Kryptographie II
Asymmetrische Kryptographie

Christopher Wolf

Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Sommersemester 2010

Organisatorisches

- Vorlesung: **Mi 10:15–11:45** in NA 6/99 (2+2 SWS, 6 CP)
- Übung: **Mi 12:15–13:45** in NA 6/99
- Assistent: **Alexander Meurer**, Korrektor: **Florian Giesen**
- Übungsbetrieb: jeweils abwechselnd alle 2 Wochen
  - Präsenzübung, Start 21. April
  - Zentralübung, Start 28. April (Abgabe: 26. April)
- Übungsaufgaben werden korrigiert.
- Gruppenabgaben bis 3 Personen
- Bonussystem:
  1/3-Notenstufe für 50%, 2/3-Notenstufe für 75%
  Gilt nur, wenn man die Klausur besteht!
- Klausur: Mitte-Ende August (vermutlich)

Literatur

Vorlesung richtet sich nach

- Jonathan Katz, Yehuda Lindell, “Introduction to Modern Cryptography”, Taylor & Francis, 2008

Weitere Literatur

- S. Goldwasser, M. Bellare, “Lecture Notes on Cryptography”, MIT, online, 1996–2008
- O. Goldreich, “Foundations of Cryptography – Volume 1 (Basic Tools)”, Cambridge University Press, 2001
- O. Goldreich, “Foundations of Cryptography – Volume 2 (Basic Applications)”, Cambridge University Press, 2004s
- A.J. Menezes, P.C. van Oorschot und S.A.Vanstone, “Handbook of Applied Cryptography”, CRC Press, 1996

Erinnerung an Kryptographie I

Symmetrische Kryptographie

- Parteien besitzen gemeinsamen geheimen Schlüssel.
- Erlaubt Verschlüsselung, Authentifikation, Hashen, Pseudozufallspermutationen.
- **Frage:** Wie tauschen die Parteien einen Schlüssel aus?

Nachteile

1. U Teilernehmer benötigen $\binom{U}{2} = \Theta(U^2)$ viele Schlüssel.
2. Jeder Teilnehmer muss $U - 1$ Schlüssel sicher speichern. Update erforderlich, falls Teilnehmer hinzukommen oder gelöscht werden.
3. Schlüsselaustausch funktioniert nicht in offenen Netzen.

Schlüsselverteilungs-Center (KDC)

Partielle Lösung: Verwenden vertrauenswürdige Instanz

- IT-Manager eröffnet Key Distribution Center (KDC).
- Teilnehmer besitzen gemeinsamen, geheimen Schlüssel mit KDC.
- Alice schickt Nachricht “Kommunikation mit Bob” an KDC.
- Alice authentisiert Nachricht mit ihrem geheimen Schlüssel.
- KDC wählt einen *Session-Key* k, d.h. einen neuen Schlüssel.
- KDC schickt Verschlüsselung $E_{Alice}(k)$ an Alice.
- KDC schickt Verschlüsselung $E_{Bob}(k)$ an Bob.

Alternativ im Needham Schröder Protokoll:
KDC schickt $E_{Bob}(k)$ an Alice und diese leitet an Bob weiter.

Vor- und Nachteile von KDCs

Vorteile

- Jeder Teilnehmer muss nur *einen* Schlüssel speichern.
- Hinzufügen/Entfernen eines Teilnehmers erfordert Update *eines* Schlüssels.

Nachteile

- Kompromittierung von KDC gefährdet das gesamte System.
- Falls KDC ausfällt, ist sichere Kommunikation nicht möglich.

Praktischer Einsatz von KDCs

- Kerberos (ab Windows 2000)

Diffie Hellman Gedankenexperiment

Szenario

- Alice will eine Kiste zu Bob schicken.
- Post ist nicht zu trauen, d.h. die Kiste muss verschlossen werden.
- Sowohl Alice als auch Bob besitzen ein Schloss.

Algorithmus 3-Runden Diffie-Hellman Austausch

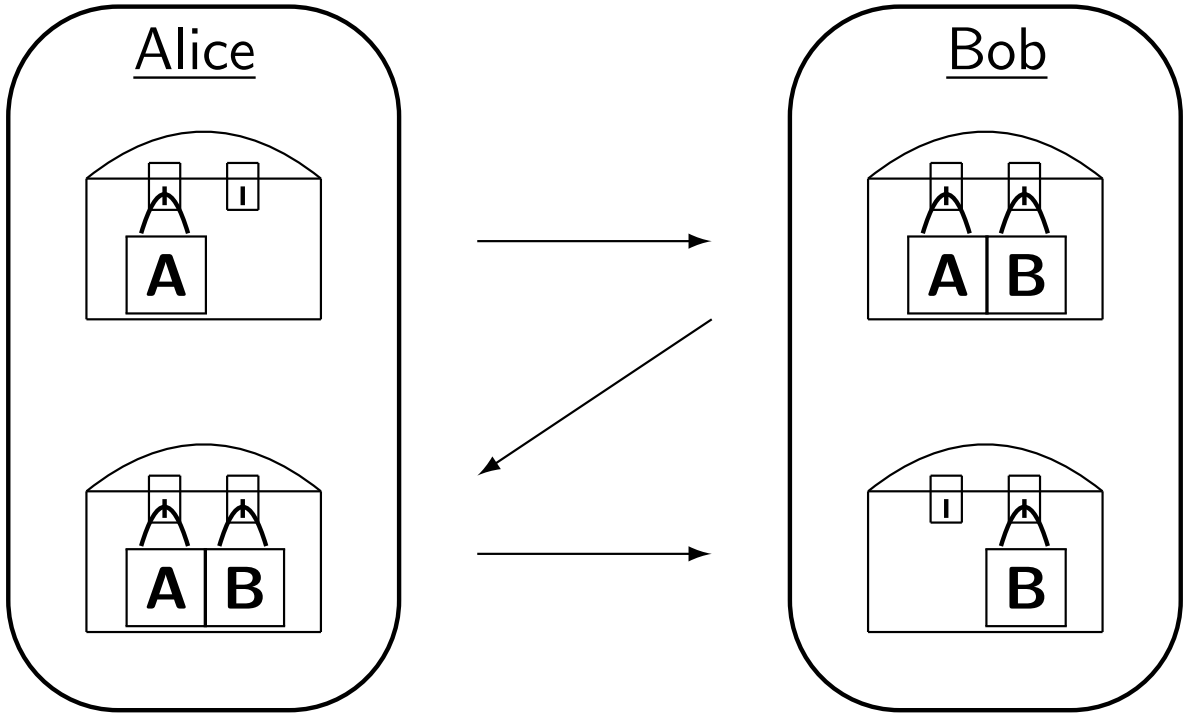
1. Alice sendet die Kiste an Bob, verschlossen mit ihrem Schlüssel.
2. Bob sendet die Kiste zurück, verschlossen mit seinem Schlüssel.
3. Alice entfernt ihr Schloss und sendet die Kiste an Bob.
4. Bob entfernt sein Schloss und öffnet die Kiste.

(Nicht sicher gegen Man-in-the-middle-Angriff—aktiver Angreifer!)

Beobachtung: Viele Funktionen sind inherent asymmetrisch.

- Zudrücken eines Schlosses ist leicht, Öffnen ist schwer.
- Multiplizieren von Zahlen ist leicht, Faktorisieren ist schwer.
- Exponentieren von Zahlen ist leicht, dlog ist (oft) schwer.

Diffie Hellman Gedankenexperiment



Diffie-Hellman Schlüsselaustausch (1976)

Szenario:

- Alice und Bob verwenden öffentlichen Kanal.
- Beide wollen einen zufälligen Bitstring k austauschen.
- **Angreifer ist passiv**, d.h. kann nur lauschen, nicht manipulieren.

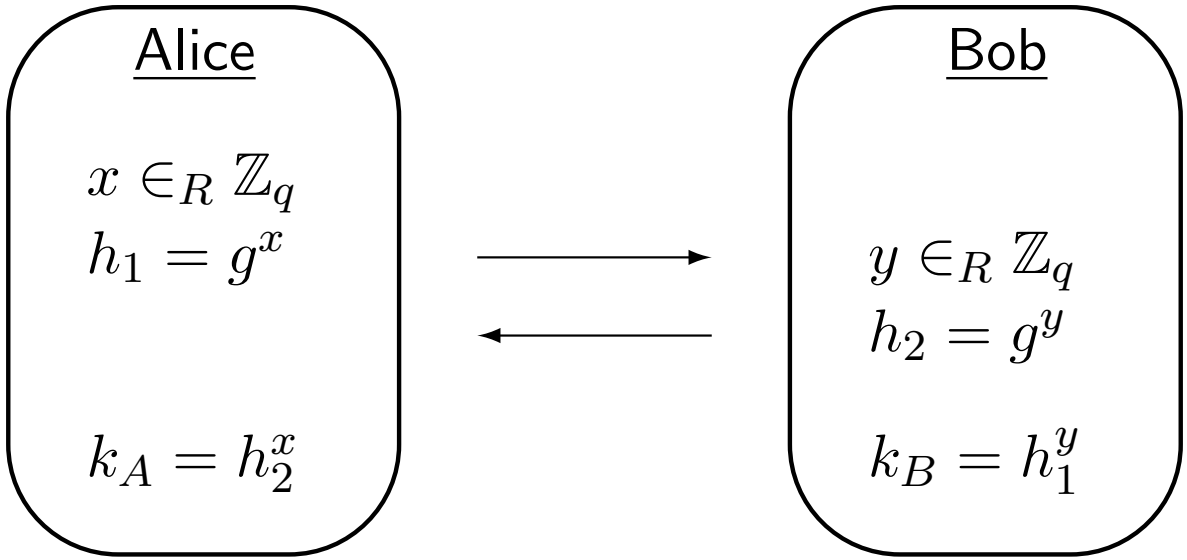
Systemparameter:

- Sicherheitsparameter 1^n
- Schlüsselerzeugung $(G, q, g) \leftarrow \mathcal{G}(1^n)$
  - $\mathcal{G}$ ist probabilistischer polynomial-Zeit (in n) Algorithmus
  - G ist multiplikative Gruppe mit Ordnung q und Generator g.

2-Runden Diffie-Hellman Schlüsselaustausch

Protokoll 2-Runden Diffie-Hellman Schlüsselaustausch

1. Alice: Wähle $x \in_R \mathbb{Z}_q$. Sende $h_1 = g^x$ an Bob.
2. Bob: Wähle $y \in_R \mathbb{Z}_q$. Sende $h_2 = g^y$ an Alice.
3. Alice: Berechne $k_A = h_2^x$.
4. Bob: Berechne $k_B = h_1^y$.



Korrektheit und Schlüsselerzeugung

Korrektheit: $k_A = k_B$

- Alice berechnet Schlüssel $k_A = h_2^x = (g^y)^x = g^{xy}$.
- Bob berechnet Schlüssel $k_B = h_1^y = (g^x)^y = g^{xy}$.

Schlüsselerzeugung:

- Gemeinsamer Schlüssel $k_A \in G$ ist Gruppenelement, kein Zufallsstring $k \in \{0,1\}^m$.
- Konstruktion von Zufallsstring mittels sog. *Zufallsextraktoren*.
- Sei k_A ein zufälliges Gruppenelement aus G.
- Zufallsextraktor liefert bei Eingabe k_A einen Schlüssel $k \in \{0,1\}^m$, ununterscheidbar von einem Zufallsstring derselben Länge.

Übung: Schlüssel k + sichere symmetrische Verschlüsselung liefert zusammen ein beweisbar sicheres Verfahren.

Spiel zur Unterscheidung des Schlüssels

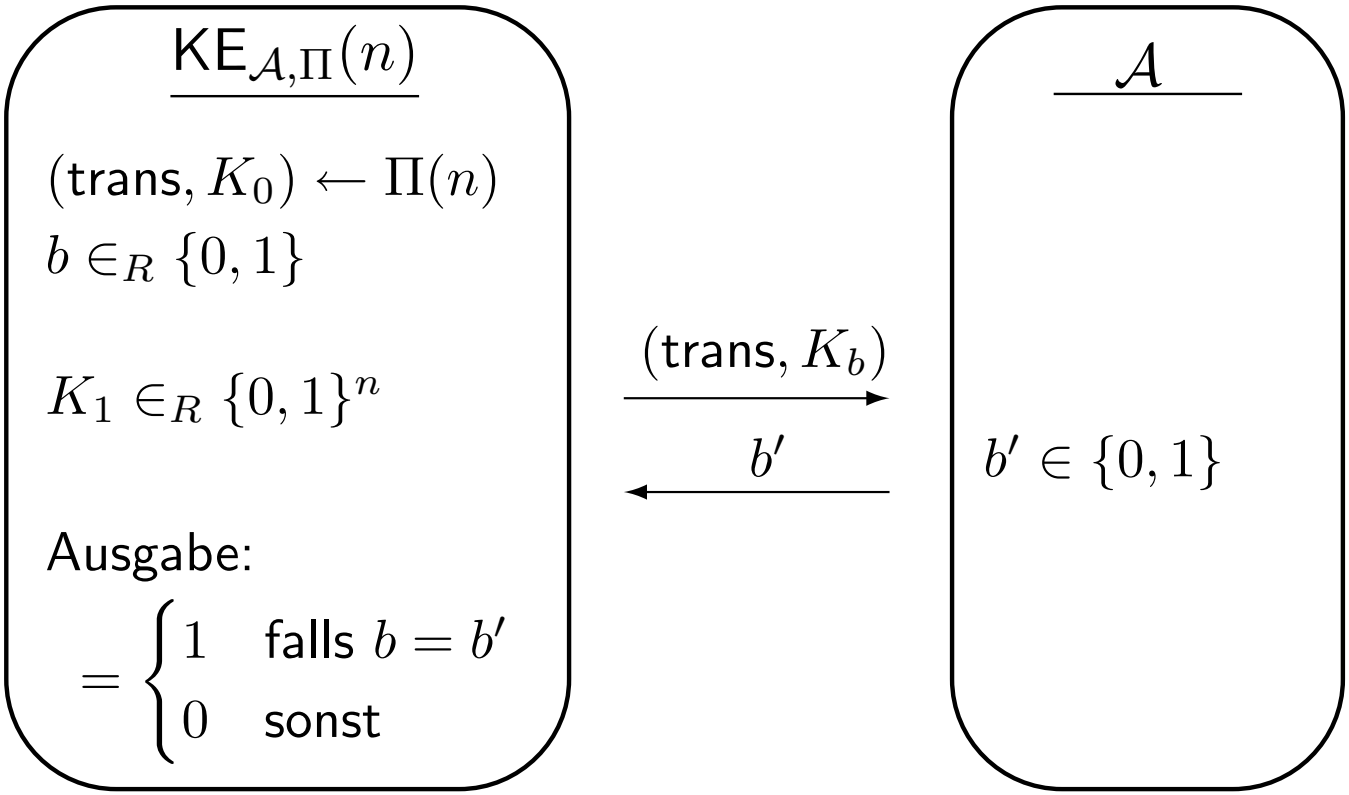
Spiel Schlüsselaustausch $KE_{\mathcal{A},\Pi}(n)$

Sei Π ein Schlüsselaustausch-Protokoll für Gruppenelemente aus G. Sei $\mathcal{A}$ ein Angreifer für Π.

1. $(k, \text{trans}) \leftarrow \Pi(n)$, wobei k der gemeinsame Schlüssel und trans der Protokollablauf ist.
2. Wähle $b \in_R \{0,1\}$. Falls $b = \begin{cases} 1 & k' = k \\ 0 & k' \in_R G \end{cases}$.
3. $b' \leftarrow \mathcal{A}(\text{trans}, k')$. Ausgabe $\begin{cases} 1 & \text{falls } b' = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

- $\mathcal{A}$ gewinnt, falls $KE_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1$.
- D.h. $\mathcal{A}$ gewinnt, falls er erkennt, welches der korrekte Schlüssel k des Protokolls Π und welches der zufällige Schlüssel $k' \in_R G$ ist.
- $\mathcal{A}$ kann trivialerweise mit Ws $\frac{1}{2}$ gewinnen. (Wie?)

Spiel zur Unterscheidung des Schlüssels



Sicherheit Schlüsselaustausch

Definition negl

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ heißt *vernachlässigbar*, falls für jedes Polynom $p(n)$ und alle hinreichend großen n gilt $f(n) < \frac{1}{p(n)}$.
Notation: Wir bezeichnen eine bel. vernachlässigbare Fkt mit $\mathrm{negl}(n)$.

Bsp:

- $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$, $\frac{1}{n^{\log\log n}}$ sind vernachlässigbar.
- $\frac{1}{2^{\mathcal{O}(\log n)}}$ ist nicht vernachlässigbar.
- Es gilt $q(n) \cdot \mathrm{negl}(n) = \mathrm{negl}(n)$ für jedes Polynom $q(n)$.

Definition Sicherheit Schlüsselaustausch

Ein Schlüsselaustausch Protokoll Π ist sicher gegen passive Angriffe, falls für alle probabilistischen Polynomialzeit (ppt) Angreifer $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[KE_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$.

Der Wsraum ist definiert über die zufälligen Münzwürfe von $\mathcal{A}$ und Π.

dlog Problem

Definition Diskrete Logarithmus (dlog) Annahme

Das *Diskrete Logarithmus Problem* ist hart bezüglich $\mathcal{G}$, falls für alle ppt Algorithmen $\mathcal{A}$ gilt

$$|\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, g, q, g^x) = x]| \leq \mathrm{negl}.$$

Der Wsraum ist definiert bezüglich der zufälligen Wahl von $x \in \mathbb{Z}_q$ und der internen Münzwürfe von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{G}$.

dlog Annahme: Das dlog Problem ist hart bezüglich $\mathcal{G}$.

- Unter der dlog Annahme können die geheimen Schlüssel x, y bei Diffie-Hellman nur mit vernachlässigbarer Ws berechnet werden.
- D.h. die dlog Annahme ist eine notwendige Sicherheitsannahme.

CDH Problem

Definition Computational Diffie-Hellman (CDH) Annahme

Das *Computational Diffie-Hellman Problem* ist hart bezüglich $\mathcal{G}$, falls für alle ppt Algorithmen $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[A(G, g, q, g^x, g^y) = g^{xy}] \leq \mathrm{negl}$.

Wsraum: zufällige Wahl von $x, y \in \mathbb{Z}_q$, interne Münzwürfe von $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$.

CDH Annahme: Das CDH Problem ist hart bezüglich $\mathcal{G}$.

- Unter der CDH-Annahme kann ein DH-Angreifer Eve den Schlüssel $k_A = g^{xy}$ nur mit vernachlässigbarer Ws berechnen.

Problem:

- Sei CDH schwer, so dass Angreifer Eve k_A nicht berechnen kann.
- Benötigen aber, dass k_A ein zufälliges Gruppenelement in G ist.
- Unterscheiden von g^{xy} und $g^z, z \in_R \mathbb{Z}_q$ könnte einfach sein.

DDH Problem

Definition Decisional Diffie-Hellman (DDH) Annahme

Das *Decisional Diffie-Hellman Problem* ist hart bezüglich $\mathcal{G}$, falls für alle ppt Algorithmen $\mathcal{A}$ gilt

$$|\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, q, g, g^x, g^y, g^{xy}) = 1] - \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, q, g, g^x, g^y, g^z) = 1]| \leq \mathrm{negl}.$$

Wsraum: zufällige Wahl von $x, y, z \in \mathbb{Z}_q$, interne Münzwürfe von $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$.

DDH Annahme: Das DDH Problem ist hart bezüglich $\mathcal{G}$.

- Unter der DDH-Annahme kann Eve den DH-Schlüssel g^{xy} nicht von einem zufälligen Gruppenelement unterscheiden.

Sicherheitsbeweis des DH-Protokolls

Satz Sicherheit des Diffie-Hellman Protokolls

Unter der DDH-Annahme ist das DH-Protokoll Π sicher gegen passive Angreifer $\mathcal{A}$.

Beweis: Es gilt $\mathrm{Ws}[KE_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1]$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ws}[KE_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1 \mid b = 1] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ws}[KE_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1 \mid b = 0] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, g, q, g^x, g^y, g^{xy}) = 1] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, g, q, g^x, g^y, g^z) = 0] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, g, q, g^x, g^y, g^{xy}) = 1] + \frac{1}{2} \cdot (1 - \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, g, q, g^x, g^y, g^z) = 1] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, g, q, g^x, g^y, g^{xy}) = 1] - \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, g, q, g^x, g^y, g^z) = 1]) \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, g, q, g^x, g^y, g^{xy}) = 1] - \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, g, q, g^x, g^y, g^z) = 1]| \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{negl} \quad \text{nach DDH-Annahme.}
\end{aligned}
$$

Public-Key Verschlüsselung

Szenario: Asymmetrische/Public Key Verschlüsselung

- Schlüsselpaar (pk, sk) aus öffentlichem/geheimem Schlüssel.
- Verschlüsselung Enc_{pk} ist Funktion des öffentlichen Schlüssels.
- Entschlüsselung Dec_{sk} ist Funktion des geheimen Schlüssels.
- pk kann veröffentlicht werden, z.B. auf Webseite, Visitenkarte.
- pk kann über öffentlichen (authentisierten) Kanal verschickt werden.

Vorteile:

- Löst Schlüsselverteilungsproblem.
- Erfordert die sichere Speicherung eines einzigen Schlüssels.

Nachteil:

- Heutzutage deutlich langsamer als sym. Verschlüsselung.

Public-Key Verschlüsselung

Definition Public-Key Verschlüsselung

Ein *Public-Key Verschlüsselungsverfahren* ist ein 3-Tupel (Gen, Enc, Dec) von ppt Algorithmen mit

1. $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$, wobei pk, sk Länge mindestens n besitzen.
2. $c \leftarrow Enc_{pk}(m)$, wobei m aus dem Nachrichtenraum und c aus dem Chiffretextraum ist.
3. $Dec_{sk}(c)$ liefert Nachricht m oder $\perp$ (Entschlüsselungsfehler). Es gilt $\mathrm{Ws}[Dec_{sk}(Enc_{pk}(m)) = m] = 1 - \mathrm{negl}(n)$.

Ununterscheidbarkeit von Chiffretexten

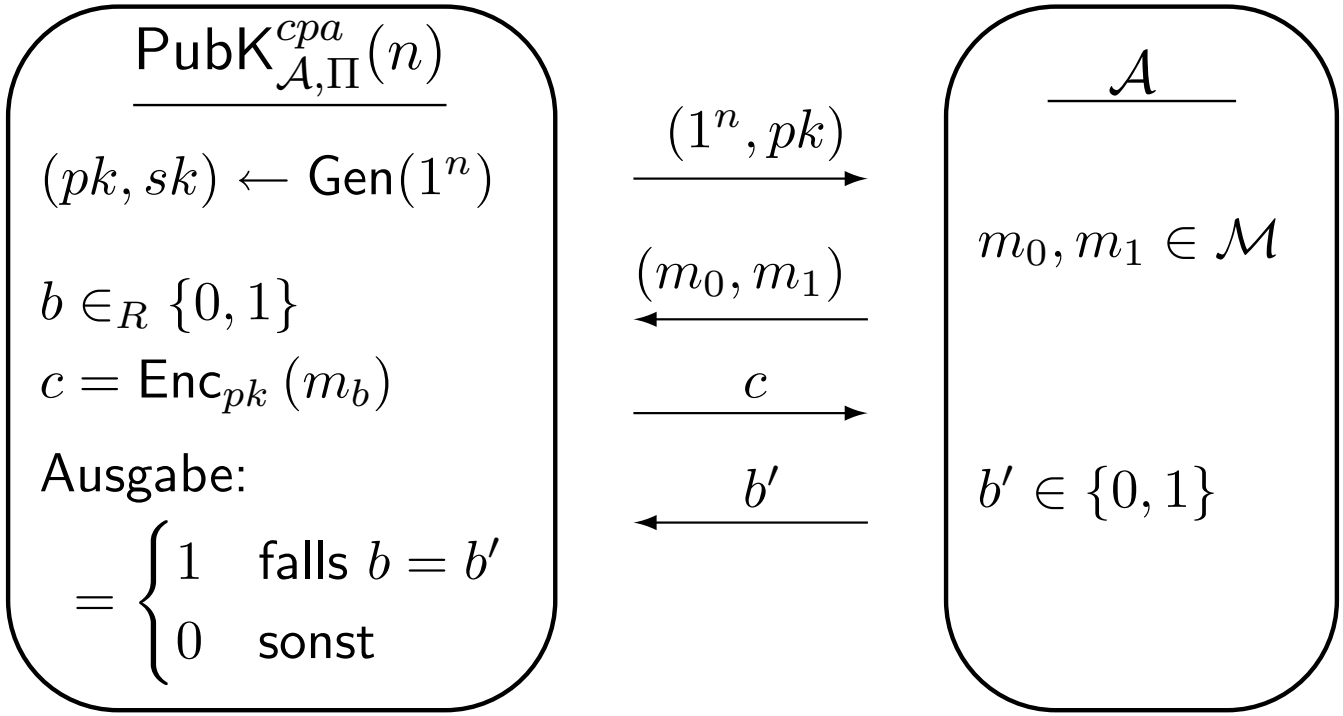
Spiel CPA Ununterscheidbarkeit von Chiffretexten $PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$

Sei Π ein PK-Verschlüsselungsverfahren und $\mathcal{A}$ ein Angreifer.

1. $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$
2. $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}(pk)$
3. Wähle $b \in_R \{0,1\}$. $b' \leftarrow \mathcal{A}(Enc_{pk}(m_b))$.
4. $$PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } b = b' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Man beachte, dass $\mathcal{A}$ Orakelzugriff auf Enc_{pk} besitzt.
- D.h. $\mathcal{A}$ kann sich beliebig gewählte Klartexte verschlüsseln lassen. (chosen plaintext attack = CPA)

CPA-Spiel


$\mathsf{PubK}^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$
$(pk, sk) \leftarrow \mathsf{Gen}(1^n)$
$b \in_R \{0,1\}$
$c = \mathsf{Enc}_{pk}(m_b)$
Ausgabe:
$= \begin{cases} 1 & \text{falls } b = b' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$(1^n, pk)$
(m_0, m_1)
c
b'
$\mathcal{A}$
$m_0, m_1 \in \mathcal{M}$
$b' \in \{0,1\}$

CPA Sicherheit

Definition CPA Sicherheit von Verschlüsselung

Ein PK-Verschlüsselungsverfahren $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$ besitzt ununterscheidbare Verschlüsselungen unter CPA falls für alle ppt $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathrm{Ws}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n).$$

- **Übung:** *Unbeschränkte* $\mathcal{A}$ können das Spiel $PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$ mit Ws $1 - \mathrm{negl}(n)$ gewinnen.
- Man beachte: Im symmetrischen Fall existiert perfekte Sicherheit, d.h. Ws genau $\frac{1}{2}$, gegenüber unbeschränkten $\mathcal{A}$. (One-time pad)

Unsicherheit deterministischer Verschlüsselung

Satz Deterministische Verschlüsselung

Deterministische PK-Verschlüsselung ist unsicher gegenüber CPA.

Beweis:

- $\mathcal{A}$ kann sich $Enc_{pk}(m_0)$ und $Enc_{pk}(m_1)$ selbst berechnen.
- D.h. ein Angreifer $\mathcal{A}$ gewinnt $PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$ mit Ws 1.

Mehrfache Verschlüsselung

Spiel Mehrfache Verschlüsselung $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$

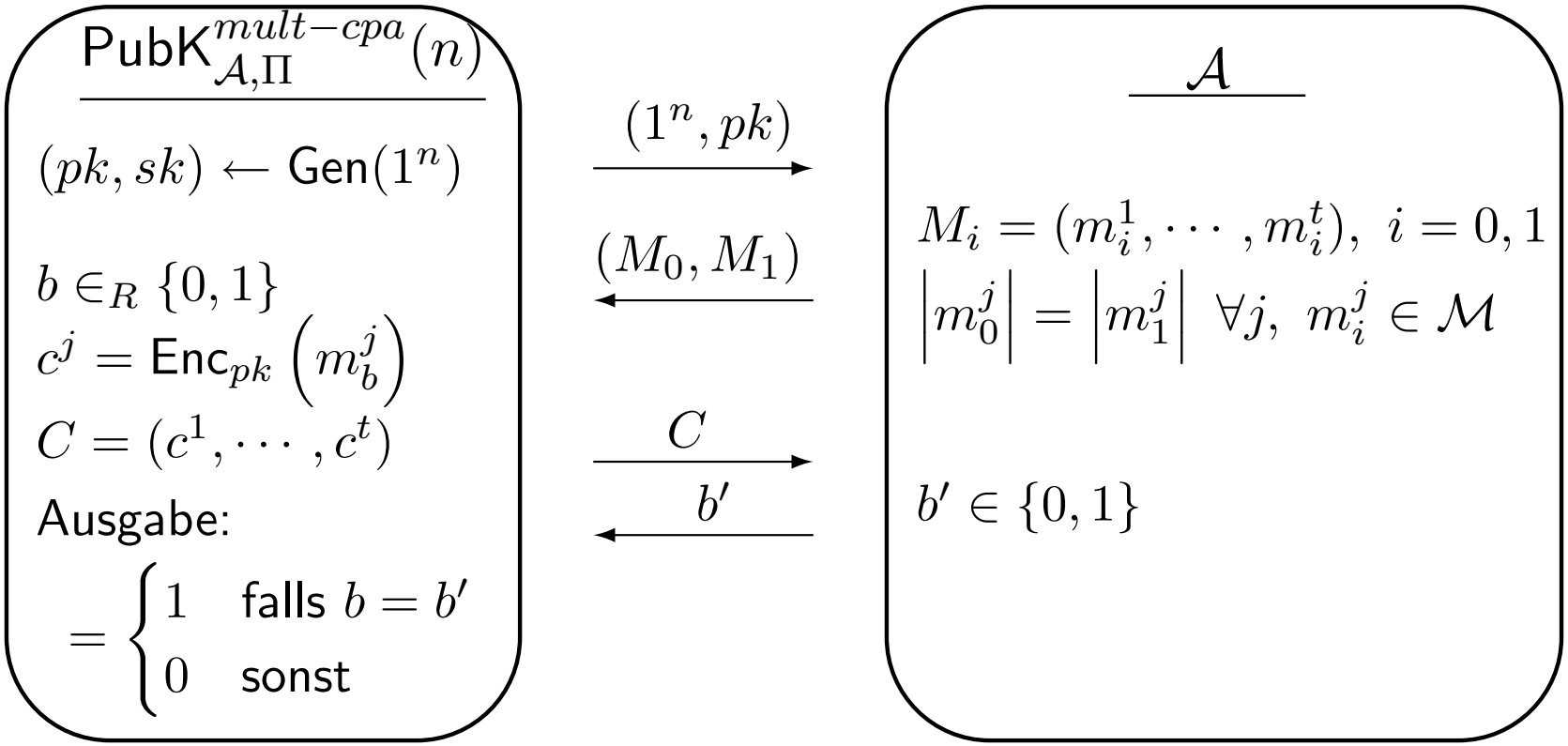
Sei Π ein PK-Verschlüsselungsverfahren und $\mathcal{A}$ ein Angreifer.

1. $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$
2. $(M_0, M_1) \leftarrow \mathcal{A}(pk)$, wobei $M_i = (m_i^1, \ldots, m_i^t), i = 1, 2$ und $|m_0^j| = |m_1^j|$ für $j \in [t]$.
3. Wähle $b \in_R \{0, 1\}$. $b' \leftarrow \mathcal{A}(Enc_{pk}(m_b^1), \ldots, Enc_{pk}(m_b^t))$.
4. $$PubK^{mult}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } b = b' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Definition CPA Sicherheit von mehrfacher Verschlüsselung

Ein PK-Verschlüsselungsverfahren $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$ besitzt ununterscheidbare mehrfache Verschlüsselungen unter CPA falls für alle ppt $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[PubK^{mult}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$.

multCPA-Spiel



Sicherheit mehrfacher Verschlüsselung

Satz Sicherheit mehrfacher Verschlüsselung

Sei Π ein PK-Verschlüsselungsschema. Π besitzt ununterscheidbare mehrfache Verschlüsselung unter CPA gdw Π ununterscheidbare Verschlüsselung unter CPA besitzt.

Beweis "$\Leftarrow$": Für $t = 2$.

- Ein Angreifer $\mathcal{A}$ gewinnt das Spiel $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$ mit Ws

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(Enc_{pk}(m_0^1), Enc_{pk}(m_0^2)) = 0] + \frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(Enc_{pk}(m_1^1), Enc_{pk}(m_1^2)) = 1].$$

- Daraus folgt $\mathrm{Ws}[PubK^{mult}_{\mathcal{A},\Pi}(n)] + \frac{1}{2} =$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(Enc_{pk}(m_0^1), Enc_{pk}(m_0^2)) = 0] + \frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(Enc_{pk}(m_1^1), Enc_{pk}(m_1^2)) = 1]$$
$$+ \quad \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(Enc_{pk}(m_0^1), Enc_{pk}(m_1^2)) = 0] + \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(Enc_{pk}(m_0^1), Enc_{pk}(m_1^2)) = 1]\right)$$

- **Ziel:** Zeigen, dass $\mathrm{Ws}[PubK^{mult}_{\mathcal{A},\Pi}(n)] + \frac{1}{2} \leq 1 + \mathrm{negl}(n)$.

Betrachten der Hybride

Lemma

$\frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(Enc_{pk}(m_0^1), Enc_{pk}(m_0^2)) = 0] + \frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(Enc_{pk}(m_0^1), Enc_{pk}(m_1^2)) = 1] \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n).$

Beweis: Sei $\mathcal{A}'$ Angreifer für *einfache* Verschlüsselungen.

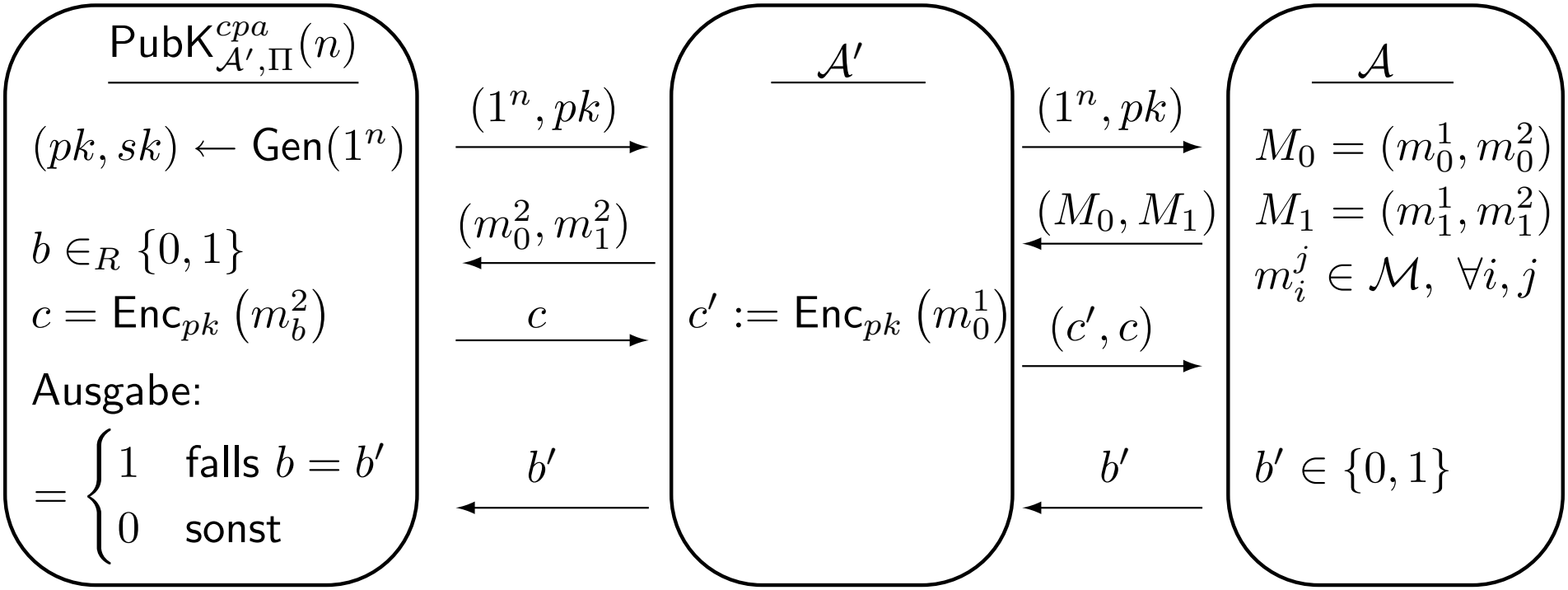
- $\mathcal{A}'$ versucht mittels $\mathcal{A}$ das Spiel $PubK^{cpa}_{\mathcal{A}',\Pi}(n)$ zu gewinnnen.

Strategie von Angreifer $\mathcal{A}'$

1. $\mathcal{A}'$ gibt pk an $\mathcal{A}$ weiter.
2. $(M_0, M_1) \leftarrow \mathcal{A}(pk)$ mit $M_0 = (m_0^1, m_0^2)$ und $M_1 = (m_1^1, m_1^2)$.
3. $\mathcal{A}'$ gibt (m_0^2, m_1^2) aus. $\mathcal{A}'$ erhält Chiffretext $c(b) = Enc_{pk}(m_b^2)$.
4. $b' \leftarrow \mathcal{A}(Enc_{pk}(m_0^1), c(b))$.
5. $\mathcal{A}'$ gibt Bit b' aus.

- $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}'(Enc_{pk}(m_0^2)) = 0] = \mathrm{Ws}[\mathcal{A}((Enc_{pk}(m_0^1), Enc_{pk}(m_0^2)) = 0]$ und
- $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}'(Enc_{pk}(m_1^2)) = 1] = \mathrm{Ws}[\mathcal{A}((Enc_{pk}(m_0^1), Enc_{pk}(m_1^2)) = 1]$.

Strategie des Angreifers bei Hybriden



Fortsetzung Hybridtechnik

Beweis(Fortsetzung):

- CPA Sicherheit von Π bei einzelnen Nachrichten impliziert

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\mathrm{negl}(n) &\geq \mathrm{Ws}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A}',\Pi}(n)=1]\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}'(Enc_{pk}(m_0^2))=0]+\frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}'(Enc_{pk}(m_1^2))=\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}((Enc_{pk}(m_0^1),Enc_{pk}(m_0^2))=0]+\\ &\quad \frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}((Enc_{pk}(m_0^1),Enc_{pk}(m_1^2))=1] \quad \square_{\text{Lemma}}\end{aligned}$$

- Analog kann gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\mathrm{negl}(n) &\geq \frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}((Enc_{pk}(m_0^1),Enc_{pk}(m_1^2))=0]+\\ &\quad \frac{1}{2}\mathrm{Ws}[\mathcal{A}((Enc_{pk}(m_1^1),Enc_{pk}(m_1^2))=1]\end{aligned}$$

- Daraus folgt $\mathrm{Ws}[PubK^{mult}_{\mathcal{A},\Pi}(n)]+\frac{1}{2}\geq 1+\mathrm{negl}(n)$. $\square_{\text{Satz für } t=2}$

Von fester zu beliebiger Nachrichtenlänge

- Beweistechnik für allgemeines t: Definiere für $i \in [t]$ Hybride
  $C^{(i)} = (Enc_{pk}(m_0^1), \ldots, Enc_{pk}(m_0^i), Enc_{pk}(m_1^{i+1}), \ldots, Enc_{pk}(m_1^t))$.
- $\mathrm{Ws}[PubK^{mult}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(C^{(t)}) = 0] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(C^{(0)} = 1]$.
- $\mathcal{A}'$ unterscheidet $Enc_{pk}(m_0^i)$ und $Enc_{pk}(m_1^i)$ für zufälliges $i \in [t]$.
- Entspricht dem Unterscheiden von $C^{(i)}$ und $C^{(i-1)}$.
- Liefert $\Pr[PubK^{mult}_{\mathcal{A},\Pi}(n)] \leq \frac{1}{2} + t \cdot \mathrm{negl}(n)$ $\square_{\text{Satz}}$.

Von fester zu beliebiger Nachrichtenlänge

- Sei Π ein Verschlüsselungsverfahren mit Klartexten aus $\{0,1\}^n$.
- Splitte $m \in \{0,1\}^*$ in $m_1, \ldots m_t$ mit $m_i \in \{0,1\}^n$.
- Definiere Π' mittels $Enc'_{pk}(m) = Enc_{pk}(m_1) \ldots Enc_{pk}(m_t)$.
- Aus vorigem Satz folgt: Π' ist CPA-sicher, falls Π CPA-sicher ist.

Hybride Verschlüsselungsverfahren

Ziel: Flexibilität von asym. Verfahren und Effizienz von sym. Verfahren.

- Sei $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$ ein PK-Verschlüsselungsverfahren und $\Pi' = (Gen', Enc', Dec')$ ein SK-Verschlüsselungsverfahren.
- Berechne $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$.

Algorithmus Hybride Verschlüsselung

Eingabe: m, pk

1. Wähle $k \in_R \{0,1\}^n$.
2. Verschlüssele $c_1 \leftarrow Enc_{pk}(k)$ mit asym. Verschlüsselung.
3. Verschlüssele $c_2 \leftarrow Enc'_k(m)$ mit sym. Verschlüsselung.

Ausgabe: Chiffretext $c = (c_1, c_2)$

Hybride Entschlüsselung

Algorithmus Hybride Entschlüsselung

Eingabe: $c = (c_1, c_2)$, sk

1. Entschlüssele $k \leftarrow Dec_{sk}(c_1)$.
2. Entschlüssele $m \leftarrow Dec'_k(c_2)$.

Ausgabe: Klartext m

- Effizienzgewinn für $|m| \gg n$, sofern Π' effizienter als Π.
- **Frage:** Ist hybride Verschlüsselung sicher, falls Π, Π' sicher?

Sicherheit von hybrider Verschlüsselung

Satz Sicherheit hybrider Verschlüsselung

Sei Π ein CPA-sicheres PK-Verschlüsselungsverfahren und Π' ein SK-Verschlüsselungsverfahren mit ununterscheidbaren Chiffretexten gegenüber passiven Angreifern.
Dann ist das hybride Verfahren Π^{hy} CPA-sicher.

Beweisskizze:

- **Notation** $X \equiv Y$: Kein ppt Angreifer kann X und Y unterscheiden.
- Sicherheit von Π': $Enc_k(m_0) \equiv Enc_k(m_1)$ für $k \in_R \{0,1\}^n$.
- Sicherheit von Π^{hy}: Müssen zeigen dass

$$(Enc_{pk}(k), Enc'_k(m_0)) \equiv (Enc_{pk}(k), Enc'_k(m_1)).$$

- Problem: Erstes Argument könnte beim Unterscheiden des zweiten Arguments helfen.

Beweis Sicherheit hybrider Verschlüsselung

Beweisskizze: Zeigen die folgenden 3 Schritte

1. Sicherheit von Π liefert
$$(Enc_{pk}(k), Enc'_k(m_0)) \equiv (Enc_{pk}(0^n), Enc'_k(m_0)).$$
Gilt sogar falls $\mathcal{A}$ die Werte k, 0^n kennt.
Dass das zweite Argument k beinhaltet ist daher kein Problem.
2. Sicherheit von Π' liefert
$$(Enc_{pk}(0^n), Enc'_k(m_0)) \equiv (Enc_{pk}(0^n), Enc'_k(m_1)).$$
Kein Problem mehr, da 2. Argument nicht vom ersten abhängt.
3. Sicherheit von Π liefert
$$(Enc_{pk}(0^n), Enc'_k(m_1)) \equiv (Enc_{pk}(k), Enc'_k(m_1)).$$

Transitititivität der 3 Ergebnisse liefert schließlich wie gewünscht

$$(Enc_{pk}(k), Enc'_k(m_0)) \equiv (Enc_{pk}(k), Enc'_k(m_1)).$$

Textbook RSA

Algorithmus Schlüsselerzeugung *GenRSA*

Eingabe: 1^n

1. $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n)$ mit primen $n/2$-Bit p, q und $N = pq$.
2. $\phi(N) \leftarrow (p-1)(q-1)$
3. Wähle $e \in \mathbb{Z}^*_{\phi(N)}$.
4. Berechne $d \leftarrow e^{-1} \bmod \phi(N)$.

Ausgabe: (N, e, d) mit $pk = (N, e)$ und $sk = (N, d)$.

Definition Textbook RSA Verschlüsselungsverfahren

Sei n ein Sicherheitsparameter.

1. **Gen** : $(N, e, d) \leftarrow \mathit{GenRSA}(1^n)$
2. **Enc** : $c \leftarrow m^e \bmod N$ für eine Nachricht $m \in \mathbb{Z}_N$.
3. **Dec** : $m \leftarrow c^d \bmod N$

RSA Problem und Sicherheit von RSA

Definition RSA Problem

Das *RSA Problem* ist hart bezüglich $GenRSA(1^n)$, falls für alle ppt Algorithmen $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(N, e, m^e \bmod N) = m] \leq \mathrm{negl}(n)$.
Wsraum: Wahl $m \in_R \mathbb{Z}_N$ und interne Münzwürfe von $\mathcal{A}$, *GenRSA*.

RSA Annahme: Das RSA Problem ist hart bezüglich *GenRSA*.

Anmerkungen:

- Falls N effizient faktorisiert werden kann, ist das RSA Problem nicht hart. (Warum?)
- Berechnen von d ist so schwer wie Faktorisieren von N.
- **Offenes Problem:** Impliziert eine Lösung des RSA Problem eine Lösung des Faktorisierungsproblems?
- *Enc* ist deterministisch, d.h. Textbook RSA ist nicht CPA-sicher.
- Unter der RSA-Annahme: Kein ppt Angreifer kann für zufällige $m \in \mathbb{Z}_N^*$ aus $(N, e, m^e \bmod N)$ die ganze Nachricht m berechnen.

Angriffe auf Textbuch RSA

Verschlüsseln von kurzen Nachrichten mit kleinem e

- Sei $m < N^{\frac{1}{e}}$. Dann gilt $c = m^e < N$. D.h. $c^{\frac{1}{e}}$ über $\mathbb{Z}$ liefert m.
- Realistisch bei hybrider Verschlüsselung: N 1024-Bit und $e = 3$, m ist 128-Bit Schlüssel für symmetrische Verschlüsselung.

Hastad Angriff auf RSA

- **Szenario:** Verschlüsselung desselben m unter verschiedenen pk.
- Sei $pk_1 = (N_1, 3)$, $pk_2 = (N_2, 3)$, $pk_3 = (N_3, 3)$. Angreifer erhält $c_1 = m^3 \bmod N_1$, $c_2 = m^3 \bmod N_2$ und $c_3 = m^3 \bmod N_3$.
- Berechne mittels Chinesischem Restsatz eind. $c \in \mathbb{Z}_{N_1 N_2 N_3}$ mit

$$\left| \begin{array}{l} c = c_1 \bmod N_1 \\ c = c_2 \bmod N_2 \\ c = c_3 \bmod N_3 \end{array} \right| .$$

- Es gilt $c = m^3 < (\min\{N_1, N_2, N_3\})^3 < N_1 N_2 N_3$, d.h. $m = c^{\frac{1}{3}}$.

Padded RSA

Definition Padded RSA Verschlüsselungsverfahren

Sei n ein Sicherheitsparameter und ℓ eine Fkt. mit $\ell(n) \leq 2n - 2$.

1. **Gen** : $(N, e, d) \leftarrow \mathit{GenRSA}(1^n)$
2. **Enc** : Für $m \in \{0,1\}^{\ell(n)}$ und $r \in_R \{0,1\}^{|N|-\ell(n)-1}$ berechne
$$c \leftarrow (r||m)^e \bmod N\,.$$
3. **Dec** : $r||m \leftarrow c^d \bmod N$. Gib die untersten $\ell(n)$ Bits aus.

Anmerkungen

- Für $\ell(n) = 2n - \mathcal{O}(\log n)$ kann r in polyn. Zeit geraten werden.
- Für $\ell(n) = cn$, konstantes $c < 2$, ist kein CPA Angriff bekannt.
- Für $\ell(n) = \mathcal{O}(\log n)$ kann CPA-Sicherheit gezeigt werden.
- Weitverbreitete standardisierte Variante von Padded RSA: PKCS #1 version 1.5 mit $c := (0^8||0^6 10||r||0^8||m)^e \bmod N$.

Einfache **symmetrische** Verschlüsselung

Algorithmus One-Time Gruppenelement

Sei n ein Sicherheitsparameter.

1. **Gen**: Schlüsselerzeugung $(G, g) \leftarrow \mathcal{G}(1^n)$, wobei G eine Gruppe und $g \in_R G$ ein zufälliger gemeinsamer geheimer Schlüssel ist.
2. **Enc**: Verschlüssele $m \in G$ als $c \leftarrow m \cdot g$.
3. **Dec**: Entschlüssele $c \in G$ als $m \leftarrow c \cdot g^{-1}$.

Perfekte Sicherheit von ONE-TIME GRUPPENELEMENT

Satz Perfekte Sicherheit von ONE-TIME GRUPPENELEMENT

ONE-TIME GRUPPENELEMENT ist ein perfekt sicheres **symmetrisches** Verschlüsselungsverfahren, d.h. für alle Angreifer $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(G, c) = m] = \frac{1}{|G|}.$$

Beweis:

- Sei $g' \in G$ beliebig. Da g ein zufälliges Gruppenelement ist, gilt
$$\mathrm{Ws}[c = g'] = \mathrm{Ws}[m \cdot g = g'] = \frac{1}{|G|}.$$
- Die Wsverteilung auf den Chiffretexten ist die Gleichverteilung.
- Insbesondere ist die Verteilung unabhängig von der Nachricht m.

Anmerkungen:

- Geheimer Schlüssel $sk = g$ muss stets neu gewählt werden.
- Idee für PK-Verfahren: Ersetze das zufällige g durch ein stets neu gewähltes "pseudozufälliges" Gruppenelement.

ElGamal Verschlüsselungsverfahren (1984)

Definition ElGamal Verschlüsselungsverfahren

Sei n ein Sicherheitsparameter.

1. **Gen** : $(G, q, g) \leftarrow \mathcal{G}(1^n)$, wobei G eine Gruppe der Ordnung q mit Generator g ist. Wähle $x \in_R \mathbb{Z}_q$ und berechne $h \leftarrow g^x$.
   Schlüssel: $pk = (G, q, g, h)$, $sk = (G, q, g, x)$
2. **Enc** : Für eine Nachricht $m \in G$ wähle ein $y \in_R \mathbb{Z}_q$ und berechne
   $$c \leftarrow (g^y, h^y \cdot m).$$
3. **Dec** : Für einen Chiffretext $c = (c_1, c_2)$ berechne $m \leftarrow \frac{c_2}{c_1^x}$.

- **Korrektheit:** $\frac{c_2}{c_1^x} = \frac{h^y \cdot m}{(g^y)^x} = \frac{(g^x)^y \cdot m}{g^{xy}} = m$.
- c_2 ist ein Analog von *Enc* bei ONE-TIME GRUPPENELEMENT mit einem DH-Schlüssel g^{xy} als "pseudozufälligem" Gruppenelement.

Anmerkung:

- G, q, g können global für alle Teilnehmer gewählt werden.

Sicherheit von ElGamal

Satz CPA-Sicherheit ElGamal

Falls DDH schwer ist bezüglich $\mathcal{G}$, besitzt ElGamal ununterscheidbare Chiffretexte unter CPA.

Beweis-Skizze:

- Sei $\mathcal{A}$ ein Angreifer auf das ElGamal-Protokoll Π mit Erfolgsws
$$\epsilon(n) := \mathrm{Ws}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1].$$
- Betrachten modifiziertes Verschlüsselungsverfahren Π' mit
$$c' = (c'_1, c'_2) = (g^y, g^z \cdot m) \text{ mit } y, z \in_R \mathbb{Z}_q.$$
- c' ist unabhängig gleichverteilt in G^2, d.h. unabhängig von m.
- Daher gilt $\mathrm{Ws}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi'}(n) = 1] = \frac{1}{2}$.
- **Idee:** Lösen von DDH durch Unterscheiden von Π und Π'.
- DDH-Instanz: (G, q, g, g^x, g^y, g') mit $g' = g^{xy}$ oder $g' = g^z$.

Unterscheider für DDH durch $\mathcal{A}$

Algorithmus DDH-Unterscheider D

EINGABE: (G, q, g, g^x, g^y, g')

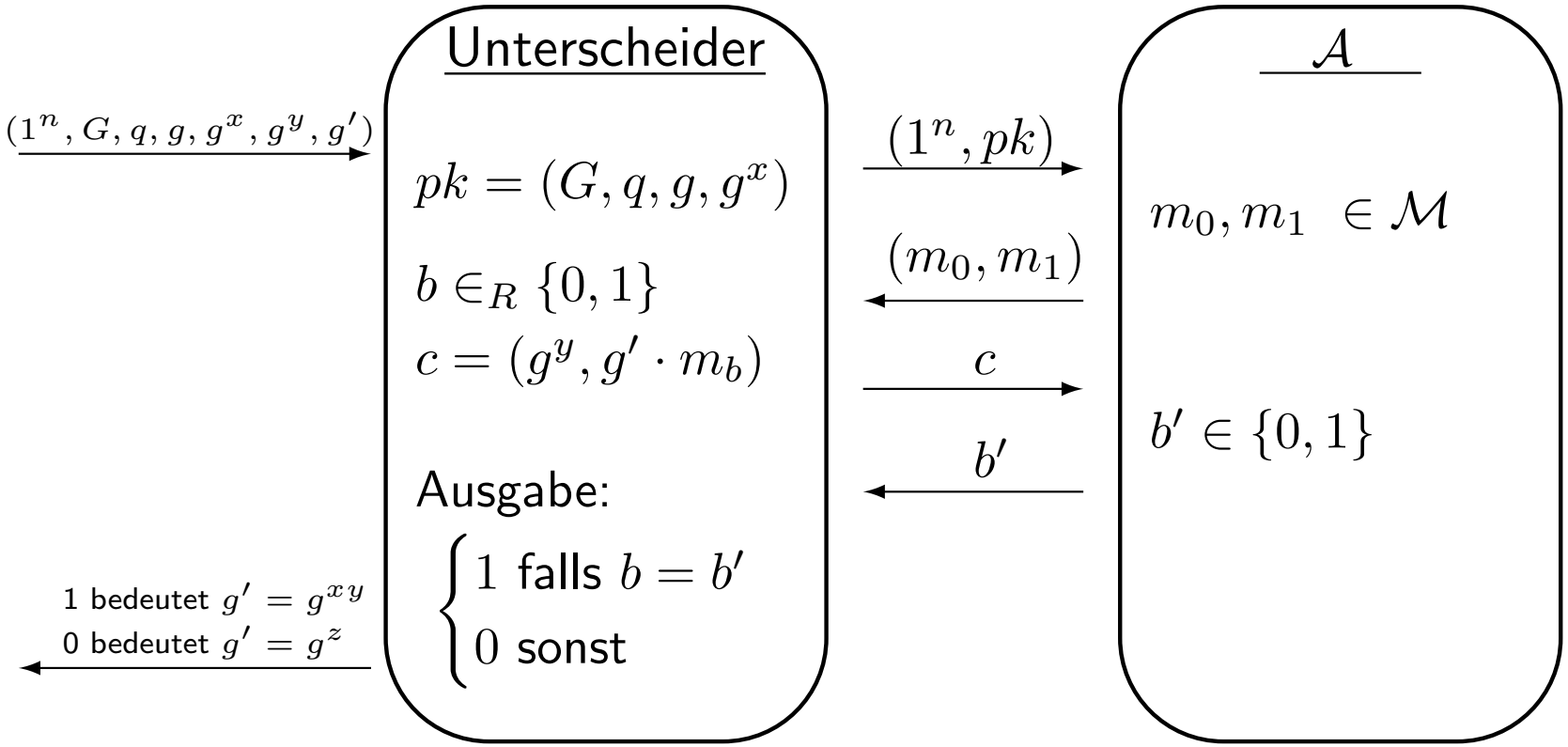
1. Setze $pk = (G, q, g, g^x)$.
2. $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}(pk)$.
3. Wähle $b \in_R \{0, 1\}$ und berechne $b' \leftarrow \mathcal{A}(g^y, g' \cdot m_b)$.
4. Falls $b' = b$ Ausgabe 1, sonst Ausgabe 0.

AUSGABE: $\begin{cases} 1 & \text{wird interpretiert als } g' = g^{xy} \\ 0 & \text{wird interpretiert als } g' = g^z \end{cases}$.

Fall 1: Eingabe ist kein DDH-Tupel, d.h. $g' = g^z$ für $z \in_R \mathbb{Z}_q$.

- Chiffretext c ist wie bei Π' von der Form $(g^y, g^z \cdot m_b)$.
- Damit $\mathrm{Ws}[D(G, q, g, g^x, g^y, g^z) = 1] = \mathrm{Ws}[PubK_{\mathcal{A},\Pi'}(n) = 1] = \frac{1}{2}$.

DDH-Unterscheider mit Angreifer $\mathcal{A}$



Fall DDH-Tupel

Fall 2: Eingabe ist ein DDH-Tupel, d.h. $g' = g^{xy}$.

- $c = (g^y, g^{xy} \cdot m_b)$ ist identisch zu ElGamal-Chiffretexten verteilt.
- D.h. $\mathrm{Ws}[D(G, q, g, g^x, g^y, g^{xy}) = 1] = \mathrm{Ws}[PubK_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] = \epsilon(n)$.
- Aus der DDH-Annahme folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{negl}(n) &\geq |\mathrm{Ws}[D(G, q, g, g^x, g^y, g^z) = 1] - \mathrm{Ws}[D(G, q, g, g^x, g^y, g^{xy}) = 1]| \\ &= \left|\frac{1}{2} - \epsilon(n)\right|. \end{aligned}$$

- Daraus folgt $\epsilon(n) \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$. □

Parameterwahl bei ElGamal

Einbetten von Nachrichten $\mathbf{m}' \in \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^*$

- Beliebte Parameterwahl: $\mathbb{Z}_p^*$, $p = 2q + 1$ mit p, q prim.
- D.h. p ist eine sogenannte starke Primzahl.
- **Ziel:** Untergruppe G mit primer Ordnung q.

- Quadrieren $\mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^*$, $x \mapsto x^2$ ist eine $2-1$-Abbildung.
- Urbilder $x, p - x$ kollidieren, genau eines ist in $[\frac{p-1}{2}] = [q]$.
- Wir bezeichnen den Bildraum mit QR_p.
- QR_p ist Untergruppe von $\mathbb{Z}_p^*$ mit Ordnung q.
- Wählen g als Generator von QR_p. Sei $|q| = n$.
- Interpretieren $m' \in \{0,1\}^{n-1}$ als natürliche Zahl kleiner q.
- Es gilt $m' + 1 \in [q]$. Einbettung von m' ist $m = (m' + 1)^2 \bmod p$.
- Umkehren der Einbettung ist effizient berechenbar.

CPA-Sicherheit ist ungenügend

Definition CCA

CCA (=Chosen Ciphertext Attack) ist ein Angriff, bei dem der Angreifer sich Chiffretext seiner Wahl entschlüsseln lassen kann.

Beispiele in denen CPA nicht genügt:

- Eve fängt verschlüsselte Email $c = Enc(m)$ an Bob ab.
- Eve verschickt c selbst an Bob.
- Bob antwortet Eve und hängt dabei m an die Antwort an.
- D.h. Bob fungiert als Entschlüsselungsorakel.
- **Frage:** Lernt Eve Information, um andere c' zu entschlüsseln?

- Alice und Eve nehmen als Bieter an einer Auktion von Bob teil.
- Alice sendet ihr Gebot $c = Enc(m)$ verschlüsselt an Bob.
- *Enc* soll CPA-sicher sein, d.h. Eve erhält keine Information über m.
- **Frage:** Ist es Eve möglich, $c' = Enc(2m)$ aus c zu berechnen, ohne m zu kennen, und damit Alice zu überbieten? (Malleability)
- Man kann zeigen: CCA-sichere Verschlüsselung ist non-malleable

CCA Ununterscheidbarkeit

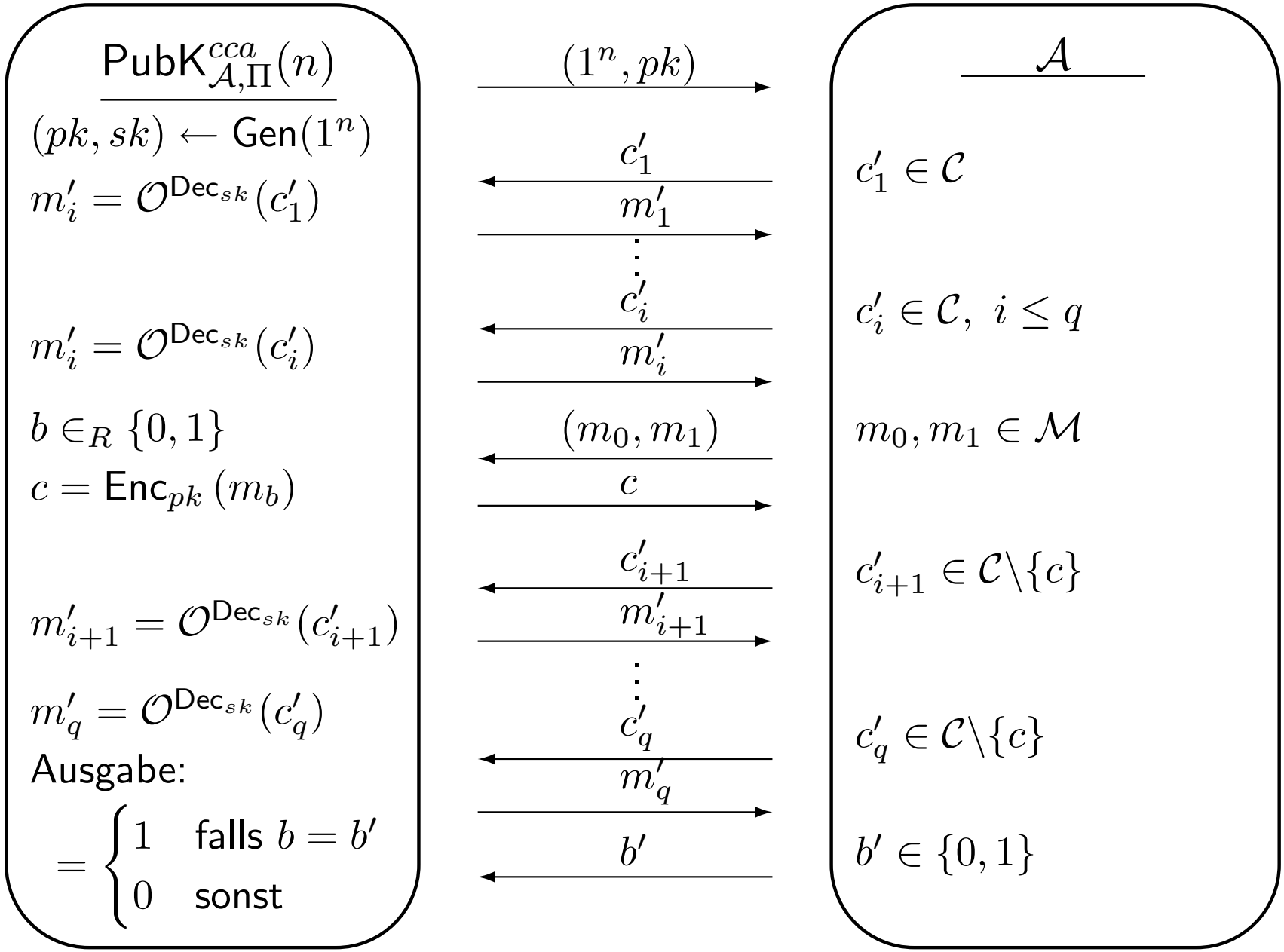
Spiel CCA Ununterscheidbarkeit von Chiffretexten $PubK^{cca}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$

Sei Π ein PK-Verschlüsselungsverfahren mit Angreifer $\mathcal{A}$.

1. $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$
2. $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}^{Dec_{sk}(\cdot)}(pk)$, wobei $Dec_{sk}(\cdot)$ ein Entschlüsselungsorakel für $\mathcal{A}$ für beliebige Chiffretexte ist.
3. Wähle $b \in_R \{0, 1\}$. Verschlüssele $c \leftarrow Enc_{pk}(m_b)$.
4. $b' \leftarrow \mathcal{A}^{Dec_{sk}(\cdot)}(c)$, wobei $\mathcal{A}$ beliebige Chiffretexte $c' \neq c$ durch das Orakel $Dec_{sk}(\cdot)$ entschlüsseln lassen darf.
5. $$PubK^{cca}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } b = b' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anmerkungen:

- Zusätzlich zum Verschlüsselungs-Orakel bei CPA besitzt $\mathcal{A}$ bei CCA ein weiteres Entschlüsselungs-Orakel $Dec_{sk}(\cdot)$.
- Falls $\mathcal{A}$ in Schritt 4 auch c entschlüsseln darf, ist das Spiel trivial.


$\mathsf{PubK}^{cca}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$
$(pk, sk) \leftarrow \mathsf{Gen}(1^n)$
$m'_i = \mathcal{O}^{\mathsf{Dec}_{sk}}(c'_1)$
$m'_i = \mathcal{O}^{\mathsf{Dec}_{sk}}(c'_i)$
$b \in_R \{0,1\}$
$c = \mathsf{Enc}_{pk}(m_b)$
$m'_{i+1} = \mathcal{O}^{\mathsf{Dec}_{sk}}(c'_{i+1})$
$m'_q = \mathcal{O}^{\mathsf{Dec}_{sk}}(c'_q)$
Ausgabe:
$= \begin{cases} 1 & \text{falls } b = b' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$(1^n, pk)$
c'_1
m'_1
c'_i
m'_i
(m_0, m_1)
c
c'_{i+1}
m'_{i+1}
c'_q
m'_q
b'
$\mathcal{A}$
$c'_1 \in \mathcal{C}$
$c'_i \in \mathcal{C},\ i \leq q$
$m_0, m_1 \in \mathcal{M}$
$c'_{i+1} \in \mathcal{C} \backslash \{c\}$
$c'_q \in \mathcal{C} \backslash \{c\}$
$b' \in \{0,1\}$

CCA-Sicherheit

Definition CCA-Sicherheit

Ein Verschlüsselungsverfahren Π heißt *CCA-sicher* bzw. besitzt *ununterscheidbare Chiffretexte unter CCA*, falls für alle ppt Angreifer $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[PubK^{cca}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$.

Anmerkungen:

- Erstes effizientes CCA-sicheres Verfahren Cramer-Shoup (1998).
- Cramer-Shoup verwendet die DDH-Annahme.
- Chiffretexte sind doppelt so lang wie bei ElGamal.
- Sicherheitsbeweis von Cramer-Shoup ist nicht-trivial.
- Später in der Vorlesung: CCA-sichere Verfahren im sogenannten Random Oracle Modell.

CCA Angriff und Malleability von Textbuch RSA

CCA Angriff auf Textbuch RSA

- Wollen $c = m^e \bmod N$ entschlüsseln.
- Man beachte: c darf nicht direkt angefragt werden.
- Berechne $c' = c \cdot r^e = (mr)^e \bmod N$ für $r \in \mathbb{Z}_N^* \setminus \{1\}$.
- Berechne $mr \leftarrow Dec_{sk}(c')$ mittels Entschlüsselungs-Orakel.
- Berechne $mr \cdot r^{-1} = m \bmod N$.

Malleability von Textbuch RSA

- Voriger Angriff zeigt: Für $c = m^e \bmod N$ kann die Verschlüsselung von mr berechnet werden, ohne m selbst zu kennen.
- D.h. Textbuch RSA ist malleable.

CCA Angriff und Malleability von ElGamal

Praktischer CCA-Angriff auf Padded RSA Variante PKCS #1 v1.5

- Bleichenbacher Angriff: Sende adaptiv Chiffretexte an Server.
- Falls die Entschlüsselung nicht das korrekte Format besitzt, sendet der Server eine Fehlermeldung zurück.
- Genügt, um einen beliebigen Chiffretext c zu entschlüsseln.

CCA Angriff auf ElGamal

- Ziel: Entschlüssele $c = (g^y, g^{xy} \cdot m)$.
- Lasse $c' = (g^y, g^{xy} \cdot m \cdot r)$ für $r \in G \setminus \{1\}$ entschlüsseln.
- Berechne $mr \cdot r^{-1} = m$.
- ElGamal ist malleable, da c' korrekte Verschlüsselung von mr.

Einwegfunktionen

Ziel: CPA-sichere Verschlüsselung aus Trapdoor-Einwegpermutation

Später: CCA-sichere Verschlüsselung aus Trapdoor-Einwegperm.

Spiel Invertieren $Invert_{\mathcal{A},f}(n)$

Sei $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ effizient berechenbar, $\mathcal{A}$ ein Invertierer für f.

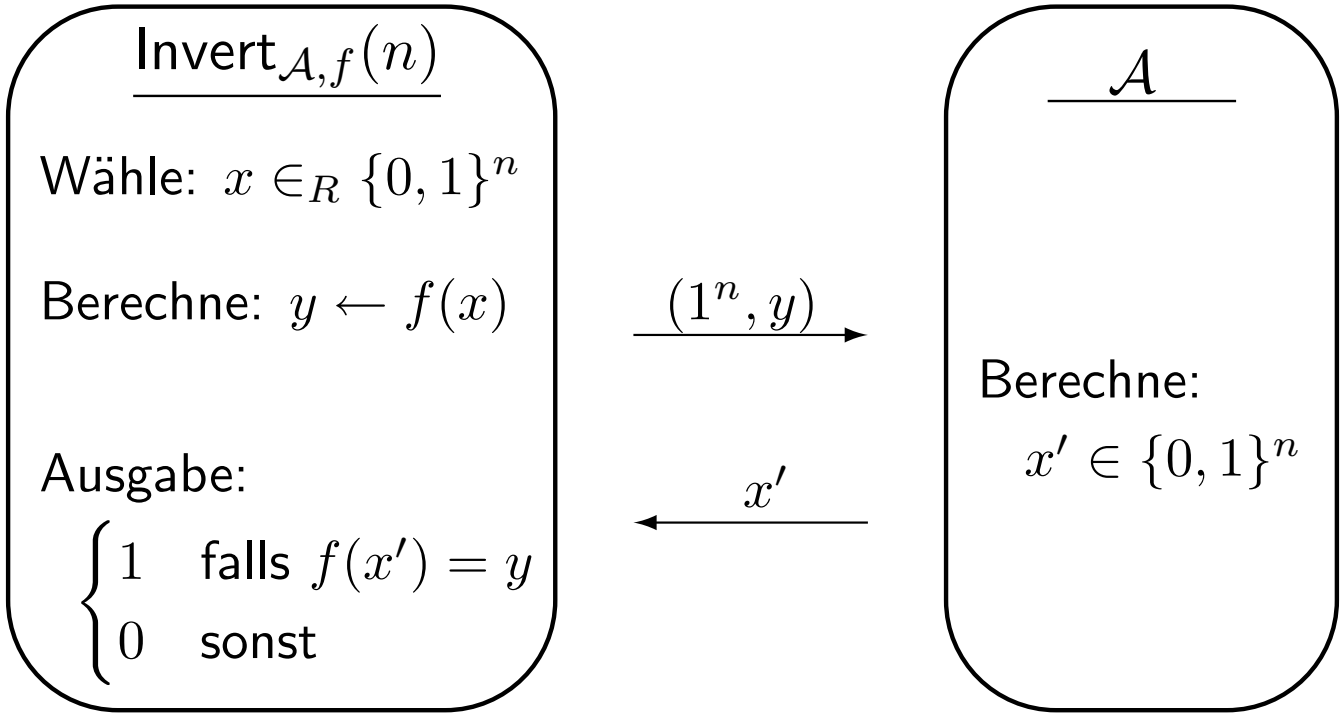
1. Wähle $x \in_R \{0,1\}^n$. Berechne $y \leftarrow f(x)$.
2. $x' \leftarrow \mathcal{A}(1^n, y)$
3. $Invert_{\mathcal{A},f}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(x') = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Definition Einwegfunktion

Eine Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ heißt *Einwegfunktion*, falls

1. Es existiert ein deterministischer pt Alg $\mathcal{B}$ mit $f(x) \leftarrow \mathcal{B}(x)$.
2. Für alle ppt Algorithmen $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[Invert_{\mathcal{A},f}(n) = 1] \leq \mathrm{negl}(n)$.

Spiel Invertieren



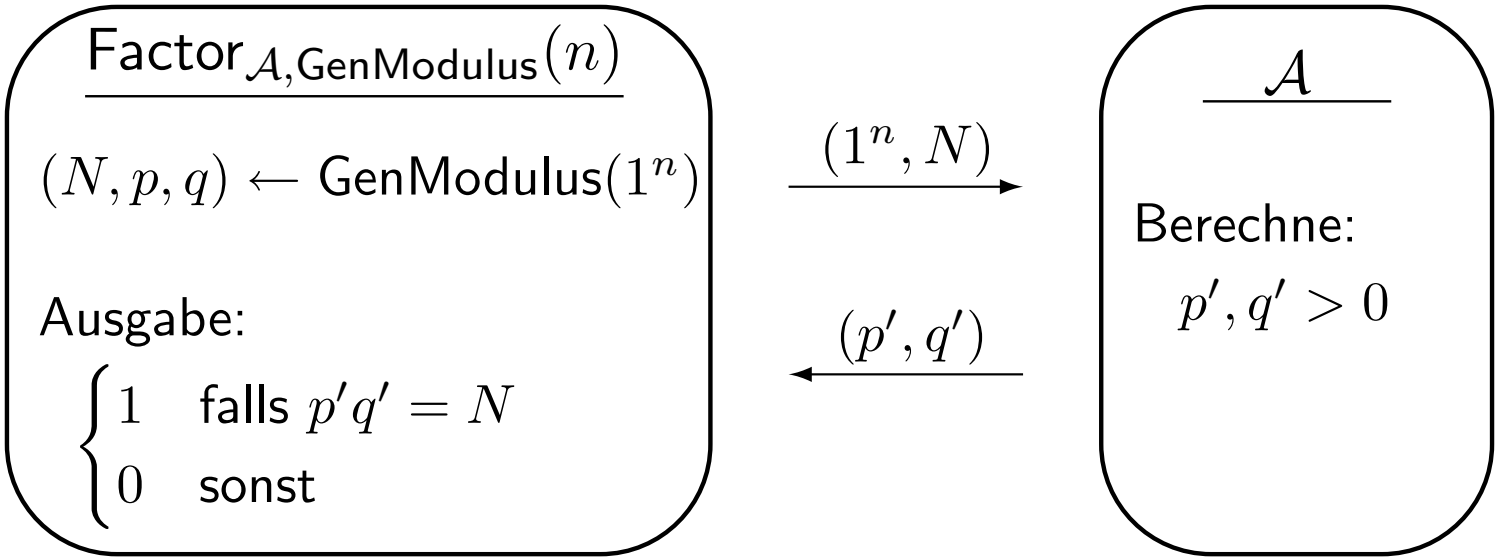
Die Faktorisierungsannahme

- **Problem:** Existenz von Einwegfunktionen ist ein offenes Problem.
- Konstruktion unter Komplexitätsannahme (z.B. Faktorisierung)
- Verwenden dazu $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n)$ von RSA.

Spiel Faktorisierungsspiel $\mathit{Factor}_{\mathcal{A},\mathit{GenModulus}}(n)$

1. $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n)$
2. $(p', q') \leftarrow \mathcal{A}(N)$ mit $p', q' > 1$.
3. $\mathit{Factor}_{\mathcal{A},\mathit{GenModulus}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p'q' = N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Spiel Faktorisieren



Definition Faktorisierungsannahme

Faktorisieren ist hart bezüglich *GenModulus* falls für alle ppt Algorithmen $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[\mathit{Factor}_{\mathcal{A},\mathit{GenModulus}}(n) = 1] \leq \mathrm{negl}(n)$.

Faktorisierungsannahme: Faktorisieren ist hart bezüglich *GenModulus*.

Konstruktion aus Faktorisierungsannahme

- Sei $p(n)$ ein Polynom, so dass $\mathit{GenModulus}(1^n)$ höchstens $p(n)$ Zufallsbits verwendet.
- OBdA sei $p(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton wachsend.

Algorithmus FACTOR-ONEWAY f_{FO}

Eingabe: $x \in \{0,1\}^*$

1. Berechne n mit $p(n) \leq |x| < p(n+1)$.
2. $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n, x)$, wobei *GenModulus* die Eingabe x als internen Zufallsstring verwendet.

Ausgabe: N

Bemerkung:

- $\mathit{GenModulus}(1^n, x)$ ist deterministisch. (Derandomisierung)

Existenz von Einwegfunktionen

Satz Einweg-Eigenschaft von f_{FO}

Unter der Faktorisierungsannahme ist f_{FO} eine Einwegfunktion.

Beweis:

- f_{FO} ist mittels FACTOR-ONEWAY effizient berechenbar.
- z.z.: Invertierer $\mathcal{A}$ von f_{FO} impliziert Faktorisierer $\mathcal{A}'$.
- Sei $\mathcal{A}$ ein Invertierer für f_{FO} mit Erfolgsws $\mathrm{Ws}[\mathit{Invert}_{\mathcal{A},f_{FO}}(N) = 1]$.
- Sei $x' \leftarrow \mathcal{A}(N)$ mit $f(x') = N$.
- Berechne die Faktorisierung $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n, x')$.
- Unter der Faktorisierungsannahme gilt

$$\mathrm{negl} \geq \mathrm{Ws}[\mathit{Factor}_{A',\mathit{GenModulus}}(n) = 1] = \mathrm{Ws}[\mathit{Invert}_{\mathcal{A},f_{FO}}(n) = 1].$$

Trapdoor-Permutationsfamilie

Definition Permutationsfamilie

Eine *Permutationsfamilie* $\Pi_f = (Gen, Samp, f)$ besteht aus 3 ppt Alg:

1. $I \leftarrow Gen(1^n)$, wobei I eine Urbildmenge D für f definiert.
2. $x \leftarrow Samp(I)$, wobei $x \in_R D$.
3. $y \leftarrow f(I, x)$ mit $y := f(x) \in D$ und $f : D \leftarrow D$ ist bijektiv.

Definition Trapdoor-Permutationsfamilie

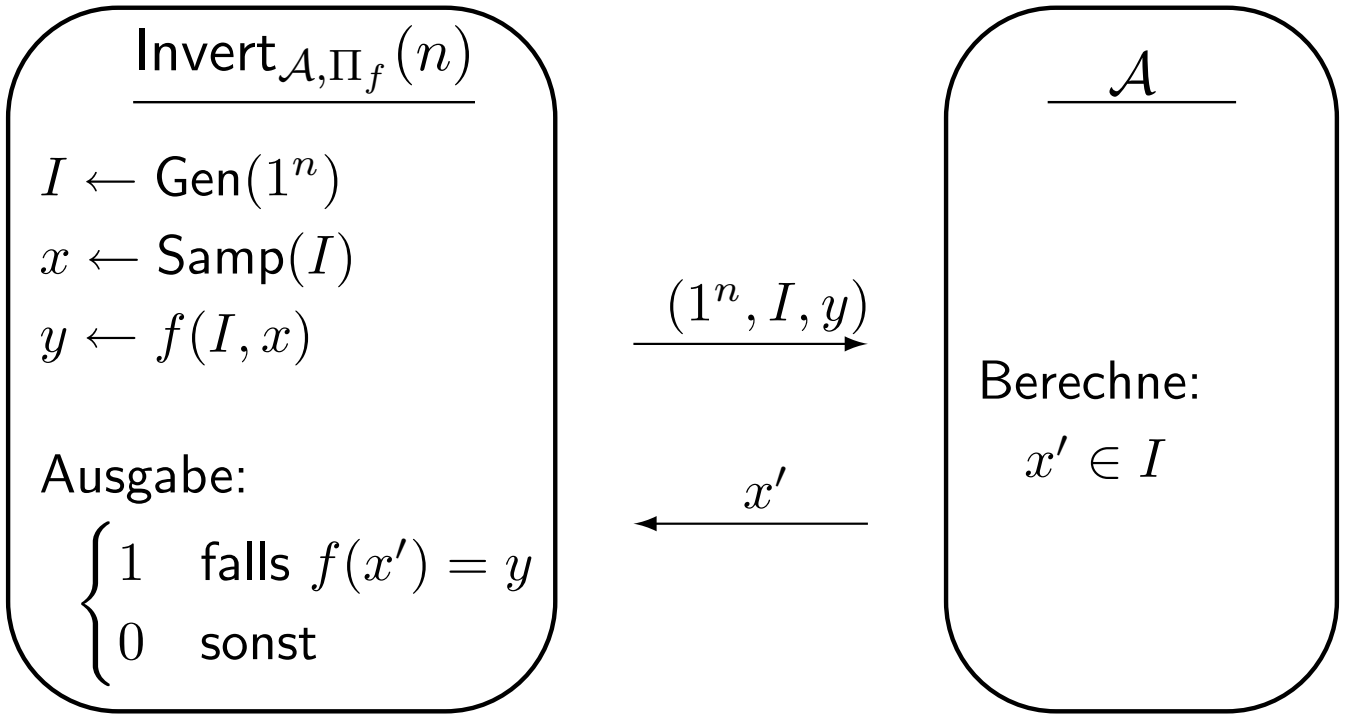
Trapdoor-Permutationsfamilie $\Pi_f = (Gen, Samp, f, Inv)$ besteht aus

1. $(I, td) \leftarrow Gen(1^n)$ mit td als Trapdoor-Information
2. $x \leftarrow Samp(I)$ wie zuvor
3. $y \leftarrow f(I, x)$ wie zuvor
4. $x \leftarrow Inv(td, y)$ mit $Inv_{td}(f(x)) = x$ für alle $x \in D$.

Spiel Invertieren einer Permutation $Invert_{\mathcal{A},\Pi_f}(n)$

Sei $\mathcal{A}$ ein Invertierer für die Familie Π_f.

1. $I \leftarrow Gen(1^n)$, $x \leftarrow Samp(I)$ und $y \leftarrow f(I,x)$.
2. $x' \leftarrow \mathcal{A}(I,y)$.
3. $$Invert_{\mathcal{A},\Pi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(x') = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$



Konstruktion einer Trapdoor-Einwegpermutation

Definition Einweg-Permutation

Eine (Trapdoor-)Permutationsfamilie heißt *(Td-)Einwegpermutation* falls für alle ppt Algorithmen $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[\mathit{Invert}_{\mathcal{A},\Pi_f}(n) = 1] \leq \mathrm{negl}(n)$.

Bsp: Trapdoor-Einwegpermutation unter RSA-Annahme

- ***Gen*(1^n)**:
  $(N, e, d) \leftarrow \mathit{GenRSA}(1^n)$, Ausgabe $I = (N, e)$ und $td = (N, d)$.
- ***Samp*(I)**:
  Wähle $x \in_R \mathbb{Z}_N$.
- ***f*(I, x)**:
  Berechne $y \leftarrow x^e \bmod N$.
- ***Inv*(td, y)**:
  Berechne $x \leftarrow y^d \bmod N$.

Hardcore-Prädikat

Ziel: Destilliere Komplexität des Invertierens auf ein Bit.

Definition Hardcore-Prädikat

Sei Π_f eine Einwegpermutation. Sei *hc* ein deterministischer pt Alg mit Ausgabe eines Bits $hc(x)$ bei Eingabe $x \in D$. *hc* heißt *Hardcore-Prädikat* für *f* falls für alle ppt Algorithmen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(f(x)) = hc(x)]] \leq \tfrac{1}{2} + \mathrm{negl}(n).$$

Intuition: Bild $f(x)$ hilft nicht beim Berechnen von $hc(x)$.

Bsp: Goldreich-Levin Hardcore-Prädikat (ohne Beweis)

- Sei *f* eine Einwegpermutation mit Definitionsbereich $\{0,1\}^n$.
- Sei $x = x_1 \dots x_n \in \{0,1\}^n$. Konstruiere
$$g(x,r) := (f(x), r) \text{ mit } r \in_R \{0,1\}^n.$$
- Offenbar ist *g* ebenfalls eine Einwegpermutation.
- Wir konstruieren ein Hardcore-Prädikat *hc* für *g* mittels
$$hc(x,r) = \langle x, r\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i r_i \bmod 2.$$
- Beweis der Hardcore-Eigenschaft ist nicht-trivial.

Verschlüsselung aus Trapdoor-Einwegpermutation

Algorithmus VERSCHLÜSSELUNG$_{\Pi_f}$

Sei Π_f eine Td-Einwegpermutation mit Hardcore-Prädikat hc.

1. **Gen:** $(I, td) \leftarrow Gen(1^n)$. Ausgabe $pk = I$ und $sk = td$.
2. **Enc:** Für $m \in \{0,1\}$ wähle $x \in_R D$ und berechne
$$c \leftarrow (f(x), hc(x) \oplus m).$$
3. **Dec:** Für Chiffretext $c = (c_1, c_2)$ berechne $x \leftarrow Inv_{td}(c_1)$ und
$$m \leftarrow c_2 \oplus hc(x).$$

Intuition:

- $hc(x)$ ist "pseudozufällig" gegeben $f(x)$.
- D.h. $hc(x) \oplus m$ ist ununterscheidbar von 1-Bit One-Time Pad.

CPA-Sicherheit unserer Konstruktion

Satz CPA-Sicherheit von VERSCHLÜSSELUNG$_\Pi$

Sei Π_f eine Trapdoor-Einwegpermutation mit Hardcore-Prädikat *hc*. Dann ist VERSCHLÜSSELUNG$_\Pi$ CPA-sicher.

Beweis:

- Sei $\mathcal{A}$ ein Angreifer mit Erfolgsws $\epsilon(n) = \mathrm{Ws}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi_f}(n) = 1]$.
- OBdA $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}(pk)$ mit $\{m_0, m_1\} = \{0,1\}$. (Warum?)
- Verwenden $\mathcal{A}$ um einen Angreifer $\mathcal{A}_{hc}$ für *hc* zu konstruieren.

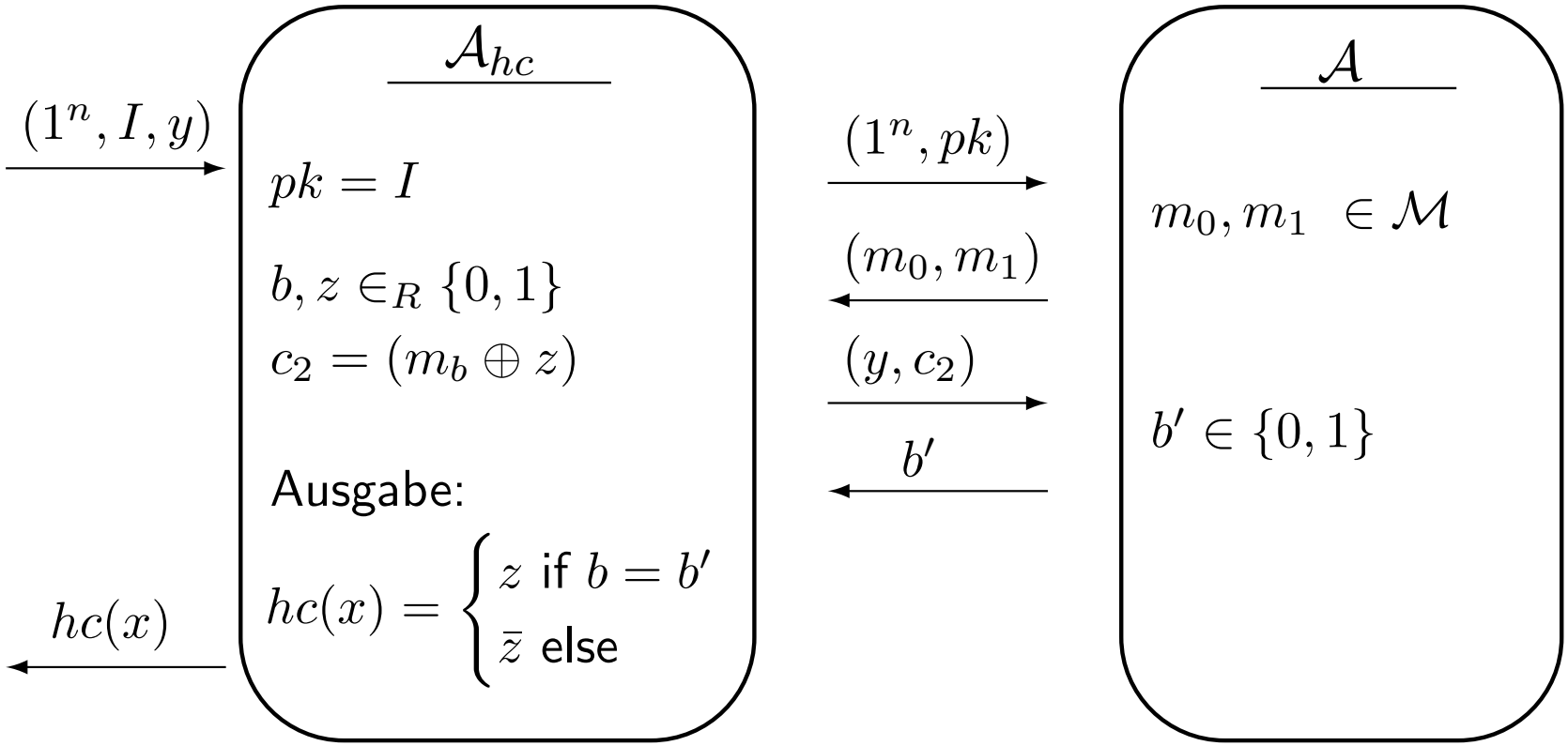
Algorithmus Angreifer $\mathcal{A}_{hc}$

Eingabe: $I, y = f(x) \in D$

1. Setze $pk \leftarrow I$ und berechne $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}(pk)$.
2. Wähle $b, z \in_R \{0,1\}$. Setze $c_2 \leftarrow m_b \oplus z$.
3. $b' \leftarrow \mathcal{A}(y, c_2)$

Ausgabe: $hc(x) = \begin{cases} z & \text{falls } b = b' \\ \bar{z} & \text{sonst} \end{cases}$.

Angreifer $\mathcal{A}_{hc}$



CPA-Sicherheit von VERSCHLÜSSELUNG$_\Pi$

Beweis: Fortsetzung

- Sei $x = f^{-1}(y)$. $\mathcal{A}_{hc}$ rät $z = hc(x)$.
- Es gilt $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}_{hc}(f(x)) = hc(x)] =$
$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ws}[b = b' \mid z = hc(x)] + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ws}[b \neq b' \mid z \neq hc(x)].$$
- **1. Fall** $z = hc(x)$: (y, c_2) ist korrekte Verschlüsselung von m_b, d.h.
$$\mathrm{Ws}[b = b' \mid z = hc(x)] = \epsilon(n).$$
- **2. Fall** $z \neq hc(x)$: (y, c_2) ist Verschlüsselung von $\bar{m}_b = m_{\bar{b}}$, d.h.
$$\mathrm{Ws}[b \neq b' \mid z \neq hc(x)] = \epsilon(n).$$
- Da hc ein Hardcore-Prädikat ist, folgt
$$\frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n) \geq \mathrm{Ws}[A_{hc}(f(x)) = hc(x)] = \epsilon(n).$$

Digitale Signaturen

Funktionsweise von digitalen Signaturen:

- Schlüsselgenerierung erzeugt pk, sk von Alice.
- Signieren ist Funktion von sk.
- Verifikation ist Funktion von pk.

Idee: Es soll unmöglich sein, ein gültiges Paar von Nachricht m mit zugehöriger Signatur σ zu erzeugen, ohne sk zu kennen.

Eigenschaften digitaler Signaturen: Sei σ eine gültige Signatur für m.

- **Integrität:** m kann nicht verändert werden, da man keine gültige Signatur zu einem $m' \neq m$ erstellen kann.
- **Authentizität:** Falls σ ein gültige Signatur zu m ist, so kommt die Signatur von Alice, der Besitzerin von sk.
- **Transferierbarkeit:** Jeder kann die Gültigkeit von (m, σ) überprüfen. Insbesondere kann (m, σ) weitergereicht werden.
- **Nicht-Abstreitbarkeit:** Alice kann nicht behaupten, dass eine andere Person eine gültige Signatur erzeugt hat.

Definition Signaturverfahren

Definition Signaturverfahren

Ein *Signaturverfahren* ist ein 3-Tupel $(Gen, Sign, Vrfy)$ von ppt Alg mit

1. **Gen:** $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$.
2. **Sign:** $\sigma \leftarrow Sign_{sk}(m)$ für $m \in \{0,1\}^*$.
3. **Vrfy:** $Vrfy_{pk}(m, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma \text{ gültig für } m \text{ ist.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

   Es gilt $Vrfy_{pk}(m, Sign_{sk}(m)) = 1$ für alle $m \in \{0,1\}^*$.

Unfälschbarkeit von Signaturen

Spiel CMA-Spiel $Forge_{\mathcal{A},\Pi}(n)$

Sei Π ein Signaturverfahren mit Angreifer $\mathcal{A}$.

1. $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$
2. $(m, \sigma) \leftarrow \mathcal{A}^{Sign_{sk}(\cdot)}(pk)$, wobei $Sign_{sk}(\cdot)$ ein Signierorakel für beliebige Nachrichten $m' \neq m$ ist.
3. $$Forge_{\mathcal{A},\Pi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } Vrfy_{pk}(m,\sigma) = 1, Sign_{sk}(m) \text{ nicht angefragt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

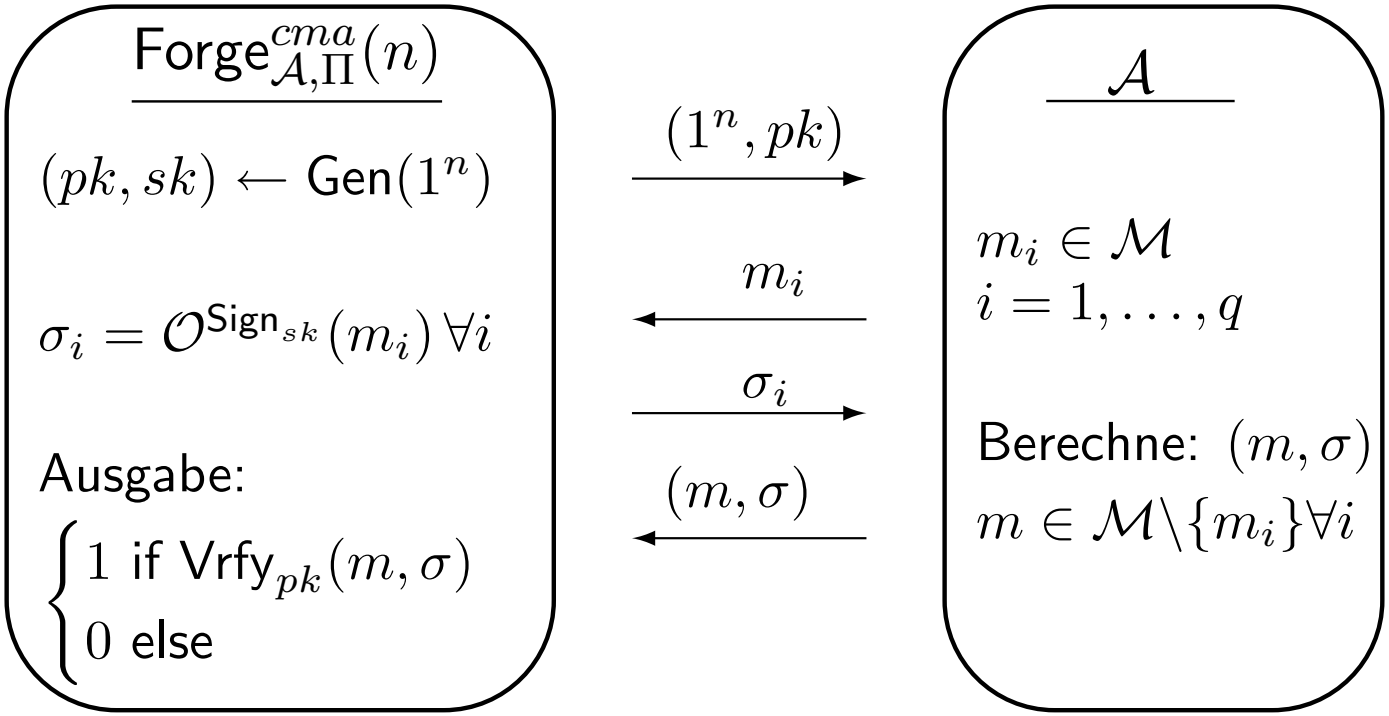
Definition CMA-Sicherheit

Sei Π ein Signaturverfahren. Π heißt *existentiell unfälschbar* unter *Chosen Message Angriffen (CMA)*, falls für alle ppt Angreifer $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathrm{Ws}[Forge_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] \leq \mathrm{negl}(n).$$

Wir bezeichnen Π auch abkürzend als *CMA-sicher*.

CMA Spiel Forge



Unsicherheit von Textbook RSA Signaturen

Algorithmus Textbook RSA Signaturen

1. **Gen:** $(N, e, d) \leftarrow \mathit{GenRSA}(1^n)$. Setze $pk = (N, e)$, $sk = (N, d)$.
2. **Sign:** Für $m \in \mathbb{Z}_N$ berechne $\sigma = m^d \bmod N$.
3. **Vrfy:** Für $(m, \sigma) \in \mathbb{Z}_N^2$ Ausgabe 1 gdw $\sigma^e \stackrel{?}{=} m \bmod N$.

Unsicherheit: gegenüber CMA-Angriffen

- Wähle beliebiges $\sigma \in \mathbb{Z}_N$. Berechne $m \leftarrow \sigma^e \bmod N$.
- Offenbar ist σ eine gültige Signatur für m.
- Angreifer besitzt keine Kontrolle über m (existentielle Fälschung).

Fälschen einer Signatur für ein gewähltes $m \in \mathbb{Z}_N$:

- Wähle $m_1 \in_R \mathbb{Z}_N^*$ mit $m_1 \neq m$. Berechne $m_2 = \frac{m}{m_1} \bmod N$.
- Lasse m_1, m_2 vom Orakel $\mathit{Sign}_{sk}(\cdot)$ unterschreiben.
- Seien σ_1, σ_2 die Signaturen. Dann ist $\sigma := \sigma_1 \cdot \sigma_2 = m_1^d \cdot m_2^d = (m_1 m_2)^d = m^d \bmod N$ gültig für m.

Hashfunktionen und Kollisionen

Definition Hashfunktion

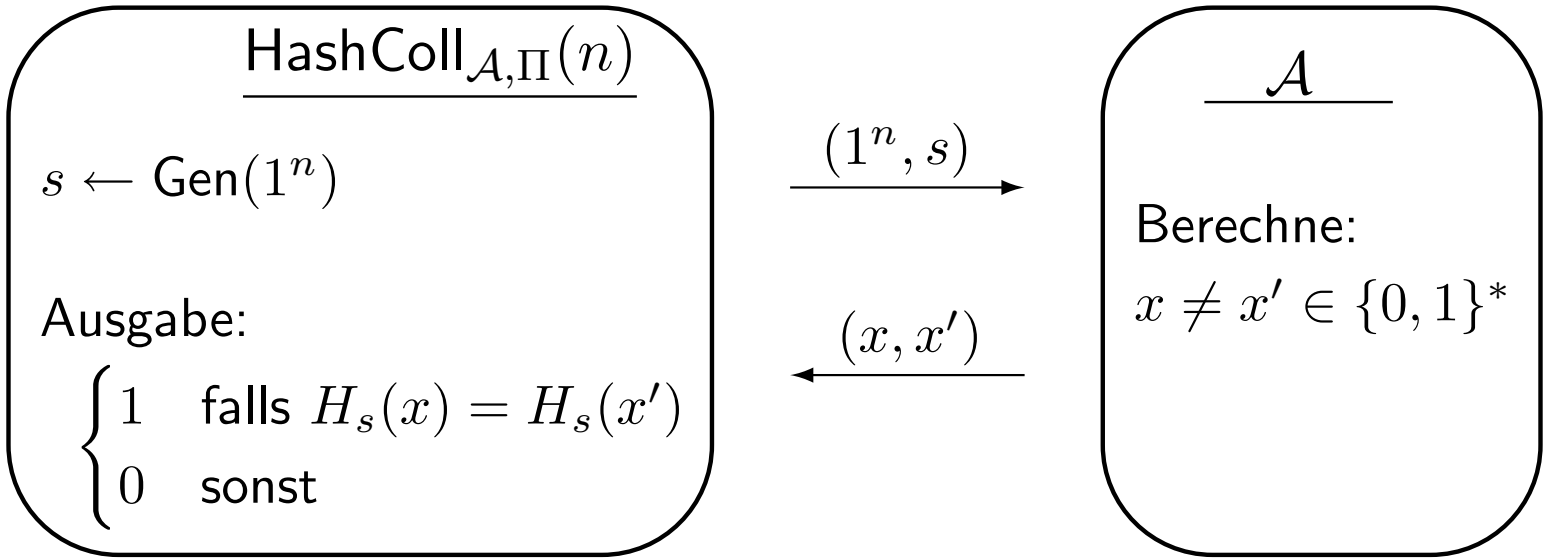
Eine *Hashfunktion* ist ein Paar (Gen, H) von pt Algorithmen mit

1. **Gen:** $s \leftarrow Gen(1^n)$. *Gen* ist probabilistisch.
2. **H:** $H_s(x) \in \{0,1\}^n$ für alle $x \in \{0,1\}^*$. H ist deterministisch.

Spiel $HashColl_{\mathcal{A},\Pi}(n)$

1. $s \leftarrow Gen(1^n)$
2. $(x, x') \leftarrow \mathcal{A}(s)$
3. $$HashColl_{\mathcal{A},\Pi} = \begin{cases} 1 & \text{falls } H_s(x) = H_s(x') \text{ und } x \neq x' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Kollisionsresistente Hashfunktionen



Definition Kollisionsresistenz

Eine Hashfunktion Π heißt *kollisionsresistent*, falls für alle ppt $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[\mathit{HashColl}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] \leq \mathrm{negl}(n)$.

Hashed RSA

Algorithmus Hashed RSA

1. **Gen:** $(N, e, d, H) \leftarrow \mathit{GenHashRSA}(1^n)$ mit $H : \{0,1\}^* \to \mathbb{Z}_N$. Ausgabe $pk = (N, e, H)$, $sk = (N, d, H)$.
2. **Sign:** Für $m \in \{0,1\}^*$ berechne $\sigma = H(m)^d \bmod N$.
3. **Vrfy:** Für $(m, \sigma) \in \mathbb{Z}_N^2$ Ausgabe 1 gdw $\sigma^e \stackrel{?}{=} H(m) \bmod N$.

Einfacher Angriff:

- Sei $m_1 \neq m_2$ eine Kollision für H ist, d.h. $H(m_1) = H(m_2)$.
- Frage (m_1, σ) an. Dann ist (m_2, σ) eine gültige Fälschung.
- D.h. wir benötigen für H Kollisionsresistenz.

Anmerkung: Sicherheit gegen unsere Angriffe für Textbook RSA

1. Wähle $\sigma \in \mathbb{Z}_N$, $m' \leftarrow \sigma^e$. Müssen $m \in H^{-1}(m')$ bestimmen. Übung: Urbildbestimmung ist schwer für kollisionsresistentes H.
2. Für ein $m \in \mathbb{Z}_N^*$ benötigen wir m_1, m_2 mit $H(m) = H(m_1) \cdot H(m_2)$ in $\mathbb{Z}_n$. Scheint Invertierbarkeit von H zu erfordern.

Später: Zeigen CMA-Sicherheit einer Hashed RSA Variante. (im ROM)

Hash-and-Sign Paradigma

Ziel: Signaturen für Nachrichten beliebiger Länge

- Starten mit Signaturverfahren Π für $m \in \{0,1\}^n$.
- Verwenden Hashfunktion $H : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^n$.
- Unterschreiben Hashwerte statt der Nachrichten.

Definition Hash-and-Sign Paradigma

Sei $\Pi = (Gen, Sign, Vrfy)$ und $\Pi_H = (Gen_H, H)$ eine Hashfunktion.

1. **Gen':** $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$, $s \leftarrow Gen_H(1^n)$.
   Ausgabe $pk' = (pk, s)$ und $sk' = (sk, s)$.
2. **Sign':** Für eine Nachricht $m \in \{0,1\}^*$ berechne
   $$\sigma \leftarrow Sign_{sk}(H_s(m)).$$
3. **Vrfy':** Für eine Nachricht $m \in \{0,1\}^*$ mit Signatur σ prüfe
   $$Vrfy_{pk}(H_s(m), \sigma) \stackrel{?}{=} 1.$$

Intuition: Fälschung impliziert Fälschung in Π oder Kollision in H.

Sicherheit von Hash-and-Sign

Satz Sicherheit des Hash-and-Sign Paradigmas

Sei Π CMA-sicher und Π_H kollisionsresistent. Dann ist das Hash-and-Sign Signaturverfahren Π' CMA-sicher.

Beweis:

- Sei $\mathcal{A}'$ ein Angreifer für Hash-and-Sign Π' mit Ausgabe (m, σ).
- Sei Q die Menge der von $\mathcal{A}$ an das Signierorakel $Sign_{sk}(\cdot)$ gestellten Anfragen. Es gilt $m \notin Q$.
- Sei *coll* das Ereignis, dass $m_i \in Q$ mit $H_s(m_i) = H_s(m)$.
- Dann gilt $\mathrm{Ws}[Forge_{\mathcal{A}',\Pi'}(n) = 1]$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{Ws}[Forge_{\mathcal{A}',\Pi'}(n) = 1 \wedge coll] + \mathrm{Ws}[Forge_{\mathcal{A}',\Pi'}(n) = 1 \wedge \overline{coll}] \\ &\leq \mathrm{Ws}[coll] + \mathrm{Ws}[Forge_{\mathcal{A}',\Pi'}(n) = 1 \wedge \overline{coll}] \end{aligned}$$

- Wir zeigen nun, dass beide Summanden vernachlässigbar sind.

Algorithmus für Kollisionen

Beweis: $Ws[coll] \leq \text{negl}(n)$

- Konstruieren mittels $\mathcal{A}'$ einen Algorithmus C für Kollisionen.

Algorithmus C

EINGABE: s

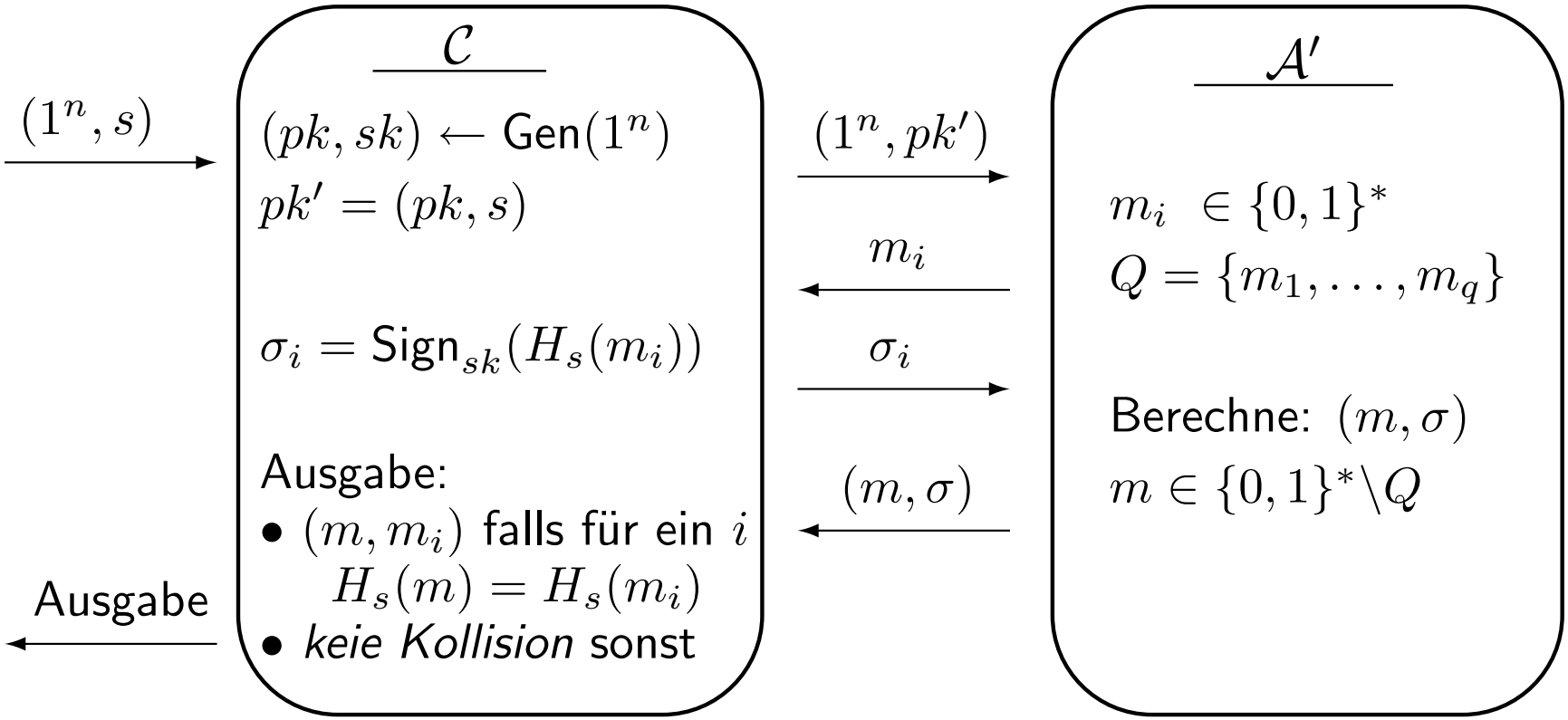
1. Berechne $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$. Setze $pk' \leftarrow (pk, s)$.
2. $(m, \sigma) \leftarrow \mathcal{A}'(pk')$. Auf Orakelanfrage $m_i \in \{0,1\}^*$, antworte mit $\sigma_i \leftarrow Sign_{sk}(H_s(m_i))$.

AUSGABE: $\begin{cases} (m, m_i) & \text{falls } H_s(m) = H_s(m_i) \text{ für ein } m_i \\ \text{keine Kollision} & \text{sonst} \end{cases}$.

- Es gilt $\text{Ws}[coll] = \text{Ws}[HashColl_{C,\Pi_H}(n) = 1]$.
- Aus der Kollisionsresistenz von H folgt

$$\text{Ws}[HashColl_{C,\Pi_H}(n) = 1] \leq \text{negl}(n).$$

Algorithmus $\mathcal{C}$ für Kollisionen



Fälschen von Signaturen in Π

Beweis: $Ws[Forge_{\mathcal{A}',\Pi'}(n) = 1 \wedge \overline{coll}] \leq \mathrm{negl}(n)$

- Konstruieren mittels $\mathcal{A}'$ einen Angreifer $\mathcal{A}$ für Π.

Algorithmus $\mathcal{A}$

EINGABE: pk, Zugriff auf Signierorakel $Sign_{sk}(\cdot)$

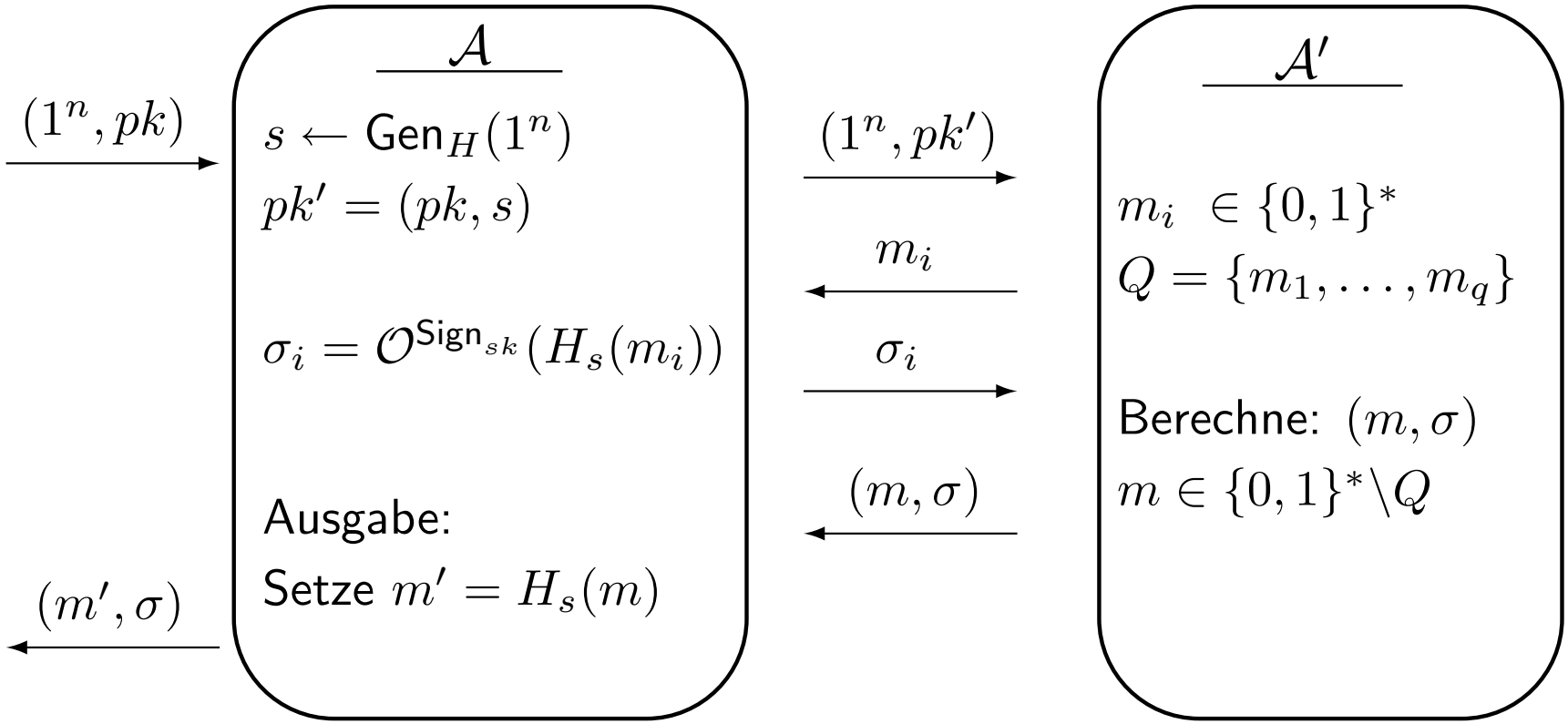
1. Berechne $s \leftarrow Gen_H(1^n)$. Setze $pk' = (pk, s)$.
2. $(m, \sigma) \leftarrow \mathcal{A}'(pk')$. Beantworte Orakelanfrage $m_i \in \{0,1\}^*$ mit Ausgabe $\sigma_i \leftarrow Sign_{sk}(H_s(m_i))$ des Signierorakels.
3. Setze $m' \leftarrow H_s(m)$.

AUSGABE: (m', σ)

- Falls (m, σ) gültig ist für Π′, so ist $(m', \sigma) = (H_s(m), \sigma)$ gültig für Π.
- Ereignis $\overline{coll}$ bedeutet, dass $m' \neq H_s(m_i)$ für alle Anfragen $H_s(m_i)$.
- Damit gilt $\mathrm{Ws}[Forge_{\mathcal{A}',\Pi'}(n) \wedge \overline{coll}] = \mathrm{Ws}[Forge_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1]$.
- Aus der CMA-Sicherheit von Π folgt

$$\mathrm{Ws}[Forge_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] \leq \mathrm{negl}(n).$$

Algorithmus $\mathcal{A}$ für Fälschungen



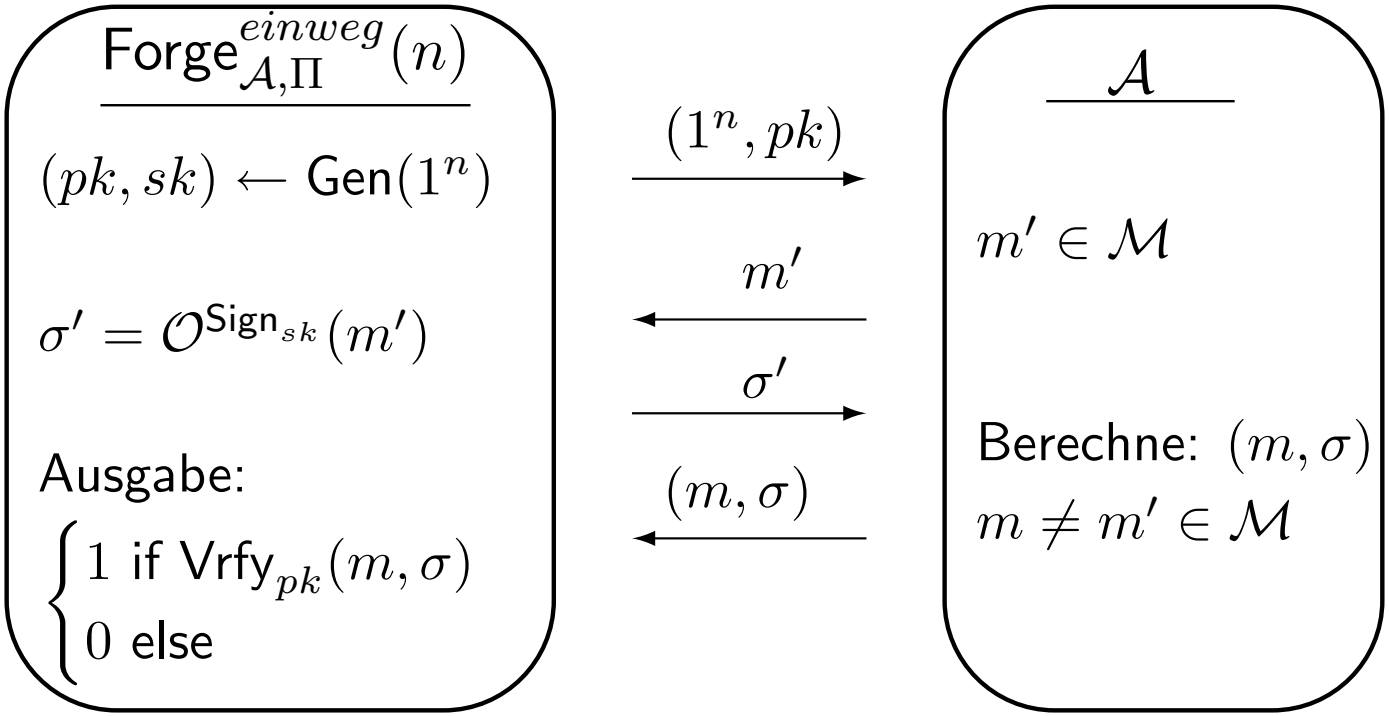
Einwegsignaturen

Ziel: Einwegsignaturen

- Konstruieren Verfahren zum sicheren Signieren *einer* Nachricht.
- Konstruktion mittels kollisionsresistenter Hashfunktionen.

Spiel $Forge^{einweg}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$

1. $(pk, sk) \leftarrow Gen(1^n)$
2. $(m, \sigma) \leftarrow \mathcal{A}^{Sign_{sk}(\cdot)}(pk)$, wobei $\mathcal{A}$ **eine** Nachricht $m' \neq m$ an $Sign_{sk}(\cdot)$ anfragen darf.
3. $$Forge^{einweg}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } Vrfy_{pk}(m, \sigma) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$



Definition CMA-sichere Einwegsignaturen

Ein Signaturverfahren Π heißt *CMA-sichere Einwegsignatur*, falls für alle ppt $\mathcal{A}$ gilt $\Pr[\mathit{Forge}^{\mathit{einweg}}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] \leq \mathrm{negl}(n)$.

Beispiel von Lamports Einwegsignaturen

Illustration: Signieren einer 3-Bit Nachricht

- Verwende Einwegfunktion $f : D \to R$.
- Wähle als geheimen Schlüssel 6 Element $x_{i,j}$ zufällig aus D. Setze

$$sk = \begin{pmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} & x_{3,0} \\ x_{1,1} & x_{2,1} & x_{3,1} \end{pmatrix}.$$

- Für alle $x_{i,j}$ berechne $y_{i,j} = f(x_{i,j})$. Dies liefert

$$pk = \begin{pmatrix} y_{1,0} & y_{2,0} & y_{3,0} \\ y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} \end{pmatrix}.$$

- Unterschreibe $m = m_1 m_2 m_3 \in \{0,1\}^3$ mit $\sigma = x_{1,m_1} x_{2,m_2} x_{3,m_3}$.
- Verifikation von (m, σ): Überprüfe $f(\sigma_i) = y_{i,m_i}$ für $i = 1, 2, 3$.

Lamports Einwegsignaturen

Definition Lamport Einwegsignaturen

Sei f eine Einwegfunktion. Konstruieren Signaturen für $m \in \{0,1\}^\ell$.

- **Gen:** Bei Eingabe 1^n:
  Wähle $x_{i,j} \in_R \{0,1\}^n$, berechne $y \leftarrow f(x_{i,j})$ für $i \in [\ell], j \in \{0,1\}$.

$$\text{Setze } sk = \begin{pmatrix} x_{1,0} & \dots & x_{\ell,0} \\ x_{1,1} & \dots & x_{\ell,1} \end{pmatrix} \text{ und } pk = \begin{pmatrix} y_{1,0} & \dots & y_{\ell,0} \\ y_{1,1} & \dots & y_{\ell,1} \end{pmatrix}.$$

- **Sign:** Für $m_1 \dots m_\ell \in \{0,1\}^\ell$, Ausgabe (m, σ) mit
$$\sigma = (x_{1,m_1}, \dots, x_{\ell,m_\ell}).$$
- **Vrfy:** Für (m, σ) überprüfe $f(\sigma_i) \stackrel{?}{=} y_{i,m_i}$ für $i \in [\ell]$.

Sicherheit von Lamport Einwegsignaturen

Satz CMA-Sicherheit von Lamport

Lamport Einwegsignaturen sind CMA-sicher, falls die Nachrichtenlänge ℓ polynomiell in n und f eine Einwegfunktion ist.

Beweis: Sei Π das Lamport Signaturverfahren.

- Sei $\mathcal{A}$ ein Angreifer mit $\epsilon(n) := \mathrm{Ws}[Forge^{einweg}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1]$.
- Wir konstruieren einen Invertierer für f mittels $\mathcal{A}$.

Algorithmus Invertierer *I*

EINGABE: y

1. Wähle $i \in_R \{0,1\}^\ell$ und $b \in_R \{0,1\}$.
2. Berechne $(pk, sk) \leftarrow Gen_\Pi(1^n)$. Setze $y_{i,b} \leftarrow y$ in pk.
3. $(m, \sigma) \leftarrow \mathcal{A}$. Bei Signaturanfrage für m' antworte mit $\sigma = (\sigma_{1,m'_1}, \ldots, \sigma_{\ell,m'_\ell})$ falls $m'_i \neq b$. Sonst Abbruch.

$$\text{AUSGABE:} = \begin{cases} x_i & \text{falls } m_i \neq m'_i \\ \text{Abbruch} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Sicherheit von Lamport Einwegsignaturen

Beweis: Fortsetzung

- Sei (m, σ) eine gültige Signatur mit $m_i = b$.
- Dann ist σ_i ein Urbild von y, d.h. $f(\sigma_i) = y$.
- Wahl von y im Invertier-Spiel erfolgt durch $x \in_R D$ und $y \leftarrow f(x)$.
- D.h. pk ist identisch verteilt zum Lamport Signaturverfahren.

- Benötigen $m'_i \neq b$ und $m'_i \neq m_i$. Es gilt $\mathrm{Ws}[m'_i \neq b] = \frac{1}{2}$.
- Wegen $m \neq m'$ folgt $\mathrm{Ws}[m'_i \neq m_i] \geq \frac{1}{\ell}$.
- Wir erhalten insgesamt $\mathrm{Ws}[\mathit{Invert}_{y,f}(n) = 1]$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{Ws}[\mathit{Forge}^{\mathit{einweg}}_{\mathcal{A},\Pi}(n) \wedge (m'_i \neq b) \wedge (m'_i \neq m_i)] \\ &= \mathrm{Ws}[\mathit{Forge}^{\mathit{einweg}}_{\mathcal{A},\Pi}(n)] \cdot \mathrm{Ws}[(m'_i \neq b)] \cdot \mathrm{Ws}[(m'_i \neq m_i)] \geq \epsilon(n) \cdot \frac{1}{2\ell} \end{aligned}$$

- Aufgrund der Einweg-Eigenschaft von f gilt

$$\mathrm{negl}(n) \geq \mathrm{Ws}[\mathit{Invert}_{y,f}(n) = 1].$$

- Daraus folgt $\epsilon(n) \leq 2\ell \cdot \mathrm{negl}(n)$.
- Dies ist vernachlässigbar für polynomielles ℓ.

Einwegsignaturen für Nachrichten beliebiger Länge

Satz Einwegsignaturen für Nachrichten beliebiger Länge

Unter der Annahme kollisionsresistenter Hashfunktionen existiert ein CMA-sicheres Einwegsignatur-Verfahren für Nachrichten beliebiger Länge.

Beweisskizze:

- Aus der Existenz von kollisionsresistenten Hashfunktionen folgt die Existenz von Einwegfunktionen. (Übung)
- Nutzen Einwegfunktion f zur Konstruktion von CMA-sicheren Lamport-Signaturen der Nachrichtenlänge ℓ.
- Nutzen Hash-and-Sign Paradigma für beliebige Nachrichtenlänge. Hier verwenden wir erneut kollisionsresistente Hashfunktionen.

Einfache k-wegsignaturen

k-wegsignaturen

- Definiere mittels k-maliger Anwendung von $Gen_{\text{Lamport}}(1^n)$

$$pk = (pk_1, \ldots, pk_k) \text{ und } sk = (sk_1, \ldots, sk_k).$$

- Unterzeichnen die i-te Nachricht m mittels sk_i als (m, σ).
- Man bezeichnet i auch als *Zustand* im Signaturverfahren.
- (m, σ) gilt als gültig, falls (m, σ) für ein pk_i gültig ist.

Nachteile:

- Anzahl k muss bei Schlüsselgenerierung feststehen.
- Länge von pk und sk hängen beide von k ab.

Idee:

- Konstruiere neues Schlüsselpaar nur bei Bedarf.
- Validiere (pk_{i+1}, sk_{i+1}) mittels (pk_i, sk_i).

Zwei Signaturen mit einem öffentlichen Schlüssel

- Sei $\Pi = (Gen, Sign, Vrfy)$ ein Einwegsignaturverfahren.
- Konstruieren $\Pi' = (Gen', Sign', Vrfy)$ für zwei Signaturen.

Gen':

- Erzeuge $(pk_1, sk_1) \leftarrow Gen(1^n)$.

Sign' und Vrfy' von m_1:

- Erzeuge (pk_2, sk_2). Berechne $\sigma_1' \leftarrow Sign_{sk_1}(m_1||pk_2)$.
- Ausgabe der Signatur $\sigma_1 = (pk_2, \sigma_1')$. Merke (m_1, σ_1, sk_2).
- Verifikation von $(m_1, \sigma_1) = (m_1, pk_2, Sign_{sk_1}(m_1||pk_2))$:

$$\text{Überprüfe } Vrfy_{pk_1}(m_1||pk_2, \sigma_1') \stackrel{?}{=} 1.$$

Sign' und Vrfy' von m_2:

- Erzeuge (pk_3, sk_3). Berechne $\sigma_2' \leftarrow Sign_{sk_2}(m_2||pk_3)$.
- Ausgabe $\sigma_2 = (m_1, \sigma_1, pk_3, \sigma_2')$. Merke (m_2, σ_2, sk_3)
- Verifikation von $(m_2, \sigma_2) = (m_2, m_1, pk_2, \sigma_1', pk_3, \sigma_2')$:

$$\text{Überprüfe } Vrfy_{pk_1}(m_1||pk_2, \sigma_1') \stackrel{?}{=} 1 \textbf{ und } Vrfy_{pk_2}(m_2||pk_3, \sigma_2') \stackrel{?}{=} 1.$$

Beliebige Anzahl von Signaturen

Algorithmus Signaturketten

Sei $\Pi = (Gen, Sign, Vrfy)$ ein Einwegsignaturverfahren.

1. **Gen':** $(pk_1, sk_1) \leftarrow Gen(1^n)$
2. **Sign':** Signieren der Nachricht m_i.
   - Verwende gemerkten Zustand $(m_{i-1}, \sigma_{i-1}, sk_i)$.
   - $(pk_{i+1}, sk_{i+1}) \leftarrow Gen(1^n)$. Berechne $\sigma'_i = Sign_{sk_i}(m_i||pk_{i+1})$.
   - Ausgabe $\sigma_i = (m_{i-1}, \sigma_{i-1}, pk_{i+1}, \sigma'_i)$. Merke $(m_i, \sigma_i, sk_{i+1})$.
3. **Vrfy':** Verifikation von $(m_i, \sigma_i) \overset{Sortieren}{=} (m_j, pk_{j+1}, \sigma'_j)_{j=1}^{i}$:

   Überprüfe $Vrfy_{pk_j}(m_j||pk_{j+1}, \sigma'_j) \overset{?}{=} 1$ für $j = 1, \ldots, i$.

- **Vorteile:** Ein öffentlicher Schlüssel pk_1, beliebige Signaturanzahl.
- **Nachteile:** Signaturlänge, Zustandsgröße und Verifikationszeit sind linear in der Anzahl der signierten Dokumente.
- Signaturen geben alle zuvor signierten Dokumente preis.

Merkle-Baum

Idee: Konstruktion von Merkle-Bäumen

- Ersetze Signaturkette durch Baum (sogenannter Merkle-Baum).
- Verwenden Baum der Tiefe n für Nachrichten der Länge n.
- Die Wurzel erhält Label ϵ.
- Die Kinder eines Knotens mit Label w erhalten Label $w0$ und $w1$.
- Blätter besitzen Nachrichten-Label $m \in \{0,1\}^n$.
- Knoten mit Label w speichern Schlüsselpaar pk_w, sk_w.
- Wurzelschlüssel pk_ϵ ist der öffentliche Schlüssel.

Ziel: Zertifiziere Pfad von Wurzel zu m mittels Signaturen.

- Signieren Public-Keys auf Pfad inklusive der Nachbarknoten.

Signieren und Verifizieren von $m = 001$

Signieren von $m = 001$

- Pfad von Wurzel zu m: $\epsilon, 0, 00, 001$ mit Nachbarknoten $1, 01, 000$.
- Signiere $(\mathbf{pk_0}||pk_1)$ mittels sk_ϵ. Sei dies σ_ϵ.
- Signiere $(\mathbf{pk_{00}}||pk_{01})$ mittels sk_0. Sei dies σ_0.
- Signiere $(pk_{000}||\mathbf{pk_{001}})$ mittels sk_{00}. Sei dies σ_{00}.
- Signiere m mittels sk_{001}. Sei dies σ_{001}.
- Signatur ist $\sigma = (pk_0||pk_1, \sigma_\epsilon, pk_{00}||pk_{01}, \sigma_0, pk_{000}||pk_{001}, \sigma_{00}, \sigma_{001})$

Verifizieren von (m, σ):

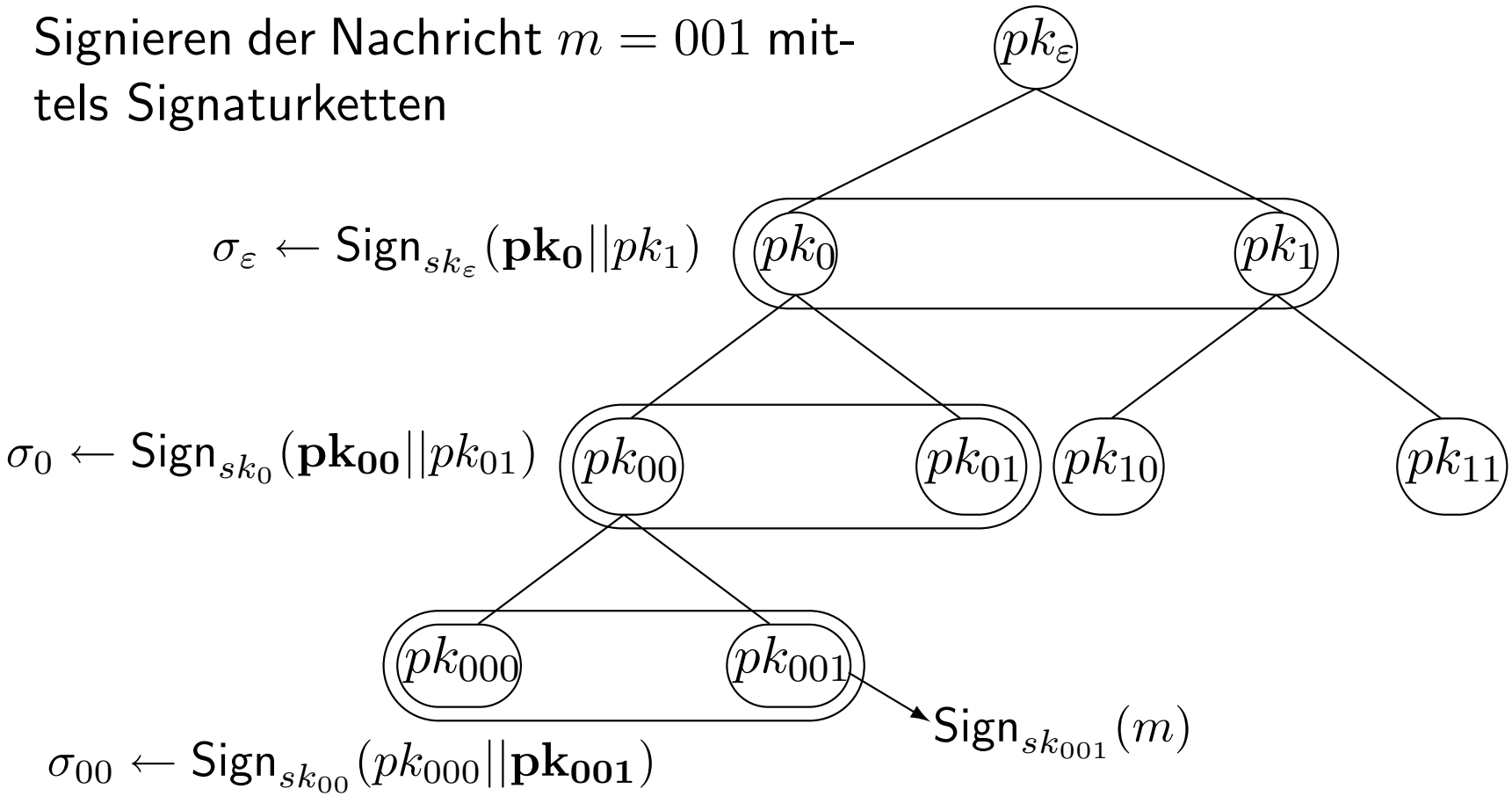
- Verifiziere $(pk_0||pk_1, \sigma_\epsilon)$ mittels pk_ϵ.
- Verifiziere $(pk_{00}||pk_{01}, \sigma_0)$ mittels pk_0.
- Verifiziere $(pk_{000}||pk_{001}, \sigma_{00})$ mittels pk_{00}.
- Verifiziere $(001, \sigma_{001})$ mittels pk_{001}.

Notation:

- Sei $m \in \{0,1\}^n$. Wir definieren $m|_i := m_1 \dots m_i$ für $i = 0, \dots, n$.
- D.h. $m|_i$ ist der i-Zeichen Präfix von m und $m|_i = \epsilon$.

Signaturkette der Nachricht $m = 001$

Signieren der Nachricht $m = 001$ mittels Signaturketten



Signieren und Verifizieren von $m = 101$

Signieren von $m = 101$

- Pfad von Wurzel zu m: $\epsilon, 1, 10, 101$ mit Nachbarknoten $0, 11, 100$.
- Signiere $(pk_0 || \mathbf{pk_1})$ mittels sk_ϵ. Sei dies σ_ϵ.
- Signiere $(\mathbf{pk_{10}} || pk_{11})$ mittels sk_1. Sei dies σ_1.
- Signiere $(pk_{100} || \mathbf{pk_{101}})$ mittels sk_{10}. Sei dies σ_{10}.
- Signiere m mittels sk_{101}. Sei dies σ_{101}.
- Signatur ist $\sigma = (pk_0 || pk_1, \sigma_\epsilon, pk_{10} || pk_{11}, \sigma_1, pk_{100} || pk_{101}, \sigma_{10}, \sigma_{101})$

Verifizieren von (m, σ):

- Verifiziere $(pk_0 || pk_1, \sigma_\epsilon)$ mittels pk_ϵ.
- Verifiziere $(pk_{10} || pk_{11}, \sigma_1)$ mittels pk_1.
- Verifiziere $(pk_{100} || pk_{101}, \sigma_{10})$ mittels pk_{10}.
- Verifiziere $(101, \sigma_{101})$ mittels pk_{101}.

Notation:

- Sei $m \in \{0,1\}^n$. Wir definieren $m|_i := m_1 \dots m_i$ für $i = 0, \dots, n$.
- D.h. $m|_i$ ist der i-Zeichen Präfix von m und $m|_i = \epsilon$.

Merkle Signaturen

Algorithmus Merkle Signatur

Sei $\Pi = (Gen, Vrfy, Sign)$ ein Einwegsignaturverfahren.

1. **Gen':** $(pk_\epsilon, sk_\epsilon) \leftarrow Gen(1^n)$
2. **Sign':** Für Nachricht $m \in \{0,1\}^n$: FOR $i \leftarrow 0$ to $n-1$
   - Falls $pk_{m|_i 0}, pk_{m|_i 1}$ noch nicht erzeugt, erzeuge und speichere $(pk_{m|_i 0}, sk_{m|_i 0}) \leftarrow Gen(1^n)$, $(pk_{m|_i 1}, sk_{m|_i 1}) \leftarrow Gen(1^n)$.
   - Erzeuge $\sigma_{m|_i} \leftarrow Sign_{sk_{m|_i}}(pk_{m|_i 0}, pk_{m|_i 1})$.

   Berechne $\sigma_m \leftarrow Sign_{sk_m}(m)$
   Ausgabe von $\sigma = ((pk_{m|_i 0} || pk_{m|_i 1}, \sigma_{m|_i})_{i=0}^{n-1}, \sigma_m)$.
3. **Vrfy':** Für (m, σ) überprüfe
   $Vrfy_{pk_{m|_i}}(pk_{m|_i 0} || pk_{m|_i 1}, \sigma_{m|_i}) \stackrel{?}{=} 1$ für $i = 0, \ldots, n-1$ und
   $Vrfy_{pk_m}(m, \sigma_m) \stackrel{?}{=} 1$.

Eigenschaften von Merkle Signaturen

Eigenschaften:

- Erlaubt das Signieren aller möglichen 2^n Nachrichten.
- Schlüsselpaare werden nur bei Bedarf erzeugt.

Vorteile: gegenüber Signaturketten

- Signaturlänge/Verifikationszeit sind linear in der Nachrichtenlänge aber unabhängig von der Anzahl Signaturen.
- Keine Preisgabe der zuvor signierten Nachrichten.

Satz Sicherheit von Merkle Signaturen

Sei Π eine CMA-sichere Einwegsignatur. Dann sind Merkle Signaturen Π' ein CMA-sicheres Signaturverfahren.

Beweis:

- Sei $\mathcal{A}'$ ein Angreifer mit $\epsilon(n) := \mathrm{Ws}[\mathit{Forge}_{A',\Pi'}(n) = 1]$.
- $\mathcal{A}'$ frage höchstens ℓ' Signaturen an. Setze $\ell := 2n\ell' + 1$ als obere Schranke für die Anzahl der benötigten Schlüssel in Π'.
- Wir konstruieren mittels $\mathcal{A}'$ einen Angreifer $\mathcal{A}$ für Π.

S

Sicherheit von Merkle Signaturen

Algorithmus Angreifer $\mathcal{A}$ für die Einwegsignatur

EINGABE: pk, Zugriff auf eine Anfrage an Orakel $Sign_{sk}(\cdot)$

1. Berechne $(pk^{(i)}, sk^{(i)}) \leftarrow Gen(1^n)$ für $i = 1, \ldots, \ell$.
   Wähle $i' \in_R [\ell]$. Ersetze $pk^{(i')}$ durch pk. $j \leftarrow 2$
2. $(m, \sigma') \leftarrow \mathcal{A}'(pk^{(1)})$. Signaturanfragen für m: For $i \leftarrow 1$ to $n-1$
   - Falls $pk_{m|_i 0}, pk_{m|_i 1}$ undefiniert, $(pk_{m|_i 0}, pk_{m|_i 1}) \leftarrow (pk^{(j)}, pk^{(j+1)})$.
     $j \leftarrow j + 2$
   - Berechne $\sigma_{m|_i}$, σ_m und σ analog zu Merkle-Signaturen.
     Falls $sk = sk^{(i')}$ benötigt, verwende das Signierorakel $Sign_{sk}(\cdot)$.
3. Sei $\sigma' = ((pk'_{m|_i 0} || pk'_{m|_i 1}, \sigma'_{m|_i})_{i=0}^{n-1}, \sigma'_m)$
   - **Fall 1:** $\exists 0 \leq i < n$ mit $(pk'_{m|_i 0} || pk'_{m|_i 1}) \neq (pk_{m|_i 0} || pk_{m|_i 1})$.
     Sei i minimal. Dann gilt $pk'_{m|_i} = pk_{m|_i} = pk^{(k)}$ für ein $k \in [\ell]$.
     Falls $k = i'$, Ausgabe $(pk'_{m|_i 0} || pk'_{m|_i 1}, \sigma'_{m|_j})$.
   - **Fall 2:** Es gilt $pk'_m = pk_m = pk^{(k)}$ für ein $k \in [\ell]$.
     Falls $k = i'$, Ausgabe (m, σ'_m).

Sicherheit von Merkle Signaturen

Beweis: Fortsetzung

- Verteilung der Nachrichten für $\mathcal{A}'$ ist identisch zum Forge-Spiel.
- D.h. $\mathcal{A}$ liefert eine gültige Signatur (m', σ') mit Ws $\epsilon(n)$.
- Sowohl für Fall 1 als auch für Fall 2 gilt $\mathrm{Ws}[k = i'] = \frac{1}{\ell}$.
- Wir nehmen im folgenden an, dass $k = i'$.
- **Fall 1:** $\exists$ neuer Public-Key in Geschwisterknotenpaar.
- $\mathcal{A}$ stellte eventuell Orakelanfrage für Nachricht $(pk_{m|_i 0}||pk_{m|_i 1})$.
- Wegen $(pk'_{m|_i 0}||pk'_{m|_i 1}) \neq (pk_{m|_i 0}||pk_{m|_i 1})$ ist $\sigma'_{m|_i}$ bezüglich pk eine gültige Signatur für eine neue Nachricht.
- **Fall 2:** pk'_m existiert bereits.
- $\mathcal{A}'$ kann nicht Orakelanfrage m gestellt haben, da er m ausgibt.
- Damit ist σ'_m eine gültige neue Signatur für m bezüglich pk.
- **Insgesamt:** $\mathrm{negl}(n) \geq \mathrm{Ws}[Forge^{einweg}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] = \frac{\epsilon(n)}{\ell}$.
- Da ℓ polynomiell ist, folgt $\epsilon(n) \leq \mathrm{negl}(n)$.

Existenz CMA-sicherer Signatur

Korollar Signatursatz

Falls kollisionsresistente Hashfunktionen existieren, so existiert ein CMA-sicheres Signaturverfahren.

Anmerkung:

- Man kann sogar zeigen, dass ein CMA-sicheres Signaturverfahren existiert unter der Annahme der Existenz von Einwegfunktionen.

Digital Signature Standard – Schnorr Signaturen

Systemparameter:

- Primzahlen p, q, wobei q Bitlänge n besitzt und $q|p-1$, $q^2 \nmid p-1$.
- Generator g einer Untergruppe von $\mathbb{Z}_p^*$ mit Ordnung q.

Algorithmus Digital Signature Standard

1. **Gen:** $(p, q, g, H) \leftarrow Gen(1^n)$ mit Hashfunktion $H : \{0,1\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_q$.
   Wähle $x \in_R \mathbb{Z}_q$, berechne $y \leftarrow g^x \bmod p$.
   Setze $pk = (p, q, g, H, y)$, $sk = (p, q, g, H, x)$.
2. **Sign:** Für $m \in \{0,1\}^*$, wähle $k \in_R \mathbb{Z}_q^*$ und berechne
   $$r \leftarrow (g^k \bmod p) \bmod q \quad \text{und} \quad s \leftarrow (H(m) + xr) \cdot k^{-1} \bmod q.$$
   Signatur $\sigma = (r, s)$.
3. **Vrfy:** Für $(m, \sigma) = (m, r, s)$ überprüfe
   $$r \stackrel{?}{=} (g^{H(m)\cdot s^{-1} \bmod q} y^{r\cdot s^{-1} \bmod q} \bmod p) \bmod q.$$

Eigenschaften des DSS

Korrektheit:

$$\begin{aligned} g^{H(m)\cdot s^{-1}} y^{r\cdot s^{-1}} &= g^{H(m)(H(m)+xr)^{-1}k} g^{xr(H(m)+xr)^{-1}k} \bmod p \\ &= g^{(H(m)+xr)\cdot(H(m)+xr)^{-1}k} = g^k \bmod p. \end{aligned}$$

Parameterwahl:

- Bitlänge von p: 1024, Bitlänge n von q: 160.
- Die Signaturlänge von $(r, s) \in \mathbb{Z}_q^2$ ist damit nur 320 Bit.
- Dlog in $\mathbb{Z}_p^*$: subexponentieller Index-Calculus Algorithmus
- Dlog in $\langle g \rangle$: Pollard-Rho mit Komplexität $2^{\frac{n}{2}}$.

Sicherheit:

- Keine größeren Schwächen bekannt.
- Aber: DSS besitzt **keinen** Sicherheitsbeweis.

Viele Public-Keys mittels eines Public Keys

Zertifierung

- Zertifizierungsstelle CA (Certificate Authority) veröffentlicht pk_{CA}.
- CA zertifiziert Schlüssel pk_A eines Nutzers Alice mit Zertifikat

$$cert_{CA \to A} \leftarrow Sign_{sk_{CA}}(\text{“alice@rub.de besitzt Schlüssel } pk_A\text{”}).$$

- Alice kann $(pk_A, cert_{CA \to A})$ über unsicheren Kanal verschicken.
- CMA-Sicherheit des Signaturverfahrens verhindert erfolgreiches Fälschen eines Zertifikat für einen anderen Schlüssel pk'_A.
- D.h. mit nur einem öffentlichen Schlüssel kann eine CA beliebig viele weitere öffentliche Schlüssel zertifizieren.
- Liefert sogenannte Public-Key Infrastruktur.

Random Oracle

Definition Random Oracle

Sei $\mathcal{F}^{n,\ell}$ die Menge aller Funktionen $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^{\ell(n)}$. Ein *Random Oracle* ist eine zufällige Funktion $H \in_R \mathcal{F}^{n,\ell}$. Wir besitzen keine Beschreibung von H. Bei Anfrage x liefert das Random Oracle $H(x)$.

Anmerkung: Bildliche Darstellung

- Ein Random Oracle H ist eine Funktion in einer schwarzen Box.
- H ist beobachtbar über das Eingabe/Ausgabe-Verhalten der Box.

Alternative Beschreibung eines Random Oracles

- Oracle erhält Anfragen $x_1, \ldots, x_q$.
- Falls $x_i \neq x_j$ für alle $j < i$, gib $y_i \in_R \{0,1\}^{\ell(n)}$ aus.
- Falls $x_i = x_j$ für ein $j < i$, gib y_j aus.
- D.h. wir können uns vorstellen, dass das Orakel die Antworten auf Anfragen bei Bedarf erzeugt und konsistent beantwortet.

Random Oracles liefern Einwegfunktionen

Satz

Für polynomielles $\ell(n)$ sind Random Oracles Einwegfunktionen.

Beweis:

- Sei $x \in_R \{0,1\}^n$ und $y = H(x)$. Wollen ein Urbild von y ermitteln.
- Jeder Angreifer $\mathcal{A}$ stellt oBdA verschiedene Anfragen $x_1, \ldots, x_q$. (Warum sollte jeder Angreifer so verfahren?)
- $\mathcal{A}$ gewinnt offenbar falls $x_i = x$ für ein i, d.h. mit $\mathrm{Ws}[x_i = x] = \frac{q}{2^n}$.
- $\mathcal{A}$ gewinnt ebenfalls für $H(x_i) = y$, d.h. mit
$$\mathrm{Ws}[H(x_i) = y] = 1 - (1 - \tfrac{1}{2^{\ell(n)}})^q \leq 1 - (1 - \tfrac{q}{2^{\ell(n)}}) = \tfrac{q}{2^{\ell(n)}}.$$
- Damit gilt $Ws[Invert_{\mathcal{A},H}(n) = 1] \leq \frac{q}{2^n} + \frac{q}{2^{\ell(n)}}$.
- Für polynomielles q ist dies vernachlässigbar in n.
- Man beachte: $\mathcal{A}$ muss kein ppt-beschränkter Angreifer sein, der Beweis gilt für beliebige Angreifer (d.h. informationstheoretisch).

Random Oracle und kollisionsresistentes Hashen

Satz

Für polynomielles $\ell(n)$ sind Random Oracles kollisionsresistent.

Beweis:

- Jeder Angreifer $\mathcal{A}$ stellt oBdA verschiedene Anfragen $x_1, \ldots, x_q$.
- $\mathcal{A}$ gewinnt mit $Ws[H(x_i) = H(x_j)] \leq \frac{q^2}{2^{\ell(n)}}$. (Geburtstagsparadoxon)
- Dies ist vernachlässigbar für polynomielles q.

Random Oracle Methode

Definition Random Oracle Modell / Methode

Das *Random Oracle Modell (ROM)* nimmt die Existenz von Random Oracles an. Die *Random Oracle Methode* besteht aus 2 Schritten:

1. Konstruiere ein Verfahren Π mit Hilfe eines Random Oracles H und beweise die Sicherheit von Π im ROM.
2. Instantiiere Π mit einer kryptographischen Hashfunktion H' anstelle von H, z.B. mit SHA-1.

Negativ:

- Beschreibung von H' spezifiziert $H'(x)$ für alle x.
- Es existieren künstliche Kryptosysteme, die sicher im Random Oracle Modell aber unsicher für *jede* Instantiierung von H' sind.

Positiv:

- Ein Beweis im ROM ist besser als kein Beweis.
- Erfolgreicher Angriff muss die Instantiierung von H' attackieren.
- H' kann leicht durch eine andere Hashfunktion ersetzt werden.

CPA-sicheres effizientes RSA im ROM

Verschlüsselung ROM-RSA

Sei $H : \mathbb{Z}_N^* \to \{0,1\}^{\ell(n)}$ ein Random Oracle.

1. **Gen:** $(N, e, d) \leftarrow \mathit{GenRSA}(1^n)$ mit $pk = (N, e)$, $sk = (N, d)$.
2. **Enc:** Für $m \in \{0,1\}^{\ell(n)}$, wähle $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$. Berechne
$$c \leftarrow (r^e \bmod N, H(r) \oplus m).$$
3. **Dec:** Für $c = (c_1, c_2)$ berechne
$$r \leftarrow c_1^d \bmod N \text{ und } m \leftarrow H(r) \oplus c_2.$$

Sicherheit von RSA im Random Oracle Modell

Satz CPA-Sicherheit von ROM-RSA

Unter der RSA-Annahme und für ein Random Oracle H ist ROM-RSA CPA-sicher.

Beweis:

- Sei $\Pi =$ ROM-RSA und $\epsilon = \mathrm{Ws}_{\mathcal{A},\Pi}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1]$.
- Angreifer $\mathcal{A}$ darf Orakelanfragen an H stellen, sowohl vor Ausgabe von (m_0, m_1) als auch nach Erhalt von $Enc(m_b)$.
- Definiere *Success* : Ereignis $PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1$.
- Definiere *Query* : Ereignis $\mathcal{A}$ stellt Anfrage $r = c_1^d \bmod N$ an H.
- Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ws}[Success] &= \mathrm{Ws}[Success \wedge \overline{Query}] + \mathrm{Ws}[Success \wedge Query] \\ &\leq \mathrm{Ws}[Success \wedge \overline{Query}] + \mathrm{Ws}[Query]. \end{aligned}$$

- Zeigen $\mathrm{Ws}[Success \wedge \overline{Query}] \leq \frac{1}{2}$ und $\mathrm{Ws}[Query] \leq \mathrm{negl}(n)$.
- Daraus folgt $\mathrm{Ws}[Success] = \epsilon(n) \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$.

Beweis der CPA-Sicherheit von ROM-RSA (1/2)

Beweis: $\mathrm{Ws}[\mathit{Success} \wedge \overline{\mathit{Query}}] \leq \frac{1}{2}$

- Falls r nicht an H angefragt wird, ist $H(r) \oplus m$ nach Eigenschaft des Random Oracles ein perfektes One-Time Pad für m.
- Daraus folgt $\mathrm{Ws}[\mathit{Success} \mid \overline{\mathit{Query}}] = \frac{1}{2}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ws}[\mathit{Success} \wedge \overline{\mathit{Query}}] &= \mathrm{Ws}[\mathit{Success} \mid \overline{\mathit{Query}}] \cdot \mathrm{Ws}[\overline{\mathit{Query}}] \\ &\leq \mathrm{Ws}[\mathit{Success} \mid \overline{\mathit{Query}}] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beweis der CPA-Sicherheit von ROM-RSA (2/2)

Beweis: $\mathrm{Ws}[\mathit{Query}] \leq \mathrm{negl}(n)$

- Idee: Verwende Anfragen von $\mathcal{A}$, um e-te Wurzeln zu berechnen.

Algorithmus RSA-Invertierer $\mathcal{A}'$

EINGABE: $N, e, c_1 = r^e \bmod N$

1. Wähle $k \in_R \{0,1\}^{\ell(n)}$. (Wir setzen $H(r) = k$, ohne r zu kennen.)
2. $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}(N, e)$, beantworte Orakelanfragen r_i an $H(\cdot)$

$$\text{konsistent mit } \begin{cases} k_i = k & \text{für } r_i^e = c_1 \bmod N \\ k_i \in_R \{0,1\}^{\ell(n)} & \text{sonst} \end{cases}.$$

3. Berechne $c \leftarrow (c_1, k \oplus m_b)$ für ein $b \in_R \{0,1\}$.
4. $b' \leftarrow \mathcal{A}(c)$, beantworte Anfragen von $\mathcal{A}$ an $H(\cdot)$ wie zuvor.
5. Falls $r_i^e = c_1 \bmod N$ für eine der Orakelanfragen, setze $r \leftarrow r_i$.

AUSGABE: r

- Es gilt $Ws[\mathit{Query}] = Ws[\mathcal{A}'(N, e, r^e) = r] \leq \mathrm{negl}(n)$.

Sicherheit gegenüber CCA

Idee:

- Ersetze One-Time Pad durch CCA-sicheres Secret Key Verfahren.
- Konstruktion von CCA-sicherem Secret Key Verfahren mittels sogenannter Pseudozufallsfunktionen und MACs möglich.

Verschlüsselung ROM-RSA-2

Sei $H : \{0,1\}^{\ell(n)} \to \mathbb{Z}_N^*$ ein Random Oracle, $\Pi' = (Gen', Enc', Dec')$ ein CCA-sicheres Secret Key Verschlüsselungsverfahren.

1. **Gen:** $(N, e, d) \leftarrow GenRSA(1^n)$ mit $pk = (N, e), sk = (N, d)$.
2. **Enc:** Für $m \in \{0,1\}^{\ell(n)}$, wähle $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$. Berechne $k = H(r)$ und
$$c \leftarrow (r^e \bmod N, Enc'_k(m)).$$
3. **Dec:** Für $c = (c_1, c_2)$ berechne
$$r \leftarrow c_1^d \bmod N,\ k \leftarrow H(r) \text{ und } m \leftarrow Dec'_k(c_2).$$

Sicherheit von ROM-RSA-2

Satz Sicherheit von ROM-RSA-2

Unter der RSA-Annahme, für ein Random Oracle H und ein CCA-sicheres Π' liefert ROM-RSA-2 CCA-sichere Verschlüsselung.

Anmerkungen:

- Wir werden den Satz hier nicht formal beweisen.
- Der Beweis verläuft großteils analog zum vorigen Beweis.
- Problem: Müssen Orakel $Dec_{sk}(\cdot)$ simulieren, ohne sk zu kennen.
- Verwende dazu geschicktes Simulieren des Random Oracles $H(\cdot)$.
- Bsp. für geschicktes Simulieren: s. folgender Beweis zu RSA-FDH.

RSA Full Domain Hash (RSA-FDH) Signaturen

Signatur RSA-FDH

Sei $H : \{0,1\}^* \to \mathbb{Z}_N^*$ ein Random-Oracle.

1. $(N, e, d) \leftarrow \mathit{GenRSA}(1^n)$ mit $pk = (N, e)$ und $sk = (N, d)$.
2. Für eine Nachricht $m \in \{0,1\}^*$ berechne $\sigma \leftarrow H(m)^d \bmod N$.
3. Für (m, σ) überprüfe $\sigma^e \stackrel{?}{=} H(m) \bmod N$.

Anmerkung:

- RSA-FDH entspricht Hashed-RSA mit einem Random Oracle als Hashfunktion.

CMA-Sicherheit von RSA-FDH

Satz CMA-Sicherheit von RSA-FDH

Unter der RSA-Annahme und für ein Random-Oracle H ist RSA-FDH ein CMA-sicheres Signaturverfahren.

Beweisskizze:

- Sei $\Pi =$ RSA-FDH und $\epsilon = \mathrm{Ws}[\mathit{Forge}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1]$.
- OBdA gelten folgende Annahmen für die Orakelanfragen von $\mathcal{A}$:
  1. $\mathcal{A}$ fragt verschiedene $x_1, \ldots, x_q$ an $H(\cdot)$.
  2. Bevor $\mathcal{A}$ Anfrage m an $\mathit{Sign}_{sk}(\cdot)$ stellt, fragt er $H(m)$ an.
  3. Für eine Fälschung (m, σ) hat $\mathcal{A}$ zuvor Anfrage $H(m)$ gestellt.
- Konstruieren RSA-Invertierer $\mathcal{A}'$ mittels $\mathcal{A}$.

Beweis der CMA-Sicherheit von RSA-FDH

Algorithmus RSA-Invertierer $\mathcal{A}'$

EINGABE: $N, e, y = x^e \bmod N$

1. Wähle $j \in_R \{1, \ldots, q\}$.
2. $(m, \sigma) \leftarrow \mathcal{A}^{Sign_{sk}(\cdot)}(N, e)$.
   - Beantworte Orakelanfragen m_i an $H(\cdot)$ konsistent mit
     $$y_i = \begin{cases} y & \text{für } i = j \\ \sigma_i^e \bmod N \text{ für ein selbst gewähltes } \sigma \in_R \mathbb{Z}_N^* & \text{sonst} \end{cases}.$$
   - Beantworte Orakelanfragen m_i an $Sign_{sk}(\cdot)$ mit σ_i für $i \neq j$. Bei Orakelanfrage $Sign_{sk}(m_j)$, Abbruch.
3. Falls $m = m_j$ und $\sigma^e = y \bmod N$, setze $x \leftarrow \sigma$.

AUSGABE: x

- Unter der RSA-Annahme gilt $\mathrm{negl}(n) \geq Ws[\mathcal{A}'(N, e, x^e) = x]$
  $$= Ws[m = m_j] \cdot \mathrm{Ws}[Forge_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] = \frac{\epsilon(n)}{q}.$$
- Damit ist $\epsilon(n) \leq q \cdot \mathrm{negl}(n)$ vernachlässigbar für polynomielles q.

Jacobi-Symbol

Erinnerung Jacobi-Symbol: Beweise siehe Diskrete Mathematik II

Definition Quadratischer Rest

Sei $N \in \mathbb{N}$. Ein Element $a \in \mathbb{Z}_N$ heißt *quadratischer Rest* in $\mathbb{Z}_N$, falls es ein $b \in \mathbb{Z}_N$ gibt mit $b^2 = a \bmod N$. Wir definieren

$$QR_N = \{a \in \mathbb{Z}_N^* \mid a \text{ ist quadratischer Rest } \} \text{ und } QNR_N = \mathbb{Z}_N^* \setminus QR_N.$$

Lemma Anzahl quadratischer Reste in primen Restklassen

Sei $p > 2$ prim. Dann gilt $|QR_p| = \frac{|\mathbb{Z}_p^*|}{2} = \frac{p-1}{2}$.

Beweisidee:

- Quadrieren auf $\mathbb{Z}_p^*$, $x \mapsto x^2$, ist eine 2:1-Abbildung.
- Die verschiedenen Werte $x, (-x)$ werden beide auf x^2 abgebildet.

Legendre-Symbol

Definition Legendre Symbol

Sei $p > 2$ prim und $a \in \mathbb{N}$. Das *Legendre Symbol* ist definiert als

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p|a \\ 1 & \text{falls } (a \bmod p) \in QR_p \\ -1 & \text{falls } (a \bmod p) \in QNR_p \end{cases} .$$

Satz

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$$

Eigenschaften Quadratischer Reste

1. Multiplikativität: $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$
2. $(QR_p, \cdot)$ ist eine multiplikative Gruppe.

Das Jacobi Symbol

Definition Jacobi Symbol

Sei $N = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \in \mathbb{N}$ ungerade und $a \in \mathbb{N}$. Dann ist das *Jacobi Symbol* definiert als

$$\left(\frac{a}{N}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_i} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right)^{e_k}.$$

- **Warnung:** $\left(\frac{a}{N}\right) = 1$ impliziert nicht, dass $a \in QR_N$ ist.
- Bsp: $\left(\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = (-1)(-1) = 1$.
- D.h. $2 \in QNR_3$ und $2 \in QNR_5$. Damit besitzt $x^2 = 2$ weder Lösungen modulo 3 noch modulo 5.
- Nach CRT besitzt $x^2 = 2 \mod 15$ ebenfalls keine Lösung.

Pseudoquadrate

Berechnung des Jacobi-Symbols: Sei $a \in \mathbb{Z}_N$.

- Berechnung von $\left(\frac{a}{N}\right)$ ist in Zeit $\log^2(N)$ möglich, **ohne** die Faktorisierung von N zu kennen.
- Algorithmus ist ähnlich zum Euklidischen Algorithmus, verwendet das Gaußsche Reziprozitätsgesetz.

Definition Pseudoquadrat

Sei $N \in \mathbb{N}$. Die Menge der *Pseudoquadrate* ist definiert als

$$QNR_N^{+1} = \{a \in \mathbb{Z}_N^* \mid \left(\frac{a}{N}\right) = 1 \text{ und } a \notin QR_N\}.$$

Multiplikation von Resten/Nichtresten

Lemma Multiplikation von Resten/Nichtresten

Sei $N = pq$ ein RSA-Modul. Seien $x, x' \in QR_N$ und $y, y' \in QNR_N^{+1}$.

1. $xx' \in QR_N$
2. $yy' \in QR_N$
3. $xy \in QNR_N^{+1}$

Beweis: für 3 (1+2 folgen analog)

- Nach Chinesischem Restsatz gilt
$$QR_N \simeq QR_p \times QR_q \text{ und } QNR_N^{+1} \simeq QNR_p \times QNR_q.$$
- Aus der Multiplikativität des Legendre-Symbols folgt
$$\left(\frac{xy}{N}\right) = \left(\frac{xy}{p}\right)\left(\frac{xy}{q}\right) = \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{y}{p}\right)\left(\frac{y}{q}\right) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1.$$
- Analog gilt
$$\left(\frac{xy}{p}\right) = \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{y}{p}\right) = (-1).$$
- Daraus folgt $xy \in QNR_N^{+1}$.

Quadratische Residuositätsannahme

Definition Quadratische Residuosität

Das *Unterscheiden quadratischer Reste* ist hart bezüglich *GenModulus*(1^n) falls für alle ppt $\mathcal{A}$ gilt

$$|\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(N, qr) = 1] - \mathrm{Ws}[\mathcal{A}(N, qnr) = 1]| \leq \tfrac{1}{2} + \mathrm{negl}(n),$$

wobei $qr \in_R QR_N$ und $qnr \in_R QNR_N^{+1}$.

QR-Annahme: Unterscheiden quadratischer Reste ist hart.

Idee des Goldwasser-Micali Kryptosystems

- $pk = N$, $sk = (p, q)$
- Verschlüsselung von 0 ist zufälliges $x' \in_R QR_N$.
- Wähle $x \in_R \mathbb{Z}_N^*$ und berechne $x' \leftarrow x^2 \bmod N$.
- Verschlüsselung von 1 ist zufälliges $y \in_R QNR_N^{+1}$.
- **Problem:** Wie wählt man y ohne p, q zu kennen?
- Abhilfe: Public-Key enthält $z \in_R QNR_N^{+1}$.
- Sender wählt $x \in_R \mathbb{Z}_N^*$ und berechnet $y \leftarrow z \cdot x^2 \bmod N \in QNR_N^{+1}$.

GOLDWASSER-MICALI Verschlüsselung (1984)

Definition GOLDWASSER-MICALI Verschlüsselung

Sei n ein Sicherheitsparameter.

1. **Gen:** $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n)$. Wähle $z \in_R QNR_N^{+1}$. (Wie?)
   Schlüssel: $pk = (N, z)$ und $sk = (p, q)$
2. **Enc:** Für $m \in \{0, 1\}$ berechne $c \leftarrow z^m \cdot x^2 \bmod N$.
3. **Dec:** Berechne $m = \begin{cases} 0 & \text{falls } \left(\frac{c}{p}\right) = 1 \\ 1 & \mathit{sonst} \end{cases}$.

Korrektheit:

- Für $m = 0$ ist $c \in QR_N \simeq QR_p \times QR_q$, d.h. $\left(\frac{c}{p}\right) = 1$.
- Für $m = 1$ ist $c \in QNR_N^{+1} \simeq QNR_p \times QNR_q$, d.h. $\left(\frac{c}{p}\right) = (-1)$.

Sicherheit von GOLDWASSER-MICALI Verschlüsselung

Satz Sicherheit von GOLDWASSER-MICALI

GOLDWASSER-MICALI ist CPA-sicher.

Beweis: Sei Π die GOLDWASSER-MICALI Verschlüsselung.

- Sei $\mathcal{A}$ ein Angreifer für Π mit $\epsilon(n) = \mathrm{Ws}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A},N}(n) = 1]$.
- Konstruieren Unterscheider D für Quadratische Residuosität.

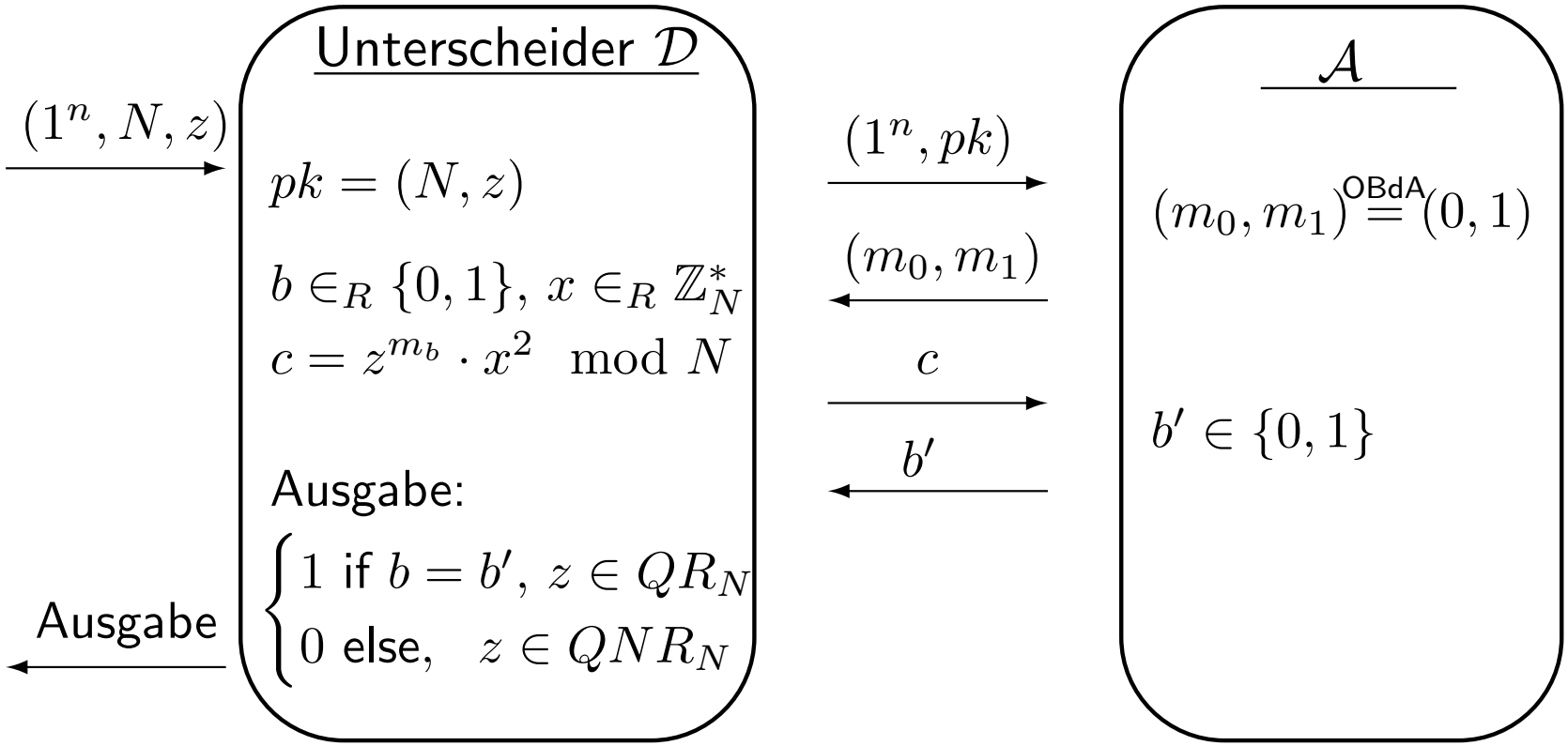
Algoritmus QR-Unterscheider D

EINGABE: (N, z) mit $\left(\frac{z}{N}\right) = 1$

1. Setze $pk = (N, z)$ und berechne $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}(pk)$.
   OBdA gilt $\{m_0, m_1\} = \{0, 1\}$.
2. Wähle $b \in_R \{0, 1\}$ und $x \in_R \mathbb{Z}_N^*$. Berechne $c \leftarrow z^{m_b} \cdot x^2 \bmod N$.
3. $b' \leftarrow \mathcal{A}(c)$

AUSGABE: $\begin{cases} 1 & \text{falls } b = b', \text{ Interpretation } z \in QR_N \\ 0 & \text{sonst,} \qquad\quad \text{Interpretation } z \in QNR_N \end{cases}$

Algorithmus QR-Unterscheider



Sicherheit von GOLDWASSER-MICALI Verschlüsselung

Fall 1: $z \in QNR_N^{+1}$

- Verteilung von c ist identisch zu GOLDWASSER-MICALI.
- D.h. $\mathrm{Ws}[D(N, qnr) = 1] = \epsilon(n)$.

Fall 2: $z \in QR_N$

- Falls 0 verschlüsselt wird, gilt $c = x^2 \in_R QR_N$.
- Falls 1 verschlüsselt wird, gilt $c = z \cdot x^2 \in_R QR_N$.
- D.h. die Verteilung von c ist unabhängig von der Wahl von b.
- Sei Π' GOLDWASSER-MICALI Verschlüsselung mit $z \in QR_N$.
- Dann gilt $\mathrm{Ws}[D(N, qr) = 1] = \mathrm{Ws}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi'}(n)] = \frac{1}{2}$.
- Unter der Quadratischen Residuositäts-Annahme folgt

$$\mathrm{negl}(n) \geq |\mathrm{Ws}[D(N, qr) = 1] - \mathrm{Ws}[D(N, qnr) = 1]| = \left|\tfrac{1}{2} - \epsilon(n)\right|.$$

- Daraus folgt $\epsilon(n) \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$.

Rabin Verschlüsselung 1979

Idee: Rabin Verschlüsselung

- Beobachtung: Berechnen von Wurzeln in $\mathbb{Z}_p$ ist effizient möglich.
- Ziehen von Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_N$ ist äquivalent zum Faktorisieren.

Vorteil: CPA-Sicherheit beruht nur auf Faktorisierungsannahme.

- RSA: Berechnen von e-ten Wurzeln in $\mathbb{Z}_n$.
- Goldwasser-Micali: Unterscheiden von QR_N und QNR_N.

Satz Ziehen von Wurzeln in $\mathbb{Z}_p$

Sei p prim mit $p = 3 \bmod 4$ und $a \in QR_p$. Dann gilt für $b = a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p$, dass $b^2 = a \bmod p$.

Beweis:

- Es gilt $\left(a^{\frac{p+1}{4}}\right)^2 = a^{\frac{p+1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot a = a \bmod p$.
- Man beachte, dass $\frac{p+1}{4} \in \mathbb{N}$ wegen $p = 3 \bmod 4$.

Quadratwurzel bei bekannter Faktorisierung

Definition Blum-Zahl

Sei $N = pq$ ein RSA-Modul. N heißt *Blum-Zahl* falls $p = q = 3 \bmod 4$.

Satz Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_N$

Sei $N = pq$ eine Blum-Zahl mit bekannten p, q. Dann können die vier Quadratwurzeln von $a \in QR_N$ in Zeit $\mathcal{O}(\log^3 N)$ berechnet werden.

Beweis:

Algorithmus QUADRATWURZEL

EINGABE: $N, p, q, a \in QR_N$

1. Berechne $x_p \leftarrow a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p$, $x_q \leftarrow a^{\frac{q+1}{4}} \bmod q$.
2. Berechne mittels Chinesischem Restsatz die Lösungen von
$$\left| \begin{array}{l} b_1 = x_p \bmod p \\ b_1 = x_q \bmod q \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} b_2 = -x_p \bmod p \\ b_2 = x_q \bmod q \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} b_3 = x_p \bmod p \\ b_3 = -x_q \bmod q \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} b_4 = -x_p \bmod p \\ b_4 = -x_q \bmod q \end{array} \right|$$

AUSGABE: $b_1, \ldots, b_4$ mit $b_i^2 = a \bmod N$

Quadratwurzeln ohne Faktorisierung

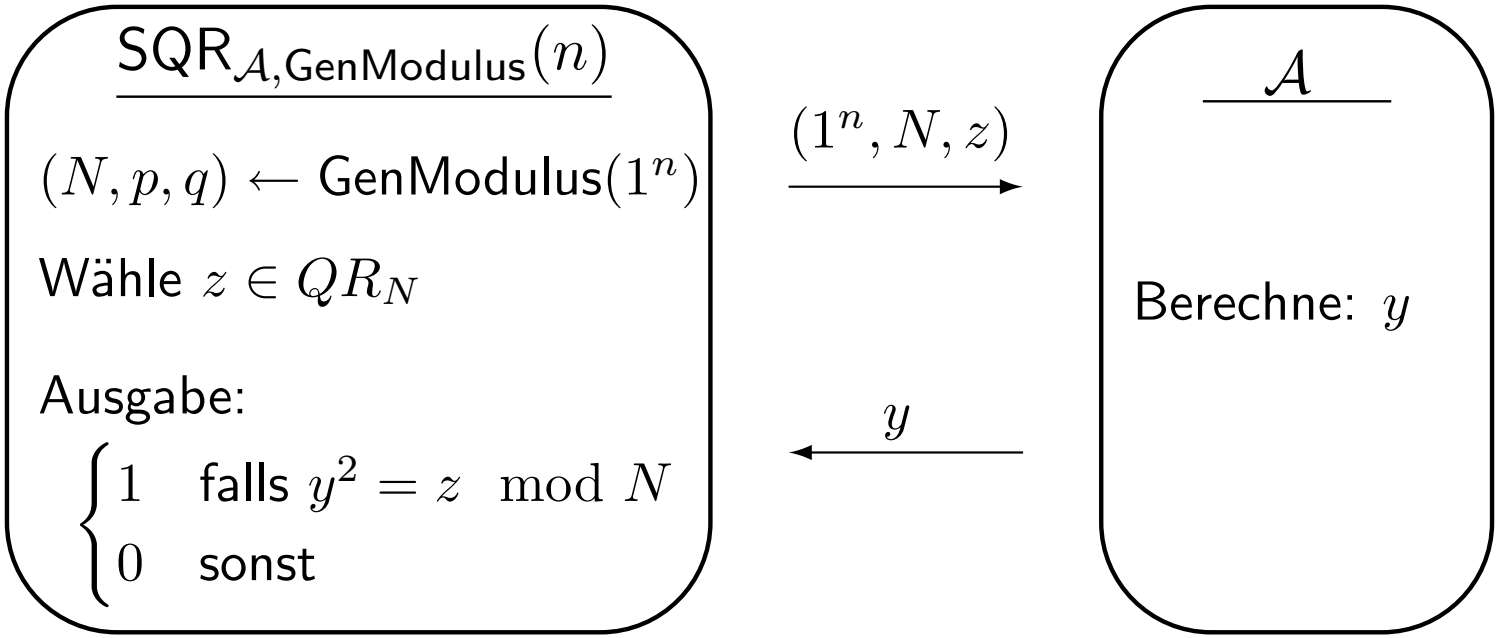
Spiel Wurzelziehen $SQR_{\mathcal{A},GenModulus}(n)$

1. $(N, p, q) \leftarrow GenModulus(n)$
2. Wähle $z \in QR_N$.
3. $y \leftarrow \mathcal{A}(N, z)$
4. $$SQR_{\mathcal{A},GenModulus}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y^2 = z \bmod N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Definition Quadratwurzelannahme

Das *Berechnen von Quadratwurzeln* ist hart bezüglich *GenModulus*, falls für alle ppt $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[SRQ_{\mathcal{A},GenModulus}(n) = 1] \leq \mathrm{negl}(n)$.
Quadratwurzelannahme: Berechnen von Quadratwurzeln ist hart.

Spiel Wurzelziehen



Nicht-triviale Quadratwurzeln

Satz Faktorisieren mit Wurzeln

Sei $N = pq$ ein RSA-Modul. Seien $x, y \in \mathbb{Z}_N^*$ mit $x^2 = y^2 \bmod N$ und $x \neq \pm y \bmod N$. Dann können p, q in Zeit $\mathcal{O}(\log^2 N)$ berechnet werden.

Beweis:

- Mittels CRT erhalten wir $x \simeq (x_p, x_q) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*$.
- Es gilt $y = (x_p, -x_q)$ oder $y = (-x_p, x_q)$.
- Wir betrachten den Fall $y = (x_p, -x_q)$. Der zweite Fall ist analog.
- Es gilt $x + y = (2x_p, 0)$ bzw. $x - y = (0, 2x_q)$.
- Damit folgt $\mathrm{ggT}(N, x + y) = q$ bzw. $\mathrm{ggT}(N, x - y) = p$ wegen $2x_p \in \mathbb{Z}_p^*$ und $2x_q \in \mathbb{Z}_q^*$.

Quadratwurzeln implizieren Faktorisierung

Satz Quadratwurzeln implizieren Faktorisierung

Quadratwurzel- und Faktorisierungsannahme sind äquivalent.

Beweis:

- Bereits gezeigt: Faktorisierung impliziert Quadratwurzeln.
- z.z.: $\mathcal{A}$ für Quadratwurzel impliziert $\mathcal{A}_{factor}$ für Faktorisierung.
- Sei $\epsilon(n) = \mathrm{Ws}[SQR_{\mathcal{A},GenModulus}(n) = 1]$.

Algorithmus $\mathcal{A}_{factor}$

EINGABE: N

1. Wähle $x \in \mathbb{Z}_N^*$ und berechne $z \leftarrow x^2 \bmod N$.
2. $y \leftarrow \mathcal{A}(N, z)$
3. Falls $x = \pm y$, Abbruch.

AUSGABE: $p, q = \{\mathrm{ggT}(N, x + y), \mathrm{ggT}(N, x - y)\}$

Faktorisieren mit Quadratwurzeln

- Unter der Faktorisierungsannahme gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{negl}(n) &\geq \mathrm{Ws}[\mathit{Factor}_{\mathcal{A}_{\mathit{factor}},\mathit{GenModulus}}(n) = 1] \\
&= \mathrm{Ws}[x \neq \pm y \bmod N \wedge x^2 = y^2 \bmod N] \\
&= \mathrm{Ws}[x \neq \pm y \bmod N \mid x^2 = z \bmod N] \cdot \mathrm{Ws}[y^2 = z \bmod N] \\
&= \mathrm{Ws}[x \neq \pm y \bmod N \mid x^2 = z \bmod N] \cdot \epsilon(n) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \epsilon(n)
\end{aligned}$$

- Die letzte Gleichung folgt, da z exakt vier Wurzeln in $\mathbb{Z}_N^*$ besitzt.

Einwegfunktion unter Quadratwurzelannahme

Definition Einwegfunktion QUADRAT

Definieren *Einwegfunktionsfamilie* QUADRAT$=$ $(Gen, Samp, f)$ als

1. ***Gen*(1^n) :** $(N, p, q) \leftarrow GenModulus(1^n)$, Ausgabe $I = N$.
   Definiert $f : \mathbb{Z}_N^* \rightarrow QR_N$.
2. ***Samp*(I) :** Wähle $x \in_R \mathbb{Z}_N^*$ zufällig.
3. ***f*(I, x) :** Berechne $f(x) := x^2 \bmod N$.

Anmerkungen:

- QUADRAT ist Einwegfunktion unter der Quadratwurzelannahme.
- D.h. QUADRAT ist Einwegfunktion unter Faktorisierungsannahme.
- **Ziel:** Konstruktion einer Trapdoor-Einwegpermutation.

Hauptwurzeln

Satz Existenz einer Hauptwurzel

Sei $N = pq$ eine Blumzahl. Dann besitzt jedes $a \in QR_N$ genau ein $b \in QR_N$ mit $b^2 = a \bmod N$. Wir bezeichnen b als *Hauptwurzel*.

Beweis:

- Sei $p = 4k + 3$. Es gilt $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = (-1) \bmod p$.
- D.h. $(-1) \in QNR_p$. Analog folgt $(-1) \in QNR_q$.
- Die vier Quadratwurzeln von a seien
$$(b_p, b_q), (b_p, -b_q), (-b_p, b_q), (-b_p, -b_q).$$
- Angenommen $\left(\frac{b_p}{p}\right) = 1$ und $\left(\frac{b_q}{q}\right) = (-1)$. (andere 3 Fälle analog)
- Dann gilt $\left(\frac{-b_p}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{b_p}{p}\right) = (-1)$ und $\left(\frac{-b_q}{q}\right) = 1$.
- Dann ist nur $b := (b_p, -b_q) \in QR_p \times QR_q$ und damit $b \in QR_N$.

RABIN Trapdoor-Einwegpermutation

Definition RABIN Trapdoor-Einwegpermutation

Trapdoor-Einwegpermutationsfamilie RABIN$= (Gen, Samp, f)$ mit

1. $\boldsymbol{Gen(1^n)}$: $(N, p, q) \leftarrow GenModulus(1^n)$ mit Blumzahl N.
   Ausgabe $I = N$, $td = (p, q)$. Definiert $f : QR_N \rightarrow QR_N$.
2. $\boldsymbol{Samp(I)}$: Wähle $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$ zufällig. Berechne $x \leftarrow r^2 \bmod N$.
3. $\boldsymbol{f(I, x)}$: Berechne $f(x) := x^2 \bmod N$.
4. $\boldsymbol{Inv(td, y)}$: Bestimme Hauptwurzel $x \in QR_N$ von $y = x^2$.

Anmerkungen:

- RABIN ist einweg unter der Faktorisierungsannahme. Wir wissen:

  Trapdoor-Einwegpermutation + Hardcore-Prädikat
  = CPA-sichere Verschlüsselung.

- Benötigen ein Hardcore-Prädikat $hc : QR_N \rightarrow \{0, 1\}$ für f.

Berechnen des niederwertigsten Bits

Satz Hardcore-Prädikat $lsb(x)$

Sei f die RABIN Trapdoor-Einwegpermutation und N eine Blumzahl. Für $x \in QR_N$ bezeichne $lsb(x)$ das niederwertigste Bit von x. Dann ist $hc(x) := lsb(x)$ ein Hardcore-Prädikat für f.

- ohne Beweis (nicht-trivial)
- Für alle ppt $\mathcal{A}$ gilt damit $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(N, x^2) = lsb(x)] \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$.

RABIN Kryptosystem (1979)

Algorithmus RABIN Verschlüsselung

1. **Gen:** $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n)$, wobei N eine Blumzahl ist. Ausgabe $pk = N$, $sk = (p, q)$.
2. **Enc:** Für $m \in \{0,1\}$ wähle $r \in \mathbb{Z}_N^*$, berechne $x \leftarrow r^2 \bmod N$ und
$$c \leftarrow (x^2 \bmod N, \mathit{lsb}(x) \oplus m).$$
3. **Dec:** Für $c = (c_1, c_2)$ berechne Hauptwurzel x von c_1 und
$$m \leftarrow \mathit{lsb}(x) \oplus c_2.$$

Satz CPA-Sicherheit von RABIN

RABIN Verschlüsselung ist CPA-sicher unter der Faktorisierungsannahme.

Beweis:

- Folgt aus dem Satz zur CPA-Sicherheit von VERSCHLÜSSELUNG$_\Pi$.

Diskussion RSA versus RABIN

Vergleich: RSA und RABIN

- Quadrieren und Exponentieren mit e erscheinen ähnlich.
- Aber: RABIN ist kein Spezialfall von RSA, da $e = 2 \notin \mathbb{Z}^*_{\phi(N)}$.
- RABIN-Einwegpermutation beruht auf Faktorisierungsannahme.
- Die Faktorisierungsannahme ist möglicherweise schwächer als die RSA-Annahme. Offen: Invertieren von RSA $\Rightarrow$ Faktorisierung?
- RABIN ist nicht ineffizienter als RSA.

- Historische Variante: Textbook RABIN mit $c \leftarrow m^2 \bmod N$.
- Es existiert ein CCA-Angriff auf Textbook RABIN, der p, q liefert. (Wie?)

Die Gruppe $\mathbb{Z}^*_{N^2}$

Lemma Teilerfremdheit von N und $\phi(N)$

Sei $N = pq$ ein RSA-Modulus mit p, q gleicher Bitlänge. Dann gilt $\mathrm{ggT}(N, \phi(N)) = 1$.

Beweis:

- OBdA $p > q$. Dann kann p weder $(p-1)$ noch $(q-1)$ teilen.
- Annahme: q teilt $p-1$. Dann ist $\frac{p-1}{q} \geq 2$.
- Widerspruch: $\frac{p}{q} < 2$, da p, q gleiche Bitlänge besitzen.

Lemma Ordnung von $(1+N)$

Sei N ein RSA-Modul. Dann besitzt $(1+N)$ in $\mathbb{Z}^*_{N^2}$ Ordnung N.

Beweis:

- Es gilt $(1+N)^a = \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} N^i = 1 + aN \bmod N^2$ (ab $i = 2 : N^2$).
- D.h. $(1+N)^a \neq 1 \bmod N^2$ für $1 \leq a < N$ und $(1+N)^N = 1 \bmod N^2$.

Die Struktur von $\mathbb{Z}_{N^2}^*$

Satz Isomorphismus $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N^* \simeq \mathbb{Z}_{N^2}^*$

Die Abbildung $f : \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N^* \to \mathbb{Z}_{N^2}^*$ mit $f(a,b) = (1+N)^a \cdot b^N \bmod N^2$ ist ein Isomorphismus, d.h.

1. f ist bijektiv.
2. $f(a_1,b_1) \cdot f(a_2,b_2) = f(a_1+a_2, b_1 b_2) \qquad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_N, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_N^*.$

Beweis: Bijektivität

- Zeigen, dass $|\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N^*| = |\mathbb{Z}_{N^2}^*|$ und dass f injektiv ist.
- $|\mathbb{Z}_{N^2}^*| = \phi(N^2) = (p^2-p)(q^2-q) = pq(p-1)(q-1) = |\mathbb{Z}_N| \cdot |\mathbb{Z}_N^*|$
- **Annahme:** $\exists (a_1,b_1) \neq (a_2,b_2)$ mit $f(a_1,b_1) = f(a_2,b_2)$.
- Dann folgt $(1+N)^{a_1} b_1^N = (1+N)^{a_2} b_2^N \bmod N^2$.
- Wegen $|\mathbb{Z}_{N^2}^*| = N \cdot \phi(N)$ liefert Potenzieren mit $\phi(N)$
$$(1+N)^{(a_1-a_2)\phi(N)} = 1 \bmod N^2.$$
- Es gilt $\mathrm{ord}(1+N) = N$ und daher $N \mid (a_1-a_2)\phi(N)$.
- Wegen $\mathrm{ggT}(N, \phi(N)) = 1$ folgt $N \mid a_1 - a_2$, d.h. $a_1 = a_2 \bmod N$.

Beweis: Fortsetzung Bijektivität

- $a_1 = a_2$ liefert ${b_1}^N = b_2^N \bmod N^2$ und damit $b_1^N = b_2^N \bmod N$.
- Wegen $\mathrm{ggT}(N, \phi(N))$ ist die Exponentiation mit N bijektiv.
- Daraus folgt $b_1 = b_2 \bmod N$. (Widerspruch: $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$)

Beweis: Homomorphismus-Eigenschaft

- Es gilt $f(a_1, b_1) \cdot f(a_2, b_2) = (1+N)^{a_1+a_2} \cdot (b_1 b_2)^N \bmod N^2$.
- Wegen $\mathrm{ord}(1+N) = N$ entspricht dies $(1+N)^{a_1+a_2 \bmod N} \cdot (b_1 b_2)^N$.
- Es gilt
  $f(a_1 + a_2, b_1 b_2) = (1+N)^{a_1+a_2 \bmod N} \cdot (b_1 b_2 \bmod N)^N \bmod N^2$.
- Sei $r = b_1 b_2 \bmod N$. D.h. $b_1 b_2 = r + kN$.
- Dann gilt $(b_1 b_2)^N = (r+kN)^N = r^N = (b_1 b_2 \bmod N)^N \bmod N^2$. $\square$

N-te Reste

Definition N-te Reste

Sei N ein RSA-Modul. Wir bezeichnen die Elemente der Menge $Res(N^2) := \{y \in \mathbb{Z}^*_{N^2} \mid \exists x \in \mathbb{Z}^*_{N^2} \text{ mit } x^N = y\}$ als *N-te Reste* in $\mathbb{Z}^*_{N^2}$.

Lemma Eigenschaften N-ter Reste

1. Exponentiation mit N ist eine $(N:1)$-Abbildung in $\mathbb{Z}^*_{N^2}$.
2. $Res(N^2) \simeq \{(0,b) \mid b \in \mathbb{Z}^*_N\}$

Beweis:

- Sei $x \in \mathbb{Z}^*_{N^2}$ mit $x \simeq (a,b)$. Dann gilt
$$x^N \bmod N^2 \simeq (a,b)^N = (N \cdot a \bmod N, b^N \bmod N) = (0, b^N).$$
- Für die N Elemente (a,b), $a \in \mathbb{Z}_N$, gilt $(a,b)^N = (0,b^N)$.
- Damit ist jeder N-te Rest von der Form $(0,b^N)$.
- Bleibt zu zeigen, dass jedes Element $y = (0,b)$ ein N-ter Rest ist.
- Wir definieren $x = (0, b^{N^{-1} \bmod \phi(N)})$. Damit gilt
$$x^N \simeq (0, b^{N^{-1} \bmod \phi(N)})^N = (N \cdot 0, b^{N^{-1}N} \bmod N) = (0,b) \simeq y.$$

DCR Annahme

Satz Decisional Composite Residuosity (DCR)

Das *Decisional Composite Residuosity* Problem ist hart bezüglich GenModulus falls für alle ppt $\mathcal{A}$ und $r \in_R \mathbb{Z}^*_{N^2}$ gilt

$$\left|\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(N, r^N \bmod N^2) = 1] - Ws[\mathcal{A}(N, r) = 1]\right| \leq negl(n).$$

DCR Annahme: DCR ist hart bezüglich GenModulus.

- DCR Annahme: Unterscheiden von $(0, r)$ und (r', r) ist schwer.

Idee: zur Konstruktion einer Verschlüsselungsfunktion

- Sei $m \in \mathbb{Z}_N$. Wähle einen zufälligen N-ten Rest $(0, r)$ und setze
$$c \leftarrow (m, 1) \cdot (0, r) = (m, r).$$
- Da $(0, r)$ ununterscheidbar von (r', r), ist c ununterscheidbar von
$$c' \leftarrow (m, 1) \cdot (r', r) = (m + r', r).$$
- $c' = (m + r', r)$ ist für $r' \in_R \mathbb{Z}_N$ ein zufälliges Element in $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}^*_N$.
- Insbesondere ist c' unabhängig von m.

Verschlüsselung

Algorithmus Verschlüsselung

EINGABE: $m \in \mathbb{Z}_N$

1. Wähle $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$.
2. Berechne $c \leftarrow f(m, r) = (1 + N)^m \cdot r^N \bmod N^2$.

AUSGABE: $c \in \mathbb{Z}_{N^2}^*$

Anmerkungen:

- Wir berechnen das Bild von (m, r) unter unserem Isomorphismus.
- Faktor der Nachrichtenexpansion beträgt 2.

Entschlüsselung

Algorithmus Entschlüsselung

EINGABE: $c \simeq (m, r) \in \mathbb{Z}^*_{N^2}$

1. Berechne $c' \leftarrow c^{\phi(N)} \bmod N^2$.
2. Berechne $m' \leftarrow \frac{c'-1}{N}$ über $\mathbb{N}$.
3. Berechne $m \leftarrow m' \cdot \phi(N)^{-1} \bmod N$.

AUSGABE: $m \in \mathbb{Z}_N$

Korrektheit:

- Es gilt $c' \simeq (m, r)^{\phi(N)} = \left(m\phi(N), r^{\phi(N)}\right) = (m\phi(N), 1)$.
- Damit gilt

$$c' = (1+N)^{m\phi(N) \bmod N} \; 1^N = 1 + (m\phi(N) \bmod N) \cdot N \bmod N^2.$$

- Da $1 + (m\phi(N) \bmod N)N < N^2$ gilt die Gleichung über $\mathbb{N}$.
- Daraus folgt $m' = m\phi(N) \bmod N$. Multiplikation mit $\phi(N)^{-1}$ liefert

$$m = m' \cdot \phi(N)^{-1} \bmod N.$$

Paillier Kryptosystem (1999)

Algorithmus Paillier Verschlüsselung

1. **Gen:** $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n)$. Ausgabe $pk = N, sk = \phi(N)$.
2. **Enc:** Für eine Nachricht $m \in \mathbb{Z}_N$, wähle ein $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$ und berechne
$$c \leftarrow (1+N)^m \cdot r^N \bmod N^2.$$
3. **Dec:** Für einen Chiffretext $c \in \mathbb{Z}_{N^2}^*$ berechne
$$m \leftarrow \frac{\left(c^{\phi(N)} \bmod N^2\right)-1}{N} \cdot \phi(N)^{-1} \bmod N.$$

Sicherheit von Paillier Verschlüsselung

Satz Sicherheit von Paillier Verschlüsselung

Unter der DCR Annahme ist Paillier Verschlüsselung CPA-sicher.

Beweis:

- Sei Π das Paillier Verschlüsselungs-Verfahren.
- Sei $\mathcal{A}$ ein Angreifer mit Erfolgsws $\epsilon(n) = \mathrm{Ws}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1]$.
- Konstruieren Algorithmus $\mathcal{A}_{dcr}$ für das DCR Problem.

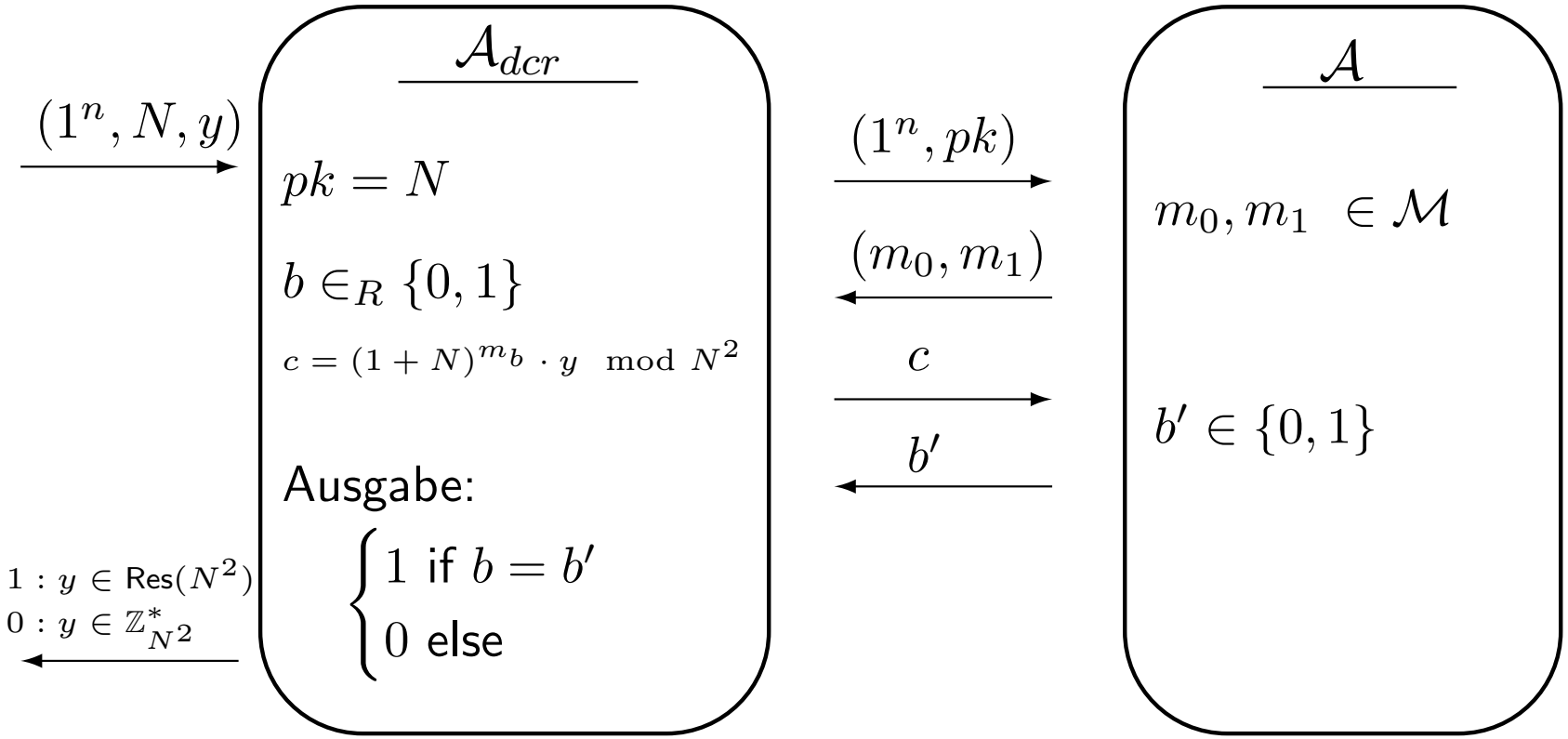
Algorithmus DCR Unterscheider $\mathcal{A}_{dcr}$

EINGABE: N, y

1. Setze $pk = N$ und berechne $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}(pk)$.
2. Wähle $b \in \{0,1\}$ und berechne $c \leftarrow (1+N)^{m_b} \cdot y \bmod N^2$.
3. $b' \leftarrow \mathcal{A}(c)$.

$$\text{AUSGABE:} = \begin{cases} 1 & \text{falls } b = b', \quad \text{Interpretation } y \in Res(N^2) \\ 0 & \text{sonst}, \quad \text{Interpretation } y \in \mathbb{Z}^*_{N^2} \end{cases}.$$

Algorithmus DRC Unterscheider



Sicherheit von Paillier Verschlüsselung

Fall 1: $y \in_R Res(N^2)$, d.h. $y = r^N$ für $r \in_R \mathbb{Z}_{N^2}$.

- Verteilung von c identisch zum Paillier Verfahren.
- D.h. $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}_{dcr}(N, r^N) = 1] = \epsilon(n)$.

Fall 2: $y \in_R \mathbb{Z}^*_{N^2}$, d.h. $y = r \in_R \mathbb{Z}^*_{N^2}$.

- Dann ist $c = (1+N)^{m_b} \cdot y \bmod N^2$ zufällig in $\mathbb{Z}^*_{N^2}$.
- Insbesondere ist die Verteilung von c unabhängig von b.
- Daraus folgt $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}_{dcr}(N, r) = 1] = \frac{1}{2}$.

- Unter der DCR-Annahme folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{negl}(n) &\geq \left| \mathrm{Ws}[\mathcal{A}_{dcr}(N, r^N \bmod N^2) = 1] - Ws[\mathcal{A}_{dcr}(N, r) = 1] \right| \\ &= \left| \epsilon(n) - \frac{1}{2} \right|. \end{aligned}$$

- Daraus folgt $\epsilon(n) \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$.

Homomorphe Verschlüsselung

Definition Homomorphe Verschlüsselung

Sei Π ein Verschlüsselungsverfahren mit $Enc : G \to G'$ für Gruppen G, G'. Π heißt *homomorph*, falls $Enc(m_1) \circ Enc(m_2)$ eine gültige Verschlüsselung von $m_1 \circ m_2$ für alle $m_1, m_2 \in G$ ist.

Bsp:

- **Textbook-RSA** mit $Enc : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_N$ und
$$m_1^e \cdot m_2^e = (m_1 \cdot m_2)^e \bmod N.$$
Eigenschaft: Textbook-RSA ist nicht CPA-sicher.
- **ElGamal** mit $Enc : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$ und
$$(g^{y_1}, h^{y_1} m_1) \cdot (g^{y_2}, h^{y_2} m_2) = (g^{y_1+y_2}, h^{y_1+y_2} m_1 m_2).$$
Eigenschaft: $G_1 = (\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ ist eine multiplikative Gruppe.
- **Goldwasser-Micali** mit $Enc : \{0,1\} \to \mathbb{Z}_N^*$ und
$$z^{m_1} x_1^2 \cdot z^{m_2} x_2^2 = z^{m_1+m_2}(x_1 x_2)^2 \bmod N.$$
Eigenschaft: $G_1 = (\mathbb{F}_2, +)$ ist eine additive Gruppe.

Voll homomorpe Verschlüsselung

Definition Voll homomorphe Verschlüsselung

Sei Π ein Verschlüsselungsverfahren mit $Enc : R \to R'$ für Ringe R, R'. Π heißt *voll homomorph*, falls

1. $Enc(m_1) + Enc(m_2)$ eine gültige Verschlüsselung von $m_1 + m_2$
2. $Enc(m_1) \cdot Enc(m_2)$ eine gültige Verschlüsselung von $m_1 \cdot m_2$

für alle $m_1, m_2 \in R$ ist.

Anwendung: Cloud Computing

- Sende verschlüsselt Algorithmus $\mathcal{A}$, Eingabe x an einen Server S.
- S berechnet daraus die verschlüsselte Ausgabe $Enc(\mathcal{A}(x))$.
- Erlaubt Auslagern von Berechnungen an S.
- S lernt nichts über das Programm $\mathcal{A}$ oder die Eingabe x.

Erste voll homomorphe Verschlüsselung:
Gentry Verfahren (2009), basierend auf Problemen der Gittertheorie.

E-voting mit Paillier

- **Paillier** mit $Enc : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_{N^2}^*$ und
$$(1+N)^{m_1} r_1^N \cdot (1+N)^{m_2} r_2^N = (1+N)^{m_1+m_2} (r_1 r_2)^N \bmod N^2.$$
Eigenschaft: $G_1 = (\mathbb{Z}_N, +)$ ist additiv und groß.

Algorithmus E-voting mit Paillier

- Wahlleiter generiert öffentlichen RSA-Modul $N = pq$.
- Wähler $i \in [n]$ mit $n < N$ wählt $v_i = 0$ für NEIN, $v_i = 1$ für JA und sendet an alle anderen Wähler $c_i = (1+N)^{v_i} r_i^N \bmod N^2$, $r_i \in_R \mathbb{Z}_N$.
- Wähler aggregieren $c := \prod_{i=1}^n c_i \bmod N^2$.
- Wahlleiter erhält c und veröffentlicht $Dec(c) = \sum_{i=1}^n v_i$.

Eigenschaften: (falls alle Parteien sich an das Protokoll halten)

- Wahlleiter erhält c, ohne die einzelnen c_i kennenzulernen.
- Kein Wähler erhält Informationen über die v_i anderer Wähler.
- Berechnung von c ist öffentlich verifizierbar.