Un aperçu de mes principaux résultats ...

L'aperçu ci-dessous résume les principaux travaux que j'ai effectués depuis ma thèse (disons depuis 1985), en essayant de classer les résultats par grandes rubriques. De manière générale, ces travaux concernent l'application des techniques d'Analyse et de Géométrie différentielle complexes à l'étude de questions de Géométrie algébrique ou analytique.

A) Inégalités de Morse holomorphes

Grâce à une étude spectrale fine de l'opérateur de Laplace-Beltrami complexe, j'ai pu démontrer des inégalités de Morse asymptotiques pour la $\overline{\partial}$-cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe ([22], 1985). Ces inégalités m'ont permis d'obtenir une nouvelle démonstration de la conjecture de Grauert-Riemenschneider sur la caractérisation des variétés de Moishezon, sous des hypothèses beaucoup plus faibles que celles faites par Siu dans sa démonstration initiale de la conjecture (1984). Ces idées ont été reprises dans les 2 ou 3 ans qui ont suivi par E. Getzler, J.-M. Bismut, Y.T. Siu, Tsuji-Nadel et par mes étudiants Thierry Bouche, G. Marinescu. Un regain d'intérêt sur le sujet est intervenu depuis 1995 (travaux de G. Marinescu, L. Bonavero, S. Takayama, ...).

B) Théorèmes d'annulation

Dans une série d'articles ([27,28], 1987 et [30], 1989), j'ai obtenu des théorèmes d'annulation fins et optimaux pour les fibrés linéaires ou vectoriels holomorphes. Les techniques utilisées combinent des techniques algébriques (cohomologie des variétés de drapeaux, suite spectrales), avec des résultats d'existence L^2 de Hörmander pour l'opérateur $\overline{\partial}$. Les articles [27,28] ont donné lieu ultérieurement à la Thèse de mon étudiant Laurent Manivel, qui a beaucoup développé l'étude des variétés de drapeaux et les théorèmes d'annulation dans l'esprit de la théorie de Borel-Weil et du théorème de Bott. Le travail [30] a, quant à lui, débouché sur une preuve du célèbre "théorème d'annulation de Nadel" (cf. [35, 36]), obtenu indépendamment par Nadel en 1989. J'ai rédigé à diverses reprises des notes de cours faisant le point sur ces questions (CIME 1994, ICTP Trieste 2000, ...)

C) Courants, opérateurs de Monge-Ampère, Nombres de Lelong

Dans cette rubrique figurent ([23], [24], 1987) et ([37], [38], [39], 1992). L'objet principal de ces travaux est d'utiliser la notion de nombre de Lelong (ou densité) d'un courant positif fermé, comme alternative à la notion de multiplicité en géométrie algébrique, et les opérateurs de Monge-Ampère pluricomplexes comme alternative à l'intersection des cycles analytiques ou algébriques. J'ai pu ainsi développer une théorie de l'intersection des courants, et obtenir des inégalités utiles sur les strates des ensembles de (sur)-niveaux des nombres de Lelong d'un courant positif fermé. Les articles [38] et [39] décrivent un procédé général de régularisation des courants, qui permet de calculer de manière précise la perte de positivité subie par les régularisés en fonction de la géométrie globale de la variété. Outre mes propres travaux, ce théorème de régularisation a été utilisé par plusieurs auteurs (S. Ji-B. Shiffman, L. Bonavero, vers 1994-95). La théorie de l'intersection des courants que j'ai développée a aussi été reprise dans le contexte de l'étude des systèmes dynamiques holomorphes (construction de courants invariants par E. Bedford-J. Smillie, N. Sibony, S. Cantat, . . .)

D) Étude des systèmes linéaires adjoints et conjecture de Fujita

Vers 1990-91, j'ai étendu la portée des techniques L^2 en montrant qu'on pouvait les utiliser pour généraliser à la dimension quelconque le résultat de Bombieri sur les plongements pluricanoniques des surfaces ([35]): ce résultat est obtenu comme cas particulier d'un critère de grande amplitude qui résout partiellement une conjecture des géomètres algébristes de l'école japonaise (Mori, Kawamata, Fujita). Le prototype des résultats obtenus est que $2K_X + mL$ est très ample pourvu que L soit ample et m suffisamment grand, avec une borne ne dépendant que de la dimension (le premier résultat obtenu par la méthode analytique employée est que $m \geq 12\,n^n$ suffit). Ce travail a eu des retombées considérables. Il a été à l'origine de nombreux travaux tournant autour de la conjecture de Fujita (qui affirme que $K_X + mL$ est très ample pour $m \geq n{+}2$) et du grand théorème de Matsusaka (cf. aussi [49], 1996). Le problème consiste in fine à obtenir des estimations effectives de degré pour le plongement des variétés algébriques dans l'espace projectif. Citons sur ces sujets les travaux ultérieurs de Kollár, Ein-Lazarsfeld, Siu, Angehrn-Siu aux Etats-Unis, Fujita, Kawamata au Japon, Beltrametti-Sommese en Italie, Helmke, Küchle en Allemagne ...

E) Travaux récents

Depuis 1990, mes travaux ont porté principalement sur quatre thèmes (bien que j'aie travaillé aussi sur d'autres sujets, comme par exemple dans [43], [44] et [45]).

1) *Étude de la structure des variétés kählériennes dont le fibré tangent ou le fibré canonique est semi-positif ou numériquement effectif*

Ces travaux ont été pour l'essentiel effectués en collaboration avec Thomas Peternell et Michael Schneider (Bayreuth) dans la période 1990-1997, cf. [40], [41], [47]. Nos résultats principaux sont des théorèmes de fibration: si X est kählérienne compacte à fibré tangent T_X nef, alors, à revêtement étale fini près, X fibre sur son tore d'Albanese avec comme fibre des variétés "de Fano", dont le fibré tangent est lui même nef, et dont le fibré anticanonique est ample. Nous conjecturons que ces fibres sont en fait des variétés rationnelles homogènes, ce qui nous donnerait alors une classification complète des variétés en question. Une perspective prometteuse (travaux en cours) est d'exploiter le fait que les variétés de Fano ayant un fibré tangent nef sont "presque Kähler-Einstein", i.e., admettent des métriques kählériennes vérifiant d'aussi près que l'on veut la condition d'Einstein.

Dans la situation plus générale où $-K_X$ est nef, nous avons des résultats partiels: le théorème de fibration (modifié de manière adéquate) a bien lieu au moins si $-K_X$ est hermitien à courbure semi-positive, tandis que le morphisme d'Albanese est toujours surjectif si X est projective. Nous avons obtenu ce dernier résultat en dimension ≤ 3 par des méthodes de géométrie différentielle complexe ([41]), tandis que le cas général a été obtenu par Qi Zhang en 1995 grâce à l'utilisation de méthodes de caractéristique positive.

2) *Étude des variétés algébriques hyperboliques, en relation avec la géométrie des espaces de jets et leurs propriétés de négativité de courbure.*

Il s'agit des travaux référencés [50], [52], [53]. Notre objectif principal est l'étude d'une importante conjecture de S. Kobayashi, affirmant qu'une hypersurface générique de degré assez grand (plus grand que le double de la dimension), dans l'espace projectif complexe, est hyperbolique au sens de Kobayashi. La propriété d'hyperbolicité en question est équivalente à la non existence de courbe entière non constante tracée dans la variété; elle implique en particulier la non-existence de courbes rationnelles et elliptiques (et plus généralement la non-existence de morphismes non-triviaux ayant pour source une variété abélienne et à valeurs dans la variété). Plusieurs questions importantes de théorie des nombres (conjectures de Lang-Vojta) se trouvent en relation étroite avec ces problèmes. Nous avons pu obtenir un dictionnaire précis (malheureusement encore conjectural dans une des directions) reliant la propriété d'hyperbolicité et l'existence de métriques à courbure négative sur certains espaces de jets ("fibrés de Semple"). L'essentiel de la théorie est décrit dans le long mémoire [50] à paraître dans les Actes de l'AMS Summer School de Santa Cruz, où se trouve notamment réparée une erreur commise par Green et Griffiths dans leur travail de 1979 (Colloque en l'honneur de S.S. Chern). L'article [52] en collaboration avec mon étudiant J. El Goul construit des exemples de surfaces hyperboliques dans l'espace projectif de dimension 3, de degré quelconque ≥ 11. Ce résultat, qui reprend et améliore des travaux antérieurs de Y.T. Siu et A. Nadel, s'obtient par une étude fine de la géométrie des connexions méromorphes sur certaines sous-variétés très particulières de l'espace projectif, définies par des polynômes homogènes ayant peu de monômes non nuls.

3) *Étude des fibrés en droites nef ou pseudo-effectifs, en relation avec les singularités des fonctions plurisousharmoniques*

Dans cette rubrique figurent ([38], 1992), [58], [60], [62]. Le résultat [58] en collaboration avec J. Kollár est un théorème très général de semi-continuité des exposants de singularités, étendant aux fonctions plurisosuharmoniques les résultats antérieurs de Varchenko sur les exposants de singularités algébriques. L'extension requiert cependant beaucoup d'idées nouvelles, en particulier une exploitation fine des estimations L^2 de Hörmander et Ohsawa-Takegoshi.

Le principal résultat de [60] est la preuve de la sous-additivité multiplicative des faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel, comme conséquence du théorème d'extension L^2 de Ohsawa-Takegoshi.

L'idée principale de [54] est d'exploiter la bonne compréhension que l'on a des singularités des fonctions plurisousharmoniques et le dictionnaire Analyse $\leftrightarrow$ Algèbre établi dans [35] et [38], pour en tirer des résultats fins sur la géométrie des variétés ou des fibrés. En particulier, on s'intéresse à la cohomologie des fibrés en droites nef ($c_1(L)$ dans l'adhérence du cône des diviseurs amples) ou pseudo-effectifs ($c_1(L)$ dans l'adhérence du cône des diviseurs effectifs). Nous démontrons ainsi une version du théorème de Lefschetz difficile faisant intervenant la cohomologie à valeurs dans un fibré non localement constant. De même que les travaux exposés dans la partie D), ce résultat met en jeu de manière essentielle les estimations L^2 de Hörmander et les idéaux multiplicateurs de Nadel.

4) *Étude de la théorie de Hodge et de la géométrie des cônes positifs dans la cohomologie des variétés kählériennes compactes*

Il s'agit principalement des références [63], [67], [69]. En utilisant la théorie des courants positifs, particulièrement la théorie de la régularisation et la théorie de l'intersection des courants que j'avais développées au début des années 1990, il a été possible de caractériser complètement le cône de Kähler d'une variété kählérienne compacte quelconque, ainsi que le cône des diviseurs effectifs des variétés projectives. Les deux principaux résultats stipulent que le cône de Kähler est caractérisé de manière purement numérique via la structure de Hodge, par une extension adéquate du critère de Nakai-Moishezon ([63]), et que le cône des diviseurs effectifs est dual du cône des courbes "mobiles" dans la dualité de Serre. Ces résultats ont déjà eu des implications profondes pour la structure des variétés projectives (invariance générique du cône de Kähler par la connexion de Gauss-Manin, description complète du cône de

Kähler des variétés hyperkählériennes, preuve de la conjecture affirmant la pseudo-effectivité du fibré canonique d'une variété non uniréglée).

Liste des contributions les plus significatives

Voici la liste des travaux qui (à mon sens) sont les plus significatifs et/ou qui ont eu le plus de retombées:

- *Travaux antérieurs à la Thèse d'état*:

[2], [5], [8], [9], [10], [11]

- *Travaux postérieurs à la Thèse d'état*:

[18], [22], [23], [28], [35], [36], [38], [40], [41], [43], [49], [50]

- *Travaux remontant à moins de 5 ans*:

[55], [58], [59], [60], [62], [63], [69]