2025 国际大学生程序设计竞赛 亚洲区域赛（武汉）

题目讲解

林恺

omg_link@qq.com

黑冰茶命题组

2025 年 11 月 2 日

目录

F - 分治

题目描述

给定 n 个区间询问和一个分治处理询问的规则。问要怎样分治才能使分治的层数最小。

F - 分治

题解

注意到我们只关心处理询问时选择的 x 的值，而不关心这个 x 位于分治的哪一层。

要使层数最小，只要让 x 的数量最少即可。而要让 x 的数量最少，可以贪心解决：从左往右扫描，在首个未被处理的询问的右边界处放置 x 即可。

目录

E - 变魔术

题目描述

给定 n 个整数，每次你可以选择值相邻的两个数，将它们同时 $+1$ 或 -1 。问能否从初始状态操作到目标状态。

E - 变魔术

题解

注意到两个数都 $+1$ 其实相当于其中一个数 $+2$ 。假如原数组和目标数组中均存在值相邻的两个数，则可以将这组数作为“跳板”。

跳板可以在数轴上任意平移，供其他数移动使用。因此只要奇数的初始数量与最终数量相同，就一定能得到目标数组。

需要特判当没有“跳板”时，初始数组与目标数组相同的情况。

目录

M - 构造王国

题目回顾

给定一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，要求构造一个 $n \times n$ 矩阵 A。条件是：对于任意两个集合 $S \subseteq S' \subseteq [n]$，主子矩阵的行列式差要等于子集和的差：

$$\det(A_{S'}) - \det(A_S) \equiv \left(\sum_{i \in S'} a_i - \sum_{i \in S} a_i \right) \pmod{998244353}.$$

题解

对于秩一修正矩阵

$$A = I + uv^\top,$$

有：

$$\det(I + uv^\top) = 1 + v^\top u.$$

只要我们选

$$u = (1, 1, \dots, 1)^\top, \quad v = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top,$$

那么任意主子矩阵对应的行列式就是

$$\det(A_S) = 1 + \sum_{i \in S} a_i,$$

正好符合题目要求。

目录

C - 不对称填数

题目大意

在一个 n*m 的网格中填 0,1,2 三种数，要求每种数的数量相同，行、列上不允许三个连续的相同的数，每种数都要八连通，构造方案。

例如 $n = 4$, $m = 3$ 的一种方案：

0011
2201
2210

C - 不对称填数

情况讨论：$n \le 2$

不妨假设 $n \le m$，若 $n > m$ 可交换行列。

当 $n = 1$ 时，易知 $m \ge 9$ 时无解。
当 $n = 2$ 时，也可以证明 $m \ge 9$ 时无解。

证明要点如下。设 $f_{x,y}$ 表示第 x 行第 y 列的数：

1. 设 $f_{1,1} = 0$，则第 $m-1, m$ 列不能有 0（若有，连通至少需 $m-1$ 个 0，超过 $2m/3$ 的限制）；
2. 若第 $1, 2$ 列全为 0，由于不允许三个连续相同的数，第 3 列不能有 0，此时第 $1, 2$ 列的 0 无法与后续 0 连通，连通块大小仅 $4 < 2m/3$；
3. 因此第 $1, 2$ 列一定有 2，同理第 $m-1, m$ 列也一定有 2，将这些 2 连通至少需要 $m-2$ 个 2，超过 $2m/3$ 限制。

综上，$m \ge 9$ 无解。

C - 不对称填数

构造思路：$n=3$

$n=3$ 是关键情形，若找到一种通用构造，可扩展至 $n=3k$。

思路：每一列恰好有 1 个 0、1 个 1、1 个 2，这样每列分布均匀，便于连通扩展。

可得到长度为 6 的循环节：

```
220011220011...
102102102102...
011220011220...
```

C - 不对称填数

推广到 $n = 3k$

将 $n = 3$ 的构造周期性叠加：

- 第 1–3 行按 $n = 3$ 情形；
- 第 4–6 行为第 1–3 行的翻转；
- 第 7–9 行与第 1–3 行相同；
- 依此类推。

```
220011220011...
102102102102...
011220011220...
011220011220...
102102102102...
220011220011...
220011220011...
```

但注意：当 $m = 4$ 时，数字 1 可能不完全连通。

C - 不对称填数

特殊处理：$n = 4$

对于 $n = 4$，可对 $n = 3$ 的构造进行微调：将第二行重复一次即可。

```
220011220011...
102102102102...
102102102102...
011220011220...
```

C - 不对称填数

碎碎念

上述并非唯一构造。

验题人使用基于搜索的构造也可通过:

- 先黑白染色;
- 初始时 0 占一半格子，$1, 2$ 各占四分之一;
- 再调整部分 0 为 1 或 2，直到满足条件。

一种可能的布局:

```
01010202
10102020
01010202
10102020...
```

本题灵感来自 47th EC Final L 题 *Aqre*.

目录

H - 还原数组

题目描述

做不超过 $2n-2$ 次询问。每次询问给出一个非负整数，返回数组中与该数异或的最大值。要求还原整个数组。

H - 还原数组

题解

每次询问相当于在一棵 01 Trie 上询问某个路径终点是否存在一个点。

将路径询问具象化：对当前未确定的路径终点，询问其子树是否存在其它点。若存在即可新确定一个点，否则剪掉该子树。

具体实现：每个 Trie 前缀与一个代表元素绑定，检查该前缀代表的子树是否包含除代表元素外的其它点，从而逐步确定所有元素。

前 $n-2$ 个元素需询问与检验，最后两个数无需检验，因此总询问次数为 $2n-2$。

目录

K - 整理书架

题目描述

给定序列 a, b，可进行至多 $3n$ 次操作，每次交换 $a[i], b[j]$，代价为 $|i-j|$。目标：使 $a=b$ 且总代价最小。操作次数不限于最少。

K - 整理书架

题解（1）

若某数字出现次数为奇数，无解。否则一定可行。

注意交换 $a[x], b[x]$ 代价为 0，因此一个数位于哪一行无区别。

对每个数字 x，最优匹配方式是将其出现位置排序后相邻配对：

$$\text{cost}_x = \sum_{i=1}^{num(x)/2} (pos^x_{2i} - pos^x_{2i-1})$$

理论总代价下界为：

$$\frac{1}{2} \sum_y \sum_{i=1}^{num(y)/2} (pos^y_{2i} - pos^y_{2i-1})$$

题解（2）

构造最优操作：

若 $a[1]=x,b[1]=y$，设第二个 x 在 p_x，第二个 y 在 p_y。若 $p_x \le p_y$，交换 $b[1]$ 与 $a[p_x]$；否则交换 $a[1]$ 与 $b[p_y]$。

交换代价等于减少的距离和，因而是最优的。之后递归处理 $a[2:n],b[2:n]$。

题解（3）

若要交换的两个数不在同一行，一次操作即可；若在同一行，可先进行一次 $(1,1)$ 操作再交换。

整体操作次数不超过 $2n$，为简化实现，可放宽至 $3n$。

因此总操作次数 $\leq 3n$，总代价最小。

目录

A - 种树

题目大意

求 $\sum_{t=0}^{d-1}[(f_it+x_i)\%m<(g_it+y_i)\%m]$。

题解

由于左右两端值域的限制，我们可以观察到，因为式子左右两端都是小于 m 的，那么 $[u<v]=[u\le v-1]=1+\lfloor\frac{(v-1)-u}{m}\rfloor$，当且仅当 $u=m-1$ 且 $v=0$ 的时候式子取 0 。

我们带入整个式子化简得：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{d-1}[(f_it+x_i)\%m<(g_it+y_i)\%m] \\
=&\sum_{t=0}^{d-1}[f_it+x_i-\lfloor\frac{(f_it+x_i)}{m}\rfloor\times m<g_it+y_i-\lfloor\frac{(g_it+y_i)}{m}\rfloor\times m] \\
=&\sum_{t=0}^{d-1}1-\sum_{t=0}^{d-1}\lfloor\frac{(g_it+y_i)}{m}\rfloor+\sum_{t=0}^{d-1}\lfloor\frac{(f_it+x_i)}{m}\rfloor+\sum_{t=0}^{d-1}\lfloor\frac{(g_i-f_i)t+y_i-x_i-1}{m}\rfloor
\end{aligned}
$$

后面一部分直接类欧即可，复杂度 $O(T\times logm)$ 。

目录

B - 77G 网络

题目大意

有一棵以 1 为根的树，共 n 个节点。要在若干城市安装基站，要求每条边的两个端点至少有一个装基站。同时有 m 个故障约束：若在节点 x 装基站，则其子树中**与** x **距离恰好为** y 的那些节点都**不能**装基站（若子树中无此类节点可忽略）。对每组数据，判断是否存在满足所有约束的选择，并给出一个合法集合或输出 “No”。

B - 77G 网络

转化为 2-SAT

把每个城市 v 的选择视为一个布尔变量 X_v（真 $=$ 装基站）。题目两类约束都能写成**至多/至少两个字面**的合取子句：

- 边约束：每条边 (u,v) 要求 $X_u \vee X_v$（二元子句）。
- 故障约束：若 X_x 为真，则一批节点 u 必须为假，等价于对每个相关 u 加入子句 $\neg X_x \vee \neg X_u$（二元子句）。

因此整个问题可以转化为 2-SAT 问题。

B - 77G 网络

优化建图

直接暴力建图在最坏情况下会产生 $O(n^2)$ 的边，无法接受。

把所有深度相同的节点按 dfs 序排序后，线段树建图即可。

此题也可以用长链剖分优化建图。实现较好的分块优化建图也可以通过。

目录

G - 投影

题目描述

给定 n, R^2、n 维空间中的点 **x** $= (x_1, \ldots, x_n)$ 和 n 个限制参数 $l_1, \ldots, l_n$，求出满足以下条件的点中离 **x** 距离最近的点 **y**：

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le R^2, \quad |y_i| \le l_i, \forall i \in [1, n]$$

G - 投影

题解（1）

首先将 $\mathbf{x}$ 投影到超立方体上：

$$y_i = \min\{\max\{x_i, -l_i\}, l_i\}$$

若该点在超球体内，则为最优解。
否则，问题可写作：

$$\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{y}\|_2 \le R,\ |y_i| \le l_i$$

目标与约束均为凸函数，满足 Slater 条件，因此具有强对偶性。

题解（2）

对偶问题：

$$\max_{\mu,\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-}\ \inf_{\mathbf{y}} \mathcal{L}(\mathbf{y},\mu,\boldsymbol{\lambda}^+,\boldsymbol{\lambda}^-)$$

其中

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_2^2+\frac{\mu}{2}(\|\mathbf{y}\|_2^2-R^2)+\sum_i \lambda_i^+(y_i-l_i)+\sum_i \lambda_i^-(-y_i-l_i)$$

且 $\mu,\lambda_i^\pm \geq 0$。

题解（3）

根据 KKT 条件：

$$(1+\mu)\mathbf{y}^* - \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^+ - \boldsymbol{\lambda}^- = 0$$

若 $\lambda_i^+ = \lambda_i^- = 0$，则 $y_i^* = \dfrac{x_i}{1+\mu}$；若 $\lambda_i^+ > 0$，则 $y_i^* = l_i$；若 $\lambda_i^- > 0$，则 $y_i^* = -l_i$。

因此：

$$y_i^* = \min\left\{\max\left\{\frac{x_i}{1+\mu}, -l_i\right\}, l_i\right\}$$

G - 投影

题解（4）

由互补条件 $\mu(\|\mathbf{y}^*\|_2^2 - R^2) = 0$ 得知 $\mu > 0$。定义：

$$f(\mu) = \|\mathbf{y}^*\|_2^2 - R^2$$

它是关于 μ 单调非增的函数，因此可以二分求出使 $f(\mu) = 0$ 的 μ^*。
最后使用 μ^* 求得对应的 $\mathbf{y}^*$ 即为最优解。

目录

I - 套娃 2

题目描述

给定一个排列。每次可以将相邻两个套娃套在一起。持续操作直到无法再操作，问最少要操作几次。

I - 套娃 2

结论

将最后剩下的每个套娃看作原排列上的一个区间。必然存在一种最优方案使得所有区间内元素的值都是单调的。

证明

假如存在一个最优方案，其区间中包含了不单调的子区间 $[p_l, p_r]$。我们从左往右依次消除这些不单调的子区间。对于一个不单调的子区间，考虑其最左侧的拐点。拐点有两种基本形式："2 1 3" 和 "3 1 2"（拐点是极大值点的情况是类似的）。记 p_1, p_2, p_3 表示 $1\ 2\ 3$ 所在的下标。

证明：“2 1 3”

如果 $[p_l, p_2]$ 的值域是 $[p_1, p_r]$ 的值域的子集，则在 2 和 1 中间增加一次划分是显然不会更差的。

否则，p_l 位置上的值必然大于 max$(p_1 \ldots p_r)$ 。（注意这里隐含了 $[p_l, p_2]$ 的长度至少为 2 的条件。）若 $[p_l, p_2]$ 可以被更左的区间吸收，更左的区间要么完全在 $[p_l, p_2]$ 上方，要么完全在下方。

- 完全在上方是不可能的：如果完全在上方，则 $[p_l, p_r]$ 可以整个被更左的区间吸收。
- 完全在下方是可以避免被吸收的：只要将 p_l 调整给更左的区间即可。（利用到上方区间长度至少为 2 的条件）

综上所述，向左分出的区间是一定不会变的更差的。

I - 套娃 2

证明：“3 1 2”

我们同样试图在 1 和 2 中间做一次划分。若划分没有导致 $[p_l, p_1]$ 或 $[p_2, p_r]$ 中一个值域的改变，结果显然不会更差。

如果分割导致了双方值域的改变，则需要分两种情况：

- p_l 是 $[p_l, p_r]$ 中的最大值：此时更左的区间要吸收 $[p_l, p_1]$ ，只能位于下方（位于上方会导致其可以吸收 $[p_l, p_r]$ ）。位于下方时，可以将 p_l 调整给左侧区间，使 $[p_l + 1, p_1]$ 成为一个独立的不被吸收的新区间。
- p_1 是 $[p_l, p_r]$ 中的最小值：此时更左的区间要吸收 $[p_l, p_1]$ ，只能位于上方。此时将划分点调整为 3 和 1 之间，右侧区间的最小值就能保持不变。

综上所述，向左分出的区间是一定不会变的更差的。

题解

综上所述，对于任意一种方案，我们可以通过调整得到一种并不会更差的方案。

原问题转化为：将排列划分为尽量多的段，段内单调，相邻段间的值域有重叠。

该问题可以用 DP 或贪心解决。复杂度为 $O(n)$。

目录

L - ICPC

题目描述

给定一张网格图，网格图上某些位置有笔迹。随机选择一条左下角到右上角的单调路径。问所有笔迹都位于路径同一侧的概率。

L - ICPC

题解

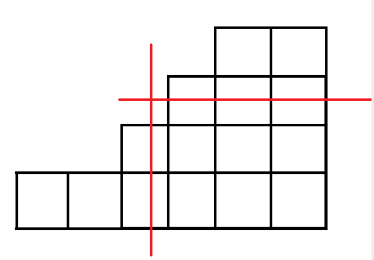
我们可以将概率转化为计数。路径的总数显然是 C_{n+m}^{m}，我们只要求出绕过所有笔迹的路径数量即可。

为了让路径绕过所有笔迹，要么路径始终位于笔迹下方，要么始终位于上方。这是两个对称的问题，因此不妨假设需要保证路径位于笔迹下方。

进一步思路

由于只能走单调路径，原问题的限制可以描述为一个“阶梯”形状的限制：每个位置有一个高度限制，且该限制是单调不减的。

考虑如何求解一个阶梯左下角到右上角的方案数。我们可以对阶梯分治：将阶梯分为两个子阶梯和一个矩形，如下图所示：



分治求解

对于一个阶梯，我们可以递归求解，或在较小时直接用 $O(n^2)$ 的 DP 求解。

对于一个矩形，在一般情况下，我们需要求解从左边或下边进入矩形时，从右边或上边离开矩形的方案数。

L - ICPC

以左边进入为例

若从左边进入并从右侧离开，从左侧第 i 行前往右侧第 j 行的方案数是 $C_{W+(j-i)}^{j-i}$。

从右侧第 j 行离开的方案总数是：

$$Right(j) = \sum_i Left(i) C_{W+(j-i)}^{j-i}$$

将 C_{W+t}^{t} 看作一个数组，这显然是卷积形式，可用 NTT 求解。

以左边进入并从上方离开为例

若从左边第 i 行前往上方第 j 列，方案数是 $C_{j+(H-i)}^{j}$。

从上方第 j 列离开的方案总数为：

$$Up(j) = \sum_{i} Left(i) C_{j+(H-i)}^{j}$$

移项后有：

$$\frac{Up(j)}{j!} = \sum_{i} \frac{Left(i)}{(H-i)!} \frac{1}{(H+j-i)!}$$

这同样是一个卷积形式，可用 NTT 求解。

L - ICPC

复杂度

综上，总复杂度为 $O(n\log^2 n)$。

目录

D - 出奇制胜

题目描述

给定一个二分图博弈，先手可以启用/禁用图中的某些点。问最少操作几次能保证先手必胜?

D - 出奇制胜

结论 1

二分图博弈中，先手必胜当且仅当起点必然位于二分图的最大匹配上。

结论 2

先手必然不可能禁用 V 中的点，也不可能启用 U 中的点。

结论 3

在多数情况下，启用 V 中的点等价于禁用 U 中的点（除非启用的 V 中的点是用于与 u_1 匹配的）。

D - 出奇制胜

题解

枚举 v_x 作为最大匹配中与 u_1 配对的点。为了保证 u_1 一定在最大匹配上，需要保证找不到任何能将 u_1 置换出去的交替路径。

该问题结合本题的翻转操作可以被建模为一个最小割问题。但如果如此建模，就需要证明：无论初始匹配方案是什么，最小割的大小都不会改变。因此我们在此先不用这个模型解决本题，尽管这个结论可以被证明是正确的。

D - 出奇制胜

结论 4

将尽可能多的与 v_x 相连的 U 中的点通过交替路径调整为空闲状态后，与 v_x 相连的 U 中的空闲点数量即为需要禁用的点的数量的最小值。

证明 4（充分性）

将与 v_x 相连的 U 中的空闲点全部禁用后，必然找不到一条可以将 u_1 置换出最大匹配的交替路径。假设能找到一条这样的路径，则将 v_x 的匹配对象更改为 u_1 后，产生了一个新的与 v_x 相连的空闲点，这与题设矛盾。

证明 4（必要性）

假如不禁用所有与 v_x 相连的空闲点，则将与 v_x 匹配的点调整为其中一个空闲点，依然是最大匹配。此时 u_1 不在最大匹配上，先手必败。

D - 出奇制胜

题解

要将最多的与 v_x 相连的点调整为空闲状态，只需要将可以与 v_x 匹配的点的数量设为无穷大，而后在原始匹配的基础上继续尝试匹配即可。所有可能被设为空闲状态的 U 都会因此与 v_x 匹配。

最大匹配算法复杂度为 $O(E\sqrt{V}) = O(n^{2.5})$，总复杂度 $O(n^{3.5})$。

目录

J - 环形匹配

题目大意

给定两个字符串 s 和 t，字符串均由小写字母组成。

记 $s_{l,r}$ 表示 s 的第 l 个字符到第 r 个字符构成的子串，长度 $L = r - l + 1$ 。称 t 在 $s_{l,r}$ 的环上出现，当且仅当存在某个起点 p $(0 \le p < L)$，使得对所有 $0 \le k < |t|$ 都有 $s_{l,r}[(p+k) \bmod L] = t[k]$ 。若 $L < |t|$，则认为 t 没有在 $s_{l,r}$ 的环上出现。

请统计有多少对不同的 (l, r) ，使得 t 在 $s_{l,r}$ 的环上出现。

记号与问题拆分

设文本串 s，模式串 t，$|t| = m$。把答案拆成两部分：

$$总答案 = A + B,$$

其中 A 是模式线性出现的数量（可用一次 KMP 求出），B 是“环上跨边界出现”（被旋转分割到段两端）的数量——本题的难点在于统计 B。

J - 环形匹配

环上出现的等价描述

对区间 $[l, r]$（长度 $L \geq m$），t 在 $s_{l,r}$ 的环上出现，当且仅当存在 $1 \leq x \leq m-1$ 使得

$$s[r-x+1..r] = t[0..x-1] \quad \text{且} \quad s[l..l+(m-x)-1] = t[x..m-1].$$

换言之：右端对齐 t 的前缀、左端对齐互补的后缀，长度和为 m。

J - 环形匹配

同段上多个切分的周期结构

若某一 $[l, r]$ 上存在三次及以上可行切分 $X = \{x_1 < \cdots < x_k\}$（$k \geq 3$），则：

$$x_{i+1} - x_i = p \quad (\forall i),$$

并且右端最大可对齐长度 $A^\star$、左端最大可对齐长度 $B^\star$ 满足

$$A^\star \equiv x_1 \pmod p, \qquad B^\star \equiv m - x_1 \pmod p,$$

从而 $A^\star + B^\star \equiv m \pmod p$。

少量重复切分与 Fine–Wilf 的限制

任意两种切分的差必是 t 的一个周期；Fine–Wilf 引理推出：要么其它周期是 p 的倍数，要么它很长（$> m - p$）。因此“多重（≥ 3）切分”只能沿着模 p 的等差类产生；非模 p 的长周期最多产生成对（≤ 2）的重复。

J - 环形匹配

计数策略要点

- 先用 KMP 线性统计 A（完整落入某段的出现）。
- 对跨边界情况 B：
  - 按模 p 的余类把所有可行切分分组（多重切分只在同余类内成列出现）；
  - 用 KMP 前后缀信息预处理每个位置的最长可对齐长度；
  - 在每个余类上用树状数组等结构批量统计符合长度配对的区间数，注意用双指针排除已被 A 统计的区间。
  - 当余数之和不等于 m 时，可以证明其中一边必然是极长匹配串，可以扫描并在 border 链上跳 log 段等差数列以进行统计。
- 对于“成对重复”（来自非 p 倍数的长周期），可以证明其与 t 的每个 border 对应，我们通过跳 t 的 border 链减去重复计数。

J - 环形匹配

复杂度与结论

- KMP 预处理和线性扫描得到前后缀最长匹配：$O(n+m)$。
- 对每个模 p 余类的批量计数（树状数组 + 若干等差类分组）：总体 $O(n\log n)$ 。
- 对模 p 之和与 m 不同余的其他答案，通过树状数组和 border 链跳跃统计并去重：总体 $O(n\log^2 n)$。
- 最终答案为 $A+B+C$，其中 A 来自 KMP，B 来自模 p 余类的计数，C 来自非余类的计数并扣除重复。

核心思想：把“环上出现”化为“前后缀配对”，利用最小周期 p 将多重结构按模 p 分组批量处理，其余情况通过 border 链的性质处理并去重。