線形システム論

情報エレクトロニクス系
2年後期

I. 概論

教科書 1章+2.1

講義内容の予定

- システムの表現(状態空間表現)
- 微分方程式の復習(初期値問題の解・安定性)
- 座標変換, 可制御・可観測性, 安定性
- 可制御標準形・可観測標準形
- 極配置, オブザーバ
- Laplace変換の復習
- もうひとつのシステム表現(伝達関数表現)および状態空間表現との関連
- ブロック線図, 伝達関数の合成, フィードバック結合
- 伝達関数の安定性
- 周波数応答, Bode線図
- Nyquistの安定判別法
- 定常偏差, PID制御

教科書・講義資料

- 教科書は

  荒木光彦・細江繁幸 著　「フィードバック制御」

  計測・制御テクノロジーシリーズ 7

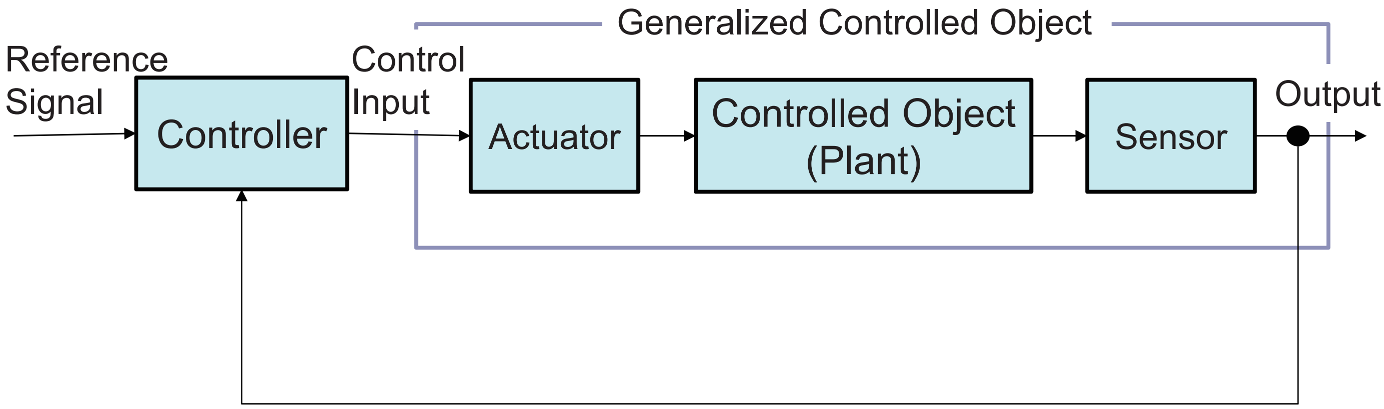
  コロナ社 (2012)

  2,800円 + 消費税
- 教科書がないとわからなくなるタイプの授業です
- 講義資料は、

http://stlab.ssi.ist.hokudai.ac.jp/yuhyama
/lecture/linearsys/

制御系の概略

- 一般的な制御系の「ブロック線図」



一般に、参照信号(reference signal)が
- 一定値の場合 = レギュレータ系
- 変化する場合 = サーボ系

信号が前に戻る
＝フィードバック

システムの表現

- 制御で扱うシステムは「動的システム」

  例:
  - 常微分方程式で表される系
  - 差分方程式で表される系
  - 偏微分方程式で表される系, など…

「系」…「システム」に対する
日本語

常微分方程式で表されるシステム:

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x,u)$$

系の状態: x,　系への入力: u,　系からの出力: y　(これらは通常はベクトル)

- 「系の状態」というものがあるのが「動的システム」(dynamical system)
- 動的システムでは、現在の系の出力は現在の入力だけで一意に決まるものではない。過去のシステムの動きの蓄積によって、未来の動きが変わる。

メカニカルシステムの例

連立2階常微分方程式で表されたメカニカルシステム

$$M(q)\ddot{q}+c(q,\dot{q})+g(q)=u$$

q: 一般化位置ベクトル, u: 制御入力 (外部からのトルク・力)
$M(q)$: 慣性行列, $c(\ )$: 遠心力・コリオリカ・摩擦力の項, $g(\ )$: 重力項

⇩

連立1階常微分方程式系: (まとめてベクトルで表す)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1}\{-c(q,\dot{q})-g(q)+u\} \end{pmatrix}$$

状態を定義:

$$x=\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

状態方程式:

$$\dot{x}=f(x,u)$$

$\dot{x}=\cdots$ で始まる式
→ 状態方程式

線形状態方程式の導出(1)…偏差系

- ある入力 $u=u_0$ のとき、$x=x_0$に静止
  「静止している」ということより、微分は0

$$\dot{x}=f(x,u) \quad \Rightarrow \quad 0=f(x_0,u_0)$$

- 偏差を定義: $z=x-x_0$
  $v=u-u_0$

<u>偏差系</u>:

$$\dot{z}=F(z,v)=f(x_0+z,u_0+v)$$

明らかに、
$F(0,0)=f(x_0,u_0)=0$

状態の目標値 x_0 と、それを維持するための入力 u_0 を考え、それからの偏差を用いて偏差系を考える。

$v=0$ のとき、$z=0$ は「平衡点」

線形状態方程式の導出(2) …線形近似

- 線形近似…テーラー級数展開を一次までで打ち切り

線形近似:

$$\dot{z} = \left[\frac{\partial F}{\partial z}(0,0)\right] z + \left[\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)\right] v + O((z,v)^2)$$
$$\cong Az + Bv$$

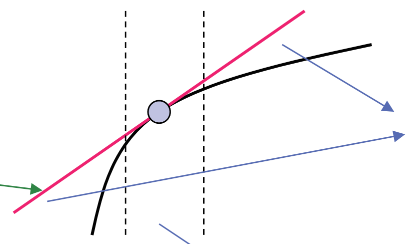
$F(0,0) = 0$ なので0次項は無い

2次以上の項→無視

線形近似系:

$$\dot{z} = Az + Bv$$

線形系のほとんどは線形 “近似系”
z と v が小さい時だけ近似が有効



離れると
誤差が大きくなる

線形近似
= 接線

0 の近傍では誤差が小さい

2. 微分方程式の解

教科書 2章

ただし、Laplace変換は後回し

1階線形微分方程式の解

- 1階同次線形微分方程式

$$\dot{x} = ax$$

初期値問題の解:

$$x(t) = x(0)e^{at}$$

- 1階線形微分方程式

$$\dot{x} = ax + b(t)$$

初期値問題の解:

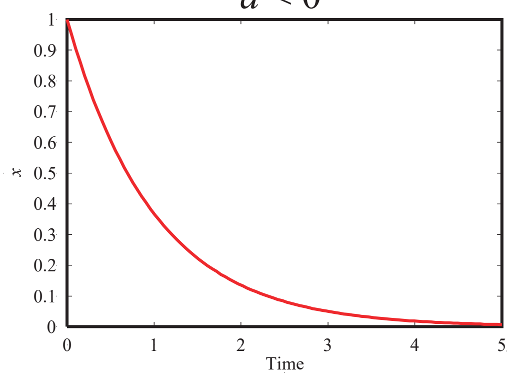
$$x(t) = x(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b(\tau) d\tau$$

  - 代入して確認すること。
  - 初期状態を満たすこと、つまり $t=0$ のときに式がなりたつことを確認すること。

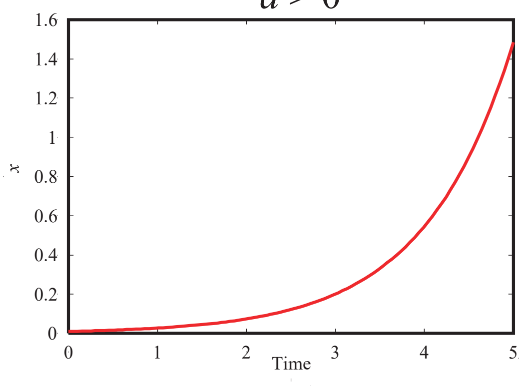
1階同次線形微分方程式の安定性

- 解: $x(t) = x(0)e^{at}$

$a < 0$



$a > 0$

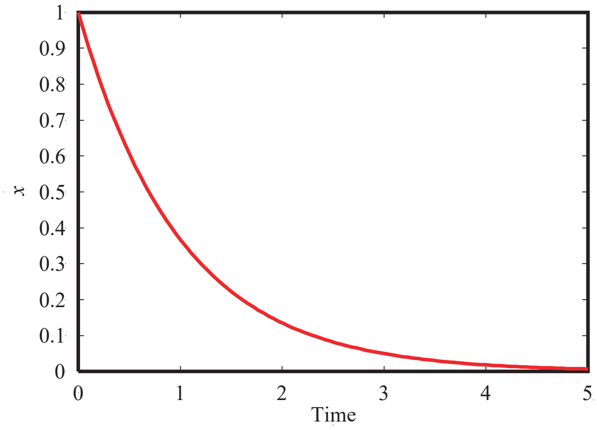


- a が負 … 0に収束 (漸近安定)
- a が正 … 発散 (不安定)
- a が 0 … 一定値を取り続ける (安定限界)

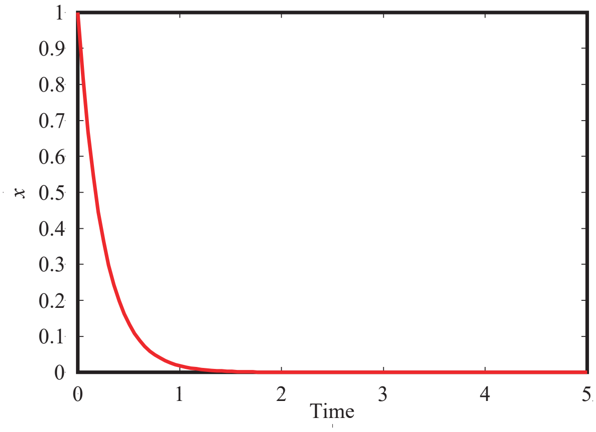
収束の速さ

- $\dot{x} = ax$ の解: $x(t) = x(0)e^{at}$ の収束の速さと、a との関係

$a = -1$



$a = -4$



- a が小さいほうが(負で絶対値が大きいほうが) 収束が速い。

2階線形微分方程式

- 2 階同次線形微分方程式:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

- 特性方程式:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

- 一般解:
  - 特性方程式が2つの実解 λ_1, λ_2 を持つ場合

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

  - 特性方程式が重根 λ_1 を持つ場合

$$x(t) = C_1 t e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_1 t}$$

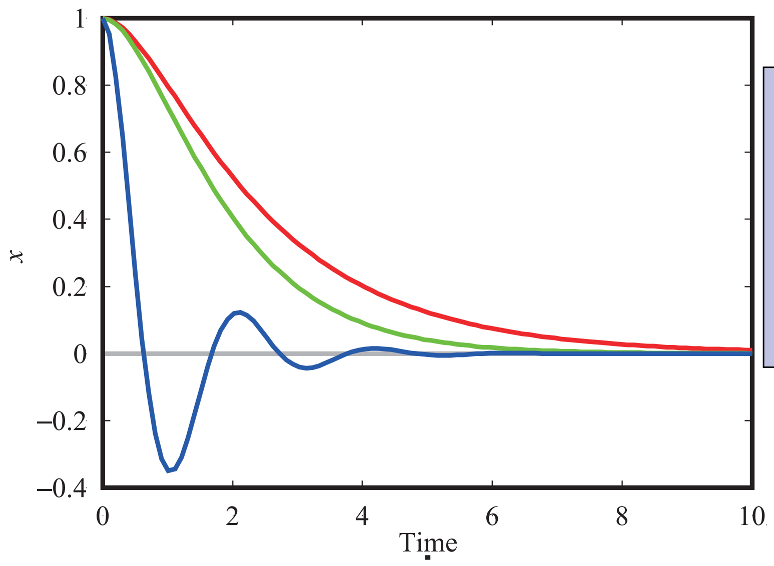
  - 特性方程式が虚数解 $p \pm qj$ を持つ場合 (j は虚数単位)

$$x(t) = C_1 e^{pt}\cos(qt) + C_2 e^{pt}\sin(qt)$$

- C_1, C_2 は定数。x と $\dot{x}$ の初期値を、一般解および一般解の両辺を微分した式に代入して、C_1, C_2 を決定する。

2階線形微分方程式の解の挙動

- 微分方程式: $\ddot{x}+2\dot{x}+kx=0$
- 赤: $k=0.75$ (異なる実根), 緑: $k=1$ (重根), 青: $k=3.1622\ldots$ (虚数解)
- $x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0$



- 全ての特性方程式の解の実部が負であることが、0に収束するための必要十分条件。
- 特性方程式が虚数解を持てば、挙動は振動的になる。その虚数部は振動の角周波数となる。

行列指数関数

- 通常の指数関数

$$e^{at}=1+at+\frac{a^2}{2!}t^2+\frac{a^3}{3!}t^3+\cdots$$

重要!

行列指数関数:

$$e^{tA}=I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\frac{t^3}{3!}A^3+\cdots$$

Aが$n\times n$の行列ならば、e^{tA} も$n\times n$の行列。

- 行列指数関数の微分

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=A+tA^2+\frac{t^2}{2!}A^3+\cdots=Ae^{tA}$$

- 行列指数関数の積分 (Aが正則のとき)

$$\int e^{tA}dt=A^{-1}e^{tA}+C, \qquad \int_0^t e^{\tau A}d\tau=A^{-1}(e^{tA}-I)$$

連立1階線形方程式の解

- 連立1階同次線形方程式:

$$\dot{x} = Ax$$

その初期値問題の解:

$$x(t) = e^{tA}x(0)$$

- 連立1階線形方程式:

$$\dot{x} = Ax + b(t)$$

その初期値問題の解:

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}b(\tau)d\tau$$

代入することで、これは確かめられる。

行列指数関数の計算

- 逆ラプラス変換($\mathcal{L}^{-1}\{\ \ \}$)を用いる方法:

$$e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}\right)$$

- 対角化・ジョルダン標準形を用いる方法:

たとえば、行列 A が対角化可能なとき、正則行列 T が存在して、

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ は} A \text{ の固有値})$$

とできる。よって、

$$e^{tA} = T^{-1}e^{tTAT^{-1}}T = T^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T$$

座標変換 $z = Tx$ を
用いているのと同じ

遷移行列

- 定義:

$$\dot{\Phi} = A\Phi$$
$$\Phi(0) = I$$

なる$n \times n$行列$\Phi(t)$を$\dot{x} = Ax$の遷移行列という

- 実は、これは行列指数関数に一致。(Aが定数行列の場合)
- 性質:

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$$
$$\Phi(-t) = \{\Phi(t)\}^{-1}$$

- 遷移行列のi列目は、$x(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ (i番目の要素が1)を初期値とした$\dot{x} = Ax$の解。

線形システムと解の公式

- 線形システム:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

x…状態(n次元ベクトル), u…入力(m次元ベクトル), y…出力(l次元ベクトル)

- 解の公式: 重要!!

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = Ce^{tA}x(0) + C\int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

座標変換と線形微分方程式

- 行列 A は対角化可能で、m 個の実数固有値 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ と2ℓ 個の虚数の固有値 $c_1 \pm \omega_1 j,\ldots, c_\ell \pm \omega_\ell j$ を持つとする。
- 対角化を用いて行列指数関数を求める場合、虚数の扱いが面倒。
  しかし、虚数の固有値は必ず共役複素数として現れるので、
  少し工夫すれば、実数だけで扱える。
  すなわち、正則行列 T が存在して、以下のようになる。(実対角化)

$$
TAT^{-1} = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & & & & & & & & 0 \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & \lambda_m & & & & & & \\
& & & c_1 & \omega_1 & & & & \\
& & & -\omega_1 & c_1 & & & & \\
& & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & c_\ell & \omega_\ell \\
0 & & & & & & & -\omega_\ell & c_\ell
\end{bmatrix}
$$

よって、

$$
e^{At} = T^{-1} e^{TAT^{-1}t} T =
$$

$$
T^{-1} \begin{bmatrix}
e^{\lambda_1 t} & & & & & & & & 0 \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & e^{\lambda_m t} & & & & & & \\
& & & e^{c_1 t}\cos\omega_1 t & e^{c_1 t}\sin\omega_1 t & & & & \\
& & & -e^{c_1 t}\sin\omega_1 t & e^{c_1 t}\cos\omega_1 t & & & & \\
& & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & e^{c_\ell t}\cos\omega_\ell t & e^{c_\ell t}\sin\omega_\ell t \\
0 & & & & & & & -e^{c_\ell t}\sin\omega_\ell t & e^{c_\ell t}\cos\omega_\ell t
\end{bmatrix} T
$$

- 2×2ブロックの1列目に対応するT^{-1}の列は$c_k + \omega_k j$に対応する固有ベクトルの実部。2列目はその固有ベクトルの虚部.

- 座標変換: $z = Tx$ を用いると、

座標変換後のシステム:

$$\dot{z} = T\dot{x} = TAx = TAT^{-1}z$$

- 座標変換後の解:

$$z(t) = Tx(t) = Te^{tA}x(0) = Te^{tA}T^{-1}z(0) = e^{tTAT^{-1}}z(0)$$

$$z_k(t) = e^{\lambda_k t}z_k(0), \quad k = 1, \dots, m$$

$$\begin{cases} z_{m+2k-1}(t) = e^{c_k t}\{z_{m+2k-1}(0)\cos\omega_k t + z_{m+2k}(0)\sin\omega_k t\} \\ z_{m+2k}(t) = e^{c_k t}\{z_{m+2k}(0)\cos\omega_k t - z_{m+2k-1}(0)\sin\omega_k t\} \end{cases}, \quad k = 1, \dots, \ell$$

- 1階常微分方程式と2階常微分方程式の解の組み合わせ
- 虚数の固有値に対しては、振動的になり、その虚数部は振動の角周波数をあらわす。固有値の実部と虚部の比が、「見た目 = 振動的かどうか」を決める。
- **固有値の実部が全て負であることが、0 に収束するための必要十分条件。**
- 固有値の実部が収束の速さを表している。

2つの特性方程式

- 行列 A の特性方程式:

$$\det(sI - A) = 0$$

- 微分方程式 $\dfrac{d^n z}{dt^n} + \alpha_{n-1}\dfrac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_1\dot{z} + \alpha_0 z = 0$ の特性方程式:

$$s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

- この2つの特性方程式は実質的に同じもの。

微分方程式 $\dfrac{d^n z}{dt^n} + \alpha_{n-1}\dfrac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_1\dot{z} + \alpha_0 z = 0$ を連立1階方程式に変換

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x = Ax$$

この行列 A の特性方程式は、

$$s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

元の微分方程式の特性方程式と同じ

3. システムの座標変換

教科書3章

状態の座標変換 (重要)

- 状態の定義を変えることによって、入出力の関係を変えずに、別な形のシステムに変換することができる。
- 元のシステム

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- 座標変換 $z = Tx, \quad x = T^{-1}z$ (教科書では T^{-1} を T と書いてあるので注意)
  (T は変換行列で正則でなくてはならない)
- 新しいシステム

$$\dot{z} = T\dot{x} = TAx + TBu = TAT^{-1}z + TBu$$
$$y = Cx + Du = CT^{-1}z + Du$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u$$
$$y = \bar{C}z + \bar{D}u$$
$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

座標変換後も、さまざまな性質が保存される。

ジョルダン標準形

- 対角化できなくてもジョルダン標準形に相似変換できる
- ジョルダン標準形 (相似変換でこの形に変形)

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_p \end{bmatrix}$$

ただし、J_iはジョルダンブロック(ジョルダンセル)と言われ、

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

- 対角成分は固有値 (上三角行列なので明らか)
- 実対角化と同様に実ジョルダン標準形というのもあるが、ここでは割愛

重複度

- 幾何学的重複度
  - 同じ固有値を持つジョルダンセルの数
- 代数的重複度
  - 同じ固有値を持つ全てのジョルダンセルの大きさの和
- 全ての固有値に対して、「幾何学的重複度 =代数的重複度」ならば、対角化されている。
- 特性多項式

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{N_1} \cdots \left(\lambda - \lambda_q\right)^{N_q} \quad (N_i\text{は代数的重複度})$$

- ケーリー・ハミルトンの定理: $\varphi(A) = 0$
- 最小多項式: $\varphi_M(A) = 0$となる最小次数の多項式 (最高次の係数=1)

$$\varphi_M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{K_1} \cdots \left(\lambda - \lambda_q\right)^{K_q} \quad (K_i\text{は最大のジョルダンセルの大きさ})$$

- 全ての固有値に対して$N_j = K_j$ならば、つまり、幾何学的重複度が1ならば、Aは巡回的であるという。

一般化固有ベクトル

- ある固有値$\lambda = \lambda_i$に対応する固有ベクトル

$$(\lambda_i I - A)x = 0$$

幾何学的重複度M_i個の一次独立な固有ベクトルが存在。(一般にはそれらの張る空間内のベクトルは全て固有ベクトル)

- ある固有値$\lambda = \lambda_i$に対応する一般化固有ベクトル

$$(\lambda_i I - A)^k x = 0$$

固有ベクトルを含む

$(\lambda_i I - A)^2 x = 0 \ \rightarrow N_i$ ＋ 大きさ2以上のジョルダンセルの数

$(\lambda_i I - A)^3 x = 0 \ \rightarrow N_i$ ＋ 大きさ2以上のジョルダンセルの数
＋ 大きさ3以上のジョルダンセルの数

基底の選び方

ジョルダン標準形に相似変換(モード分解)するための基底

- 固有値$\lambda = \lambda_i$に対応する基底の選び方
- 代数的重複度の数の一般化固有ベクトル空間を生成する最小のkを$k_{\max}$とする$(= K_i)$。
- $k_{\max} - 1$に対応する一般化固有ベクトル空間に含まれない、$k_{\max}$に対応する一般化固有ベクトルを選ぶ: $x_{k_{max},1}, \cdots x_{k_{max},r_{k_{max}}}$
- $k_{\max} - 2$に対応する一般化固有ベクトル空間に含まれない、$k_{\max} - 1$に対応する一般化固有ベクトルのうち、$x_{k_{max}-1,j} = (\lambda_i I - A)x_{k_{max},j}$ $(j = 1, \dots, r_{k_{max}})$を先に選ぶ。残りも一次独立になるように選ぶ。
- 以下繰り返し

- $x_{1,1}, \dots, x_{k_{max},1}, x_{2,1}, \dots$ のように並べた行列がジョルダン標準形への変換行列。(大きなジョルダンブロックが先に並ぶ)
- 変換行列には自由度が存在。