Présentation détaillée de mes travaux et activités de recherche

1) Pendant la préparation de la Thèse de 3[e] Cycle (ENS, 1977-1978)

J'ai été initié à la recherche grâce un cours de DEA donné par Henri Skoda à l'Université de Paris VI en 1976/77. C'est sous sa direction que j'ai effectué toutes mes recherches pré-doctorales, d'abord en tant qu'élève de l'ENS Ulm de 1977 à 1979, puis comme attaché de recherche au CNRS (L.A. 213 "Analyse complexe et géométrie" de Paris VI) de 1979 à 1982.

Mon mémoire de DEA (soutenu en Octobre 1977) est intitulé "Etude des idéaux des algèbres de fonctions holomorphes avec poids". Il portait sur l'étude de quelques techniques de "théorèmes de Bezout transcendants" développés dans des articles. L. Hörmander, J.J. Kelleher-B.A. Taylor et H. Skoda. L'objet de mon mémoire était de faire une synthèse de ces différents travaux et d'en comparer les résultats.

Je me suis ensuite attaqué à l'étude de la pseudoconvexité des espaces fibrés, sujet qui devait constituer la première partie de ma thèse de 3ème cycle "*Croissance des fonctions plurisousharmoniques sur un fibré à base de Stein et à fibre $\mathbb{C}^n$ et sur une surface de Riemann*", soutenue en Décembre 1978. J.P. Serre avait soulevé en 1953 le problème de savoir si un espace à base et à fibre de Stein était lui-même de Stein. Après un certain nombre de résultats partiels positifs, H. Skoda montra en 1977 que la réponse générale était négative, et construisit un fibré non de Stein, de fibre $\mathbb{C}^2$, dont la base est un ouvert multiplement connexe du plan, et dont les automorphismes de transition sont localement constants et de type exponentiel. Peu après, j'ai amélioré ce contre-exemple en montrant que le même phénomène se produit aussi, dans le cas d'un fibré à fibre $\mathbb{C}^2$, avec une base simplement connexe (disque, plan) ou encore, pour une base multiplement connexe, avec certains groupes d'automorphismes polynomiaux de la fibre ([1], [2] ; voir également l'article postérieur [17] pour une construction techniquement beaucoup plus simple).

La deuxième partie de ma thèse de 3ème cycle étudie les fonctions bornées ou à croissance polynomiale sur la surface de Riemann $e^x + e^y = 1$ (cette surface s'identifie au revêtement homologique de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ privée de trois points) ; le principal résultat est que les fonctions en question sont en fait des polynômes en x et y. Cette étude (cf. [3]) se trouve reliée aux travaux de C.A. Berenstein et B.A. Taylor sur les variétés d'interpolation, et généralise un résultat obtenu indépendamment par I. Wakabayashi (celui-ci avait montré que les fonctions bornées étaient constantes par une méthode assez compliquée utilisant des résultats classiques fins sur la géométrie des surfaces de Riemann). À ma grande surprise, F. Bogolomolov et M. McQuillan [communication orale, août 2006] pensent que ce résultat pourrait avoir aussi des retombées en théorie des nombres transcendants !

2) De janvier 1979 à fin 1982 (LA 213, Université de Paris VI)

Sous l'influence des travaux de H. Skoda sur les morphismes surjectifs de fibrés semi-positifs, je me suis intéressé de plus en plus près aux différentes notions de positivité pour les fibrés holomorphes hermitiens et aux relations qui existent entre ces notions. Il résulte trivialement des définitions que la positivité de Nakano entraîne la positivité de Griffiths. Inversement, le principal résultat ([5], [6]) que nous obtenons à ce sujet affirme que la positivité de E au sens de Griffiths entraîne la positivité de $E \otimes \text{dét}\ E$ au sens de Nakano. Ce résultat permet d'établir un lien direct auparavant inexpliqué entre des théorèmes d'annulation de la cohomologie dus à Griffiths (1969) et Nakano (1972). Plus généralement, nous avons introduit la notion de s-positivité suivante : un fibré E au-dessus d'une variété X est dit s-positif si la forme hermitienne de courbure $ic(E)$ prend des valeurs > 0 sur les tenseurs non nuls de $TX \otimes E$ de rang $\leq s$; la positivité de Griffiths correspond à $s = 1$, celle de Nakano à $s \geq \min(\dim X, \mathrm{rg} E)$. Si X est faiblement pseudoconvexe et si E est s-positif, alors on démontre que $H^{n,q}(X, E) = 0$ pour $n = \dim X$, $q \geq n - s + 1$. Nous obtenons dans ce cadre [10] de nouveaux théorèmes d'annulation de la cohomologie pour des fibrés de la forme $E^\star \otimes (\det E)^k$, et des théorèmes de surjectivité ou de scindage pour des morphismes de fibrés semi-positifs. Ces résultats ont des applications à la géométrie algébrique, à l'algèbre locale (théorèmes de Briançon-Skoda), mais aussi à des problèmes d'Analyse fine grâce aux estimations L^2 très précises qu'ils procurent. Ainsi, via l'existence d'un scindage de la suite exacte définissant le fibré normal d'une sous-variété de $\mathbb{C}^n$, nous montrons l'existence de rétractions holomorphes sur des voisinages tubulaires d'une sous-variété, et en déduisons divers théorèmes d'extension de fonctions holomorphes avec estimations précises [7].

Ces travaux constituent la première partie de ma thèse de Doctorat d'Etat [T2] "*Sur différents aspects de la positivité en analyse complexe*", soutenue en octobre 1982. La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude des propriétés des courants positifs fermés.

Mon premier objectif a été ici de redémontrer le théorème de Bombieri sur les valeurs algébriques de fonctions méromorphes, grâce à une généralisation convenable de la formule de Jensen en plusieurs variables. L'un des intérêts de cette approche est d'éviter le recours indirect aux estimations L^2 de Hörmander, et de permettre (au moins en théorie) l'obtention de constantes effectives utiles pour les applications arithmétiques. La formule de Jensen que nous obtenons ainsi dans [8] étend des calculs faits par P. Lelong pour démontrer l'existence des nombres de Lelong d'un courant positif fermé. Combinée à des arguments élémentaires d'algèbre linéaire, cette formule entraîne un lemme de Schwarz très général pour les fonctions entières qui s'annulent sur une partie finie de $\mathbb{C}^n$. Nous avons pu ainsi résoudre en dimension 2 une conjecture de M. Waldschmidt et G. Chudnovsky, relative aux multiplicités des hypersurfaces algébriques de $\mathbb{C}^n$. Ces travaux nous ont amené à énoncer une généralisation de la conjecture de Chudnovsky, sur laquelle H. Esnault et E. Viehweg ont apporté peu après une contribution substantielle, en utilisant des techniques cohomologiques fines de géométrie algébrique. En 1989, mon étudiant A. Azhari a également obtenu de nouveaux résultats dans cette direction.

Reprenant les calculs de P. Lelong dans le cadre général des espaces analytiques, j'ai ensuite étendu la notion de nombre de Lelong d'un courant positif fermé par l'introduction de poids (cf. [9]) : l'idée est essentiellement de remplacer la métrique hermitienne de $\mathbb{C}^n$ par une métrique $i\partial\overline{\partial}\varphi$ où φ est une fonction d'exhaustion dont le logarithme est *psh*. Outre que la définition obtenue est beaucoup plus souple, nous avons pu ainsi redémontrer de façon élémentaire le théorème de Siu sur l'invariance des nombres de Lelong par changement de coordonnées locales. Plus généralement, il était naturel de se poser le problème suivant : étant donné un morphisme propre $F : X \to Y$ d'espaces analytiques et un courant positif fermé T sur X, étudier les nombres de Lelong de l'image directe $F_\star T$, qui est un courant positif fermé sur Y. Sous l'hypothèse (indispensable) que les fibres de F sont discrètes sur le support de T, nous avons démontré l'existence d'un encadrement des nombres de Lelong $\nu(F_\star T, y)$ à l'aide de multiplicités $\mu_p(F, x)$, $\overline{\mu}_p(F, x)$ attachées au morphisme F aux points x de la fibre :

$$\sum_{x \in F^{-1}(y)} \mu_p(F, x)\nu(T, x) \leq \nu(F_\star T, y) \leq \sum_{x \in F^{-1}(y)} \overline{\mu}_p(F, x)\nu(T, x).$$

Cet encadrement est optimal.

Le dernier sujet abordé dans ma thèse concerne l'étude des éléments extrémaux du cône des courants positifs fermés sur une variété de Stein ou sur une variété projective [11]. P. Lelong et R. Harvey avaient posé le problème de savoir si les seuls courants fortement positifs extrémaux étaient bien les courants d'intégration sur les cycles analytiques irréductibles. Grâce à l'utilisation de théorèmes de support nouveaux pour les courants portés par des sous-variétés CR, nous avons pu obtenir un contre-exemple en construisant un courant extrémal de bidegré $(1,1)$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dont le support est de codimension réelle 1. Nous avons ensuite étendu le contre-exemple à $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ en codimensions $1, 2, \ldots, n-1$, grâce à un théorème de prolongement de H. Skoda pour les courants positifs fermés de masse finie ; la preuve originale de ce dernier théorème repose d'ailleurs sur notre formule de Jensen [8]. Nous avons enfin montré le lien entre l'étude des courants extrémaux et la conjecture de Hodge, via un problème d'approximation de courants par des cycles analytiques positifs, et la mise en évidence d'obstructions topologiques à ce problème. En codimension $(1,1)$ la conjecture de Hodge (qui est évidemment bien connue dans ce cas) peut se formuler de manière plus explicite comme suit : tout courant positif fermé dont la classe de cohomologie est dans le sous-espace fermé engendré par les classes de cohomologie entière de type $(1,1)$ est limite faible d'une suite $\lambda_k[Z_k]$ de courants d'intégration sur des hypersurfaces irréductibles, avec $\lambda_k \geq 0$. Le résultat précédent repose sur un procédé général de construction d'hypersurfaces irréductibles ayant un lieu singulier donné, procédé qui avait fait l'objet d'un travail antérieur [4]. Nous avions montré en particulier, en nous appuyant sur des estimations de croissance précises dans $\mathbb{C}^n$ et sur un contre-exemple de Cornalba-Shiffman, l'existence de courbes irréductibles à croissance lente dans $\mathbb{C}^2$, ayant des points singuliers aussi nombreux qu'on le veut à l'infini. Ces résultats d'irréductibilité peuvent également se traduire, grâce au théorème de Paley-Wiener, en des propriétés arithmétiques de l'algèbre de convolution $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$.

Dans l'article [13], conçu en collaboration avec B. Gaveau, nous étudions des majorations statistiques pour la courbure de Ricci des surfaces de niveau d'une application holomorphe $F : \Omega \to \mathbb{C}^p$, définie sur un ouvert strictement pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$. L'article s'achève par la démonstration d'une formule reliant le $i\partial\overline{\partial}\log$ de la courbure totale de Gauss d'une sous-variété à la forme de courbure de Ricci.

3) De 1983 à 1989 (Institut Fourier, Grenoble I)

Mes recherches ultérieures ont abouti à la publication d'un certain nombre d'articles dont le thème tourne autour de l'étude des courants positifs ou des fibrés vectoriels holomorphes. Fait exception la note [15], qui a pour objet une généralisation d'un théorème de De Leeuw-Katznelson-Kahane : étant donné une fonction $\varphi \geq 0$ de carré sommable sur le dual $\widehat{G}$ d'un groupe abélien localement compact, nous montrons l'existence d'une fonction L^2 continue f s'annulant à l'infini sur G telle que $|\hat{f}| \geq \varphi$. Ce résultat était seulement connu auparavant dans le cas d'un groupe G compact.

L'article [14] est consacré à l'étude du problème suivant : étant donné un courant positif fermé T sur un ouvert de Runge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et un ouvert $\omega \subset\subset \Omega$, trouver des conditions suffisantes portant sur les masses de T pour assurer l'existence d'un prolongement global $\widetilde{T}$ de $T_{|\omega}$ à $\mathbb{C}^n$. Nous obtenons effectivement une telle condition suffisante et montrons alors qu'il n'y a pas propagation des singularités, i.e. $\widetilde{T}$ peut être choisi de classe C^∞ en dehors de $\overline{\Omega}$. Inversement, en utilisant le théorème de prolongement de H. Skoda déjà mentionné et l'existence de variétés pluripolaires totalement réelles (Diederich-Fornaess), nous construisons des exemples non triviaux de courants non prolongeables. Il en résulte en particulier que la condition suffisante mentionnée ci-dessus est également nécessaire si T est de bidegré $(1, 1)$.

L'article [16] démontre une identité de type Bochner-Kodaira-Nakano pour un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété hermitienne. Nous nous sommes attachés à expliciter complètement les termes de torsion qui apparaissent dans le cas non kählérien. Un théorème d'existence pour l'opérateur $\overline{\partial}$ en résulte.

Le mémoire [18] a deux objets principaux, d'une part l'étude des propriétés de croissance et de convexité des fonctions plurisousharmoniques, d'autre part une caractérisation géométrique des variétés algébriques affines en termes de volume et de courbure. Etant donné une fonction *psh* continue exhaustive φ sur un espace analytique X, nous construisons une famille de mesures μ_r portées par les "pseudo-sphères" $\varphi = r$ et représentées par la forme $(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi$ (calculée au sens de Bedford-Taylor). Ces mesures jouissent de propriétés intéressantes en liaison avec l'étude de la croissance des fonctions *psh* ou de la distribution des valeurs des fonctions holomorphes. En particulier, si φ vérifie l'équation de Monge-Ampère homogène $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$ en dehors d'un compact, la fonction $r \mapsto \|V\|_{L^p(\mu_r)}$ est convexe pour toute fonction *psh* $V \geq 0$ sur X. Nous montrons enfin que les variétés algébriques affines sont caractérisées par l'existence d'une fonction d'exhaustion *psh* φ de classe C^∞ telle que la métrique $dd^c\varphi$ soit de volume fini et telle que la courbure de Ricci de la métrique $dd^c(e^\varphi)$ soit convenablement minorée.

Dans l'article [19], nous exposons une nouvelle démonstration simplifiée des théorèmes d'annulation et de finitude de T. Ohsawa et O. Abdelkader, relatifs à la cohomologie des fibrés vectoriels holomorphes. Cette démonstration repose sur les méthodes L^2 classiques de Hörmander et sur l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne [16].

Les articles [20], [21], [22] élaborent une théorie de Morse pour la cohomologie des puissances tensorielles d'un fibré en droites holomorphe, sous la forme d'inégalités asymptotiques qui complètent la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch. De façon précise, si E est un fibré holomorphe en droites et F un fibré de rang r au-dessus d'une variété complexe compacte X, nous obtenons une estimation de la dimension des espaces de cohomologie $H^q(X, E^k \otimes F)$ lorsque k tend vers $+\infty$; cette dimension est majorée par une intégrale de la forme de courbure de Chern $c(E)$, étendue à l'ouvert des points d'indice q de $c(E)$. On trouvera dans [20] une première démonstration assez élémentaire, mais non optimale, des inégalités de Morse; l'article [21] expose une version améliorée et simplifiée des résultats de [20]. Dans [22], nous montrons comment on peut obtenir des inégalités de Morse optimales en étudiant les propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger associé à un champ magnétique intense ; notre méthode repose sur des idées introduites par E. Witten pour l'étude des théories de supersymétrie, idées qui l'avaient conduit à une nouvelle preuve analytique des inégalités de Morse classiques. Grâce à ces résultats, nous avons pu améliorer la démonstration de la conjecture de Grauert-Riemenschneider (élucidée par Siu en 1984) et caractériser les espaces de Moishezon, au moyen d'hypothèses géométriques très générales qui n'exigent aucune propriété de semi-positivité ponctuelle de la courbure. Ces travaux ont eu des retombées notables; citons en particulier J.M. Bismut qui a donné une approche probabiliste de nos résultats via une estimation asymptotique du noyau de la chaleur et E. Getzler qui a obtenu diverses généralisations (cas des puissances tensorielles de fibrés vectoriels, cas de l'opérateur $\overline{\partial}_b$ d'une variété CR compacte). Nous sommes revenus sur ces questions dans une série de conférences [32], [33] délivrées à l'Institut Mittag-Leffler en mars 1987 et à l'AMS Summer Institute de l'Université de Santa Cruz en juillet 1989; l'exposé de synthèse [33] présente des démonstrations nouvelles simplifiées des résultats précédents ainsi que des généralisations obtenues par

Bismut et Getzler. Nous avons obtenu de plus une estimation de la fonction de distorsion d'un fibré ample, exprimant le rapport entre une métrique à courbure positive donnée et les métriques induites par celle de Fubini-Study à travers des plongements dans l'espace projectif. Ce résultat améliore et généralise les résultats antérieurs de G. Kempf, S. Ji et G. Tian.

L'article [23] reprend et systématise des idées antérieures contenues dans [9]. Nous y introduisons la notion de nombre de Lelong généralisé d'un courant T relativement à une fonction poids φ (supposée plurisousharmonique continue et exhaustive). La souplesse autorisée par la manipulation des poids permet de simplifier considérablement des résultats classiques dont les démonstrations étaient auparavant laborieuses (invariance des nombres de Lelong par changement de coordonnées locales, théorème de Thie). Nous obtenons d'autre part un résultat général de semi-continuité contenant le théorème de Siu sur l'analyticité des ensembles de niveau associés aux nombre de Lelong : si $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ est une fonction *psh* exhaustive sur $X \times Y$ et si T est un courant positif fermé sur X, les ensembles de niveaux $E_c = \{y \in Y; \nu\big(T, \varphi(\cdot, y)\big) \geq c\}$ sont analytiques dans l'espace des paramètres. Tous ces résultats sont repris dans [37], qui fait une synthèse des résultats connus sur le sujet (avec aussi quelques résultats nouveaux).

L'article [24] poursuit l'étude des mesures de Monge-Ampère introduites dans [18]. Nous montrons notamment que dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ borné hyperconvexe quelconque on peut définir¡ une fonction de Green généralisée qui est la solution $u_z(\zeta)$ du problème de Dirichlet pour l'équation de Monge-Ampère $(dd^c u_z)^n = 0$ avec singularité logarithmique au point z. On en déduit alors des mesures pluriharmoniques μ_z qui généralisent les mesures harmoniques de la théorie classique du potentiel. Le noyau de Poisson "pluricomplexe" $d\mu_z(\zeta)$ ainsi obtenu est en général porté par les points strictement pseudoconvexes de $\partial\Omega$; lorsque Ω est strictement pseudoconvexe, la singularité de $d\mu_z(\zeta)$ sur la diagonale de $\Omega \times \partial\Omega$ peut être calculée explicitement. La traduction de ces résultats en géométrie réelle fournit une représentation naturelle d'un point d'un ensemble convexe compact de dimension finie comme barycentre d'une mesure positive portée par les points extrémaux (théorème de Choquet) ; les mesures obtenues sont données par des formes différentielles explicites sur le bord. La courte note [29] (avec E. Bedford) résout (négativement) des questions posées dans [24] concernant la régularité et la symétrie de la fonction $u_z(\zeta)$.

Le travail [25] (en collaboration avec C. Laurent-Thiébaut) décrit une méthode générale, inspirée des travaux de Henkin-Leiterer, permettant de construire des noyaux intégraux globaux pour l'opérateur $\overline{\partial}$ sur les variétés de Stein. Nous obtenons ainsi des formules de Koppelman pour des formes différentielles de type (p, q) quelconque, à valeurs scalaires ou vectorielles. Certaines de nos idées ont été reprises par Bo Berndtsson et ses élèves en vue de l'étude de la transformation de Radon sur $\mathbb{P}^n$.

Nous avons ensuite cherché à démontrer des théorèmes d'annulation pour les puissances tensorielles d'un fibré vectoriel holomorphe ample ou positif sur une variété algébrique projective. Ceci a fait l'objet de trois publications, [26] et [27] pour la situation "analytique" (fibrés positifs), [28] pour la situation algébrique (fibrés amples). Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r au dessus d'une variété algébrique projective de dimension n. Si E est ample, nous montrons que les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X, E^{\otimes k} \otimes (\det E)^l)$ s'annulent pour $p + q \geq n + 1$ et $l \geq n - p + r - 1$. La démonstration repose sur le fait que $E^{\otimes k}$ se décompose en représentations irréductibles du groupe $\mathrm{Gl}(E)$. D'après la théorie de Bott, ces représentations sont les espaces de sections d'un fibré en droites homogéne au dessus d'une variété de drapeaux de E. Grâce à la suite spectrale de Leray (cas algébrique), ou à des calculs de courbure (cas analytique), le résultat est alors ramené au théorème d'annulation de Kodaira-Nakano pour les fibrés en droites. Notre approche nous a permis de généraliser les théorèmes d'annulation obtenus par Le Potier, et de trouver un contre-exemple à une conjecture de Sommese sur l'annulation de la cohomologie à valeurs dans les puissances extérieures $\Lambda^k E$. Faltings avait également conjecturé que la suite spectrale de Leray utilisée dans le théorème de Le Potier dégénérait en E_1. J. Le Potier, T. Peternell et M. Schneider ont montré que la réponse est en général négative. En 1992-93, Laurent Manivel a étudié en détail le cas où E est le fibré quotient universel sur la grassmannienne et a montré qu'il y a des cas où la suite spectrale est non dégénérée à des niveaux E_r arbitrairement élevés.

Un livre [L2] en deux volumes sur la Géométrie Analytique et les techniques transcendantes de la Géométrie Algébrique est en cours de rédaction. Ce livre se voudrait être un ouvrage accessible aux non spécialistes, présentant un assez large éventail de résultats classiques aussi bien que des résultats plus spécialisés tirés des travaux de recherche de l'auteur.

En collaboration avec M. Blel et M. Mouzali [31], nous avons donné une condition suffisante pour l'existence du cône tangent à un courant positif fermé. C.O. Kiselman a montré que le cône tangent n'existe pas toujours, même pour un courant $i\partial\overline{\partial}u$ de type $(1,1)$ associé à une fonction plurisousharmonique. Notre condition suffisante porte sur vitesse de convergence des mesures projectives vers le nombre de Lelong et s'avère être pratiquement optimale. On retrouve comme corollaire immédiat l'existence du cône tangent pour un ensemble analytique.

Dans [34], nous démontrons que tout sous-espace fortement q-complet (au sens d'Andreotti-Grauert) d'un espace analytique quelconque admet un système fondamental de voisinages q-complets. Ce résultat n'était connu auparavant que dans le cas des sous-espaces de Stein (Siu 1976), et la démonstration générale que nous donnons est beaucoup plus simple que celle de Siu. Ceci permet de retrouver quelques résultats de T. Ohsawa sur les groupes de cohomologie des espaces q-convexes (résultats d'annulation, existence d'une décomposition de Hodge en degrés élevés).

4) Décennie 1990-1999 (Institut Fourier, Grenoble I)

Pandant cette période, notre contribution essentielle est sans doute la mise au point de "techniques transcendantes de la géométrie algébrique" reposant sur l'utilisation systématique de métriques hermitiennes singulières sur les fibrés vectoriels holomorphes, à partir de l'observation que les pôles logarithmiques de ces métriques jouent un rôle fondamental. Cette théorie permet d'élaborer des résultats non triviaux de théorie de l'intersection et elle se combine très efficacement avec les estimations L^2 de Hörmander pour l'opérateur $\overline{\partial}$ pour obtenir des théorèmes d'annulation de cohomologie ou des résultats d'existence de sections holomorphes. Nous avons d'abord obtenu dans la courte note [30] une nouvelle démonstration assez élémentaire du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg. Ces idées sont mises en oeuvre dans [35] pour établir un lien avec quelques problèmes de nature algébrique: estimation de la constante d'amplitude ε de Seshadri, inégalité asymptotique pour la dimension des groupes de cohomologie $H^q(X, L^{\otimes k})$ lorsque L est de dimension de Kodaira maximale. Indépendamment, et en suivant une démarche très voisine, A. Nadel démontrait le théorème d'annulation fondamental suivant : si L est un fibré en droites sur une variété complexe compacte X (ou plus généralement sur une variété faiblement pseudoconvexe), muni d'une métrique hermitienne singulière $h = e^{-\varphi}$ à courbure définie positive, alors

$$H^q(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(\varphi)) = 0 \qquad \text{pour } q \geq 1,$$

où $\mathcal{I}(\varphi)$ est le "faisceau d'idéaux multiplicateurs" associé à la fonction poids psh φ (faisceau des germes de fonctions holomorphes f telles que $|f|^2 e^{-2\varphi}$ soit localement intégrable sur X ; c'est toujours un faisceau cohérent). Ces résultats fondamentaux figurent dans notre mémoire [36], où nous montrons comment les techniques L^2 peuvent être utilisées en conjonction avec le théorème de Calabi-Yau pour obtenir un critère numérique de grande amplitude: si L est un fibré ample au dessus d'une variété projective X et si les nombres d'intersection $L^p \cdot Y$ avec les sous-variétés algébriques $Y \subset X$ satisfont des minorations convenables (par des constantes explicites dépendant de la géométrie de X), alors le fibré "adjoint" $K_X \otimes L$ est très ample. Il résulte en particulier de ce critère que $K_X^2 \otimes L^m$ est très ample si L est ample et si $m \geq 12n^n$. Cet énoncé généralise à la dimension quelconque un résultat obtenu en 1973 par Bombieri sur les plongements pluricanoniques des surfaces, et constitue en dehors du cas des surfaces (cf. travaux récents de I. Reider et Beltrametti-Sommese) le premier résultat connu en direction de la conjecture de Fujita, selon laquelle L ample doit impliquer $K_X \otimes L^{\otimes n+2}$ très ample pour $n = \dim X$ quelconque. Plusieurs géomètres algébristes (dont J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori) cherchent actuellement à atteindre des résultats semblables par une voie purement algébrique.

Notre approche nécessite l'utilisation d'un nouveau procédé d'approximation des courants positifs fermés, dont l'objet est de mesurer très précisément la perte de positivité lorqu'on veut régulariser le courant (ou lorsqu'on cherche à déplacer un diviseur). Ce procédé a des conséquences intéressantes en théorie de l'intersection, ainsi que pour l'étude des propriétés d'effectivité numérique des diviseurs. Nous obtenons en particulier une inégalité de self-intersection permettant de majorer la taille des singularités de diviseurs (ou courants) positifs quelconques. Une version généralisée de ce procédé d'approximation pour toute variété complexe compacte est donnée dans [38] et [39].

L'article [40] en collaboration avec Th. Peternell et M. Schneider étudie les variétés complexes compactes dont le fibré tangent est numériquement effectif (hypothèse de nature algébrique signifiant en gros que la courbure est semi-positive). Nous obtenons une classification complète dans le cas des surfaces et pour les variétés kählériennes de dimension 3. En général, nous montrons que les variétés kählériennes compactes dont le fibré tangent est numériquement effectif sont, à un revêtement étale fini près, des fibrations lisses au dessus d'un tore complexe, dont les fibres sont des variétés de Fano ayant elles-mêmes un fibré tangent numériquement effectif. Il est conjecturé que ces variétés de Fano sont en fait rationnelles homogènes (comme le suggère la classification obtenue en dimension ≤ 3). Cette conjecture est une vaste généralisation du résultat de Mori affirmant que l'amplitude du fibré tangent caractérise $\mathbb{P}^n$; elle paraît très difficile.

Dans notre article conjoint [41], nous obtenons des résultats significatifs sur les variétés projectives ou kählériennes compactes ayant un fibré anticanonique numériquement effectif (ces variétés sont un des éléments importants du puzzle consistant à reconstruire les variétés algébriques projectives à partir de leurs "constituants élémentaires"). Nous avons montré que le groupe fondamental d'une telle variété est toujours à croissance sous-exponentielle; il paraît naturel de conjecturer que la croissance est en fait polynomiale. Par ailleurs, le morphisme d'Albanese de ces variétés semble être toujours une fibration sur le tore d'Albanese. Nous avons sur ce point quelques résultats partiels généralisant un théorème de fibration dû à Lichnerowicz ([41], [47]).

L'article [43] en collaboration avec L. Lempert et B. Shiffman démontre que toute application holomorphe f d'un domaine de Runge Ω d'une variété algébrique affine S

dans une variété projective lisse X est limite uniforme d'applications Nash-algebriques f_ν definies sur une suite exhaustive de domaines ouverts Ω_ν relativement compacts dans Ω. Une version relative est également obtenue : s'il existe une sous-variété algebrique A (non necessairement reduite) dans S telle que la restriction de f à $A \cap \Omega$ est algebrique, alors f_ν peut être choisie en sorte qu'elle coïncide avec f sur $A \cap \Omega_\nu$. La conséquence principale de ces resultats, lorsque Ω est le disque unité, est que la pseudodistance de Kobayashi et la métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden d'une variété quasi-projective Z sont calculables à partir de la seule donnée des courbes algebriques de Z. De façon similaire, la métrique de Eisenman p-dimensionnelle d'une variété quasi-projective peut-être calculée en termes de la forme volume d'Eisenman de ses sous-variétés algébriques de dimension p. Une autre question abordée dans ce travail est d'étudier sous quelles conditions les approximations f_ν peuvent avoir leurs images contenues dans des ouverts de Zariski affine de X. En utilisant des méthodes d'Analyse Complexe (théorie du potentiel pluricomplexe et estimations L^2 de Hörmander), nous montrons que la réponse est positive si f est un plongement (avec $\dim S < \dim X$) et s'il existe un fibré en droites ample L sur X tel que $f^\star L$ est trivial. Nous déduisons finalement de ces résultats un théorème assez general étendant des résultats antérieurs de E.L. Stout sur l'approximation des variétés de Stein par des domaines de Runge de variétés algebriques affines, ainsi que de Tancredi-Tognoli sur l'approximation des fibrés vectoriels holomorphes par des fibrés vectoriels Nash-algébriques.

L'article [49] est de nouveau consacré à l'étude des fibrés adjoints. En reprenant et en améliorant des idées introduites par Y.T. Siu, nous montrons que $K_X^{\otimes 2} \otimes L^{\otimes m}$ est très ample pour $m \geq 2 + \binom{3n+1}{n}$. La méthode combine l'utilisation de la formule de Riemann-Roch avec un argument de récurrence noethérienne pour les faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel. Nous montrons par ailleurs que $L^{\otimes m}$ est très ample pour

$$m \geq c_n (L^n)^{a_n} \left(n + 2 + \frac{L^{n-1} \cdot K_X}{L^n} \right)^{b_n}$$

avec des constantes $a_n = (3^{n-1} - 1)/2$, $b_n = 3^{n-2}(n/2 + 3/4) + 1/4$, $c_n \leq (3n)^{n^2 3^n}$ (version effective du "grand théorème de Matsusaka"). La preuve repose sur une estimation nouvelle relative au faisceau dualisant des sous-variétés algébriques de l'espace projectif. Les notes de notre cours au CIME [46] reprennent ces résultats en détail (ainsi que ceux du mémoire [36]), et présentent un exposé de synthèse de la théorie des systèmes linéaires adjoints à l'intention des non spécialistes.

La courte Note [48] exploite le fait qu'on a la propriété de semi-continuité inférieure des dimensions de Dolbeault $h^0 - h^1$ dans toute déformation de variétés complexes $(X_t)_{t \in S}$, pour donner une condition suffisante de constance locale des dimensions de Kodaira-Iitaka $\kappa(X_t)$.

Enfin, le long mémoire [50] (paru dans les Proceedings de la Santa Cruz Summer School on Algebraic Geometry en 1997) a été le point de départ d'une série de travaux sur les variétés hyperboliques aus sens de Kobayashi. L'objectif initial était d'étudier certains critères algébriques qui conjecturalement devraient permettre de caractériser l'hyperbolicité au sens de Kobayashi des variété algébriques projectives. Nous avons obtenu ainsi plusieurs critères numériques fins précisant les propriétés de "négativité de courbure" pertinentes. La technique utilise de manière essentielle certaines constructions fonctorielles d'espaces de jets ou fibrés de jets inspirées des travaux de Green-Griffiths (1978). Comme retombées de ce travail, il faut signaler le travail de Jawher El Goul, donnant un exemple de surface hyperbolique de très bas degré (à savoir 11, ce qui est encore à ce jour le meilleur exemple connu), dans l'espace projectif de dimension 3; en 1998, dans un travail en collaboration avec J. El Goul, nous avons donné la preuve d'une conjecture de Kobayashi vieille de plus de 20 ans : une surface algébrique générique de degré assez grand dans $\mathbb{P}^3$ est hyperbolique (tout degré à partir de 21 suffit).

Le mémoire [54] est consacré à l'étude d'une forme géométrique de la dualité de Serre, se manifestant en un échange des propriétés de pseudo-convexité et de pseudo-concavité. Bien que l'énoncé envisageable le plus général reste conjectural, nous obtenons une version du théorème de dualité qui est suffisante pour plusieurs applications intéressantes à la géométrie algébrique. En particulier, comme corollaire de la "dualité convexe-concave", nous obtenons une démonstration géométrique précise et effective du théorème fondamental de régularisation des courants dans les variétés compactes.

L'article [58] en collaboration avec János Kollár démontre un théorème de semi-continuité effectif pour les exposants de singularités des fonctions holomorphes ou plurisousharmoniques. Cet exposant de singularité, caractérise le "seuil d'intégrabilité" (appelé aussi "seuil log-canonique") des puissances négatives d'une fonction holomorphe donnée, et c'est un invariant fondamental qui a été étudié notamment par Arnold, Varchenko. Nous démontrons la semi-continuité pour des suites convergentes quelconques de fonctions – et pas seulement pour des familles dépendant analytiquement d'un paramètre. La démonstration requiert des outils avancés d'Analyse Complexe (méthodes hilbertiennes, théorème d'extension L^2 de Ohsawa-Takegoshi). Comme application, nous obtenons une démonstration simple du théorème de Nadel sur l'existence de métriques Kähler-Einstein sur certaines variétés de Fano. En passant, nous obtenons quelques exemples nouveaux d'orbi-variétés de Fano de dimension 2 qui admettent une telle métrique Kähler-Einstein.

5) Période 2000-2007 (Institut Fourier, Grenoble I)

J'ai tout d'abord poursuivi mes recherches autour de l'étude des fibrés en droites nef ou pseudo-effectifs, en relation avec celles des singularités plurisousharmoniques. Dans cette rubrique figurent les travaux [60], [61], [62], [64]. Le principal résultat de [60] (en collaboration avec L. Ein et R. Lazarsfeld) est la preuve de la sous-additivité multiplicative des faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel, comme conséquence du théorème d'extension L^2 de Ohsawa-Takegoshi appliqué à des poids plurisousharmoniques singuliers. La courte note [61] est consacrée à la preuve d'un théorème de structure pour les variétés kählériennes compactes admettant une structure de contact holomorphe. Ce résultat a pour conséquence qu'une telle variété qui est en outre projective est ou bien une variété de Fano (variété à courbure de Ricci positive), ou bien le projectivisé du fibré cotangent d'une certaine variété projective (auquel cas on a effectivement une structure de contact évidente). On observera que cet énoncé est lié à l'un des cas non encore élucidé de la classification de Berger (classification des variétés riemanniennes par leur groupe d'holonomie), à savoir le cas de l'holonomie $Sp(n)Sp(1)$.

L'idée principale de [62] est d'exploiter la bonne compréhension que l'on a des singularités des fonctions plurisousharmoniques et le dictionnaire Analyse $\leftrightarrow$ Algèbre établi dans [35] et [38], pour en tirer des résultats fins sur la géométrie des variétés ou des fibrés. En particulier, on s'intéresse à la cohomologie des fibrés en droites nef ($c_1(L)$ dans l'adhérence du cône des diviseurs amples) ou pseudo-effectifs ($c_1(L)$ dans l'adhérence du cône des diviseurs effectifs). Nous démontrons ainsi une version du théorème de Lefschetz difficile faisant intervenant la cohomologie à valeurs dans un fibré non localement constant. Ce résultat met de nouveau en jeu de manière essentielle les estimations L^2 pour les formes harmoniques et la théorie des idéaux multiplicateurs de Nadel, mais en utilisant des estimations asymptotiques très fines.

Un deuxième aspect de mes travaux de cette dernière période est l'étude de la géométrie des cônes positifs dans la cohomologie des variétés kählériennes compactes. Il s'agit là principalement des références [63], [65], [66], [67], [69]. En utilisant la théorie des courants positifs, particulièrement la théorie de la régularisation et la théorie de l'intersection des courants que j'avais développées au début des années 1990, Mihai Paun et moi-même avons montré dans [63] qu'il est possible de caractériser le cône de Kähler d'une variété kählérienne compacte quelconque, de manière purement numérique via la structure de Hodge et l'intersection des cycles analytiques. Notre caractérisation apparaît comme une généralisation du critère d'amplitude de Nakai-Moishezon à des classes de type $(1, 1)$ arbitraires, y compris celles qui sont transcendantes. Ce résultat a déjà eu des implications profondes pour la structure des variétés kählériennes compactes (invariance générique du cône de Kähler par la connexion de Gauss-Manin, description complète du cône de Kähler des variétés hyperkählériennes). Dans [66] et [69] (article en collaboration avec S. Boucksom, M. Paun et Th. Peternell), nous caractérisons aussi le cône des diviseurs (pseudo)-effectifs d'une variété projective quelconque : c'est le dual du cône des “courbes mobiles”, à savoir les courbes algébriques faisant partie d'une famille qui couvre la variété toute entière. Comme conséquence, nous obtenons la preuve d'une conjecture importante affirmant la pseudo-effectivité du fibré canonique d'une variété non uniréglée, version un peu affaiblie d'un énoncé qui était formulé au moins depuis le début des années 1970. L'ensemble de ces travaux a fait l'objet de ma conférence plénière au congrès international de Madrid en août 2006. L'article [65] avec Eckl et Peternell explique quelques résultats sur les tores complexes dans la direction de la conjecture de Kodaira sur l'approximation des variétés kählériennes par les variétés projectives. Bien que notre travail ait donné seulement des résultats particuliers corroborant la conjecture, l'idée devait conduire Claire Voisin à un contre-exemple inattendu peu de temps après.

Dans la perspective de l'étude de l'hyperbolicité des variétés algébriques, nous avons enfin effectué avec J. El Goul divers calculs sur les anneaux d'opérateurs différentiels sur les jets de courbes, et avons pu élucider dans [72] la structure des anneaux d'opérateurs “invariants” d'ordre inférieur ou égal à 4 sur les surfaces. Le cas des ordres supérieurs ou égaux à 5 reste hautement mystérieux et nous n'avons même pas de résultat général de finitude de ces anneaux dans notre situation. Ce travail n'a pas pas encore été publié, mais a fait l'objet de plusieurs conférences et a déjà eu plusieurs retombées, par exemple dans les travaux récents d'Erwann Rousseau (2005 et 2006, cf. cours Peccot 2007 donné par E. Rousseau). Les derniers travaux en cours (notamment ceux effectués avec mon thésard Simone Diverio en 2007) montrent que les inégalités de Morse holomorphes appliquées aux fibrés tautologiques de jets permettent au moins d'améliorer les bornes de degré précédemment connues pour l'existence d'équations différentielles algébriques. L'enjeu ici est d'essayer de démontrer les conjectures de Lang-Vojta et Green-Griffiths sur les courbes holomorphes tracées dans les variétés de type général ; on s'attend à ce qu'elles soient contenues dans une sous-variété algébrique exceptionnelle non de type général.