

7.伝達関数

教科書 第6章, 9.1, 9.2

入力付きシステムとラプラス変換

- 微分方程式がラプラス変換で解けるのなら、
システム (状態変数表現):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{ただし、} x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{R}$$

の解もラプラス変換で求まるはず。

- 微分方程式の両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0)$$

ただし、 $X(s) = \mathcal{L}[x]$, $U(s) = \mathcal{L}[u]$, $Y(s) = \mathcal{L}[y]$ 。

- 初期値 $x(0)$ がゼロならば、

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

これをシステムの伝達関数という。(重要)
→「システムの伝達関数表現」

伝達関数表現

- 伝達関数表現は、初期状態が0のときの入出力のラプラス変換の比である。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- 時不変線形システムに対して定義される。
- (線形)システムが与えられれば、伝達関数も求まる。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- 1入力1出力有限次元時不変線形システムの伝達関数は有理式である。

$$G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

$N(s)$: 分子多項式, $D(s)$: 分母多項式 ($y = Cx + Du$ の D とは別物)

- 多入出力系の場合は伝達関数行列になり、同じく有理式からなる行列。

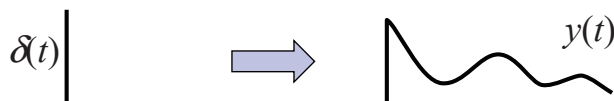
伝達関数はシステムの入出力関係の表現

- 伝達関数 $G(s)$ はシステムの1つのモデルで、入出力関係を表したものである。
- 入力 $u(t)$ より、初期状態がゼロのときの出力 $y(t)$ を得ることができる。

1. 入力をラプラス変換し、 $U(s)$ を得る。
2. 出力のラプラス変換 $Y(s) = G(s)U(s)$ を計算する。
3. 得られた $Y(s)$ を逆ラプラス変換し、出力 $y(t)$ を得る。

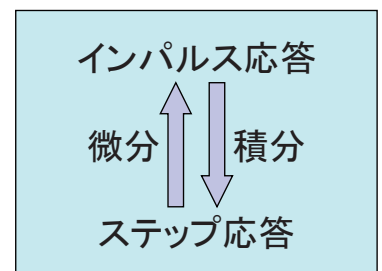
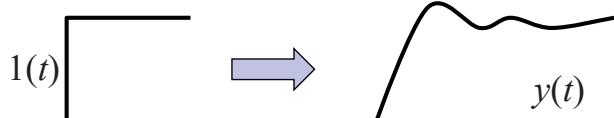
- 入力が単位インパルスの時の出力の応答 = インパルス応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot \mathcal{L}[\delta(t)]] = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot 1] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$



- 入力が単位ステップの時の出力の応答 = ステップ応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot \mathcal{L}[1]] = \mathcal{L}^{-1}[G(s) / s]$$



分子・分母の次数

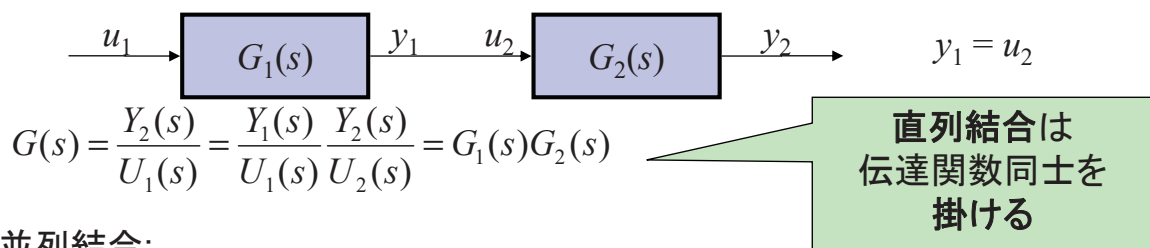
- 伝達関数の分母多項式と分子多項式の次数について考えよう。

$$G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

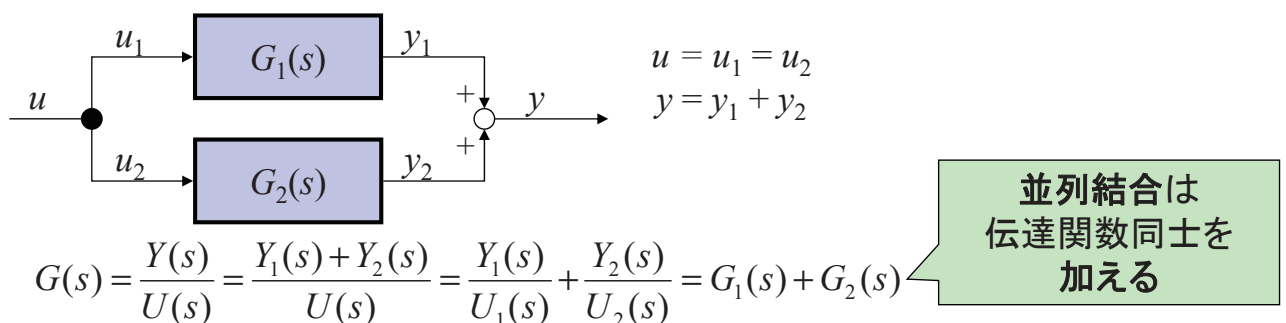
- システムの次元(A のサイズ)を n とすると、 A の特性多項式 $\det(sI - A)$ は s の n 次の多項式。また、余因子行列 $\text{adj}(sI - A)$ の各要素は s のたかだか $n - 1$ 次の多項式。つまり、....
- もし、 $D = 0$ なら、
(分子の次数) < (分母の次数) ...「厳密にプロパーな伝達関数」という
- もし、 $D \neq 0$ なら、
(分子の次数) = (分母の次数)
- 結局、
(分子の次数) \leq (分母の次数) ...「プロパーな伝達関数」という。
proper = 適切な, 正しい, ちゃんとした, 固有の, 正確な
- (分母の次数) - (分子の次数) を相対次数という。

直列結合・並列結合と伝達関数

- 直列結合:

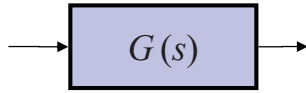


- 並列結合:

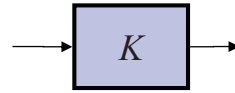


ブロック線図について

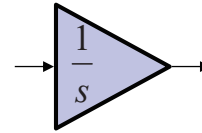
- 伝達関数ブロック



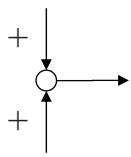
- 定数倍ブロック



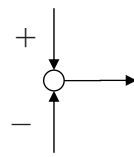
- 積分器



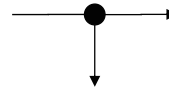
- 合流(その1)



- 合流(その2)



- 分岐



極とゼロ点

- 伝達関数を s の複素関数と考えると、極とゼロ点が定義できる。
- 伝達関数が有理式

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad N(s) \dots \text{分子多項式}, \quad D(s) \dots \text{分母多項式}$$

のとき、

極: $D(s) = 0$ の解

ゼロ点: $N(s) = 0$ の解

- 極を p_1, \dots, p_n 、ゼロ点を z_1, \dots, z_m (それぞれ重複を許す) としたとき、伝達関数は

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

と書ける。

伝達関数表現されたシステムの次数

- 既約な伝達関数の分母多項式の次数を、伝達関数表現のシステムの次数という。
- 状態変数表現されたシステムからの変換式

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

より、それぞれの表現におけるシステムの次数は等しいように一見思える。
ほとんどの場合は2つの次数は一致するが、そうでない場合がある。

- 上の変換式において、分子と分母の共通因子が約分されることがあり、その場合、伝達関数表現されたシステムの次数が小さくなる。
- どのような場合に共通因子の約分(=極ゼロ相殺)が起きるのだろうか? 実は...

状態変数表現において可制御かつ可観測であれば、極ゼロ相殺は起きない。
状態変数表現において不可制御あるいは不可観測であれば極ゼロ相殺する。

伝達関数表現は、状態変数表現のうち可制御・可観測な部分を表したものである。
→可制御・可観測な部分システムの次数が伝達関数表現のシステムの次数

不可制御な場合の伝達関数

- 不可制御なシステムの伝達関数表現において、実際に極ゼロ相殺がおきることを確かめよう。(不可観測な場合も下と同様)
- 可制御正準分解:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad A_1 \dots \text{可制御な部分に相当する } (n_1 \times n_1 \text{ 行列})$$

$$y = [C_1 \quad C_2] x + Du$$

- 伝達関数表現:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} sI - A_1 & -A_2 \\ 0 & sI - A_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + D$$

$$= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} (sI - A_1)^{-1} & (sI - A_1)^{-1} A_2 (sI - A_3)^{-1} \\ 0 & (sI - A_3)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + D$$

$$= C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D$$

次数が $n_1 \rightarrow$ 状態変数表現の次数 n より減っている。
つまり、極ゼロ相殺が起きている。

不可観測な場合の伝達関数

- 同様に、不可観測な場合に極ゼロ相殺が起きることを確かめよう。
- 可観測正準分解:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad y = [C_1 \quad 0]z$$

- 伝達関数表現:

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = [C_1 \quad 0] \begin{bmatrix} sI - A_1 & 0 \\ -A_2 & sI - A_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D \\ &= [C_1 \quad 0] \begin{bmatrix} (sI - A_1)^{-1} & 0 \\ (sI - A_3)^{-1} A_2 (sI - A_1)^{-1} & (sI - A_3)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D \\ &= C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D \end{aligned}$$

可観測な部分システムのみ次数になっている。
→ 極ゼロ相殺

分母多項式と A 行列の特性多項式

- 以上の結果と、

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

の関係式より、以下が成り立つ。

可制御・可観測であれば、伝達関数の分母多項式と状態変数表現の A 行列の特性多項式は一致する。(重要)

不可制御あるいは不可観測な場合であっても、伝達関数の分母多項式は、状態変数表現において可制御・可観測な部分システムの A 行列の特性多項式と一致する。

可制御正準形と伝達関数 (重要)

- 可制御正準形(ただし、 $D = 0$)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (\beta_0 \ \cdots \ \beta_{n-1}) x$$

- 伝達関数:

$$G(s) = \frac{(\beta_0 \ \cdots \ \beta_{n-1}) \begin{bmatrix} * & \cdots & * & 1 \\ \vdots & & \vdots & s \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & s^{n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

$$= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

可観測正準形と伝達関数

- 可観測正準形(ただし、 $D = 0$)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \ \cdots \ 0 \ 1)x$$

- 伝達関数:

$$G(s) = \frac{(0 \ \cdots \ 0 \ 1) \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & s & \cdots & s^{n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

$$= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

状態変数表現との変換

- 状態変数表現 → 伝達関数表現: (不可制御/不可観測な部分は変換されない)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- 伝達関数表現 → 状態変数表現:

相対次数がゼロならば、分子を分母で割った商とあまりを使って、変形する。

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} + D$$

可制御正準形

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (\beta_0 \quad \dots \quad \beta_{n-1})x + Du$$

or

可観測正準形

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)x + Du$$

インパルス応答と畳み込み積分

- $Y(s) = G(s)U(s)$ のように $Y(s)$ は $G(s)$ と $U(s)$ の積になっている。

- 「ラプラス変換の積」= 「畳み込み積分のラプラス変換」

であるから、

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- ここで、 $g(t)$ は伝達関数のラプラス変換であるが、これはシステムのインパルス応答である。

- 状態変数表現の解の公式:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C \left\{ e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau \right\} + Du(t)$$

において初期値 $x(0)$ を 0 とした場合と比較すると、 $g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ 。

- 実は、 $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$ である。

伝達関数表現における安定性

- 伝達関数 $G(s)$ で表されたシステムが安定であるとは、有界な入力 $u(t)$ に対して、その出力 $y(t)$ も有界となることである。

→ Bounded Input-Bounded Output Stability (BIBO安定性)

- 入力が有界: $|u(t)| \leq M$

$$|y(t)| = \left| \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau \right| \leq M \int_0^t |g(\tau)| d\tau$$

等号は、 $u(t-\tau) = M \text{sign}(g(\tau))$ のとき成立。よって、安定性の必要十分条件は、

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau < +\infty$$

つまり、インパルス応答が絶対可積分となることである。

安定性の条件

- インパルス応答の絶対可積分性の条件を考えて見よう。伝達関数の相異なる極を s_1, \dots, s_p とすると、

$$|g(t)| = \left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} c_{i,j} t^{j-1} e^{s_i t} \right| \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} |c_{i,j}| \cdot t^{j-1} \cdot |e^{s_i t}|$$

となる。ただし、 $q_i(t)$ は s_i の多重度で、 $k_{i,j}$ は複素数の定数。よって、 $\text{Re}[s_i] < 0$ ならば、 $g(t)$ は絶対可積分。逆に、実数部の一番大きな極が s_k でありその実部が正ならば、 $t^{q_k-1} e^{s_k t}$ の項が支配的となり、絶対可積分性は成り立たない。

- 伝達関数表現されたシステムの安定性の必要十分条件は、伝達関数の極の実部が全て負となることである。

- 伝達関数の安定性は、状態変数表現において可制御・可観測な部分システムの安定性と一致する。状態変数表現が可制御・可観測ならば、伝達関数の安定性と状態変数表現の(入力付システムの意味での)安定性は一致する。
- 伝達関数の分母多項式の最高次の係数が正になるようにすれば、ラウス法やフルビッツ法で安定判別できる。(実は、最高次の係数が1でなくても使える。)

正弦波入力に対する応答(1)

- 伝達関数を使う一番の利点は周波数応答が簡単にわかることである。以下では、そのことを明らかにする。
- 安定なシステムに正弦波 $\cos \omega t$ を入れたときの応答を考えよう。

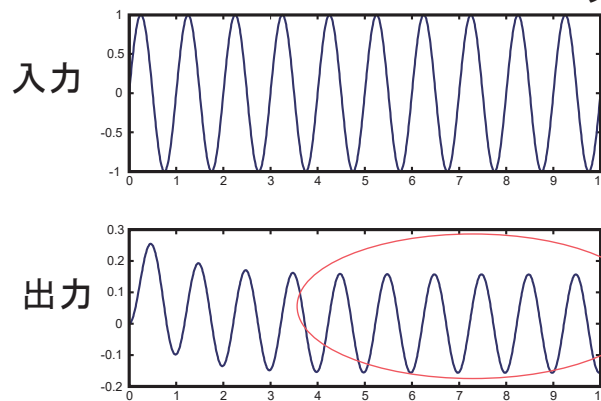
$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{p(s)}{D(s)} + \frac{q(s)}{s^2 + \omega^2}$$

定常的に振動する項

部分分数展開 \curvearrowright $D(s)$ はフルビッツ多項式なので
次第に減衰する項

- [例]

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$



入力と同じ角周波数の
正弦波のみが残る

正弦波入力に対する応答(2)

- 定常的に振動する項に着目する。分子の $q(s) = k_1 s + k_0$ を求めたい。

$$q(s) = k_1 s + k_0 = sG(s) - \frac{(s^2 + \omega^2)p(s)}{D(s)}$$

ここで、 $s = j\omega$ を代入し、実部と虚部を取り出すと、

$$q(j\omega) = jk_1\omega + k_0 = -\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)] + \omega \operatorname{Re}[G(j\omega)]j \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = \operatorname{Re}[G(j\omega)] \\ k_0 = -\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)] \end{cases}$$

よって定常的に残る振動項は、

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{q(s)}{s^2 + \omega^2} \right] = \operatorname{Re}[G(j\omega)] \cos \omega t - \operatorname{Im}[G(j\omega)] \sin \omega t$$

$$= |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{ただし、} \varphi = \arg[G(j\omega)]$$

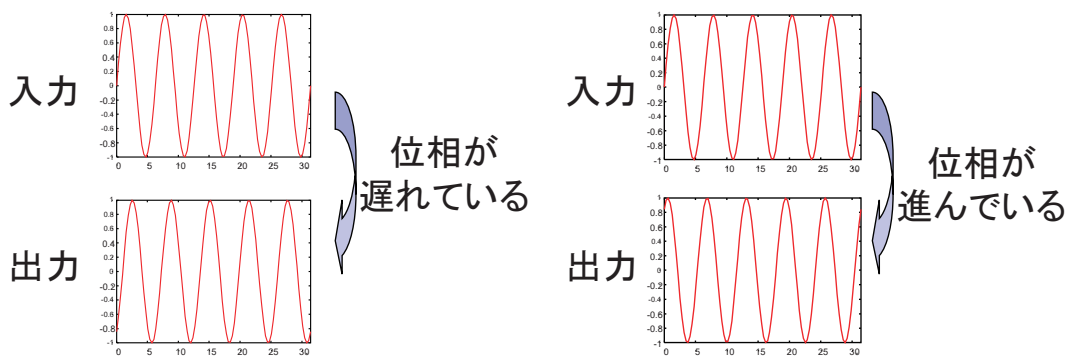
振幅

位相

[重要] 角周波数 ω の正弦波を安定な線形システムに入力すると、出力には同じ角周波数の正弦波が定常的に残る。その振幅は入力の $|G(j\omega)|$ 倍で、位相が入力より $\arg[G(j\omega)]$ だけずれる。

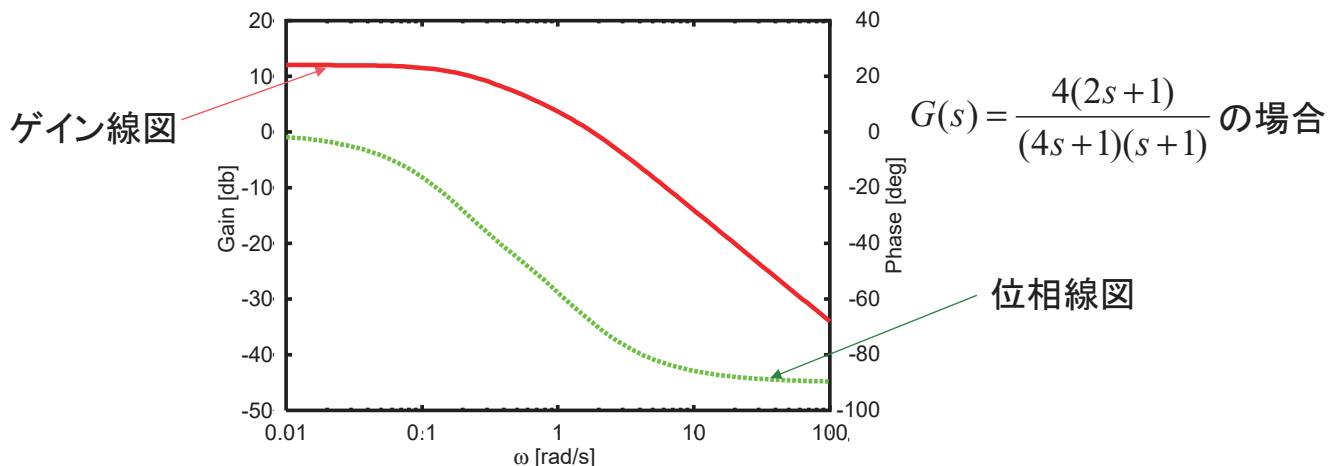
周波数応答

- 伝達関数に $s = j\omega$ ($-\infty \leq \omega \leq \infty$) を代入したものを周波数応答という。
- それに対して、 $y(t)$ ($0 \leq t$) を時間応答という。(入力は正弦波に限らない。) 特に、定常状態に落ち着くまでの応答を過渡応答という。
- 周波数応答 $G(j\omega)$ の絶対値 $|G(j\omega)|$ が、角周波数 ω における伝達関数のゲインを表し、 $G(j\omega)$ の位相角 $\arg[G(j\omega)]$ が位相のずれを表す。
- $-\pi < \arg[G(j\omega)] < 0$ の場合、「(出力が入力に比べて)位相が遅れている」といい、 $-\arg[G(j\omega)]$ を位相遅れという。また、 $0 < \arg[G(j\omega)] < \pi$ の場合、「位相が進んでいる」といい、 $\arg[G(j\omega)]$ を位相進みという。



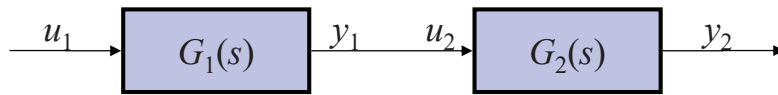
Bode線図

- Bode線図 横軸を角周波数 ω (片対数グラフ) とし、ゲイン線図と位相線図を組み合わせたもの。
- ゲイン線図... $|G(j\omega)|$ をデシベル(dB) 表記したもの。
(dB表記) = $20 \log_{10} |G(j\omega)|$
- 位相線図... 位相遅れ(進み) $\arg[G(j\omega)]$ をグラフにしたもの。



直列接続とBode線図

- 直列接続:



$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

- ゲイン線図上では...

$$20\log_{10}|G(s)| = 20\log_{10}|G_1(s)| + 20\log_{10}|G_2(s)|$$

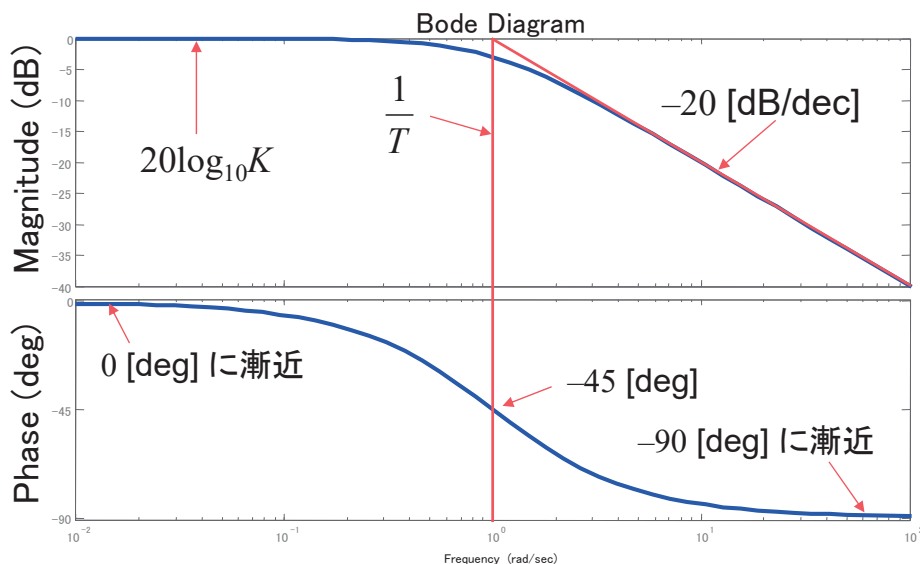
- 位相線図上では...

$$\arg[G(s)] = \arg[G_1(s)] + \arg[G_2(s)]$$

Bode線図上で足し算することで、直列結合した系の周波数応答が得られる。

一次遅れ系のBode線図

- [例] $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$, $K=1, T=1$



一次遅れ系の時間応答

- 一次遅れ系

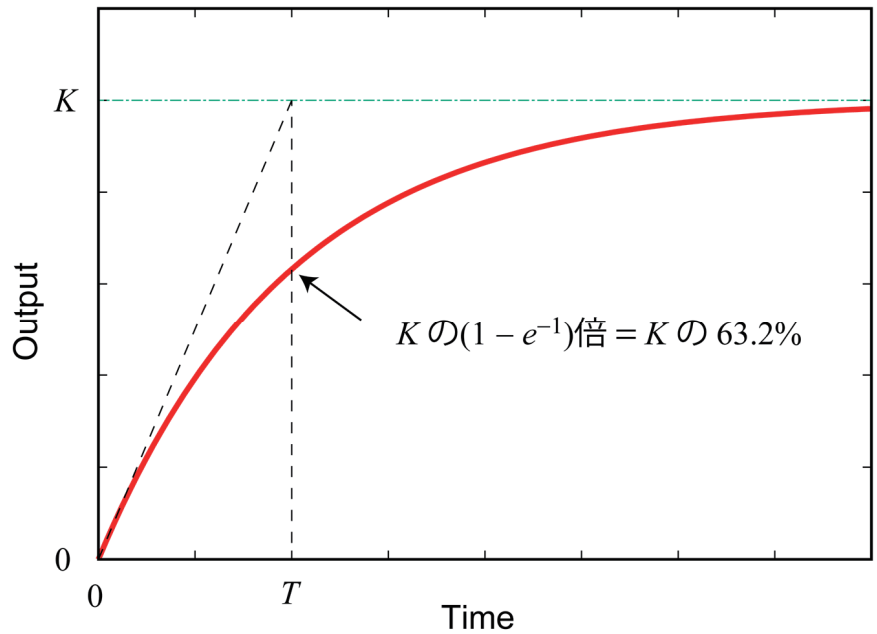
$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad T: \text{時定数}$$

- インパルス応答

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$

- ステップ応答 (右図)

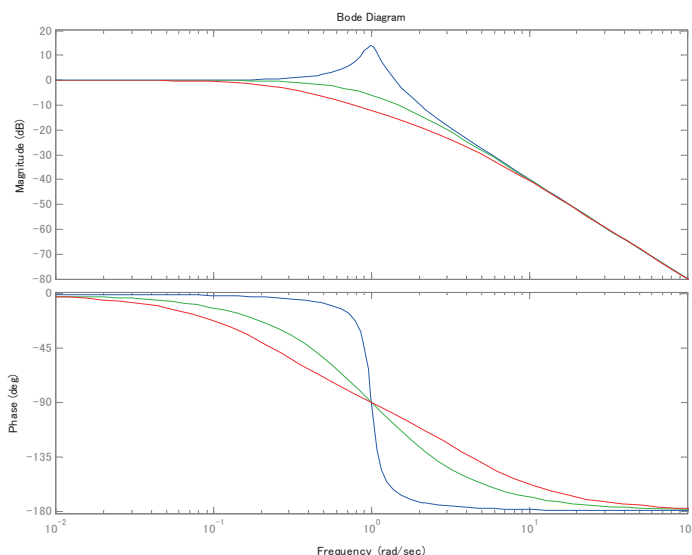
$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$



二次遅れ系のBode線図

- [例]

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n = 1, \quad \zeta = 0.1, 1, 2$$



$\zeta \leq 1/\sqrt{2}$ でゲイン線図にピーク
 $\zeta < 1$ で虚数極

全域通過関数

- 次の形をした伝達関数を**全域通過関数**(インナー関数)という。

$$G(s) = \frac{(s+s_1)\cdots(s+s_p)}{(s-s_1)\cdots(s-s_p)}$$

→ ゼロ点は全て右半平面
→ 極は全て左半平面

極とゼロ点が虚軸に関して対称

ただし、 $\text{Re}[s_i] < 0$ で、虚数根は共役複素数とペアで存在しているものとする。

- 全域通過関数は、その名のとおり、ゲインが一定で 0 dB である。

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)| &= \frac{|j\omega + \bar{s}_1| \cdots |j\omega + \bar{s}_p|}{|j\omega - s_1| \cdots |j\omega - s_p|} \\
 &= \frac{\sqrt{(\omega - \text{Im}[s_i])^2 + \text{Re}[s_i]^2} \cdots \sqrt{(\omega - \text{Im}[s_p])^2 + \text{Re}[s_p]^2}}{\sqrt{(\omega - \text{Im}[s_i])^2 + \text{Re}[s_i]^2} \cdots \sqrt{(\omega - \text{Im}[s_p])^2 + \text{Re}[s_p]^2}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

最小位相関数

- 伝達関数 $G(s)$ と $G(s)G_I(s)$ ($G_I(s)$ は全域通過関数) は同じゲインを持つ。つまり、同じゲイン特性を持つ伝達関数は無数にある。
- しかし、その中でも一番位相の遅れが小さい伝達関数が唯一存在する。それを**最小位相関数** (アウター関数) という。
- 最小位相関数 = 全ての極および全てのゼロ点が左半平面に存在。
- 任意の安定な伝達関数は、最小位相関数と全域通過関数の積で表現できる。

→ インナー・アウター分解

$$G(s) = G_I(s)G_O(s), \quad G_I(s) \cdots \text{全域通過関数}, G_O(s) \cdots \text{最小位相関数}$$

[例]

$$\frac{(s-2)(s^2-2s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+6)} = \frac{(s-2)(s^2-2s+2)}{(s+2)(s^2+2s+2)} \cdot \frac{(s+2)(s^2+2s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+6)}$$

全域通過関数

最小位相関数

Bodeの定理

- Bodeの定理: $G(s)$ を最小位相関数とする。そのとき、 $\ln |G(j\omega)|$ と $\arg[G(j\omega)]$ は、互いにヒルベルト変換、

$$\arg[G(j\omega)] = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|G(j\sigma)|}{\sigma^2 - \omega^2} d\sigma$$

$$\ln|G(j\omega)| = \ln|G(0)| - \frac{\omega^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arg[G(j\sigma)]}{(\omega^2 - \sigma^2)\sigma} d\sigma$$

で結ばれている。

- つまり、最小位相関数ならば、ゲイン線図のみから位相線図を導き出したり、あるいは、その逆ができる。