10. 最適レギュレータ

教科書 8.1

正定関数

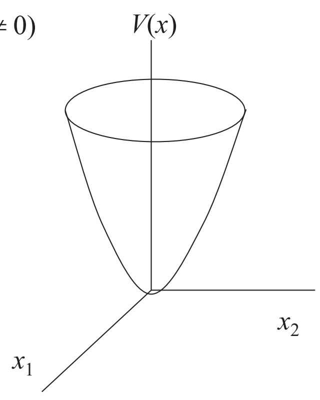
- 正定関数の定義

$$V(x) > 0 \quad (x \neq 0)$$
$$V(0) = 0$$

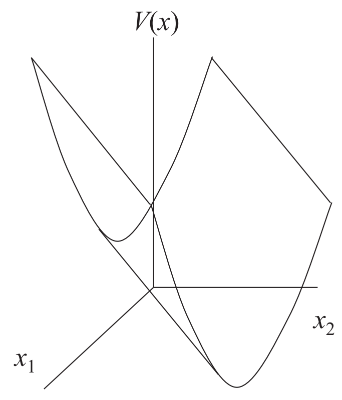
- 準正定関数の定義

$$V(x) \geq 0$$
$$V(0) = 0$$

- 負定関数・準負定関数も同様。



正定関数



準正定関数

正定行列

- 正定行列: $V(x) = x^T P x$ が正定関数になる対称行列P。$P > 0$ と書く。
- 準正定行列: $V(x) = x^T P x$ が準正定関数になる対称行列P。$P \geq 0$ と書く。
- 負定行列なども同様。

[正定行列の例]

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ は正定行列。

$$(x_1, x_2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 > 0 \quad (x \neq 0)$$

正定行列の必要十分条件:

全ての固有値が正である対称行列

最適制御

- 制御対象 (非線形系)

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad f(0) = 0$$

- 制御目的:

  評価関数を最小化する入力を求める。

- 評価関数 (Lagrange型):

$$J(x(0); u(\cdot)) = \int_0^T L(x,u)\,dt = \int_0^T q(x) + \frac{1}{2} u^T R u \; dt \to \min$$

- T は無限大とすることもある。その場合、最適な入力は状態フィードバックで書くことができる。
- R は正定行列、$q(x)$ は正定関数。
- $q(x)$の項を小さくする → できるだけ状態を原点近くに
- $u^T Ru/2$の項を小さくする → できるだけ小さな入力で制御したい
- J は初期値 $x(0)$ に関する関数で、入力 $u(\cdot)$ に関する汎関数。
- Lagrange型のほかに、Mayer型・Bolza型などの評価関数がある。

最適レギュレータ

$T=\infty$ のとき、さきほどの評価規範は、

$$J(x(0);u(\cdot)) = \int_0^{t_1} q(x(t)) + \frac{1}{2}u^T Ru\, dt + J(x(t_1);u(\cdot))$$

と書くことができる。つまり、$x(t_1)$が決まれば、t_1以降の最適なuが決まる。
さらにいえば、

$T=\infty$ のとき、最適な $u(t)$ は $x(t)$ の関数になる。
⇒ $u(t)$ は $x(t)$ のフィードバックで書ける。

⇩

最適レギュレータ

なぜ、「レギュレータ」(安定化器)といわれるのか、については後述。

値関数

以降、$T=\infty$ とする。

- 値関数の定義：

$$V(x(t)) = \inf_{u(\cdot)} \int_t^{\infty} L(x(\tau),u(\tau))d\tau$$

⇒時刻 t 以降に加算される最小のコストを現在のxで表現

- 微小な dt に対して、

$$V(x(t)) = \inf_{u(\cdot)} \left[V(x(t+dt)) + \int_t^{t+dt} L(x(\tau),u(\tau))d\tau \right]$$

Hamilton-Jacobi-Bellman方程式

- 値関数の微分可能性を仮定し、dt に関するテーラーの公式

$$V(x(t+dt)) = V(x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x}\{f(x(t)) + G(x(t))u(t)\}dt + O(dt^2)$$

Hamilton-Jacobi-Bellman方程式

$$\inf_{u(\cdot)} \left[L(x,u) + \frac{\partial V}{\partial x}\{f(x) + G(x)u\} \right] = 0$$

値関数の定義より、$V(x(t))$は正定。

平方完成

- HJB方程式の大かっこの中をuに関して平方完成

$$L(x,u) + \frac{\partial V}{\partial x}\{f(x)+G(x)u\}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + q(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} G(x)R^{-1}G(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T$$

$$+ \frac{1}{2}\left(u + R^{-1}G(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T\right)^T R \left(u + R^{-1}G(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T\right)$$

つまり、この式は

$$u = -R^{-1}G(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T$$

のとき、最小値を持ち、そのときの値は、

$$H(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + q(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} G(x)R^{-1}G(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T$$

Hamilton-Jacobi方程式

- よって、HJB方程式は、以下のHamilton-Jacobi偏微分方程式を導く

Hamilton-Jacobi偏微分方程式 (HJ方程式):

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + q(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} G(x) R^{-1} G(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T = 0,$$

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \, (x \neq 0)$$

安定性の検証

- 最適入力:

$$u^* = -R^{-1} G(x)^T \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^T \quad (V(x)\text{はHamilton}-\text{Jacobi方程式の正定解})$$

のもとでの安定性を検証しよう。

- $V(x)$ の時間微分:

$$\dot{V} = -q(x) - \frac{1}{2} u^*(x)^T R u^*(x) < 0 \quad (x \neq 0)$$

- $V(x)$ は正定関数なので、x は原点に漸近する。「レギュレータ」と言われる所以。
- Hamilton-Jacobi方程式解であっても、正定解以外のものを使うと、不安定になる。

線形系の場合(1)

- 線形系:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- 評価規範:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt$$

- このとき、Hamilton-Jacobi方程式の解は、二次形式

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x \quad (P > 0)$$

で書ける。(Hamilton-Jacobi方程式のTaylor級数展開からわかる)

- Hamilton-Jacobi方程式:

$$\frac{1}{2} x^T (PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q) x = 0$$

線形系の場合(2)

線形系の最適レギュレータは、

Riccati方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

の正定解 P (> 0) を用いて、

$$u = -R^{-1}B^T P\, x$$

と表される。

Hamiltonian System (1)

- Hamilton-Jacobi方程式

$$\frac{1}{2}x^T(PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0$$

のPxをpとおいて考えよう。すると、

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x^T, p^T \end{pmatrix}\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & -BR^{-1}B \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = 0, \quad p = Px$$

- ここで、Hamiltonian System

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial H}{\partial p}\right]^T = Ax - BR^{-1}B^T p$$

$$\dot{p} = -\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^T = -Qx - A^T p$$

を考える。

Hamiltonian System (2)

- Hamiltonian Systemの解に沿って、Hamiltonianは一定。

なぜならば、 $\dot{H} = \left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]\dot{x} + \left[\frac{\partial H}{\partial p}\right]\dot{p} = \left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial H}{\partial p}\right]^T - \left[\frac{\partial H}{\partial p}\right]\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^T = 0$

- したがって、原点を通るHamiltonian Systemの解からなる曲面があれば、その曲面上で$H(x,p) = 0$。(線形系のときは原点を通る平面)
- Hamiltonian Systemの行列表現

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = A_H \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

A_HをHamiltonian行列という。

Hamiltonian行列

- Hamiltonian行列の性質:

A_H が固有値λを持つならば、$-\lambda$ もA_H の固有値である。

- つまり、固有値は実軸対称かつ虚軸対称
- この問題の場合、「制御対象が可制御ならば、虚軸上に固有値はない」。つまり、n個の安定な固有値とn個の不安定な固有値がある。

Hamiltonian行列の固有ベクトル空間上で、Hamiltonianはゼロ。つまり、n次元の固有ベクトル空間はHamilton-Jacobi方程式 (Riccati方程式)の解。

- Hamiltonian Systemのxの挙動は、閉ループ系の挙動そのもの。つまり、

制御対象が可制御なとき、Hamiltonian行列の安定な固有値に対応する固有ベクトル空間は、Hamilton-Jacobi方程式 (Riccati方程式)の安定化解。(最適レギュレータ問題では、)安定化解は必ず正定解。逆に、(最適レギュレータ問題では、)正定解は安定化解。

有本=PotterのRiccati方程式の解法

- 以上のことをまとめると、Riccati方程式の正定解は以下のように求められる。

1. Hamiltonian行列を作り、n個の安定な固有値に対応する固有ベクトル空間を考える。Λ: n個の安定な固有値と同じ固有値を持つ行列

$$A_H \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}\Lambda$$

2. すると、その固有ベクトル空間上に$(x^T, p^T)^T$がある。

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \in \mathrm{span}\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ Px \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}k$$

3. $x = S_1 k$, $Px = S_2 k$から、係数kを消去すると、

$$Px = S_2 S_1^{-1} x \quad \Rightarrow \quad P = S_2 S_1^{-1}$$

Riccati方程式の導出

Hamiltonian行列からRiccati方程式を導出してみよう。

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_i \\ Pv_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} v_i \\ Pv_i \end{pmatrix}$$

より、

$$(\lambda_i I - A + BR^{-1}B^TP)v_i = 0$$

$$(\lambda_i P + Q + A^TP)v_i = 0$$

これより、λ_i を消去

$$[(\lambda_i P + Q + A^TP) - P(\lambda_i I - A + BR^{-1}B^TP)]v_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$[PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q\ ]\ [v_1,\ldots,v_n] = 0$$

一次独立なv_iがn本あるので、$[v_1,\ldots,v_n]$ は正則行列。よって、

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

したがって、有本=Potter法で求めた P はRiccati方程式を満たす。