DCR Annahme

Satz Decisional Composite Residuosity (DCR)

Das *Decisional Composite Residuosity* Problem ist hart bezüglich GenModulus falls für alle ppt $\mathcal{A}$ und $r \in_R \mathbb{Z}^*_{N^2}$ gilt

$$\left|\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(N, r^N \bmod N^2) = 1] - Ws[\mathcal{A}(N, r) = 1]\right| \leq negl(n).$$

DCR Annahme: DCR ist hart bezüglich GenModulus.

- DCR Annahme: Unterscheiden von $(0, r)$ und (r', r) ist schwer.

Idee: zur Konstruktion einer Verschlüsselungsfunktion

- Sei $m \in \mathbb{Z}_N$. Wähle einen zufälligen N-ten Rest $(0, r)$ und setze
$$c \leftarrow (m, 1) \cdot (0, r) = (m, r).$$
- Da $(0, r)$ ununterscheidbar von (r', r), ist c ununterscheidbar von
$$c' \leftarrow (m, 1) \cdot (r', r) = (m + r', r).$$
- $c' = (m + r', r)$ ist für $r' \in_R \mathbb{Z}_N$ ein zufälliges Element in $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}^*_N$.
- Insbesondere ist c' unabhängig von m.

Verschlüsselung

Algorithmus Verschlüsselung

EINGABE: $m \in \mathbb{Z}_N$

1. Wähle $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$.
2. Berechne $c \leftarrow f(m, r) = (1 + N)^m \cdot r^N \bmod N^2$.

AUSGABE: $c \in \mathbb{Z}_{N^2}^*$

Anmerkungen:

- Wir berechnen das Bild von (m, r) unter unserem Isomorphismus.
- Faktor der Nachrichtenexpansion beträgt 2.

Entschlüsselung

Algorithmus Entschlüsselung

EINGABE: $c \simeq (m, r) \in \mathbb{Z}^*_{N^2}$

1. Berechne $c' \leftarrow c^{\phi(N)} \bmod N^2$.
2. Berechne $m' \leftarrow \frac{c'-1}{N}$ über $\mathbb{N}$.
3. Berechne $m \leftarrow m' \cdot \phi(N)^{-1} \bmod N$.

AUSGABE: $m \in \mathbb{Z}_N$

Korrektheit:

- Es gilt $c' \simeq (m, r)^{\phi(N)} = \left(m\phi(N), r^{\phi(N)}\right) = (m\phi(N), 1)$.
- Damit gilt

$$c' = (1+N)^{m\phi(N) \bmod N} \; 1^N = 1 + (m\phi(N) \bmod N) \cdot N \bmod N^2.$$

- Da $1 + (m\phi(N) \bmod N)N < N^2$ gilt die Gleichung über $\mathbb{N}$.
- Daraus folgt $m' = m\phi(N) \bmod N$. Multiplikation mit $\phi(N)^{-1}$ liefert

$$m = m' \cdot \phi(N)^{-1} \bmod N.$$

Paillier Kryptosystem (1999)

Algorithmus Paillier Verschlüsselung

1. **Gen:** $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n)$. Ausgabe $pk = N, sk = \phi(N)$.
2. **Enc:** Für eine Nachricht $m \in \mathbb{Z}_N$, wähle ein $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$ und berechne
$$c \leftarrow (1+N)^m \cdot r^N \bmod N^2.$$
3. **Dec:** Für einen Chiffretext $c \in \mathbb{Z}_{N^2}^*$ berechne
$$m \leftarrow \frac{\left(c^{\phi(N)} \bmod N^2\right)-1}{N} \cdot \phi(N)^{-1} \bmod N.$$

Sicherheit von Paillier Verschlüsselung

Satz Sicherheit von Paillier Verschlüsselung

Unter der DCR Annahme ist Paillier Verschlüsselung CPA-sicher.

Beweis:

- Sei Π das Paillier Verschlüsselungs-Verfahren.
- Sei $\mathcal{A}$ ein Angreifer mit Erfolgsws $\epsilon(n) = \mathrm{Ws}[PubK^{cpa}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1]$.
- Konstruieren Algorithmus $\mathcal{A}_{dcr}$ für das DCR Problem.

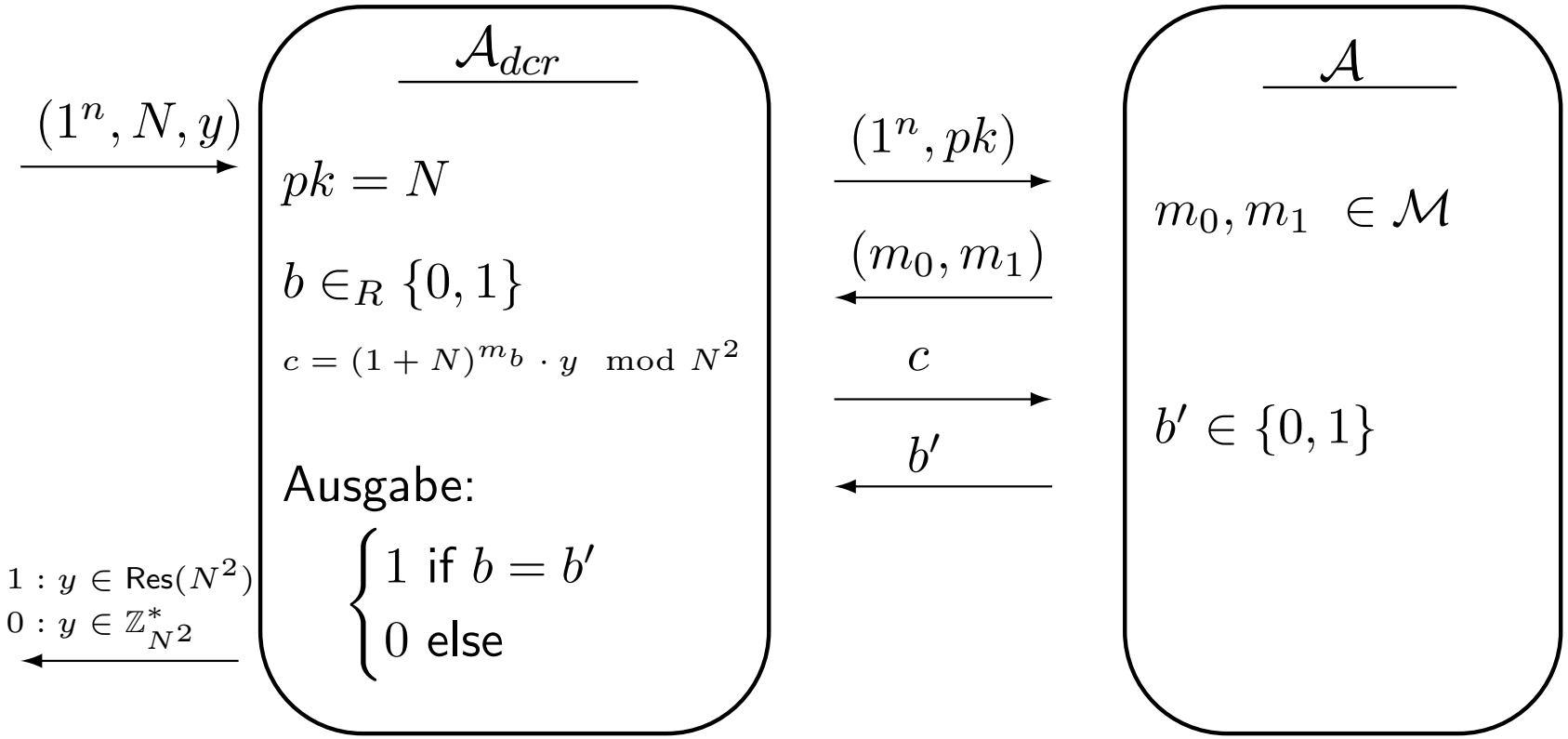
Algorithmus DCR Unterscheider $\mathcal{A}_{dcr}$

EINGABE: N, y

1. Setze $pk = N$ und berechne $(m_0, m_1) \leftarrow \mathcal{A}(pk)$.
2. Wähle $b \in \{0,1\}$ und berechne $c \leftarrow (1+N)^{m_b} \cdot y \bmod N^2$.
3. $b' \leftarrow \mathcal{A}(c)$.

$$\text{AUSGABE:} = \begin{cases} 1 & \text{falls } b = b', \quad \text{Interpretation } y \in Res(N^2) \\ 0 & \text{sonst}, \quad \text{Interpretation } y \in \mathbb{Z}^*_{N^2} \end{cases}.$$

Algorithmus DRC Unterscheider



Sicherheit von Paillier Verschlüsselung

Fall 1: $y \in_R Res(N^2)$, d.h. $y = r^N$ für $r \in_R \mathbb{Z}_{N^2}$.

- Verteilung von c identisch zum Paillier Verfahren.
- D.h. $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}_{dcr}(N, r^N) = 1] = \epsilon(n)$.

Fall 2: $y \in_R \mathbb{Z}^*_{N^2}$, d.h. $y = r \in_R \mathbb{Z}^*_{N^2}$.

- Dann ist $c = (1+N)^{m_b} \cdot y \bmod N^2$ zufällig in $\mathbb{Z}^*_{N^2}$.
- Insbesondere ist die Verteilung von c unabhängig von b.
- Daraus folgt $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}_{dcr}(N, r) = 1] = \frac{1}{2}$.

- Unter der DCR-Annahme folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{negl}(n) &\geq \left| \mathrm{Ws}[\mathcal{A}_{dcr}(N, r^N \bmod N^2) = 1] - Ws[\mathcal{A}_{dcr}(N, r) = 1] \right| \\ &= \left| \epsilon(n) - \frac{1}{2} \right|. \end{aligned}$$

- Daraus folgt $\epsilon(n) \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$.

Homomorphe Verschlüsselung

Definition Homomorphe Verschlüsselung

Sei Π ein Verschlüsselungsverfahren mit $Enc : G \to G'$ für Gruppen G, G'. Π heißt *homomorph*, falls $Enc(m_1) \circ Enc(m_2)$ eine gültige Verschlüsselung von $m_1 \circ m_2$ für alle $m_1, m_2 \in G$ ist.

Bsp:

- **Textbook-RSA** mit $Enc : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_N$ und
$$m_1^e \cdot m_2^e = (m_1 \cdot m_2)^e \bmod N.$$
Eigenschaft: Textbook-RSA ist nicht CPA-sicher.
- **ElGamal** mit $Enc : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$ und
$$(g^{y_1}, h^{y_1} m_1) \cdot (g^{y_2}, h^{y_2} m_2) = (g^{y_1+y_2}, h^{y_1+y_2} m_1 m_2).$$
Eigenschaft: $G_1 = (\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ ist eine multiplikative Gruppe.
- **Goldwasser-Micali** mit $Enc : \{0,1\} \to \mathbb{Z}_N^*$ und
$$z^{m_1} x_1^2 \cdot z^{m_2} x_2^2 = z^{m_1+m_2}(x_1 x_2)^2 \bmod N.$$
Eigenschaft: $G_1 = (\mathbb{F}_2, +)$ ist eine additive Gruppe.

Voll homomorpe Verschlüsselung

Definition Voll homomorphe Verschlüsselung

Sei Π ein Verschlüsselungsverfahren mit $Enc : R \to R'$ für Ringe R, R'. Π heißt *voll homomorph*, falls

1. $Enc(m_1) + Enc(m_2)$ eine gültige Verschlüsselung von $m_1 + m_2$
2. $Enc(m_1) \cdot Enc(m_2)$ eine gültige Verschlüsselung von $m_1 \cdot m_2$

für alle $m_1, m_2 \in R$ ist.

Anwendung: Cloud Computing

- Sende verschlüsselt Algorithmus $\mathcal{A}$, Eingabe x an einen Server S.
- S berechnet daraus die verschlüsselte Ausgabe $Enc(\mathcal{A}(x))$.
- Erlaubt Auslagern von Berechnungen an S.
- S lernt nichts über das Programm $\mathcal{A}$ oder die Eingabe x.

Erste voll homomorphe Verschlüsselung:
Gentry Verfahren (2009), basierend auf Problemen der Gittertheorie.

E-voting mit Paillier

- **Paillier** mit $Enc : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_{N^2}^*$ und
$$(1+N)^{m_1} r_1^N \cdot (1+N)^{m_2} r_2^N = (1+N)^{m_1+m_2} (r_1 r_2)^N \bmod N^2.$$
Eigenschaft: $G_1 = (\mathbb{Z}_N, +)$ ist additiv und groß.

Algorithmus E-voting mit Paillier

- Wahlleiter generiert öffentlichen RSA-Modul $N = pq$.
- Wähler $i \in [n]$ mit $n < N$ wählt $v_i = 0$ für NEIN, $v_i = 1$ für JA und sendet an alle anderen Wähler $c_i = (1+N)^{v_i} r_i^N \bmod N^2$, $r_i \in_R \mathbb{Z}_N$.
- Wähler aggregieren $c := \prod_{i=1}^n c_i \bmod N^2$.
- Wahlleiter erhält c und veröffentlicht $Dec(c) = \sum_{i=1}^n v_i$.

Eigenschaften: (falls alle Parteien sich an das Protokoll halten)

- Wahlleiter erhält c, ohne die einzelnen c_i kennenzulernen.
- Kein Wähler erhält Informationen über die v_i anderer Wähler.
- Berechnung von c ist öffentlich verifizierbar.