モデル	証券価値					倒産確率				4年目までの
		短期債	長期債	負債合計	株式	倒産費用	0～1年目	1～2年目	2～3年目	3～4年目	生存確率
10	N	4.99	0.00	4.99	0.00	4.99	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	D	5.02	0.02	5.04	0.01	4.94	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
	S	5.02	0.02	5.04	0.01	4.94	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
	G	4.99	0.00	4.99	0.00	4.99	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	L										
20	N	9.99	0.00	9.99	0.00	9.99	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	D	10.24	1.15	11.39	0.75	7.80	0.00	0.01	0.00	0.87	0.12
	S	10.21	1.29	11.49	0.80	7.71	0.00	0.00	0.00	0.88	0.12
	G	10.07	0.21	10.28	0.05	9.65	0.98	0.00	0.00	0.00	0.02
	L										
30	N	14.85	0.24	15.09	0.57	14.30	0.93	0.04	0.01	0.00	0.02
	D	15.19	3.19	18.38	3.35	8.11	0.11	0.02	0.00	0.54	0.33
	S	14.92	4.41	19.33	4.06	6.61	0.00	0.00	0.00	0.60	0.40
	G	16.21	4.80	21.00	2.64	6.32	0.50	0.00	0.00	0.00	0.50
	L										
40	N	18.31	2.30	20.61	6.07	13.14	0.52	0.19	0.04	0.01	0.24
	D	18.53	5.31	23.84	9.50	6.35	0.12	0.02	0.00	0.30	0.55
	S	18.34	6.99	25.33	9.83	4.91	0.00	0.00	0.00	0.38	0.62
	G	19.33	8.89	28.21	10.73	1.01	0.08	0.00	0.00	0.00	0.92
	L	19.18	2.37	21.55	0.47	17.98	0.74	0.08	0.04	0.02	0.13
50	N	19.53	5.64	25.18	17.18	7.34	0.14	0.19	0.07	0.02	0.59
	D	19.60	7.58	27.18	19.37	3.03	0.04	0.01	0.00	0.16	0.79
	S	19.56	8.41	27.97	18.90	2.78	0.00	0.00	0.00	0.20	0.80
	G	19.77	9.56	29.33	20.54	0.07	0.01	0.00	0.00	0.00	0.99
	L	19.83	7.04	26.87	7.05	16.08	0.15	0.17	0.10	0.07	0.50

表 (f1,f2,α)=(10,10,0.5)のとき

初期資産価値	モデル	証券価値					倒産確率				4年目までの
		短期債	長期債	負債合計	株式	倒産費用	0～1年目	1～2年目	2～3年目	3～4年目	生存確率
10	N	4.99	0.00	4.99	0.00	4.99	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	D	5.01	0.01	5.02	0.01	4.96	0.06	0.09	0.68	0.17	0.00
	S	4.95	0.33	5.28	0.09	4.63	0.00	0.00	0.00	0.97	0.03
	G	4.99	0.00	5.00	0.00	4.99	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	L										
20	N	9.16	1.64	10.80	1.82	7.29	0.52	0.21	0.07	0.03	0.17
	D	9.16	1.79	10.95	1.89	7.06	0.44	0.17	0.08	0.12	0.19
	S	8.81	4.43	13.24	2.37	5.15	0.00	0.00	0.00	0.67	0.33
	G	9.16	4.89	14.05	1.82	4.11	0.49	0.00	0.00	0.01	0.51
	L										
30	N	9.88	6.78	16.67	10.43	2.71	0.02	0.10	0.10	0.07	0.71
	D	9.88	6.82	16.71	10.45	2.65	0.02	0.08	0.09	0.10	0.71
	S	9.87	7.84	17.71	10.05	2.36	0.00	0.00	0.00	0.27	0.73
	G	9.88	9.40	19.28	10.49	0.20	0.02	0.00	0.00	0.00	0.98
	L	9.95	6.86	16.81	2.69	10.49	0.25	0.18	0.10	0.06	0.42
40	N	9.90	8.87	18.77	20.26	0.70	0.00	0.01	0.03	0.04	0.92
	D	9.90	8.88	18.78	20.26	0.69	0.00	0.01	0.03	0.04	0.92
	S	9.90	9.08	18.98	20.01	0.70	0.00	0.00	0.00	0.08	0.92
	G	9.90	9.60	19.50	20.45	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	L	9.95	9.15	19.10	11.81	9.09	0.01	0.06	0.08	0.07	0.79
50	N	9.90	9.43	19.33	30.17	0.17	0.00	0.00	0.01	0.01	0.98
	D	9.90	9.43	19.33	30.17	0.17	0.00	0.00	0.01	0.01	0.98
	S	9.90	9.45	19.35	30.07	0.17	0.00	0.00	0.00	0.02	0.98
	G	9.90	9.61	19.51	30.43	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	L	9.95	9.64	19.59	22.28	8.13	0.00	0.01	0.03	0.04	0.93

証券価値に関する考察

まず、資産価値の大きさと各証券の価値の関係について調べる。L モデルを除く他のモデルでは資産価値が上がるほど負債、株式の価値はともに上がることがどのパラメーターの場合も確かめられる。L モデルでは必ずしもそうはならず、資産価値が上がるにつれ短期債の価値が下がる場合がある。ここでの結果を見ると、$(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (20,10,0.5)$ の場合を除いてすべて資産価値と短期債の価値は逆相関している。これは、資産回収率が高く、負債総額に対し短期債の額面が占める割合が小さい場合、企業が倒産すると額面の全額が償還されるので、企業が倒産して額面の回収が早まった方が債券の価値が上がるためである。逆に、資産回収率が低く、短期債の額面が負債総額に占める割合が大きい場合は、短期債債権者は額面を回収できなくなるリスクを嫌い倒産しない方がよいと考えるので、初期資産価値が高いほど短期債の価値は高くなる。この論文で新しく作ったモデルでは、倒産の際に短期債の額面は一部しか回収されない性質を持つので、資産回収率や負債構成に関わらず、常に初期資産価値と短期債の価値は正の相関を持つ。

次に、債権者が償還を猶予する権利を持つ場合の債券の価値変化について考察する。まず、短期債と長期債の債権者が異なる場合についてである。直観的に考えても分かるように、短期債の額面が等しい場合は、償還猶予の権利がある場合の方がない場合に比べて価値は大きい。なぜなら、短期債債権者は短期債の価値を最大にするように行動するからである。これは、データからも確かめられる。これは、相対的に短期債の割合が大きく、資産回収率が低く、かつ初期資産価値が小さいほど償還猶予の権利が高く価格付けされることが、計算結果から分かる。$(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (10,20,0.9), (20,10,0.9)$ を比較すると、$(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (10,20,0.9)$ では N モデルと D モデルでは短期債の価値の差は初期資産価値によらずほとんど出ていないが、$(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (20,10,0.9)$ ではとくに初期資産価値が低い方で価値の差が大きくなっている。さらに、短期債と長期債の額面が同じ場合に $\alpha = 0.9$ と $\alpha = 0.5$ を比較すると、資産回収率が低い方が N モデルと D モデルの差の違いがよりはっきり現れている。

長期債や株式の価値についても N モデルより D モデルの方が高く算出される。これは、直観的には、償還を猶予することにより長期債の満期まで企業が生存する確率が高くなったことと共に、短期債の償還を猶予する場合、償還猶予しない場合と比べ短期債をロールオーバーするときの利率が低くなるため、長期債の満期における短期債の額面が小さくなり、その分長期債・株式への配分額が大きくなったことによる[7]。これは、短期債と長期債の債権者が異なる場合に、償還を猶予する権利を短期債債権者に与えることはすべての投資家に対して有利になることを示している。

次に、短期債と長期債の債権者が同一の場合について考察する。このとき、債権者は負債価値の総和を最大化するように行動することから、負債価値の総和は N モデル、D モデルより S モデルの方が大きくなる。その効果については、資産回収率が低い場合のより顕著に見られることがデー

タから読み取れる。

また、この場合の短期債の価値はほかの二つのモデルと比べ低くなっている。これは、S モデルでは長期債と短期債の和で猶予の判断をしているので、短期債の価値だけで判断すれば償還を猶予しない方がよい場合にも猶予することがあるためである。その分、長期債の満期まで企業が存続し、長期債の額面の一部が返ってくる確率が高くなるため、長期債の価値が上がり、負債全体の価値も最大になる。

倒産確率に関する考察

まず、負債の額面総額は同じだが、短期債が多い場合と少ない場合についての倒産確率を比較するため、$(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (10, 20, 0.9), (20, 10, 0.9)$ の表を見る。既存モデルである G モデルと L モデルでは、短期債の割合の大小に関わらず、倒産確率の期間構造はそれぞれほぼ同じになり、短期債の割合が少ない場合でも、短期的な倒産確率は高くなる。しかし、N モデルでは短期債の割合が少ない場合は短期的な倒産確率が低くなるモデルになっている。これは、初期資産価値が比較的低い場合にはっきり違いが現れており、既存モデルにおける問題点が解消されている。

次に、初期資産価格を大きくした場合に、短期的な倒産確率（ここでは 1 年目までの倒産確率についてをさすことにする）がどのように推移するかを調べる。償還猶予のない N、G、L モデルでは、単純に 1 年目までの倒産確率は小さくなっている。しかし、D モデルでは、初期資産価格に対し短期債が多い場合に償還猶予することから、最初は償還を猶予する確率が少なくなり 1 年目までの倒産確率は大きくなっていくが、だんだん償還が可能になる確率が高くなり倒産確率は小さくなっていく。これは、償還猶予がないモデルでは現れない性質である。また、長期債の満期が近くなる 3 年目には初期資産価格が小さい場合でも猶予せずに倒産させる確率が高くなるのがわかる。これは、あえて猶予しても長期債があるせいで次の期には倒産する確率が高く、猶予しても額面が返ってくる確率が小さくなるためである。

S モデルでは、償還猶予するのは初期資産価値に対して負債の額面の総和が大きいことに加えて、負債に占める長期債の額面が大きい場合である。長期債が多い $(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (10, 20, 0.9)$ のときには、長期債の満期以前に倒産することはなく、短期債の償還ができない場合にはほとんどの場合猶予することがわかるが、$(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (20, 10, 0.9)$ の場合には、猶予せずに倒産させる確率も高くなる。これは、長期債がさほど多くなく、また倒産費用控除後の資産価値が比較的高いのであれば、短期債の償還が不可能でも猶予せずあえて倒産させたほうが価値が高いと考えるからである。

資産回収率が低い $(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (10, 20, 0.5), (20, 10, 0.5)$ を見ても同じことが言える。初期

資産価格が同じ場合、資産回収率が低いと短期債のロールオーバーの際の償還 CV は高くなるので、N モデルでは倒産リスクはより高くなる。また、償還猶予がある D、S モデルでは、倒産費用がより多くかかるために、今倒産させることがより不利になる確率が高くなるため、倒産が先延ばしになっているのが分かる。

最後に、短期債の額面が等しく、長期債の額面が違う場合に新モデルで短期的な倒産確率がどのように変化するかを考察する。$(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (10,20,0.9),(10,10,0.9)$ を比べると、長期債が多くなった場合には、新モデルは変化していないが、資産回収率が低い場合の $(f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \alpha) = (10,20,0.5),(10,10,0.5)$ で比べると、新モデルでも若干増えている。このように新モデルにおいて、短期債の額面を一定として長期債の額面を大きくした際に、資産回収率が低い場合には短期的倒産確率が上がるのは、長期債の額面が大きなったことによって長期債の満期で倒産する確率が高くなり、かつ資産回収率が低いために、倒産費用控除後の資産価値が短期債の額面より小さくなる確率が高くなるため、同じ初期資産価値における短期債の価値が相対的に下がることによる。重要なのは後者の条件である。もし資産回収率が高ければ、倒産費用控除後の資産価値は短期債の額面より大きい確率が高くなり、結局短期債は額面が全額償還されるため、長期債の額面が上がっても短期債の価値は下がらない。したがって、資産回収率及び短期債の額面を一定にしたまま長期債を無限に大きくしても、短期債の価値は下がり続けずある一定の値で下げ止まり、短期的倒産リスクもある一定の値で上がるがそれ以上は高くならない。

６．結論

この論文では、企業が 2 種類の異なる満期の債券を保有していた場合の、債券および株式の価値および信用リスクについて、新たなモデルをつくって分析した。既存モデルの持つ一番の問題点であった、短期的な倒産リスクが負債の額面の総和にのみ依存し、その短期債務と長期債務の割合に依存しない点は、短期債務の返済をあらたに短期債務を抱えるモデルを作ることによって解消された。モデルは複雑になり計算の労力も増えることになったが、これはこの論文の大きな成果である。さらに、倒産費用をモデルに組み込むことにより、短期債債権者が償還を猶予すると債券の価値が上がり有利になるモデルに発展させることができた。このような償還の猶予は現実の世界でも多く見られるが、これを1つのリスクファクターによって説明できたことは意義があると考えられる。また、短期債債権者が長期債債権者を兼ねる場合には、また異なる結果が出てきたことも成果である。日本では近年関係が薄くなってきたとはいえ、いまだにメインバンク制度が強く根付いている。債権者である銀行が短期債務と長期債務で異なるか同一であるかは多くの企業で公表されており、これをモデルに組み入れることによって、これまでの信用リスク分析の結果は大きく変わる可能性があることは本文で示したとおりである。この論文では、理論的なフレームワークを提示するだけにとどめたが、今後このモデルを用いた実証分析を課題としたい。

７．Appendix

第３章における各証券と倒産費用の価値の和が資産価値になることの証明

短期債の価値は

$$
\begin{aligned}
&F_{1,i\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,i\cdot T_1}, \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})) \\
&= E_t\left[\exp\left\{-r\left(i\cdot T_1 - t\right)\right\}\left(f_{1,i\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{i\cdot T_1} > \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})\right\}} + \alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{i\cdot T_1} \le \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})\right\}}\right)\right] \\
&= E_t\left[\exp\left\{-r\left(i\cdot T_1 - t\right)\right\}\left(f_{1,i\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{i\cdot T_1}} + \alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{d_{i\cdot T_1}}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{73}
$$

で求められた。いま $A_{i\cdot T_1} > \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})$ の場合

$$
F_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T_1, A_{i\cdot T_1}; f_{1,(i+1)\cdot T_1}, \underline{A}_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1})) = f_{1,i\cdot T_1}
\tag{74}
$$

という $f_{1,(i+1)\cdot T_1}$ がただ一つに決まる。上にこれを代入すると Tower law を用いて、

$$
\begin{aligned}
&F_{1,i\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,i\cdot T_1}, \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})) \\
&= E_t\left[\exp\left\{-r\left(i\cdot T_1 - t\right)\right\}\left(F_{1,(i+1)\cdot T_1}(i\cdot T_1, A_{i\cdot T_1}; f_{1,(i+1)\cdot T_1}, \underline{A}_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1}))\cdot 1_{\bar{d}_{i\cdot T_1}} + \alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{d_{i\cdot T_1}}\right)\right] \\
&= E_t[\exp\left\{-r\left(i\cdot T_1 - t\right)\right\} \\
&\quad \cdot E_{i\cdot T_1}[\exp\left\{-r\left((i+1)\cdot T_1 - i\cdot T_1\right)\right\} \\
&\quad \cdot (f_{1,(i+1)\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{(i+1)\cdot T_1} > \underline{A}_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1})\right\}} + \alpha A_{(i+1)\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{(i+1)\cdot T_1} \le \underline{A}_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1})\right\}})]\cdot 1_{\bar{d}_{i\cdot T_1}} + \alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{d_{i\cdot T_1}}] \\
&= E_t[\exp\left\{-r\left((i+1)\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(f_{1,(i+1)\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{(i+1)\cdot T_1} > \underline{A}_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1})\right\}}\cdot 1_{\bar{d}_{i\cdot T_1}} \\
&\quad + \alpha A_{(i+1)\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{(i+1)\cdot T_1} \le \underline{A}_{(i+1)\cdot T_1}(f_{1,(i+1)\cdot T_1})\right\}} 1_{\bar{d}_{i\cdot T_1}}) + \exp\left\{-r\left(i\cdot T_1 - t\right)\right\}\alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{d_{i\cdot T_1}}] \\
&= E_t[\exp\left\{-r\left((i+1)\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(f_{1,(i+1)\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{(i+1)\cdot T_1}} + \alpha A_{(i+1)\cdot T_1}\cdot 1_{d_{(i+1)\cdot T_1}}) \\
&\quad + \exp\left\{-r\left(i\cdot T_1 - t\right)\right\}\alpha A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{d_{i\cdot T_1}}]
\end{aligned}
\tag{75}
$$

と変形できる。

$f_{1,(i+1)\cdot T_1}$ についても置き換えて同様の変形を繰り返していくと

$$F_{1,i\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,i\cdot T_1}, \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1}))$$
$$= E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(f_{1,N\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}} + \min(\alpha A_{N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1})\cdot 1_{d_{N\cdot T_1}}) \tag{76}$$
$$+\sum_{j=i}^{N-1}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot\alpha A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]$$

である。これより、

$$F_{1,i\cdot T_1}(t, A_t; f_{1,i\cdot T_1}, \underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})) + F_{2,N\cdot T_1}(t, A_t; i\cdot T_1, f_{1,i\cdot T_1}, f_{2,N\cdot T_1})$$
$$= E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot f_{1,N\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}} + \exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot\min(\alpha A_{N\cdot T_1}, f_{1,N\cdot T_1})\cdot 1_{d_{N\cdot T_1}}$$
$$+\sum_{j=i}^{N-1}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot\alpha A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]$$
$$+ E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot\left(f_2\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}} + \max(\alpha A_{N\cdot T_1} - f_{1,N\cdot T_1}, 0)\cdot 1_{d_{N\cdot T_1}}\right)]$$
$$= E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(f_{1,N\cdot T_1} + f_2)\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}} + \exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot\alpha A_{N\cdot T_1}\cdot 1_{d_{N\cdot T_1}} \tag{77}$$
$$+\sum_{j=i}^{N-1}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot\alpha A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]$$
$$= E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(f_{1,N\cdot T_1} + f_2)\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}} + \sum_{j=i}^{N}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot\alpha A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]$$

よって、

$$F_{1,i\cdot T_1}(t, A_t) + F_{2,N\cdot T_1}(t, A_t) + S(t, A_t) + D(t, A_t)$$
$$= E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(f_{1,N\cdot T_1} + f_2)\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}} + \sum_{j=i}^{N}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot\alpha A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]$$
$$+ E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(A_{N\cdot T_1} - (f_{1,N\cdot T_1} + f_2))\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}}] \tag{78}$$
$$+ E_t[\sum_{j=i}^{N}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot(1-\alpha)A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]$$
$$= E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot A_{N\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}} + \sum_{j=i}^{N}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1 - t\right)\right\}\cdot A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]$$

ここで、$t = (N-1)\cdot T_1$における条件付期待値をとると、(78)式の右辺は

$$
\begin{aligned}
&E_t[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{N\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}}+\sum_{j=i}^{N}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]\\
&=E_t[E_{(N-1)\cdot T_1}[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{N\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{N\cdot T_1}}+\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{N\cdot T_1}\cdot 1_{d_{N\cdot T_1}}]\cdot 1_{\bar{d}_{(N-1)\cdot T_1}}\\
&\quad+\sum_{j=i}^{N-1}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}] \qquad (79)\\
&=E_t[E_{(N-1)\cdot T_1}[\exp\left\{-r\left(N\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{N\cdot T_1}]\cdot 1_{\bar{d}_{(N-1)\cdot T_1}}+\sum_{j=i}^{N-1}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]\\
&=E_t[\exp\left\{-r\left((N-1)\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{(N-1)\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{(N-1)\cdot T_1}}+\sum_{j=i}^{N-1}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]
\end{aligned}
$$

となる。$t=(N-2)\cdot T_1,\cdots,i\cdot T_1$で同様の計算を繰り返すと

$$
\begin{aligned}
&E_t[\exp\left\{-r\left((N-1)\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{(N-1)\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{(N-1)\cdot T_1}}+\sum_{j=i}^{N-1}\exp\left\{-r\left(j\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{j\cdot T_1}\cdot 1_{d_{j\cdot T_1}}]\\
&=\cdots \qquad (80)\\
&=E_t[\exp\left\{-r\left(i\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{\bar{d}_{i\cdot T_1}}+\exp\left\{-r\left(i\cdot T_1-t\right)\right\}\cdot A_{i\cdot T_1}\cdot 1_{d_{i\cdot T_1}}]\\
&=A_t
\end{aligned}
$$

つまり

$$
F_{1,i\cdot T_1}(t,A_t)+F_{2,N\cdot T_1}(t,A_t)+S(t,A_t)+D(t,A_t)=A_t \qquad (81)
$$

が常に成立し、短期債、長期債、株式及び倒産費用の現在価値の和は現在の資産価値に等しいことが数学的に証明された。債権者が償還猶予をする場合にも同様の方法で証明される。

Delianedis and Geske(1998)で倒産費用がある場合

G モデルで$t<T_1$における短期債、長期債、株式及び倒産費用の価値は

$$
F^G_{1,T_1}(t,A_t;f_{1,T_1},f_{2,T_2},\underline{A}^G_{T_1})=E_t\left[\exp\left\{-r\left(T_1-t\right)\right\}\left(f_{1,T_1}\cdot 1_{\left\{A_{T_1}>\underline{A}^G_{T_1}\right\}}+\min(\alpha A_{T_1},f_{1,T_1})\cdot 1_{\left\{A_{T_1}\le\underline{A}^G_{T_1}\right\}}\right)\right] \qquad (82)
$$

$$
\begin{aligned}
F^G_{2,T_2}(t,A_t;f_{1,T_1},f_{2,T_2},\underline{A}^G_{T_1})=E_t[&\exp\left\{-r\left(T_1-t\right)\right\}\cdot\max(\alpha A_{T_1}-f_{1,T_1},0)\cdot 1_{\left\{A_{T_1}\le\underline{A}^G_{T_1}\right\}}\\
&+\exp\left\{-r\left(T_2-t\right)\right\}\left(f_{2,T_2}\cdot 1_{\left\{A_{N\cdot T_1}>f_{2,T_2}\right\}}+\alpha A_{N\cdot T_1}\cdot 1_{\left\{A_{N\cdot T_1}\le f_{2,T_2}\right\}}\right)\cdot 1_{\left\{A_{T_1}>\underline{A}^G_{T_1}\right\}}]
\end{aligned} \qquad (83)
$$

$$S^G(t, A_t; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \underline{A}_{T_1}^G) = E_t[\exp\left\{-r\left(T_2 - t\right)\right\}(A_{T_2} - f_{2,T_2}) \cdot 1_{\left\{A_{T_2} > f_{2,T_2} \wedge A_{T_1} > \underline{A}_{T_1}^G\right\}}] \tag{84}$$

$$\begin{aligned} D^G(t, A_t; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, \underline{A}_{T_1}^G) = E_t[&\exp\left\{-r\left(T_1 - t\right)\right\} \cdot (1-\alpha)A_{T_1} \cdot 1_{\left\{A_{T_1} \le \underline{A}_{T_1}^G\right\}} \\ &+ \exp\left\{-r\left(T_2 - t\right)\right\} \cdot (1-\alpha)A_{T_2} \cdot 1_{\left\{A_{T_2} \le f_{2,T_{21}} \wedge A_{T_1} > \underline{A}_{T_1}^G\right\}}] \end{aligned} \tag{85}$$

と求められる。ただし $\underline{A}_{T_1}^G$ は

$$BScall(\underline{A}_{T_1}^G, f_{2,T_2}, T_2 - T_1) = f_{1,T_1} \tag{86}$$

の解である。ただし $BScall(A, f, t)$ は現在の原資産価格を A 、権利行使価格を f 、満期までの期間が t のコールオプションのブラックショールズ価格である。

Leland and Toft(1996)で債券が 2 種類ある場合の解析解

短期債と長期債の保有高と資産回収率の値によって場合分けをする。
以下では、

$$V_i = 2a \cdot \exp(-rT_i) N(a\sigma\sqrt{T_i}) - 2z \cdot N(z\sigma\sqrt{T_i}) + 1$$

$$W_i = -(2z + \frac{2}{z\sigma^2 T_i}) N(z\sigma\sqrt{T_i}) - \frac{2}{\sigma\sqrt{T_i}} n(z\sigma\sqrt{T_i}) + \frac{1}{z\sigma^2 T_i} + 1$$

$$a = \frac{1}{\sigma^2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)$$

$$z = \frac{1}{\sigma^2}(r + \frac{1}{2}\sigma^2)$$

$$x = \frac{2r}{\sigma^2}$$

と置く。ただし、$n(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数である。

(ｉ) $\alpha \le \dfrac{(1+x) f_{1,T_1}}{(1+W_1) f_{1,T_1} - \sum_{i=1}^{2} \dfrac{V_i f_{i,T_i}}{rT_i}}$ の場合

このとき、企業が倒産する際の資産の配分は短期債債権者にのみ行われる。倒産が起こる閾値 A_B^1 は、

$$A_B^1 = \frac{\sum_{i=1}^{2} \frac{V_i f_{i,T_i}}{rT_i}}{(W_1 + x)\alpha - (1+x)} \tag{87}$$

と求められる。

$$F_{1,T_1}^L(A_t; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^1) = \left(\frac{1-\exp(-rT_1)}{rT_1} - I(T_1) \right) \cdot f_{1,T_1} + J(T_1) \cdot \alpha A_B^1 \tag{88}$$

$$F_{2,T_1}^L(A_t; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^1) = \left(\frac{1-\exp(-rT_2)}{rT_2} - I(T_2) \right) \cdot f_{2,T_2} \tag{89}$$

$$D^L(A_t; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^1) = (1-\alpha) A_B^1 \left(\frac{A_t}{A_B^1} \right)^{-x} \tag{90}$$

$$\begin{aligned} &S^L(A_t; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^1) \\ &= A_t - F_{1,T_1}^L(A_t; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^1) - F_{2,T_1}^L(A_t; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^1) - D^L(A_t; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^1) \end{aligned} \tag{91}$$

ただし、

$$I(T_i) = \frac{1}{rT_i}(G(T_i) - \exp(-rT_i)F(T_i))$$

$$J(T_i) = \frac{1}{z\sigma\sqrt{T_i}} \left(-\left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-a+z} N[q_1(T_i)]q_1(T_i) + \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-a-z} N[q_2(T_i)]q_2(T_i) \right)$$

$$F(T_i) = N[h_1(T_i)] + \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-2a} N[h_2(T_i)]$$

$$G(T_i) = \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-a+z} N[q_1(T_i)] + \left(\frac{A_t}{A_B} \right)^{-a-z} N[q_2(T_i)]$$

$$q_1(T_i) = \frac{-b - z\sigma^2 T_i}{\sigma\sqrt{T_i}} \quad q_2(T_i) = \frac{-b + z\sigma^2 T_i}{\sigma\sqrt{T_i}}$$

$$h_1(T_i) = \frac{-b - a\sigma^2 T_i}{\sigma\sqrt{T_i}} \quad h_2(T_i) = \frac{-b + a\sigma^2 T_i}{\sigma\sqrt{T_i}}$$

$$b = \log\left(\frac{A_t}{A_B}\right)$$

である。

(ⅱ) $\alpha > \dfrac{(1+x) f_{1,T_1}}{(1+W_1) f_{1,T_1} - \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i f_{i,T_i}}{rT_i}}$ の場合

このとき、企業が倒産する際の資産の配分は、短期債債権者には額面が全て支払われ、残りが長期債債権者へ支払われる。倒産が起こる閾値 A_B^{12} は、

$$A_B^{12} = \frac{\sum_{i=1}^{2} \frac{V_i f_{i,T_i}}{rT_i} - (W_1 - W_2) f_{1,T_1}}{(W_2 + x)\alpha - (1+x)} \tag{92}$$

と求められる。

$$F_{1,T_1}^L (A_t ; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^{12}) = \left(\left(\frac{1-\exp(-rT_1)}{rT_1} - I(T_1) \right) + J(T_1) \right) \cdot f_{1,T_1} \tag{93}$$

$$F_{2,T_1}^L (A_t ; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^{12}) = \left(\frac{1-\exp(-rT_2)}{rT_2} - I(T_2) \right) \cdot f_{2,T_2} + J(T_2) \cdot (\alpha A_B^{12} - f_{1,T_1}) \tag{94}$$

$$D^L (A_t ; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^{12}) = (1-\alpha) A_B^{12} \left(\frac{A_t}{A_B^{12}} \right)^{-x} \tag{95}$$

$$\begin{aligned} & S^L (A_t ; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^{12}) \\ & = A_t - F_{1,T_1}^L (A_t ; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^{12}) - F_{2,T_1}^L (A_t ; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^{12}) - D^L (A_t ; f_{1,T_1}, f_{2,T_2}, A_B^{12}) \end{aligned} \tag{96}$$

参考文献

Black, F., and J. C. Cox, 1976, “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions,” *Journal of Finance* Vol. 31, pp. 351-368.

Black, F., and M. Scholes, 1973, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Finance* Vol. 31, pp 351-368.

Delianedis, G. and R. Geske, 1998, “Credit Risk and Risk Neutral Default Probabilities: Information about Rating Migrations and Defaults,” UCLA, Anderson Working Paper, May.

Geske, R. 1977, “The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options,” *Journal of Financial and Quantitatives Analysis*, Vol. 12, pp. 541-552.

Kobayashi, T., A. Takahashi, and N. Nakagawa, 2001, "Pricing Convertible Bonds with Default Risk," *Journal of Fixed Income*, Vol.11, pp . 20-29.

Leland, H., 1994, “Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure,” *Journal of Finance* Vol. 49, pp. 1213-1252.

Leland, H. and Toft, K, 1996, “Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads,” *Journal of Finance* Vol. 51, pp. 987-1019.

脚注

[1]「長期債の満期以前」という表現は長期債の満期は含まれない。以後も同様である。

[2] 償還 CV $\underline{A}_{i\cdot T_1}(f_{1,i\cdot T_1})$ は $f_{1,i\cdot T_1}$ 以外のパラメーターにも依存するがここでは省略して表現する。

[3] 以降、同様のノーテーションを含め、セミコロン以下は省略することがある。

[4] ただし、α=1 の場合、額面を上げていくと短期債の価値は単調増加する。これは、額面を上げていっても倒産した際に費用がかからないので、額面を上げて倒産確率が高くなっても費用として流出しなくなるためである。

[5] 猶予する場合に額面は変わらないので $f_{1,N\cdot T_1} = f_{1,(N-1)\cdot T_1}$ と置き換えられる。

[6] L モデルの結果のうち空欄になっている行があるのは、仮定の資産価値の方が閾値よりも高く解がなかったためである。また、L モデル以外のモデルによる証券価値はすべてモンテカルロシミュレーションによって計算したために、負債、株式、倒産費用の和が初期資産価値とややずれている場合があるが、考察に際しては特に問題はない。

[7] これは厳密には以下のように説明できる。いま、ある資産価値のパスを一つ持ってきて、そのパスに対する N モデルと D モデルによる証券の価値を比べたとき、パスによらず常に長期債・株式のペイオフが D モデルの方が小さくなることがなく、かつ厳密に D モデルの方が大きくなるようなパスがあることを言えばよい。同じ額面に対する短期債の価値は D モデルのほうが常に高いことから、短期債の各満期における償還 CV は N モデルの方が高くなる。よって、あるパスのとき D モデルで倒産している場合には、N モデルでも必ず倒産しているので、この場合には長期債・株式のペイオフはともに 0 である。D モデルでは倒産しないが N モデルで倒産するパスの場合は、明らかに長期債・株式とも厳密に N モデルより D モデルの方が高いペイオフになる。最後に、N モデルでも D モデルでも倒産しない場合を比べると、N モデルの場合には短期債の償還のときにより高い利率で新たな短期債を発行しなくてはいけないので、同じパスの場合、長期債の満期に償還する短期債の額面は必ず N モデルの方が大きい。よって株式のペイオフは逆に N モデルの方が小さくなる。よって、どのようなパスでも長期債・株式ともに N モデルより D モデルの方が小さくなることはなく、かつ D モデルでは倒産しないが N モデルでは倒産する場合には長期債・株式のペイオフは厳密に D モデルの方が大きくなるようなパスがあることが言えた。