



CM-P00057216

Neue Methoden in der Statistischen Theorie der Teilchenerzeugung bei 1-100 GeV Primärenergie

von
R. Hagedorn
CERN, Genf

das γ ist das γ d.p.

$\epsilon_{12} = x$

$d^3x \equiv \epsilon_3 d^3x_0$

$\int \delta(x) dx = 1$

$\int \delta(\tau, \vec{r}, \epsilon) d\Omega \vec{r}^2 d\tau =$

$x = r \sin \theta \cos \phi$
 $y = r \sin \theta \sin \phi$
 $z = r \cos \theta$



$\int \delta(x) \delta(y) \delta(z) d\Omega r^2 dr$

$\int \delta(\tau, k_1) \delta(\tau, k_2) \delta(x, k_3) d\Omega \vec{r}^2 d\tau$

$\int \delta(r) \delta(\tau) \delta(\tau) \frac{1}{k_1 k_2 k_3} d\Omega r^2 dr = 1$

$1 = \int \delta(\tau) \frac{d\Omega d\tau d\phi}{\sin^2 \theta \sin \theta \cos \theta} r^2 d\tau =$

$= \int \delta(\tau) \frac{1}{\sin^2 \theta \sin \theta \cos \theta} d\Omega d\tau$

$\frac{d\Omega}{r^2} = \frac{d\theta d\phi}{r^2 \sin \theta}$

$\int \delta(\tau) \frac{4 d\theta d\phi}{\sin^2 \theta \sin \theta \cos \theta} r^2 d\tau =$

$= \int \delta(\tau) \int d\theta d\phi \frac{d\theta d\phi}{\sin^2 \theta \sin \theta \cos \theta}$

$\int \frac{d\theta d\phi}{\sin^2 \theta \sin \theta \cos \theta} = \int \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{\sin^3 \theta \cos \theta} = \int \frac{d\theta d\phi}{(1-\cos^2 \theta) \cos \theta}$

$\frac{d}{d\tau} \ln \tau = \frac{1}{\tau}$

$= \int \frac{d\theta d\phi}{(1-x^2)^2} x$

I N H A L T

	Seite
A. Einleitung. Die Fermische Idee und die Schwierigkeiten in ihrer Durchführung.	1
B. Ableitung der statistischen Theorie aus der S-matrix.	10
C. Rechenmethoden : Berechnung der Phasenraumintegrale mit einer Monte-Carlo-Methode. Auswertung der grossen Menge anfallenden Zahlenmaterials.	23
D. Anwendungen. Vergleich mit verschiedenen Experimenten.	31
E. Diskussion. Grenzen der Theorie und laufende Untersuchungen.	36
Literatur.	43

A. Einleitung

Man kennt zur Zeit folgende Elementarteilchen :

$\Xi^{-,0}$	und sein Antiteilchen	$\bar{\Xi}^{+,0}$	} Hyperonen
$\Sigma^{+,0,-}$	" " "	$\bar{\Sigma}^{-,0,+}$	
Λ^0	" " "	$\bar{\Lambda}^0$	
$N^{+,0}$	" " "	$\bar{N}^{-,0}$	Nukleonen
$K^{+,0}$	" " "	$\bar{K}^{-,0}$	Schwere Mesonen

$\pi^{+,0,-}$ (π^+ ist Antiteilchen von π^- ; π^0 ist sein eigenes Antiteilchen)

$\mu^{+, -}$ (μ^+ ist Antiteilchen von μ^-)

$e^{+, -}$ (e^+ ist Antiteilchen von e^-)

$\nu, \bar{\nu}$ (ν und $\bar{\nu}$ sind verschieden, wenn Lepton-Erhaltung gilt)

γ (ist sein eigenes Antiteilchen)

Gelegentlich wird die Existenz weiterer Elementarteilchen diskutiert. entdeckt wurde bisher keines.

Die Hauptaufgabe ist, die Eigenschaften der bekannten Teilchen näher zu studieren und eventuell neue Teilchen zu finden. Diese Aufgabe stösst auf Schwierigkeiten :

- Erstens gibt es noch keine Theorie die es gestatten würde, die Existenz und die Eigenschaften gerade dieser Teilchen zu verstehen,
- zweitens sind die meisten von ihnen instabil und man muss sie entweder in der kosmischen Strahlung beobachten oder sie künstlich erzeugen. In jedem Falle entstehen sie bei Zusammenstössen energiereicher Teilchen und dabei werden im Allgemeinen gleich mehrere zugleich erzeugt. Das bedeutet, dass man es mit einem Mehrkörperproblem zu tun hat :

Die Behandlung dieser Aufgabe ist aus zwei Gründen wünschenswert :

- 1) Man möchte die Vielfacherzeugung von Elementarteilchen in Hochenergieprozessen um ihrer selbst willen verstehen. Dabei werden die bekannten Teilchen mit ihren Eigenschaften als gegeben angesehen.
- 2) Man möchte die Eigenschaften der einzelnen Teilchen und ihre Wechselwirkungen miteinander unter günstigen Versuchsbedingungen beobachten. Dazu braucht man Beschleuniger (Linearbeschleuniger, Cyclotron, Synchro-cyclotron, Synchrotron), die energiereiche Primärteilchen auf - wenn möglich - Protonen schießen. Dann finden die oben erwähnten Vielfacherzeugungsprozesse statt und alle Sorten von Teilchen verlassen das Target (d.h. das beschossene Stück Materie). Wenn die Theorie der Vielfacherzeugung zu berechnen gestattet, wieviele Teilchen jeder Sorte entstehen und welche Energie- und Winkelverteilung sie im Laborsystem haben, so gibt sie dem Experimentalphysiker ein Mittel in die Hand, optimale Versuchsbedingungen für weitere Untersuchung zu schaffen.

Selbstverständlich schliesst die Erledigung des ersten Punktes die des zweiten ein. Leider ist man noch weit entfernt davon, die Vielfacherzeugung restlos zu verstehen. Trotzdem weiss man im Gebiet der primärenergien zwischen 1 GeV und 100 GeV soviel, dass man wenigstens teilweise die beiden Anliegen erfüllen kann.

Das Mittel hierzu ist die statistische Theorie der starken Wechselwirkungen. Diese Theorie wurde erstmals von E. Fermi¹⁾ vorgeschlagen jedoch nach einigen (qualitativen) Anfangserfolgen als unzuverlässig beiseite gelegt. Erst nach einigen Jahren wurde sie wieder aufgegriffen und von mehreren Autoren so verbessert, dass sie heute verschiedene Fragen quantitativ beantworten kann. Die statistische Theorie beschreibt Produktion (und Vernichtung) derjenigen Elementarteilchen, die starke Wechselwirkung untereinander haben. In der obigen Liste sind das alle von Ξ bis π , während die übrigen Teilchen sowohl

an die oberen als auch untereinander schwach oder elektromagnetisch gekoppelt sind. Wir werden uns auf die stark wechselwirkenden Teilchen beschränken. Ferner sollen hier nur Methoden besprochen werden, die im Gebiet von etwa 1-100 GeV (Lab) benutzt werden können. Für extrem hohe Energien ($> 10^3$ GeV) verweisen wir auf den kürzlich erschienenen zusammenfassenden Bericht²⁾.

Unsere Einheiten sind : $\hbar = c = 1$; Nukleonmasse $M = 1$. Dann gibt es nur die Dimensionen [Länge] und [Länge]⁻¹.

Die Fermische Idee war, dass beim Zusammenstoß etwa zweier hochenergetischer Protonen sich in sehr kurzer Zeit (etwa $\frac{1}{\mu}$, wenn $\frac{1}{3}$ die Masse des π -Mesons ist) und in sehr kleinem Volumen (etwa $\frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu}\right)^3 \cong$ Nukleonvolumen) ein Gleichgewicht zwischen den möglichen Endzuständen einstellt. Wenngleich im ersten Augenblick der Kollision nur Materie (ohne weitere Struktur) in dem kleinen Volumen existiert, so soll doch nach der Zeit $\frac{1}{\mu}$ eine Struktur sich gebildet haben, die es erlaubt, von Teilchenzahlen und Impulsen zu sprechen. Wenn das kleine Volumen, in dem die Wechselwirkung stattgefunden hat, verlassen wird, ist diese Struktur vollständig festgelegt. Betrachten wir eine bestimmte Reaktion :



Das heisst : Beim Zusammenstoß zweier Protonen entstehen zwei Nukleonen und n Pionen. Die Ladungsverteilung soll uns im Augenblick nichts angehen. Im Endzustand ist n festgelegt, ebenso sind es die Impulse aller Teilchen. Aber bei mehrfacher Durchführung desselben Experiments werden diese Daten immer wieder anders ausfallen. Fermi geht nun davon aus, dass (ähnlich wie in der statistischen Mechanik) die Wahrscheinlichkeit eines Endzustandes proportional ist der Anzahl der Möglichkeiten ihn zu verwirklichen. Diese ist gegeben durch die Anzahl der quantenmechanischen Zustände, die dem gleichen Endzustand angehören.

(Im Sinne der Quantenmechanik ist das, was hier Endzustand genannt wird, noch eine Zusammenfassung von vielen Quantenmechanischen Zuständen).

Schliesslich ist, wenn man die Teilchen durch ebene Wellen beschreibt, die Anzahl der Zustände in einem Normierungsvolumen V gegeben durch die Anzahl von ebenen Wellen, die die Randbedingungen erfüllen. Bekanntlich erhält man diese Zahl auf einfache Weise, indem man das ganze Phasenraumvolumen (zwischen den Energieschalen E_0 und $E_0 + \Delta E$; E_0 ist die festgehaltene Gesamtenergie)

$$V^{n+2} \iiint \dots \iiint dp_1 \dots dp_{n+2} \\ E_0 \leq E \leq E_0 + \Delta E$$

durch die Grösse der Zellen $h^{3(n+2)} = (2\pi)^{3(n+2)}$ (da $\hbar = 1$) dividiert.

Da der Endzustand bereits festliegt, sobald die Teilchen ein Volumen der Grössenordnung $\frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu}\right)^3$ verlassen, sollte man $V \cong \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu}\right)^3$ setzen.*)

Fermi argumentiert weiter, dass die Impulserhaltung die Zahl der Freiheitsgrade um eins vermindert und gelangt so zur Aussage

$$P_n \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3(n+1)} \cdot \left(\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\mu^3}\right)^{n+1} \cdot \int \delta(E - \sum \varepsilon_i) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_{n+1} \quad (2)$$

wo P_n die Wahrscheinlichkeit für das Entstehen von n Pionen und $\varepsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$ die Energie des i -ten Teilchens ist. Im Abschnitt B dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass man zu einer prinzipiell ähnlichen Formel mit Hilfe der S-Matrixtheorie kommen kann. Dabei ergeben sich von selbst Vorfeinerungen und eine vertiefte Einsicht. Wir wollen daher hier nicht versuchen, die intuitive Begründung, die soeben gegeben wurde, zu verbessern. Stattdessen sollen einige Ursachen (und ihre Beseitigung) dafür erwähnt werden, dass (2) sich nicht sonderlich gut bewährt hat. Diese Ursachen sind von mehreren Autoren beseitigt worden

*) Dieses Argument stammt nicht von Fermi und wird hier nur zur Plausibilitätsbetrachtung benutzt. Später wird es durch ein besseres ersetzt werden.

und es hat immerhin einige Jahre gedauert, bevor die verbesserte Theorie erfolgreich war :

- 1) Es ist möglich, dass auch nach Verlassen des Wechselwirkungsvolumens $\frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu}\right)^3$ noch gewisse Wechselwirkungen weiterbestehen : Resonanzzustände oder mit anderen Worten äusserst kurzlebige instabile "Teilchen", die durch starke Wechselwirkung in Zeiten zerfallen, welche nur wenig länger sind als die "Elementarzeit" $\frac{1}{\mu}$. Diese "Teilchen" spielen aber bei der Einstellung des "Gleichgewichts" vorübergehend die Rolle eines echten Teilchens und sind als ein solches zu behandeln ^{3),4),5),6)}.
- 2) Die oben erwähnten sehr instabilen Teilchen sind nicht beobachtbar. Man muss ihren Zerfall berücksichtigen und die Zerfallsprodukte (und deren Spektren) zum Endzustand hinzufügen. Das Gleiche gilt für andere instabile Teilchen, die aufgrund elektromagnetischer ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ etc) oder schwacher Wechselwirkungen zerfallen, falls sie - wie das π^0 - überhaupt nicht beobachtbar sind oder falls man sich gerade für die Zerfallsprodukte (etwa Neutrinos) interessiert ^{3),6),7)}.
- 3) Wenn Teilchen-Antiteilchenpaare gebildet werden, können solche Paare das Wechselwirkungszentrum mit so kleinem Relativimpuls verlassen, dass sie lange beieinander bleiben und sich später gegenseitig vernichten. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist berechenbar ⁸⁾ und der beobachtbare Endzustand kann entsprechend korrigiert werden.
- 4) Die Erhaltung des isobaren Spins und die Ununterscheidbarkeit gleicher Teilchen muss streng berücksichtigt werden. Dabei treten Faktoren auf, die leicht sehr gross werden und die relativen Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten vollständig verändern können. Unter der Annahme der Ladungsunabhängigkeit kann man diese Faktoren berechnen ^{9),10),19)}.

- 5) Das in (2) auftretende Integral bekommt, wenn man die Impulserhaltung nicht durch Weglassen einer Integration, sondern streng berücksichtigt, die Form

$$\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, \vec{P}) = \int \delta(E - \sum \epsilon_i) \delta(\vec{P} - \sum \vec{p}_i) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_n$$

Es lässt sich nur für $n \leq 3$ streng ausführen¹¹⁾. Für $n > 3$ kann man es für jeden der beiden Grenzfälle

$$a) \quad m_i \gg p_i; \quad \epsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \approx m_i + \frac{p_i^2}{2m_i} \quad (\text{unrelativistisch})$$

$$b) \quad m_i \ll p_i; \quad \epsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \approx p_i \quad (\text{ultrarelativistisch})$$

exakt lösen. Hat man ein System mit schweren (Nukleonen) und leichten (Mesonen) Teilchen, so liegt die Versuchung nahe, für die schweren Teilchen Fall a) und für die leichten b) anzunehmen und ferner zu glauben, dass jedes System für sich (im Schwerpunktsystem aller Teilchen) Gesamtimpuls Null habe und die Totalenergie sich so auf beide Teilchengruppen verteile, dass $E_1 + E_2 = E$ und $E_{\text{kin},1} = E_{\text{kin},2}$ ist. Man hätte dann etwa (M heisst : grosse Massen)

$$\varrho^* \approx \varrho_M^*(E_1, P=0) \times \varrho_{m=0}^*(E_2, P=0)$$

und in der Tat ist diese Näherung, die grobfalsch ist, gelegentlich benutzt worden. Besser wäre es schon (bei der gleichen Näherung für $\epsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$) wenigstens nicht anzunehmen, dass die beiden Teilsysteme Energie und Impuls in so spezieller Weise untereinander aufteilen. Dann hätte man über alle möglichen Verteilungen zu integrieren und erhielte

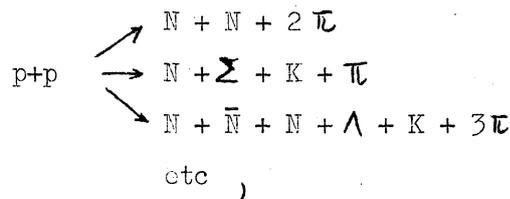
$$\varrho^* \approx \int dE' d\vec{P}' \varrho_M^*(E-E', \vec{P}-\vec{P}') \cdot \varrho_{m=0}^*(E', \vec{P}')$$

Es konnte gezeigt werden¹²⁾, dass auch diese vielbenutzte Näherung leicht vollkommen falsch werden kann; die Abweichungen vom exakten Wert können ohne Weiteres einen Faktor fünf erreichen. Das liegt daran, dass sich in Wirklichkeit die Teilchenimpulse im Mittel so einstellen, dass weder a) noch b) eine gute Näherung ergeben. Ferner wirkt sich ungünstig aus, dass nur die schweren Teilchen mit ihren Massen explizite eingehen, während die leichten alle die Masse null erhalten. In welcher Gruppe man die K-Mesonen zählen soll, bleibt fraglich.

Wenn man nun schon intermediäre instabile Teilchen einführen und auch die Produktion von K-Mesonen und Hyperonen berechnen will, so muss man, da sich bezüglich des Phasenraumintegrals ρ^* diese Teilchen nur durch ihre Massen unterscheiden, schon zu besseren Methoden greifen und ρ^* exakt oder wenigstens so genau berechnen, dass die Massenunterschiede richtig berücksichtigt werden. Dies wurde durch eine Sattelpunktmethode¹³⁾ und durch eine Reihenentwicklung³⁾ versucht. Eine Methode, die weiter unten ausführlicher beschrieben wird, benutzt eine elektronische Rechenmaschine und ein Monte-Carlo-Verfahren^{12), 14)} wobei die exakten Ausdrücke $\mathcal{E} = \sqrt{p^2 + m^2}$ benutzt werden. Dies hat gegenüber den anderen Techniken den Vorteil, dass man bis zu 16 Teilchen im Endzustand haben kann, deren Massen auf $10^{*})$ verschiedene, beliebige Werte verteilt sein können. Gleichzeitig mit ρ^* erhält man die Energiespektren aller Massen und eine Fehlerabschätzung. Man lässt die Maschine solange rechnen, bis ein vorgeschriebener Fehler unterschritten ist. Einige Prozent wahrscheinlicher Fehler gegenüber dem exakten Wert werden in wenigen Minuten Rechenzeit erreicht (CERN's Ferranti-Mercury Computer).

*) Die Zahlen 16 and 10 sind nicht durch die Monte-Carlo Methode bestimmt, sondern durch das gewählte Rechenprogramm. Sie können im Prinzip erhöht werden, aber das ist praktisch unnötig.

- 6) Da nicht alle "starken" Wechselwirkungen gleich stark sind, ist es zweckmässig, verschiedene Wechselwirkungsvolumen $\Omega_1, \Omega_2 \dots$ einzuführen^{15), 8)}.
- 7) Wenn man sich bei gegebener Gesamtenergie alle energetisch möglichen und mit Auswahlregeln (Isospinerhaltung, Baryonerhaltung, Strangeness-Erhaltung) vorträglichen Endzustände (definiert durch Teilchenzahlen) aufschreibt, also etwa



so sieht man leicht, dass die Zahl der möglichen Endzustände mit wachsender Gesamtenergie stark zunimmt. Zählt man nur diejenigen, die nennenswert beitragen, so findet man etwa für p-p- Stösse

10	Endzustände bei	2.75 GeV	Primärenergie (Laborsystem)
50	"	6.2 GeV	"
600	"	25 GeV	"

Jeder solche Endzustand enthält im allgemeinen 3 bis 6 Teilchen verschiedener Masse und zu jeder Masse gehört als Ergebnis der Monte-Carlo-Rechnung ein Energiespektrum, welches (als Histogramm) etwa 30 Zahlen enthält. Im 25 GeV Fall hat man rund $600 \cdot 5 = 3000$ Spektren zu je 30 Zahlen. Diese Spektren müssen mit den Wahrscheinlichkeiten der Endzustände, zu denen sie gehören, multipliziert und dann, nach Teilchen geordnet, überlagert werden, um die Gesamtspektren der verschiedenen Teilchensorten zu ergeben.

Das ist eine Aufgabe, die nicht am Schreibtisch erledigt werden kann. Häufig hat man daher einfach einen Teil der Endzustände fortgelassen und mittlere Teilchenzahlen und Spektren aus wenigen, als typisch angesehenen Endzuständen berechnet. Dabei können, abgesehen von unzulässigen Näherungen für ρ^* und Nichtbeachtung anderer statistischer Faktoren (Isospin, Ununterscheidbarkeit, Spin), weitere beträchtliche Fehler entstehen. Beispiel : Man findet für 25 GeV p-p-Stöße für die mittlere Pionerzeugung^{*)}

5.35 wenn nur Endzustände $2N + n\pi$ betrachtet werden,

4.23 wenn Nukleon-Paarerzeugung hinzugenommen wird,

3.37 wenn alle beitragenden Endzustände zählen.

Entsprechend ändern sich die Pion-Spektren.

Wenn man einigermaßen zuverlässige Aussagen haben will - oder besser : Wenn man die wirklichen Aussagen der statistischen Theorie haben will, muss man alle wesentlich beitragenden Endzustände einschliessen. Dabei stellt sich im Allgemeinen erst beim Rechnen heraus, welche Zustände mitzunehmen sind. Die oben angegebenen Zahlen sind beim Durchrechnen der betreffenden Fälle praktisch ermittelt worden.

Damit steht aber fest, dass für mehr als 3 GeV primärenergie die Auswertung (d.h. die gewogene Überlagerung der Spektren) mittels elektronischer Rechenmaschinen erfolgen muss. Ein Programm, welches das automatisch und sehr flexibel durchführt^{16),17)} wird weiter unten in grossen Zügen beschrieben.

*) Diese Zahlen sind nicht für Paarvernichtung im Endzustand korrigiert, sie dienen nur zur Illustration.

- 8) Es ist wünschenswert, die statistische Theorie soweit irgend möglich von modellmässigen Vorstellungen zu befreien. Man wird also versuchen, von der S-Matrix her eine neue Begründung zu finden¹⁸⁾. Dabei müssen sich die oben erwähnten weiteren statistischen Faktoren von selbst einstellen und das Wechselwirkungsvolumen eine bessere Interpretation erfahren. Freilich zeigt sich, dass Modellvorstellungen nicht ganz zu vermeiden sind - eine triviale Folge der Tatsache, dass im Gebiet der starken Wechselwirkungen keine Feldtheorie bisher in der Lage war, S-Matrixelemente explizite zu berechnen.

Im folgenden Abschnitt B soll die Neubegründung der statistischen Theorie ausgehend von der S-Matrix kurz geschildert werden. Dabei werden die Punkte 1), 2), 3), 4) und 6) der obigen Aufzählung automatisch mit erledigt.

Im Abschnitt C wird einiges über die Rechenmethoden gesagt, womit die Punkte 5) und 7) der obigen Liste ebenfalls behandelt sind.

Endlich werden einige Anwendungen und im Fluss befindliche Weiterentwicklungen gestreift (Abschnitt D).

B. Ableitung der statistischen Theorie

Die folgenden Ausführungen sollen nur einen Überblick geben. Für Einzelheiten siehe¹⁸⁾.

Die Wahrscheinlichkeit, von einem Anfangszustand $|i\rangle$ in irgendeinen einer Menge F von Endzuständen zu gelangen, ist gegeben durch

$$P(F) = \sum_{f \in F} |\langle f|S|i\rangle|^2 \quad (4)$$

wobei ein konstanter Faktor weggelassen wurde. Wenn wir die Endzustände $\langle f|$ durch die Massen und Impulse sowie Spins und Isospins der herauskommenden Teilchen charakterisieren, so folgt (T_i, t_i sind Isospin und

(dessen dritte Komponente)

$$P(F) = \sum_F \left| \langle T_1 t_1 \dots T_n t_n, p_1 \dots p_n; m_1 \dots m_n | S | i \rangle \right|^2 d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_n \quad (5)$$

Man kann das quadrierte Matrixelement "reduzieren" indem man von der Isospinerhaltung Gebrauch macht :

$$\begin{aligned} & \left| \langle T_1 t_1 \dots T_n t_n, p_1 \dots p_n, m_1 \dots m_n | S | i \rangle \right|^2 = \\ & = \left| C_T(T_1 \dots T_n, t_1 \dots t_n) \right|^2 \cdot \left| \langle p_1 \dots p_n, m_1 \dots m_n | S' | i \rangle_{T_1 \dots T_n} \right|^2 \end{aligned} \quad (6) \quad \checkmark$$

wo $C_T(T_1 \dots T_n)$ ein wohldefinierter Koeffizient ist. Indem man auf die Kenntnis der Ladungsverteilung verzichtet (was aber nicht sein muss, siehe ^{7),19)}) kann man über alle möglichen t_i -Konfigurationen summieren (das ist mit dem Summenzeichen in (5) gemeint) und erhält die Gesamtzahl von Möglichkeiten, aus n Teilchen mit Isospins $T_1 \dots T_n$ eine Isospineigenfunktion $|T, t\rangle$ zu konstruieren, wo T, t den Isospin des Anfangszustandes i charakterisieren. Da uns hier nur Teilchen mit Isospin $T=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ interessieren und da $(T=0)$ -Teilchen keinen Einfluss haben, nennen wir diese Anzahl von Möglichkeiten ^{9),10),19)}

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\gamma} (T) ; & \quad \alpha = \text{Zahl der Teilchen mit Isospin } \frac{1}{2} \\ & \quad \beta = \text{ " " " " } 1 \\ & \quad \gamma = \text{ " " " " } \frac{3}{2} \\ & \quad T = \text{Isospin des Anfangszustandes.} \end{aligned}$$

Ferner ziehen wir eine δ -Funktion für Energie- und Impulserhaltung aus dem quadrierten Matrixelement heraus und finden

$$P(F) = W_{\alpha\beta\gamma} (T) \int \left| \langle p_1 \dots p_n, m_1 \dots m_n | S' | i \rangle \right|^2 \delta(E - \sum \epsilon_i) \delta(\sum \vec{p}_i) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_n \quad (7)$$

wobei wir die relativistische Invarianz der S-Matrix benutzt haben, um ein für alle Mal in das Schwerpunktsystem $\sum \vec{p}_i = 0$ zu gehen.

Da $P(F)$ und $W_{\alpha\beta\gamma}(T)$ dimensionslos sind, aber die δ -Funktionen und die Differentiale $d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_n$ nicht, muss das verbleibende quadrierte Matrixelement die Dimension $\Delta E \cdot V_0^{n-1}$ haben, wo ΔE eine Energie und V_0 ein Normierungsvolumen ist, das später wieder herausfallen muss, da seine Grösse irrelevant ist. Diese Faktoren ziehen wir heraus, um wieder ein dimensionsloses quadriertes Matrixelement zu haben :

$$P(F) = W_{\alpha\beta\gamma}(T) \cdot \Delta E \cdot V_0^{n-1} \int |\langle p_1 \dots | S^{'''} | i \rangle|^2 \delta(E - \sum \epsilon_i) (\sum \vec{p}_i) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_n \quad (8)$$

Jetzt berücksichtigen wir noch die möglichen Spineinstellungen durch den Faktor

$$\prod_{j=1}^n (2J_j + 1)$$

wo J_j der Spin des j -ten Teilchens ist^{*)}. Ferner müssen wir die Ununterscheidbarkeit gleicher Teilchen in Rechnung stellen. Beim Integrieren kommen alle Permutationen vor und infolgedessen alle werden Zustände mehrfach gezählt. Das kompensieren wir durch einen Faktor

$$\frac{1}{\prod_i N_i!}, \text{ wo } N_1 \dots N_k \text{ die Anzahlen der Teilchen der Sorten } 1 \dots k \text{ sind ohne Ansehen von Spin und Ladung (etwa } N_1 = \text{Zahl aller Pionen).}$$

Das ergibt (wir setzen $V_0 = \frac{V}{(2\pi)^3}$)

$$P(F) = \frac{\prod_j (2J_j + 1)}{\prod_i N_i!} W_{\alpha\beta\gamma}(T) \cdot \left[\frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{n-1} \cdot \Delta E \cdot \int |\langle p_1 \dots | S^{'''} | i \rangle|^2 \delta(E - \sum \epsilon_i) \times \delta(\sum \vec{p}_i) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_n \quad (9)$$

Wir setzen zur Abkürzung vorübergehend für den Faktor vor dem Integral

*) Warum Spin und Isospin verschieden behandelt werden, ist in¹⁸⁾ ausführlich diskutiert. Der im Allgemeinen grosse Bahndrehimpuls ist die Ursache.

$$C = \frac{\prod_{j=1}^n (2J_j + 1)}{\prod_i N_i!} \cdot W_{\alpha\beta\gamma}(T) \cdot \left[\frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{n-1} \cdot \Delta E \quad (10)$$

und nehmen an, wir wollten das Spektrum des n-ten Teilchens berechnen.

Man erhält es offenbar durch Nichtausführung der betreffenden Integration, ($d\vec{p}_n = 2\pi p_n^2 dp_n \sin \vartheta_n d\vartheta_n$, die Polarachse sei durch das ankommende Primärteilchen gegeben) :

$$P(F, \vec{p}_n) d\vec{p}_n = 2\pi C p_n^2 \sin \vartheta_n dp_n d\vartheta_n \int | \langle p_1 \dots p_n | S^{(n)} | i \rangle |^2 \delta(E - \sum \varepsilon_i) \times \\ \times \delta(\sum \vec{p}_i) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_{n-1}. \quad (11)$$

Da wir über das quadrierte Matrixelement so gut wie nichts wissen, ziehen wir seinen Mittelwert vor das Integral :

$$P(F, \vec{p}_n) d\vec{p}_n = 2\pi C p_n^2 \sin \vartheta_n dp_n d\vartheta_n \cdot S(E, T, m_1 \dots m_n, T_1 \dots T_n, p_n, \vartheta_n) \cdot \times \\ \times \int \delta(E - \varepsilon_n - \sum \varepsilon_i) \delta(\vec{p}_n + \sum \vec{p}_i) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_{n-1} \quad (12)$$

Die Funktion S ist der erwähnte Mittelwert. Wenn wir ihn als Funktion aller Variablen berechnen könnten, wären wir in der Lage, die Wahrscheinlichkeit dafür anzugeben, dass genau die Teilchen 1.2 ... n (mit Massen $m_1 \dots m_n$, Spin und Isospin $s_1 \dots s_n$ bzw $T_1 \dots T_n$) entstehen und dass das Teilchen mit der Nummer n einen Impuls zwischen p_n und $p_n + dp_n$ hat und einen Winkel zwischen ϑ_n und $\vartheta_n + d\vartheta_n$ mit der Richtung des Primärteilchens bildet.

Es kann keine Rede davon sein, dass man die Funktion S so weitgehend berechnen könnte. In der Tat ist (12) eine Aufspaltung des Problems in Faktoren, von denen die Funktion S das Wesentliche über die Wechselwirkung enthält, während alle übrigen eigentlich trivial sind. Dass die trivialen Faktoren aber den numerischen Wert von P(F) weitgehend bestimmen und überdies nicht leicht zu berechnen sind, werden wir noch sehen.

Da man noch keine Möglichkeit hat, selbst für kleine Teilchenzahlen - geschweige denn für grosse - S-matrixelemente explizit auszurechnen, muss man im Folgenden bescheidener sein.

Zunächst wollen wir auf die Frage nach der Winkelverteilung verzichten, indem wir über den Winkel ϑ_n integrieren. Das hat zur Folge, dass kein Widerspruch zwischen den Aussagen der Theorie und einer beobachteten Winkelverteilung im Schwerpunktsystem bestehen kann. Ein oft gehörtes Argument gegen die statistische Theorie wird damit entkräftet: Eine isotrope Winkelverteilung wird in der hier gegebenen Begründung der statistischen Theorie weder vorausgesetzt noch gefolgert.

Zur Durchführung der Winkelintegration definieren wir

$$\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, P) = \int \delta(E - \sum \varepsilon_i) (\sum \vec{p}_i - \vec{P}) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_n \quad (13)$$

$$\left\{ \left[\frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{n-1} \cdot \varrho^* \text{ ist in unseren Einheiten die Zahl der Zustände im Kasten } V \right\}$$

Da über alle \vec{p}_i integriert wird, kann ϱ^* offenbar von der Richtung von \vec{P} nicht abhängen (also auch nicht vom Vorzeichen). Schreiben wir also (12) in der Form

$$P(F, \vec{p}_n) d\vec{p}_n = 2\pi C p_n^2 dp_n \sin \vartheta_n d\vartheta_n \cdot S(E, T | m_1 \dots m_n, \dots, p_n, \vartheta_n) \times \varrho^*(E - \varepsilon_n; m_1 \dots m_{n-1}; p_n), \quad (12')$$

so bleibt ϱ^* von der Winkelintegration unberührt und wir erhalten \int mit etwas veränderter Bedeutung von $P(F, p_n) \int$

$$P(F, p_n) dp_n = C \cdot \bar{S}(E, T | m_1 \dots m_n, T_1 \dots T_n, p_n) \cdot \varrho^*(E - \varepsilon_n, \dots, p_n) 4\pi p_n^2 dp_n \quad (12'')$$

Wir behaupten nun, dass dieser Ausdruck (der noch exakt richtig ist) mit Hilfe plausibler Näherungen für \bar{S} ziemlich gut berechnet werden kann. Dabei nehmen wir für den Augenblick an, C und ϱ^* seien gegeben. Wir kümmern uns nur um die Funktion \bar{S} und diskutieren die möglichen Näherungen :

- α) Der Faktor $p_n^2 \cdot \varrho^*(E - \varepsilon_n, m_1 \dots m_{n-1}, p_n)$ wird zu Null für $p_n = 0$ und für $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m_n^2} = E - (m_1 + \dots + m_{n-1})$, dazwischen liegt ein Maximum. Dieser Faktor trägt der Kinematik (Energie-Impulsbilanz) und der Einschränkung der Freiheitsgrade der $(n-1)$ restlichen Teilchen durch das n -te Rechnung. \bar{S} enthält also in seiner p_n -Abhängigkeit diese Effekte nicht mehr. Daher scheint es plausibel, dass \bar{S} nur noch schwach von p_n abhängt und daher im Vergleich zum stark veränderlichen $p_n^2 \cdot \varrho^*$ als Konstante anzusehen ist.

Wir streichen also p_n aus \bar{S} .

- β) Der Faktor C [siehe (10)] zählt unter Anderem die Möglichkeiten, mit n Teilchen der Isospins $T_1 \dots T_n$ und beliebigen $t_1 \dots t_n$ einen Gesamtisospin T, t zu kombinieren. Die Zahl dieser Möglichkeiten variiert stark und wir werden annehmen, dass demgegenüber \bar{S} von $T_1 \dots T_n$ nur so schwach abhängt, dass diese Variablen ebenfalls zu streichen sind. Die Abhängigkeit von T zu streichen scheint weniger geraten. Entweder man beschränkt sich auf Anfangszustände, die Isospineigenfunktionen sind (etwa pp) - dann gehören alle Endzustände zum gleichen T und ihre relativen Gewichte werden weitgehend T -unabhängig. Oder man hat gemischte Anfangszustände $(pn, \bar{n}\bar{p}, p\bar{p})$ - dann muss man Zusatzannahmen machen.

Wir beschränken uns auf reine Isospin-Anfangszustände und streichen T aus \bar{S} .

- γ) Jetzt lautet (12") :

$$P(F) dp_n = C \cdot \bar{S}(E, m_1 \dots m_n) \cdot 4\pi p_n^2 dp_n \cdot \varrho^*(E - \varepsilon_n, m_1 \dots m_{n-1}, p_n)$$

Um eine Abschätzung für \bar{S} zu bekommen, integrieren wir über p_n (was an \bar{S} nichts ändert). Aus (13) folgt

$$\int 4\pi p_n^2 \varrho^*(E-\varepsilon_n, m_1 \dots m_{n-1}, p_n) dp_n = \varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0). \quad (13')$$

$$\int P(F) dp_n \equiv P(m_1 \dots m_n \dots) = C \cdot \bar{S} \cdot \varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0) \quad (14)$$

ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, genau n Teilchen mit den gegebenen Eigenschaften (Massen, Isospins, etc.) aus dem festgelegten Anfangszustand (E, T) zu erzeugen. Diese Wahrscheinlichkeit ist gewonnen aus der Vorschrift: Man integriere das quadrierte S-matrixelement über alle zum gewünschten Endzustand beitragenden differentiellen quantenmechanischen Zustände (Impulse, Ladungen, etc.) und diese Wahrscheinlichkeit ist in (14) geschrieben als: $\overline{\text{Mittelwert des quadrierten Matrixelemente}}$ mal $\overline{\text{gesamtes Integrations (Summations) Intervall}}$, wobei \bar{S} der Mittelwert ist.

Nun betrachten wir den inversen Prozess: die n Teilchen des bisherigen Endzustandes sind in einem Kasten (Normierungsvolumen V) enthalten und wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie sich alle während einer Zeit der Grössenordnung $1/\mu$ in einem Volumen der Grössenordnung $\Omega_0 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu}\right)^3$ treffen und miteinander zu zwei Protonen verschmelzen, die mit hoher Energie das Gebiet der Wechselwirkung verlassen.

Da für starke Wechselwirkungen die Invarianz unter Zeitumkehr angenommen werden darf, ist das quadrierte S-matrixelement dasselbe wie beim zuerst betrachteten Prozess. Der jetzige Endzustand (d.i. der frühere Anfangszustand) ist ein reiner Zustand, daher entfällt die Integration über Endzustände. Die jetzige Anfangszustand (d.i. der frühere Endzustand) ist aber ein Gemisch aus vielen differentiellen Zuständen (Impulse, Ladungen, etc.) über die man das quadrierte Matrixelement zu mitteln hat. Nach unseren obigen Überlegungen ist aber die Funktion $\bar{S}(E, m_1 \dots m_n)$ genau dieser Mittelwert. Also ist

$$P_{\text{invers}}(m_1 \dots m_n) = \bar{S}(E, m_1 \dots m_n) \quad (15)$$

Elementare Statistik lehrt, dass diese Wahrscheinlichkeit proportional sein muss zu $(\frac{\Omega_0}{V})^{n-1}$. Wir schreiben $n-1$, weil der Ort des Zusammentreffens innerhalb V gleichgültig ist, also nur $n-1$ Teilchen ein beliebiges treffen müssen.

Für die Energieabhängigkeit kann man folgende Annahme machen: Damit zwei Protonen von hoher Energie herauskommen, die im Schwerpunktsystem durch Lorentzkontraktion abgeplattet sind (ihr Radius in Flugrichtung ist $\frac{1}{\gamma \mu}$, wo $\gamma = \frac{2}{E}$ und E die totale Schwerpunktsenergie ist), muss im letzten Augenblick vor ihrer "Geburt" auch das Wechselwirkungsvolumen schon abgeplattet sein, da es aus zwei sich mit hoher Geschwindigkeit lösenden Teilvolumen besteht. Also müssen die n Teilchen sich im Volumen Ω treffen:

$$\Omega = \Omega_0 \cdot \frac{2}{E}; \quad \Omega_0 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu}\right)^3; \quad E = \text{totale Schwerpunktsenergie.}$$

- δ) Endlich kann man die Abhängigkeit von den Massen wenigstens andeutungsweise berücksichtigen. Die Massen sind durch Wechselwirkung hervorgerufen und verschiedenen Massen entspricht die Existenz verschiedener Wechselwirkungen mit verschiedenen Kopplungskonstanten und Reichweiten. Es liegt daher nahe, den Ausdruck $(\Omega/V)^n$ zu ersetzen

$$\left(\frac{\Omega}{V}\right)^n \rightarrow \left(\frac{\Omega_1}{V}\right) \cdot \left(\frac{\Omega_2}{V}\right) \dots \left(\frac{\Omega_n}{V}\right)$$

wo zwar die Größenordnung aller Ω_i ungefähr festliegt, aber doch Unterschiede bis etwa zu Faktoren 10 entsprechend der jeweiligen Wechselwirkung vorkommen könnten. Die obige Begründung legt es nahe, Ω als Ausdruck der Reichweite der Wechselwirkung anzusehen. Die Erfahrung zeigt aber, dass wenn man die Ω_i für alle vorkommenden Massen durch $\frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{m_i}\right)^3 \cdot \frac{2}{E}$ definiert, keine Übereinstimmung mit dem

Experiment erzielt werden kann. Wenn man an die Störungstheorie denkt, so würde man für jedes erzeugte Teilchen einen Faktor g_i^2 (Kopplungskonstante) erwarten und dann hätten Nukleonen, Antinukleonen und Pionen das gleiche Ω . Es erscheint daher zweckmässig, die Ω_i als Parameter anzusehen. Wir werden, um nicht zu viele Parameter zu haben, drei verschiedene Ω zulassen und dem Ω_π den in (16) gewählten Wert geben :

$$\left(\frac{\Omega}{V}\right)^{n-1} \rightarrow \left(\frac{\Omega_1}{V}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\Omega_2}{V}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{\Omega_3}{V}\right)^{n_3} ;$$

dann können wir die beiden anderen für Hyperonen, K-mesonen, Antinukleonen, Antihyperonen und eventuell Resonanzzustände (Isobaren) verwenden.

Da P_{invers} zu $\left(\frac{\Omega}{V}\right)^{n-1}$ proportional ist, setzen wir

$$\bar{S}(E, m_1 \dots m_n) = A \cdot \left(\frac{\Omega_1}{V}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\Omega_2}{V}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{\Omega_3}{V}\right)^{n_3} \quad (16)$$

wo A noch eine - wie wir hoffen - langsam veränderliche Funktion der Energie E, der Massen und aller anderen unterdrückten Variablen ist. Wir werden A als Konstante behandeln.

Tragen wir (16) und (10) in (12'') ein, so folgt

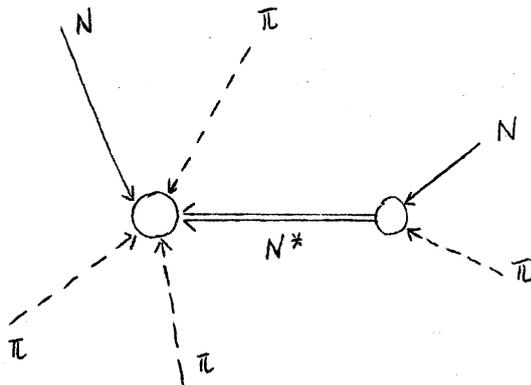
$$P(F, p_i) dp_i = \frac{\pi(2j_i+1)}{\prod_R N_k!} W_{\alpha\beta\gamma}(\tau) \left[\frac{\Omega_1}{(2\pi)^3}\right]^{n_1} \cdot \left[\frac{\Omega_2}{(2\pi)^3}\right]^{n_2} \cdot \left[\frac{\Omega_3}{(2\pi)^3}\right]^{n_3} \cdot \rho^*(E-\varepsilon_i, m_1, \dots, m_n, p_i) \times 4\pi p_i^2 dp_i \quad (17)$$

wo wir statt des n-ten Teilchens jetzt allgemeiner ein beliebiges, i, herausgegriffen haben. m_i heisst : die Masse m_i fehlt.

In (17) sind alle Grössen wohldefiniert und berechenbar. Die Konstanten A und ΔE lassen wir fort, da die Wahrscheinlichkeiten ohnehin durch Division mit $\sum_F P(F)$ zu normieren sind.

Wir bemerken nun, dass instabile Teilchen, deren Lebensdauer zu kurz ist, als dass man sie beobachten könnte, aber doch hinreichend lang, um das Gebiet der Wechselwirkung vor ihrem Zerfall zu verlassen, in (17) ganz zwanglos als Teilchen eingeführt werden können. Nehmen wir als Beispiel das Nukleon-isobar (π -N Resonanz $T = J = 3/2$; $m^* \approx 1.31$). Man führt es als ein Teilchen der Masse m^* ein und berechnet sein Spektrum mit Hilfe von (17).

Man könnte für jedes derartige "Teilchen" ein spezielles Wechselwirkungsvolumen Ω^* ansetzen, denn der inverse Prozess kann so vorgestellt werden :



Für die Vereinigung $\pi + N \rightarrow N^*$ schreibt man Ω^* und für die Vereinigung $N + N^* + \pi + \dots + \pi$ ein weiteres Produkt von Ω 's. Wenn man nun $\Omega^* \gg \Omega_i$ wählt, kommt man zu dem von Lindenbaum und Sternheimer vorgeschlagenen Isobarenmodell⁶⁾, in dem Pionen nur auf dem Weg über das Nukleon-isobar erzeugt werden. Wir wollen das nicht tun, denn bei unserer Deutung von Ω liegt dazu kein Anlass vor. Dass eine Tendenz zur Bildung eines "Isobars" (auch höherer Masse) besteht, wird schon von den übrigen Faktoren bewirkt.

(17) beschreibt das Energiespektrum des i -ten Teilchens im Schwerpunktsystem. Geben wir dem Nukleon-isobar (oder irgendeinem anderen instabilen Teilchen) die Nummer i , so haben wir in (17) das Spektrum der "Isobaren". Da die Lebensdauer von der Grössenordnung 10^{-22} sec ist, kann es selbst nicht beobachtet werden, sondern nur seine Zerfallsprodukte.

Nimmt man an, die "Isobaren" mit Masse m^* seien im Schwerpunktsystem isotrop verteilt (hier muss eine Annahme über Winkelverteilung gemacht werden) und ihre Zerfallsprodukte mit den Massen m und μ seien im Ruhssystem des Isobars wiederum isotrop verteilt, so findet man (durch Transformation vom Ruh-system des "Isobars" in das Schwerpunktsystem) für das Energiespektrum der Massen m bzw. μ folgende Form ¹⁴⁾

$$\left\{ \begin{aligned} w_{\mu}(\varepsilon) &= \frac{m^*}{2k} \int_{y_0}^{y_1} dy \frac{w^*(y)}{\sqrt{y^2 + 2m^*y}} \\ y_1 &= \frac{m^*}{\mu} \left[\frac{\varepsilon_{\mu} E}{\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{\mu} E}{\mu}\right)^2 - (E^2 + k^2)} \right] - m^* ; E = \varepsilon + \mu \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Hier bedeuten

$w^*(y)$ das Spektrum der kinetischen Energie y des instabilen Teilchens der Masse m^* (welches im Prozess $m^* \rightarrow m + \mu$ zerfällt) im Schwerpunktsystem;

$w_{\mu}(\varepsilon)$ das Spektrum der kinetischen Energie des Zerfallsprodukts der Masse μ im Schwerpunktsystem;

ε_{μ} die totale Energie des Teilchens der Masse μ im Ruhssystem des Teilchens der Masse m^* (also des Isobars);

k den Impuls von m oder μ im Ruhssystem von m^*

Offenbar muss man $w_{\mu}(\varepsilon)$ und $w_m(\varepsilon)$ zu den anderen Spektren der Teilchen μ bzw. m hinzufügen. (Man erhält $w_m(\varepsilon)$, indem man in (18) überall m mit μ vertauscht). Formel (18) ist natürlich für jeden 2-Körperzerfall brauchbar und dient infolgedessen auch zur Berechnung des γ -Spektrums in $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ und $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$.

Als weitere Endzustand-Wechselwirkung kommt die Vernichtung eines zunächst gebildeten Paares $N + \bar{N}$ oder $\Sigma + \bar{\Sigma}$ oder $N + \bar{\Lambda}$ etc. in Frage. Mit Hilfe von ϱ^* kann man ausrechnen, wie wahrscheinlich es ist, dass ein

solches Paar einen Relativimpuls $\leq p_0$ hat ^{*)}, der so gewählt ist, dass beide Partner der möglichen Vernichtung etwa für eine Zeit $t > \frac{1}{\mu}$ einen Abstand $d < \frac{1}{\mu}$ behalten, so dass die Vernichtung sehr wahrscheinlich wird. Nimmt man an, dass ein gewisser Bruchteil [etwa $\frac{\sigma_{\text{Vernichtung}}}{\sigma_{\text{total}}}(P_{\text{rel}})$] solcher Paare verschwindet und die entsprechenden Mesonen dafür auftreten, so kann man die berechneten Multiplizitäten korrigieren. Die Durchführung einer solchen Rechnung ist in ⁸⁾ im Einzelnen dargestellt. Man findet z.B. dass bei p-p-Stößen mit 6.2 GeV Primärenergie (Laborsystem) etwa 75% und bei 25 GeV etwa 25% der gebildeten Paare sich im Endzustand wieder vernichten und daher nicht beobachtet werden.

Wir kehren zur Formel (17) zurück und stellen zusammen, was man mit ihrer Hilfe berechnen kann. Bezeichnen wir mit

- F eine Reaktion, charakterisiert durch Teilchenzahlen
(etwa $P+P \rightarrow N+\bar{\Sigma}+K+5\pi$), mit
- i die Teilchensorte (z.B. $i = 1, 2, 3, \dots$ entsprechen $\pi, \bar{\pi}, \Sigma, \bar{\Sigma}, \dots, \pi, \gamma$) und mit
- $n_i^{(F)}$ die Zahl der Teilchen der Sorte i (etwa Pionen)
in der Reaktion F (für das obige F ist $n_{\pi} = 5$),

so stellt (17) das (nicht normierte) Impulsspektrum der Teilchensorte i in der Reaktion F dar und die (ebenfalls nicht normierte) Wahrscheinlichkeit für die Reaktion F folgt durch Integration über p_i

$$P(F) = \frac{\prod_j (2J_j + 1)}{\prod_k N_k!} W_{\alpha\beta\gamma}(T) \cdot \prod_i \left[\frac{\Omega_i}{(2\pi)^3} \right]^{n_i} \cdot \rho^*(E, m_1, \dots, m_n, p=0) \quad (20)$$

*) Indem man nämlich dieses Paar als ein "Teilchen" der Masse $(m_1 + m_2) + \frac{p_{\text{rel}}^2}{2(m_1 + m_2)}$ in das Phasenraumintegral aufnimmt. Beweis in ⁸⁾.

Dann ist

$$\frac{P(F, p_i)}{P(F)} = w_i^{(F)}(p) \quad (21)$$

das auf eins normierte Impulsspektrum des Teilchens i , in der Reaktion F ,

$$W_i(p) = \frac{\sum_F P(F, p_i) \cdot n_i^{(F)}}{\sum_F P_F} = \frac{\sum_F P(F) \cdot w_i^{(F)}(p) \cdot n_i^{(F)}}{\sum_F P(F)} \quad (22)$$

das totale, auf mittlere Teilchenzahl normierte Impulsspektrum der Teilchensorte i aus allen Reaktionen,

$$\int W_i(p) dp = \frac{\sum P(F) n_i^{(F)}}{\sum P(F)} = \langle n_i \rangle \quad (23)$$

die mittlere Zahl von Teilchen der Sorte i , gemittelt über alle Reaktionen, also die mittlere Multiplizität. Schliesslich kann man noch mittlere Energien, etwa

$$\langle \varepsilon_{\text{kin}} \rangle_i = \int W_i(p) \cdot \varepsilon(p) dp / \langle n_i \rangle \quad (24)$$

berechnen.

Die \sum_F sind über alle Reaktionen zu erstrecken, die merklich beitragen; das Mass dafür sind die $P(F)$.

Bezeichnen wir noch mit

$$\emptyset \equiv (F_1, F_2, \dots, F_k) \quad (25)$$

eine beliebig definierte Menge von Reaktionen (bei gleichen Anfangszustand), zum Beispiel alle Reaktionen in denen Antihyperonen vorkommen, so folgt

$$\frac{P(\phi_1)}{P(\phi_2)} = \frac{\sum_{F \in \phi_1} P(F)}{\sum_{F \in \phi_2} P(F)} = \frac{\sigma(\phi_1)}{\sigma(\phi_2)} \quad (26)$$

für das Verzweigungsverhältnis zwischen zwei solchen Mengen von Reaktionen.

Natürlich kann man in (22), (23), (24) die Summation auch nur über $F \in \phi$ erstrecken und hat dann die dort definierten Grössen für eine ausgewählte Menge von Reaktionen.

C. Rechenmethoden

Abgesehen von den Summationen über alle Reaktionen F , die schon bei über 3 GeV Primärenergie (Lab.) auf Rechenautomaten durchgeführt werden müssen, gibt es nur noch ein Problem bei der Berechnung, nämlich die Ausdrücke

$$\rho^*(E, m_1 \dots m_n, p=0) \quad \text{und} \\ \rho^*(E - \epsilon_i, m_1 \dots m_i \dots m_n, p_i)$$

die in (20) bzw. (17) auftreten.

1) Berechnung der Phasenraumintegrale mit Hilfe einer Monte Carlo Methode.

Wir geben hier nur das Prinzip, Einzelheiten findet man in ¹²⁾. Wie schon erwähnt, kann das Integral

$$\rho^*(E, m_1 \dots m_n, P) = \int \delta(E - \sum \sqrt{p_i^2 + m_i^2}) \delta(\sum \vec{p}_i - P) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_n \quad (27)$$

nur für $n < 3$ analytisch ausgeführt werden. Wollte man nun eine Art Simpson-Formel anwenden, so sieht man, dass infolge der unendlichen Integrationsgrenzen und der hohen Dimensionszahl nur mit grossem Rechenaufwand einige Genauigkeit zu erzielen ist. Man kann die Zahl der Integrationen auf zwei reduzieren, tauscht dafür aber sehr unbequeme Integranden ein und muss singuläre Funktionen numerisch integrieren. Unter diesen Umständen scheint eine Monte-Carlo-Methode angebracht, die wir jetzt vorbereiten :

In (27) trennen wir die Winkelintegrationen ab, indem wir setzen

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= p_i \vec{e}_i ; & |\vec{e}_i| &= 1 \\ d\vec{p}_i &\equiv p_i^2 dp_i d\vec{e}_i \equiv p_i^2 \sin\theta_i d\theta_i dp_i \end{aligned} \quad (28)$$

dann wird

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{*(E, m_1 \dots m_n, \vec{P})} &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dp_1 \dots dp_n p_1^2 \dots p_n^2 (E - \sum \sqrt{p_i^2 + m_i^2}) \\ &\int \dots \int_{\text{Richtungen}} \delta(\vec{P} - \sum p_i \vec{e}_i) d\vec{e}_1 \dots d\vec{e}_n \end{aligned} \quad (29)$$

die Funktion

$$w_n(P, p_1 \dots p_n) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^n \int \dots \int_{\text{Richtungen}} \delta(\vec{P} - \sum p_i \vec{e}_i) d\vec{e}_1 \dots d\vec{e}_n \quad (30)$$

hat eine einfache Bedeutung: $w_n(P, p_1 \dots p_n) d\vec{P}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass n Vektoren gegebener Längen $p_1 \dots p_n$ aber statistisch verteilter Richtungen $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ sich zu einem resultierenden Vektor $\sum \vec{e}_i p_i$ zusammensetzen, der in $d\vec{P}$ liegt. Diese Bedeutung lässt sich aus (30) unmittelbar ablesen, der Faktor $\left(\frac{1}{4\pi}\right)^n$ dient zur Normierung, so dass

$$\int w_n(P, p_1 \dots p_n) d\vec{P} = 4\pi \int_0^\infty P^2 w_n(P, p_1 \dots p_n) dP = 1 \quad (31)$$

Aus der anschaulichen Bedeutung von w_n ergibt sich ohne Rechnung

$$w_n(0, p_1 \dots p_n) = w_{n-1}(p_j, p_1 \dots \cancel{p_j} \dots p_n) ; \quad j = 1 \dots n \quad (32)$$

so dass es genügt, $w_n(0, p_1 \dots p_n)$ zu berechnen.

Durch Einführen der Fourierdarstellungen der δ -Funktionen in (30) kann man w_n analytisch ausrechnen. Man findet ¹²⁾ $\overline{\text{sg}(x)} = \text{Vorzeichen von } \underline{x}$

$$w_n(0, p_1, \dots, p_n) = -\frac{1}{(n-3)! 2^{n+1} \cdot \pi} \cdot \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n} \left[\sum_{\sigma} \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_n \cdot \text{sg} \left(\sum_i \sigma_i p_i \right) \left(\sum_i \sigma_i p_i \right)^{n-3} \right] \quad (33)$$

wobei $\sigma_i = \pm 1$ (ausser $\sigma_1 \equiv 1$) und über alle 2^{n-1} möglichen Vorzeichenkombinationen $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ zu summieren ist - eine schöne Übungsaufgabe für das Programmieren von Rechenautomaten (natürlich soll w_n in möglichst kurzer Zeit ausgerechnet werden!).

Wir sehen $w_n(P, p_1, \dots, p_n)$ als gegeben an.

Durch Einführen der Energien und neuer Abkürzungen

$$\varepsilon_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \quad ; \quad p_i = \sqrt{\varepsilon_i^2 - m_i^2}$$

$$v_n(P, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = w_n(P, p_1, \dots, p_n) \quad (34)$$

$$u_i(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - m_i^2} & \text{für } \varepsilon > m_i \\ 0 & \varepsilon \leq m_i \end{cases}$$

erhalten wir im Schwerpunktsystem ($P = 0$) aus (29)

$$\mathcal{P}^*(E, m_1, \dots, m_n, 0) = (4\pi)^n \int_{m_1}^{\infty} d\varepsilon_1 \dots \int_{m_n}^{\infty} d\varepsilon_n u_1(\varepsilon_1) \dots u_n(\varepsilon_n) v_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \cdot \delta(E - \sum \varepsilon_i) \quad (35)$$

Jetzt gehen wir zu kinetischen Energien über :

$$t_i = \varepsilon_i - m_i \quad ; \quad M = \sum m_i \quad ; \quad E - M = T \quad (36)$$

und erhalten

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho^{*(E, m_1 \dots m_n, 0)} = (4\pi)^n \int_0^\infty dt_1 \dots \int_0^\infty dt_n \varphi(t_1 \dots t_n) \delta(T - \sum t_i) \text{ mit} \\ \varphi(t_1 \dots t_n) = u_1(t_1 + m_1) \dots u_n(t_n + m_n) \cdot v_n(0, t_1 + m_1, \dots, t_n + m_n). \end{array} \right. \quad (37)$$

Zuletzt stellen wir die t_i als Differenzen von Grössen T_i dar :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = T_1 \\ t_2 = T_2 - T_1 \\ \vdots \\ t_n = T_n - T_{n-1} \end{array} \right. \quad (38)$$

Damit wird aus (37)

$$\varrho^{*(E, m_1 \dots m_n, 0)} = (4\pi)^n \int_0^\infty dT_1 \int_{T_1}^\infty dT_2 \dots \int_{T_{n-2}}^\infty dT_{n-1} \int_{T_{n-1}}^\infty dT_n \varphi(T_1, T_2 - T_1, \dots) \times \delta(T - T_n)$$

Durch Integration über T_n folgt

$$\boxed{\varrho^{*(E, m_1 \dots m_n, 0)} = (4\pi)^n \int_0^T dT_1 \int_{T_1}^T dT_2 \dots \int_{T_{n-2}}^T dT_{n-1} \varphi(T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1})} \quad (39)$$

wo φ mit Hilfe von (37) und (34) berechnet werden kann.

Auf die Formel (39) wenden wir eine Monte-Carlo-Methode an : Wir wählen $n-1$ im Intervall 0 bis T gleichmässig (d.h. mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte) verteilte Zufallszahlen und benennen sie der Grösse nach :

$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_{n-1}$. Einen solchen Satz von $n-1$ Zufallszahlen nennen wir eine geordnete Stichprobe. Wir behaupten nun : Wenn N solche geordneten Stichproben

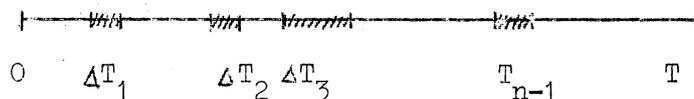
$$\left\{ T_1^{(i)}, T_2^{(i)}, \dots, T_{n-1}^{(i)} \right\} ; \quad i = 1 \dots N$$

genommen werden, so ist

$$\int_0^T dT_1 \int_{T_1}^T dT_2 \dots \int_{T_{n-2}}^T dT_{n-1} \phi(T_1, T_2 - T_1, \dots) = \quad (40)$$

$$= \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(T_1^{(i)}, T_2^{(i)} - T_1^{(i)}, \dots, T_n^{(i)} - T_{n-1}^{(i)})$$

Um (40) zu beweisen bemerken wir, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die i -te geordnete Stichprobe in die Zellen (siehe Figur) $\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_{n-1}$ fällt, gegeben ist durch



$$(n-1)! \cdot \frac{\Delta T_1}{T} \cdot \frac{\Delta T_2}{T} \dots \frac{\Delta T_{n-1}}{T} = \frac{(n-1)!}{T^{n-1}} \cdot \Delta T_1 \Delta T_2 \dots \Delta T_{n-1}$$

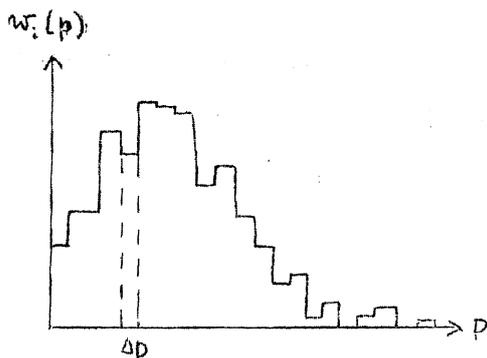
N mal diese Wahrscheinlichkeit gibt die Gesamtzahl der geordneten Stichproben, die in genau diese Zellen fallen und alle diese liefern (wenn alle $\Delta T_j \rightarrow 0$) denselben Wert von ϕ . Da ferner $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T$ ist, würden wir die Summe $\sum_{i=1}^N \phi_i$ berechnen als

$$\sum_{i=1}^N \varphi(T_1^{(i)} \dots) \approx N \cdot \frac{(n-1)!}{T^{n-1}} \int_0^T dT_1 \int_{T_1}^T dT_2 \dots \int_{T_{n-2}}^T dT_{n-1} \cdot \varphi(T_1 \dots)$$

womit (40) bewiesen ist, da im Limes $N \rightarrow \infty$ das Gleichheitszeichen gilt.

Damit ist auch prinzipiell klar, wie man auf einem Rechenautomaten φ^* berechnet: Man stellt einen Satz Zufallszahlen her und berechnet φ . Das tut man sehr oft und addiert gemäss (40) alles auf. Zweckmässigerweise lässt man N offen und berechnet (40) für mehrere Sätze S_K von je N_0 Stichproben, die jeweils ein etwas anderes φ_K^* ergeben. Der Mittelwert $\bar{\varphi}^*$ all dieser φ_K^* konvergiert gegen das "wahre" φ^* und aus den Abweichungen $\sum_K (\varphi_K^* - \bar{\varphi}^*)^2$ lässt sich der wahrscheinliche Fehler bestimmen. Diese Probe wird während der Rechnung stets nach jedem Satz von N_0 Stichproben (mit Ausnahme der ersten paar Sätze) durchgeführt und die Rechnung abgebrochen, sobald ein vorgeschriebener Minimalfehler unterschritten wurde (12), (22).

Die Spektren aller Teilchen werden hierbei automatisch mitberechnet, indem man jedem Teilchen eine Reihe von, sagen wir, 30 Speicherzellen zuteilt, die geeignet gewählten Impulsintervallen Δp entsprechen (nämlich so, dass $30 \cdot \Delta p$ der höchste einem einzelnen Teilchen erreichbare Impuls ist). Hat in der k -ten Stichprobe das Teilchen i (etwa Pion) den Impulswert $p_i^{(k)} = \sqrt{t_i^{(k)2} + 2t_i^{(k)}m_i}$ erhalten, so addiert die Maschine die Funktion $\varphi(T_1^{(k)} \dots)$ in diejenige der 30 Speicherzellen des i -ten Teilchens, in der $p_i^{(k)}$ liegt (also in die Zelle mit der Nummer $\lfloor p_i / \Delta p \rfloor$). Betrachten wir einmal eine feste Teilchensorte, so sehen wir, dass bei jeder Stichprobe die zugehörige Funktion φ in genau eine der für das Teilchen reservierten 30 Zellen Δp addiert wird. Am Ende der Rechnung erhält man in diesen Zellen ein Histogramm dessen Summe über alle



Zellen (bis auf triviale Faktoren) genau φ^* ist. In der Tat stellt jetzt, wie eine nähere Überlegung zeigt, dieses Histogramm das Spektrum des betreffenden Teilchen dar, d.h. eine Histogramm-Näherung für

$$w_i(p) = \text{const. } p_i^2 \cdot \varrho^*(E - \varepsilon_i, m_1 \dots m_n, p_i) \quad (41)$$

Diese Näherung enthält natürlich in der einzelnen Zelle grössere statistische Fehler als $\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0)$ selbst.

Diese Monte-Carlo-Methode liefert also in einem Rechengang den Faktor $\varrho^*(E, m_1 \dots m_n, 0)$ und die Spektren $w_i(p)$ aller Teilchen. Praktische Rechnungen zeigten, dass auf einer schnellen Maschine (Ferranti-Mercury bei CERN) Genauigkeiten von einigen Prozent in 1-15 Minuten (je nach Teilchenzahl) erreicht werden. Verlangt man, dass die Reaktionen mit grösstem Gewicht (grosses ϱ^*) genau zu berechnen sind (sagen wir auf 2%), so ergibt sich, dass die meisten anderen (deren ϱ^* viel kleiner ist) nur noch auf 10% oder noch viel weniger genau bestimmt werden müssen. So konnte man selbst Fälle wie 25 GeV (Lab) pp-Stösse, zu denen etwa 600 Reaktionen beitragen, in etwa 50-100 Stunden Rechenzeit vollständig erledigen, während bei 6.2 GeV nur 8 Stunden benötigt wurden. Es würde aber aussichtslos sein, etwa > 100 GeV p-p-Stösse mit diesen Methoden anzugehen.

Die Brauchbarkeit der Methode scheint wesentlich darauf zu beruhen, dass die Zufallszahlen im Mittel zur Gleichverteilung der kinetischen Energie führen, d.h. fast alle Beiträge zum Integral werden dort berechnet, wo der Integrand sowieso ein steiles Maximum hat. Diese Methode entspricht also einer numerischen Integration, wo man die Intervalllänge dem Verlauf des Integranden anpasst: Kleine Intervalle an steilen Maxima, grosse dort, wo der Integrand klein oder langsam veränderlich ist.

2) Auswertung und Reduktion der berechneten Spektren und Phasenraumintegrale auf physikalische Aussagen.

Die nach der soeben beschriebenen Methode berechneten Spektren und Phasenraumintegrale haben noch keine direkte physikalische Bedeutung. Nehmen wir an, die Maschine liefere die auf eins normierten Spektren und die Werte der Phasenraumintegrale ϱ^* für jede Reaktion F:

$$\mathcal{S}_{\mathbb{F}}^* \quad \text{und} \quad w_i^{(\mathbb{F})}(p)$$

sind dann in Form von Lochstreifen gegeben, die für die Auswertung wieder in die Maschine eingelesen werden können. Sei $L_{\mathbb{F}}$ der Lochstreifen, der $\mathcal{S}_{\mathbb{F}}^*$ und die Spektren $w_i^{(\mathbb{F})}$ enthält.

Damit die Maschine $P(\mathbb{F})$ für alle \mathbb{F} berechnen kann, muss zusammen mit $L_{\mathbb{F}}$ eine Reihe von Daten eingelesen werden, die die nach (20) erforderlichen Informationen enthalten, nämlich für die Reaktion \mathbb{F} :

die Spins J_j aller Teilchen,

die Zahlen N_K gleicher Teilchen,

α, β, γ , also die Zahlen der Teilchen mit Isospins $1/2, 1, 3/2$,

T , den totalen Isospin,

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, die gewählten Wechselwirkungsvolumen und

n_1, n_2, n_3 , die zu ihnen gehörenden Teilchenzahlen.

Ferner müssen für jede Teilchensorte (einschliesslich instabiler Teilchen) wieder je 30 Zellen für das Spektrum reserviert werden. Das Auswerteprogramm ¹⁶⁾¹⁷⁾ sorgt jetzt dafür, dass das Lochband $L_{\mathbb{F}}$ mit zugehörigen Interpretationsdaten eingelesen, $P(\mathbb{F})$ nach (20) berechnet und alle (auf eins normierten) Spektren $w_i^{(\mathbb{F})}$ mit $P(\mathbb{F})$ multipliziert werden, was $P(\mathbb{F}, p_i)$ ergibt [siehe (21)]. Das Band mit den Interpretationsdaten enthält noch die Angaben, an welcher Stelle im Speicher $P(\mathbb{F}, p_i)$ abgelegt werden soll. Das geschieht additiv, nachdem noch mit $n_i^{(\mathbb{F})}$, der Zahl der Teilchen i in der Reaktion \mathbb{F} , multipliziert wurde. Ferner wird $P(\mathbb{F})$ ausgedruckt und $\sum P(\mathbb{F})$ abgespeichert.

Sind so alle Reaktionen $L_{\mathbb{F}}$ mit zugehörigen Interpretationsdaten eingelesen, so befinden sich alle in (22) bis (24) definierten Grössen praktisch fertig zum Ausdrucken im Speicher. Man muss nur die Spektren noch normieren und mittlere Energien berechnen. Schliesslich kann man einige der Spektren, die instabilen Teilchen entsprechen, "zerfallen" lassen, wobei (18) benutzt wird. Wenn das geschehen ist, kann man die Spektren noch durch ein geeignetes Interpolationsverfahren glätten, um die Reste der statistischen Schwankungen

zu beseitigen. Da die Spektren (je nach Teilchenmasse) sehr verschiedene Form haben können, ist das nicht einfach. Man darf zur Interpolation nicht zu hohe Ordnungen (von Polynomen, Fourierreihen oder anderen geeigneten orthogonalen Systemen) zulassen, da sonst die statistischen Schwankungen reproduziert werden. Andererseits kann man Kurvenscharen mit stark wechselnden Formen nicht durch Interpolationen niedriger Ordnung gut annähern. Daher ist es zweckmässig, durch geschickt gewählte Transformationen alle Spektren auf eine Art "Einheitsform" zu bringen, dann zu glätten und nachher wieder zurückzutransformieren. Das alles muss natürlich automatisch (ohne Eingriff eines menschlichen Beobachters) geschehen. Das heisst : Das Unterprogramm für Interpolation muss die Spektren auf ihre Form prüfen und individuell jedem Spektrum "seine" Transformation zurechnen, die es der gewünschten "Normalform" möglichst nahe bringt, muss diese Normalform glätten und dann wieder zurücktransformieren.

Nachdem all diese Operationen ausgeführt sind, lässt man ausdrucken und erhält nur noch eine gut übersehbare Menge physikalischer Daten.

Das soeben in grossen Zügen beschriebene Auswerteprogramm muss auf das Monte-Carlo-Programm abgestimmt sein. Eine genaue Beschreibung findet sich in 16), 17).

D. Anwendungen

Die beschriebenen Methoden der statistischen Theorie sind bisher zur Berechnung folgender Fälle benutzt worden (Energie immer im Laborsystem)

pp-Stösse bei 2.75 GeV kinetischer Primärenergie	3), 7)
pp-Stösse bei 6.25 " " "	8), 29)
pp-Stösse bei 25 " " "	18)
NN-Vernichtung in Ruhe	21), 22)

Beim Vergleich der Rechnungen mit Experimenten stellt man Folgendes fest :

- 1) Bei 2.75 GeV erhält man für das Verhältnis der Häufigkeiten der Erzeugung von 0,1,2,3,4 Pionen gute Übereinstimmung mit dem Experiment, wenn das Nukleon-Isobar ($m^*=1.31$, $T=J=3/2$) als instabiles Teilchen behandelt wird; dagegen ist die Übereinstimmung schlecht, wenn man das Isobar fortlässt [Tabelle 1] :

TABELLE 1
(entnommen aus ⁷)

Endzustand	Wahrscheinlichkeit in Prozenten		
	ohne Isobar	mit Isobar	Experimentell
2N	7.13	2.4	unbekannt (klein)
2N+ π	63.9	30.3	36
2N+2 π	26.9	48.4	48
2N+3 π	1.8	18.5	16
2N+4 π	0.02	0.4	unbekannt (klein)

Die Tabelle zeigt, wie gross der Einfluss des Nukleonisobars ist. Das ist nicht selbstverständlich, denn die Lebensdauer ist von derselben Grössenordnung wie die Reaktionszeit : $\sim 10^{-22}$ sec. Man wird also dieses Isobar bei allen Rechnungen berücksichtigen, sein Wechselwirkungsvolumen sollte dem für Nukleonen und Pionen etwa gleich sein.

- 2a) Bei 6.25 GeV findet man für die Produktion von Antiprotonen die richtige Grössenordnung $\frac{\langle n_{\bar{p}} \rangle}{\langle n_{\bar{\lambda}} \rangle} \approx 10^{-5}$, wenn man für Antinukleonen dasselbe Wechselwirkungsvolumen Ω nimmt wie für Nukleonen und Pionen. Man könnte meinen, dass an der Antinukleonenproduktion vorzugsweise der "core" beteiligt und daher ein entsprechend kleines Ω zu nehmen sei. Dies führt zum Widerspruch

mit dem Experiment. Das lässt vermuten, dass die Nukleon-Antinukleon-Wechselwirkung von der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung nicht sehr verschieden ist und der beobachtete grössere totale Wirkungsquerschnitt für $N-\bar{N}$ -Stösse im Wesentlichen vom grossen Phasenraum für Vernichtung herrührt.

2b) Bei 6.2 GeV findet man die richtigen Verhältnisse für die Häufigkeit von Ereignissen mit 2,4,6 usw. erzeugten geladenen Teilchen und die richtige totale Zahl pro Ereignis ^{8),20)}. Die Spektren werden aber nicht gut wiedergegeben. Durch Einführen eines $\pi-\pi$ -Resonanzzustandes ("Pion-Isobar" in Analogie zum Nukleonisobar), der aus ganz anderen Gründen (Nukleonstruktur, Paarvernichtung) schon gefordert wurde und durch Berücksichtigung "nichtzentraler" Stösse konnte man die Übereinstimmung verbessern ^{20),23),24)}. Wir kommen darauf zurück.

2c) Über die Produktion von K Mesonen und Hyperonen ist nur für einige Winkel im Laborsystem etwas bekannt. Die Rechnungen in ⁸⁾ gelten für das Schwerpunktsystem, eine Transformation auf das Laborsystem wurde nicht durchgeführt. Es scheint aber, dass die Produktion von "strange particles" richtig wiedergegeben wird (Grössenordnung), wenn man $\Omega_2 = (1/2 \text{ bis } 1/5) \cdot \Omega_\pi$ setzt und für die K-mesonen reserviert, während für die Hyperonen Ω_π zu nehmen ist. Mit diesen Werten erhält man anscheinend auch Übereinstimmung mit Experimenten bei 25 GeV.

3) Nachdem die Wechselwirkungsvolumen an Experimenten bei niedriger Energie ungefähr festgelegt sind, kann man bei höheren Energien Voraussagen machen, die von Interesse für die Planung von Experimenten sind. Aus diesem Grunde wurde bei 25 GeV eine Rechnung für das CERN Proton-Synchrotron durchgeführt. Experimentelle Ergebnisse liegen noch kaum vor, da am 25 GeV-Proton-Synchrotron in CERN bisher keine Wasserstoff-targets benutzt wurden. Trotzdem hat man die Rechnungen (nach Transformation ins Laborsystem) mit Messungen verglichen und qualitative Übereinstimmung gefunden, die teils gut,

teils schlecht ist. Es scheint aber, dass die Abweichungen im Wesentlichen damit erklärt werden können, dass Eisen oder Aluminium statt Wasserstoff als Targetmaterial benutzt wurde. [sekundäre Reaktionen (Kernkaskaden), Nukleonenbewegung im Kern, schlecht definiertes Schwerpunktsystem, etc.]. Die einzige (auf dem Umweg über Kernemulsionen) an Nukleonen gemessene Zahl ist: Pro Ereignis verlassen im Mittel 4.02 (alle Stösse) bzw. 4.68 (pp-Stoss) geladene Teilchen die Reaktion (private Mitteilung von H. Winzeler, Bern), während man für pp-Stösse 4.6 - 4.7 aus der Theorie¹⁸⁾ erhält. Der Wert 4.02 ist ein Mittelwert über Sterne (ohne schwere Spuren) mit gerader und ungerader Zahl dünner Spuren, d.h. es sind p-p und p-n-Stösse beteiligt. Die Ladung im Anfangszustand ist also im Mittel etwa 1.5. Nach deren Abzug bleibt also 2.5 als mittlere Zahl der geladenen neu erzeugten Teilchen. Mittelt man nur über gerade Spurenzahl (p-p-Stösse), so hat man 4.68. Hier bekommt man nach Abzug der Ladung 2 des Anfangszustande als Zahl der erzeugten geladenen Teilchen 2.68, während der theoretische Wert zwischen 2.5 und 2.8 liegt - je nach Grösse von Ω_K . Nimmt man für Ω_K den jetzt wahrscheinlichsten Wert $\Omega_K = (1/2 \text{ bis } 1/5) \cdot \Omega_p$, so folgt für die Zahl der erzeugten geladenen Teilchen 2.6 bis 2.7 [siehe Fig.2].

Interessant wäre die Antinukleon- und Hyperonproduktion. Man findet in der Tat etwa die vorausgesagte Antinukleonenzahl, wenn man in Rechnung stellt, dass ein grosser Teil der Antinukleonen in demselben Kern vernichten kann, in dem sie erzeugt wurden. Das Verhältnis $\langle n_{K^+} \rangle : \langle n_{K^-} \rangle$ sollte weniger als jenes von $\langle n_p^- \rangle : \langle n_{\pi^-} \rangle$ durch die Anwesenheit von Kernmaterie beeinflusst werden, d.h. es sollte auch bei Metalltargets einen Wert haben, der dem für pp-Stösse berechneten nahe kommt. Man findet experimentell bei einem K-Impuls von 2 GeV/c und einem Winkel von 18° (Laborsystem)

$\langle n_{K^+} \rangle : \langle n_{K^-} \rangle \approx 2 \text{ bis } 3$ (private Mitteilung von N.H. Lipman, CERN), während die Rechnung nach Transformation ins Laborsystem²⁵⁾

folgende Zahlen ergibt: Bei 10° hat man 3,5, bei 20° findet man 3.85. Da beim Experiment auch p-n-Stösse beitragen, kann man verstehen, dass der gemessene Wert unter dem (für p-p) gerechneten liegt.

Erst mit Wasserstofftargets wird man die 25 GeV-Rechnungen wirklich prüfen können.

Dass und welche Abweichungen dabei auftreten werden (die sich bei 6.2 GeV schon andeuteten) wird weiter unten diskutiert werden.

- 4) Die $p\bar{p}$ -Vernichtung in Ruhe hat seit je Kopfzerbrechen gemacht, denn die beobachteten Pion-zahlen waren um 5 verteilt, während man mit der statistischen Theorie etwa $\langle n_\pi \rangle \approx 3$ berechnete. Verschiedene Autoren haben es mit Gewalt versucht: Man kann auf $\langle n_\pi \rangle \approx 5$ kommen, wenn man statt $\Omega_\pi = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu}\right)^3$ ein mehr als 10 mal grösseres Ω_π nimmt. Da aber bei der p-p Wechselwirkung die Pionerzeugung gut wiedergegeben wird und dort ein zehnmal grösseres Ω_π nicht tragbar ist, scheint diese Lösung widerspruchsvoll. F. Cerulus^{21), 22)} hat daher den von anderen Autoren [Literatur siehe²¹⁾] in anderem Zusammenhang vorgeschlagenen $\pi-\pi$ -Resonanz-zustand π^* ($m \approx 4\mu$, $J=T=1$) als instabiles Teilchen in die statistische Theorie der Paarvernichtung aufgenommen. Dann war es möglich, die richtige Pion-zahl mit dem "natürlichen" Wechselwirkungsvolumen $\frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu}\right)^3$ zu erreichen. Auch die Spektren, der Anteil von K-Paaren²²⁾ und die Häufigkeiten von 2:4:6-Spuren Ereignissen werden gut wiedergegeben. Das 2-Spuren Spektrum hat am oberen Ende (≈ 800 MeV kin. Energie des Pions) ein scharfes Maximum, herrührend von dem direkt erzeugten π in $p+\bar{p} \rightarrow \pi^* + \pi$ und ein weiteres Maximum von $p+\bar{p} \rightarrow \bar{\pi} + \pi$. Während letzteres immer da ist, gibt es das erstere nur, wenn π^* existiert. Seine Lage und Breite ist durch die "Masse" und Resonanzbreite (Lebensdauer) des Teilchens " π^* " gegeben. Experimentell liegen Anzeichen für ein solches Maximum vor, jedoch kann es sich um eine statistische Schwankung handeln; zur Zeit ist noch keine Entscheidung möglich. Das Pion-isobar hat auch Winkelkorrelationen zur Folge.

Da es hier nicht möglich ist, auf Einzelheiten einzugehen und viele berechenbare Grössen experimentell kaum untersucht sind, sollen nur noch zwei Beispiele angeführt werden, die gewisse Ergebnisse der Rechnungen zusammenfassen¹⁸⁾ (p-p Stösse):

In Figur 1 ist die Grösse $\frac{C - \pi^\pm}{C}$ als Funktion der Energie aufgetragen. C ist die Gesamtzahl geladener Teilchen, die das Reaktionszentrum verlässt (einschliesslich der eingebrachten Ladung 2) und π^\pm die Zahl der geladenen Pionen. Demnach ist $\frac{C - \pi^\pm}{C}$ das Verhältnis der Zahl solcher geladenen Teilchen, die keine Pionen sind, zur Zahl aller geladenen Teilchen.

In der nächsten Figur findet sich $C-2$ als Funktion der Energie.

E. Diskussion

Der soeben gegebene Überblick zeigt, dass die statistische Theorie in ihrer jetzigen Form manche experimentellen Fakten wiedergeben kann und das umso besser, je integraler die berechneten Grössen definiert sind. Absolute Teilchenzahlen (pro Ereignis) kommen ziemlich genau heraus. Spektren weniger gut. Offenbar sind auch die niedrigen (< 2 GeV) und hohen (> 25 GeV) Energien nicht günstig: Bei den niedrigen spielen Details der Endzustände eine Rolle, die in der statistischen Theorie nicht behandelt werden (siehe aber eine Arbeit von B.R. Desay²⁶⁾, in der Auswahlregeln für $\bar{N}N$ -Vernichtung mit der statistischen Theorie vereinigt werden) und bei den höheren scheinen geometrische Effekte (Stossparameter, Inelastizität) wichtig zu werden. Diese letzteren Effekte, mit denen wir uns jetzt etwas beschäftigen wollen, beruhen darauf, dass bei wachsender Energie die Nukleonen im Schwerpunktsystem immer platter werden (Lorentzkontraktion). Ihre relative Geschwindigkeit ist praktisch immer die Lichtgeschwindigkeit. Daher nimmt die Zeit, während der sie miteinander im Kontakt sind, mit steigender Energie (d.h. mit zunehmender Abplattung) immer mehr ab. Die Wechselwirkung pflanzt sich aber senkrecht zur Bewegungsrichtung höchstens mit Lichtgeschwindigkeit durch das Nukleon fort. Wenn der Stoss nicht zentral war, so kann es sein, dass die Kontaktzeit zu kurz war, als dass die Wechselwirkung sich über das ganze Volumen hätte ausdehnen können. Dann trennen sich beide Nukleonen vor Erreichung eines Gleichgewichts und es entstehen zwei Zentren, die jedes für sich ein Gleichgewicht anstreben und dann einzeln durch die statistische Theorie beschrieben werden sollten²⁷⁾. Das würde zwei Effekte erklären :

- Erstens wird wegen der zu kurzen Kontaktzeit die Geschwindigkeit nur teilweise abgebremst und in Anregungsenergie verwandelt. Jedes Zentrum behält noch einen unter Umständen beträchtlichen Anteil kinetischer Energie und nur der Rest kann als Anregungsenergie zur Produktion von Teilchen benutzt werden. Die Inelastizität wird also bei fester Energie mit wachsendem Stossparameter und bei festem Stossparameter mit wachsender Energie kleiner werden.
- Zweitens bewegen sich die beiden Zentren. Wenn jedes in seinem Ruhesystem isotrop emittiert, so ergibt sich im gemeinsamen Schwerpunktsystem eine Vorwärts-Rückwärtsanisotropie.

Stöße, bei denen - bei gegebener Energie - der Stossparameter so klein bleibt, dass die Wechselwirkung sich während der Kontaktzeit über beide Nukleonen ausdehnen kann, dürfen mit der vorliegenden Theorie als "Zentrale Stöße" behandelt werden. Man sieht, dass die Definition von "Zentral" energieabhängig ist. Nach obigen Überlegungen liest man aus Fig. 3 ab:

Der Nukleon-durchmesser ist $d \approx \frac{2}{\gamma\mu}$ mit $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{E}{2}$, wenn E die totale Energie im Schwerpunktsystem ist ($M=1$!). Die Kontaktzeit ist also $t \approx \frac{2}{\gamma\mu}$ und wenn $b > t$ ist, kann die Wechselwirkung nicht beide Nukleonen ganz erfassen. Man hat also die Bedingung für "zentralen Stoss" :

$$b \lesssim b_0 = \frac{2}{\gamma\mu} = \frac{4}{\mu E} \quad (42)$$

Da der Nukleondurchmesser $\frac{2}{\mu}$ das natürliche Mass ist, finden wir für

$$\frac{\sigma_{\text{zentral}}}{\sigma_{\text{geometr.}}} = \frac{b^2}{(2/\mu)^2} \lesssim \left(\frac{2}{E}\right)^2 \quad (43)$$

Man findet folgende Werte :

$E_{\text{Lab,kin}} [\text{GeV}]$	2.75	6.2	25
E	3.14	4.15	7.58
σ_z / σ_g	0.4	0.23	0.07

Diese Überlegungen zeigen, dass man versuchen sollte, bei gegebener Energie nur die "zentralen" Stösse mit der vorliegenden Theorie zu beschreiben. Dann muss man für die grösseren Stossparameter ein zwei-Zentren-Modell ²⁷⁾ benutzen. Die Anregungsenergie ΔE würde man etwa proportional dem Volumen setzen, über das die Wechselwirkung sich während der Kontaktzeit ausbreiten kann. Dann wäre

$$\Delta E \approx \frac{\Delta V}{V} \cdot (E-2) = K(b,E) \cdot (E-2) \quad (44)$$

(Nukleon-Nukleon-Stoss)

Der Rest, $E-2 - \Delta E$, ist die kinetische Energie der beiden Zentren, womit (unter der Annahme, dass keine nennenswerte Richtungsänderung stattfindet) die Transformation vom Ruhssystem der Zentren auf das Schwerpunktsystem vollständig und die Winkelverteilung fast vollständig festgelegt sind. $\frac{\Delta E}{E-2}$ ist im Wesentlichen die Inelastizität.

Ein einfaches Modell kann qualitativ zeigen, was dabei zu erwarten ist. Nehmen wir an, die Nukleonen seien homogene Kugeln ^{*)} mit dem Radius $r = \frac{1}{\mu}$. Wir bezeichnen mit ΔV das gesamte (eng- und weit-) schraffierte Gebiet in Fig. 4 und berechnen ΔV unter der vereinfachenden Annahme, dass dieses Gebiet eine Kugelkalotte der Höhe $a = 2r - b + b_0$ sei. Aus elementaren Formeln folgt dann

$$K(b,E) = \frac{\Delta V}{V} = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 2r \\ \left[1 - \frac{b-b_0}{2r}\right]^2 \cdot \left[1 + \frac{b-b_0}{r}\right] & \text{für } b_0 \leq b \leq 2r \\ 1 & \text{für } 0 \leq b \leq b_0 \end{cases} \quad (45)$$

$$b_0 = \frac{4r}{E} ; \quad r = \frac{1}{\mu} = \text{"Nukleonradius"}$$

*) Natürlich sollte man, wenn dieses Modell zu quantitativen Rechnungen benutzt wird, die Nukleonstruktur berücksichtigen.

$\Delta E = (E-2) \cdot K(b,E)$ ist die zur Teilchenerzeugung angebotene Energie. Wir nennen $K(b,E)$ die "angebotene Inelastizität". Für höhere Energien wird sie der experimentellen Inelastizität nahe kommen.

Nachdem $K(b,E)$ durch ein Modell festgelegt ist, kann man bei gegebener Energie E die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W(K,E)dK = 2\pi b(K,E) \frac{db(K,E)}{dK} dK \quad (46)$$

durch Umkehrung von (45) berechnen. Da mit $K(b,E)$ die kinetische und Anregungsenergie der Zentren festgelegt ist, kann man auf jedes Zentrum (etwa unter Annahme der Gleichverteilung der Anregungsenergie : $\frac{\Delta E}{2}$ je Zentrum) die statistische Theorie anwenden und auf das gemeinsame Schwerpunktsystem zurücktransformieren. Das ergibt für jedes b eine Impuls- und Winkelverteilung, Multiplizität usw. Zuletzt hat man über alle b (bzw. nach (46) über alle K) zu integrieren, kann aber auch mit (46) Wahrscheinlichkeitsverteilungen angeben. Mit der in dieser Arbeit beschriebenen Technik scheint das für höhere Energien aussichtslos, da die erforderlichen Rechnungen zu lang werden. Bei 6.2 GeV ist eine derartige Rechnung mit Erfolg durchgeführt worden²⁰⁾; wir kommen darauf zurück.

Wir wollen aus (45) nur eine Folgerung ziehen, nämlich die (über alle Stossparameter b) gemittelte "angebotene" Inelastizität $\bar{K}(E)$ berechnen. Offenbar ist

$$\bar{K}(E) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2r} 2\pi b db \cdot K(b,E) \quad (47)$$

Man erhält mit (45)

$$\bar{K}(E) = \frac{1}{4\pi r^2} \left[\pi b_0^2 + \int_{b_0}^{2r} 2\pi b db \cdot K(b,E) \right] ; \quad b_0 = \frac{4r}{E} \quad (48)$$

Man sieht, dass $\bar{K}(E)$ eine Funktion ist, die von $E = E_{\min} = 2$ an stetig abfällt. Sie erreicht einen konstanten Wert, wenn $E \rightarrow \infty$, also $b_0 \rightarrow 0$ geht, da dann nur das Integral übrig bleibt. Man erhält aus (45)

$$\bar{K}(E) = \frac{3}{20} + \frac{1}{E} \left[1 + \frac{4}{E} \left[\left(1 - \frac{1}{E}\right)^2 + \frac{4}{5E^3} \right] \right], \quad E \geq 2 \quad (49)$$

Für kleine Energien sollte man $\bar{K}(E)$ nicht mit der experimentellen Inelastizität vergleichen, bei sehr grossen Energien erhält man $\bar{K}(E) = 0.15 + \frac{1}{E}$, was der in kosmischer Strahlung gefundenen Verteilung nicht widerspricht (v. Lindern, private Mitteilung).

Wir wollen die Sache hier nicht weiter verfolgen. Es sollte nur angedeutet werden, dass an dem naiven Bild doch etwas Richtiges sein möchte.

Die soeben gegebenen Überlegungen zur Inelastizität als Funktion von Energie und Stossparameter klären auch einen weiteren Punkt auf, nämlich die Diskrepanz zwischen N-N Stössen und N-N̄-Vernichtung in Ruhe.

Wir hatten erwähnt, dass mit Benutzung eines π - π -Resonanzzustandes die N-N̄-Vernichtung in Ruhe in Übereinstimmung mit dem Experiment beschrieben wird (21), (22).

Konsequenterweise sollte dieses π^* -"Teilchen" auch bei N-N-Wechselwirkung eingeführt werden. Dann werden, wie eine Rechnung bei 6.2 GeV zeigte, die Multiplizitäten höher als die experimentellen. Eine Berücksichtigung der nichtzentralen Stösse (nach der Tabelle hinter (43) also $\approx 76\%$) mit ihren kleineren Inelastizitäten würde das wieder ausgleichen und zudem eine Winkelverteilung liefern. Führt man das (45) zugrunde liegende Modell quantitativ durch (20), so ergibt sich, dass für die nichtzentralen Stösse die Anregungsenergie gerade ausreicht, um die sich bewegenden Zentren in den ersten N- π -Resonanzzustand zu versetzen, also entweder N^*+N^* oder $N+N^*$ oder $N+N$ zu erzeugen. Die Autoren vernachlässigen alle anderen Anregungszustände in diesem Energiegebiet (der Erfolg des Lindenbaum-Sternheimer-Modells (6) bei $\lesssim 1$ GeV Primärenergie rechtfertigt das) und führen ferner das Verhältnis $\sigma_{\text{zentral}}/\sigma_{\text{geom}}$ als Parameter ein (der die Grössenordnung 0,23 haben sollte). Multiplizität, Häufigkeit der Ereignisse mit 2,4,6 Spuren, mittlere Energien und Winkelverteilung

werden berechnet. Die experimentellen Ergebnisse ^{28),29)} stimmen untereinander nicht völlig überein. Daher ist in Einzelheiten noch kein Vergleich möglich, doch kann man die Zahl der geladenen erzeugten Teilchen und die Inelastizität mit $\sigma_{\text{zentr}}/\sigma_{\text{geom}} \approx 0.5$ richtig wiedergeben. Damit ist der einzige freie Parameter bestimmt. Das Verhältnis der Ereignisse mit 2,4,6 Spuren kommt dann richtig heraus, ebenso die mittleren kinetischen Energien. Dabei scheint die Anwesenheit eines Pion-Isobars π^* ($J=T=1$; $m \approx 4\mu$) wesentlich zu sein.

Diese explizite Rechnung, die leider mit den z.Zt. vorhandenen Methoden kaum für höhere Energie durchführbar ist, zeigt, dass hier wenigstens eine Möglichkeit liegt, weiterzugehen. Es ist eine Frage der technischen Durchführung. Die hier beschriebene Methode bleibt ganz im Rahmen der statistischen Theorie. Eine wesentlich detailliertere Behandlung, aber auch noch im Rahmen der statistischen Theorie findet sich in ^{23),24)}.

Schliesslich kann man versuchen, die peripheren Stösse ganz aus der statistischen Theorie zu lösen und mit den üblichen Methoden der Pionphysik zu behandeln ³⁰⁾. Dann ist die Zusammenfügung der beiden Methoden eine noch ungelöste Aufgabe.

Nach dem Gesagten scheint es merkwürdig, dass bei 25 GeV die durchgeführten Rechnungen ¹⁸⁾ nicht völlig falsche Ergebnisse liefern. Entweder ist unsere Schätzung von $\sigma_{\text{zentral}}/\sigma_{\text{geom}}$ zu pessimistisch - worauf das Ergebnis der Untersuchung bei 6.2 GeV ²⁰⁾ hinweist *) - oder die Behandlung aller Stösse als zentral (wie in ¹⁸⁾ geschehen) überschätzt die Multiplizitäten in solcher Weise, dass damit die Vernachlässigung des Pion-Isobars π^* und höherer Anregungszustände der Nukleonen kompensiert wird. Vermutlich wirken sogar beide Ursachen gemeinsam. Hier bleiben, teilweise wegen der schwierigen experimentellen Situation, viele Fragen offen.

Der vorliegende Bericht beschreibt im Wesentlichen die bei CERN in den letzten beiden Jahren gewonnenen Ergebnisse. Wir wollen - ohne ins Einzelne zu gehen, was den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde - wenigstens erwähnen,

*) Auch im ²³⁾ wird eine optimistischere Annahme gemacht, bei der die Nukleonstruktur eine Rolle spielt: Alle den "core" treffenden Kollisionen gelten als zentral.

dass seit der Entwicklung von Beschleunigern, die in die Gegend von 10 GeV und mehr vordringen, an allen Orten, wo solche Maschinen stehen, an ähnlichen Fragen gearbeitet wird, vor allem in Dubna (U.S.S.R.).

Meinen Kollegen bei CERN, besonders den Herren F. Cerulus und J. von Behr bin ich für enge Zusammenarbeit dankbar.

* * * * *

LITERATUR

Das hier gegebene Verzeichnis ist alles andere als vollständig. Es wurde nur die Literatur angeführt, die in engerem Zusammenhang mit den Inhalt dieses Berichts steht.

- 1) E. Fermi, Progr. Theor. Phys. 5, 570 (1950).
- 2) Z. Koba und S. Takagi, Fortschritte d. Phys. 7, 1 (1959).
- 3) S.Z. Belenkij et al. Fortschritte d. Phys. 6, 524 (1958).
- 4) S.Z. Belenkij, Nucl. Phys. 2, 259 (1956/57).
- 5) J. Kowacs, Phys. Rev. 101, 397 (1956).
- 6) S.J. Lindenbaum und R.M. Sternheimer, Phys. Rev. 105, 1874 (1957).
- 7) F. Cerulus und R. Hagedorn, CERN 59-3 (Gelbe Serie der CERN-Publikationen).
- 8) R. Hagedorn, Nuovo Cimento 15, 246 (1960).
- 9) Y. Yeivin und A. de-Shalit, Nuovo Cimento 1, 1147 (1955).
- 10) V.S. Barashenkov und B.M. Barbashev, Suppl. Nuovo Cimento 7, 19 (1957).
- 11) M.M. Block, Phys. Rev. 101, 796 (1956).
- 12) F. Cerulus und R. Hagedorn, Suppl. Nuovo Cimento 9, 646 und 659 (1958).
- 13) G.E.A. Fialho, Phys. Rev. 105, 328 (1957).
- 14) R. Hagedorn, "A programme for calculating multiple phase space integrals ...", CERN 1959 (internal report 6381; auf Anforderung erhältlich).
- 15) V.S. Barashenkov, B.M. Barbashev, E.G. Bubelev und V.M. Maksimenko, Nuclear Phys. 5, 17 (1957).
- 16) R. Hagedorn, CERN 59-25 (Gelbe Serie).
- 17) R. Hagedorn, "Calculating high energy particle production ... on an electronic computer", CERN 1959 (internal report 7580/Th.62; auf Anfrage erhältlich).

- 18) R. Hagedorn, Nuovo Cimento 15, 434 (1960).
- 19) F. Cerulus, Suppl. Nuovo Cimento 15, 402 (1960).
- 20) J.v. Behr und F. Cerulus, Preprint 1960 CERN (Nuovo Cimento im Druck).
- 21) F. Cerulus, Nuovo Cimento 14, 827 (1959).
- 22) F. Cerulus, CERN 60-10 (Gelbe Serie).
- 23) V.S. Barashenkov, V.M. Maltsev, E.K. Mihul, Nucl. Phys. 13, 583 (1959).
- 24) V.S. Barashenkov, Nucl. Phys. 15, 486 (1960).
- 25) J.v. Behr und R. Hagedorn, CERN 60-20 (Gelbe Serie).
- 26) B. Desay, Preprint, Berkeley, 1960.
- 27) G. Cocconi, Phys. Rev. 111, 1699 (1958).
- 28) R.M. Kalbach, J.J. Lord und C.H. Tsao, Phys. Rev. 113, 330 (1959).
- 29) H. Winzeler, B. Klaiber, W. Koch, M. Nicolić und M. Schneeberger, (Bern, Preprint, 29.2.1960).
- 30) F. Salzmänn und G. Salzmänn (Preprint, Univ. of Colorado, Boulder, 14.4.1960).

ERLÄUTERUNG ZU DEN FIGUREN

Fig. 1

Bei 2.75 GeV und 6.2 GeV liegen die gerechneten Punkte praktisch auf den gemessenen. Die Kurve ist von Hand interpoliert, so dass sie durch alle gerechneten Punkte und die bei 25 GeV berechneten Grenzen geht (der Wert bei 25 GeV hängt noch von der Wahl Ω_K für K-mesonen etwas ab). Die Figur ist aus ¹⁸⁾ entnommen.

Fig. 2

Bei 2.75 und 6.2 GeV hat man Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Die Kurve ist durch diese Werte und zwischen den Grenzen (je nach Ω_K) für 25 GeV gezogen. Der Wert für etwa 300 GeV (Emulsion) ist im Einklang mit den gerechneten Werten. Der Wert bei 25 GeV (Winzeler, private Mitteilung) kann sich nur noch geringfügig ändern, er ist gemessen worden, nachdem die Kurve publiziert wurde und hier nachträglich in die aus ¹⁸⁾ entnommene Abbildung eingezeichnet worden.

Fig. 3

Zur Definition "zentraler" Stösse.

Fig. 4

Zur Inelastizität : Definition von $\frac{\Delta V}{V}$. Das engschraffierte Gebiet ist das der Überlappung während der Kollision; das weitschraffierte ist das Gebiet, in das die Wechselwirkung während der Kontaktzeit $2r/\gamma$ eindringt.

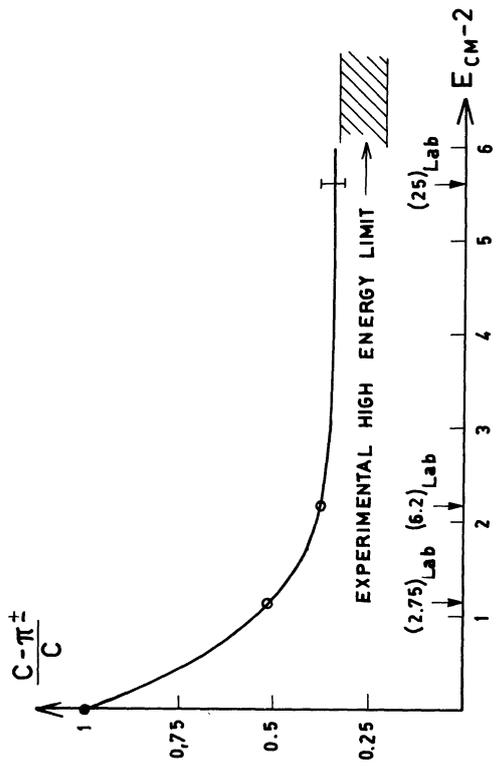


Fig. 1

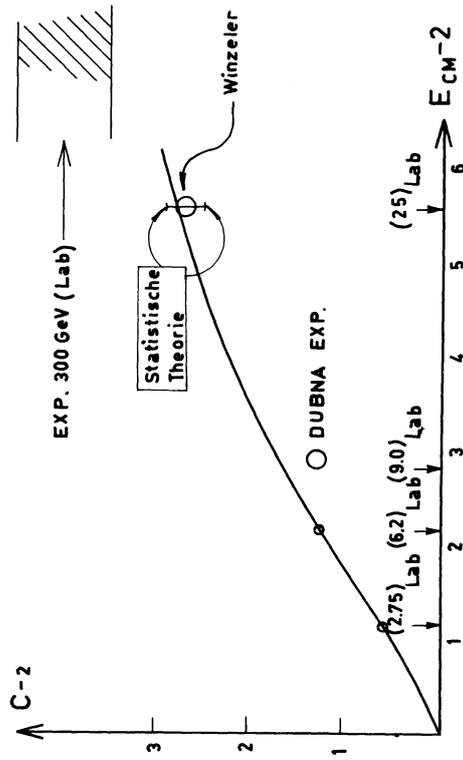


Fig. 2

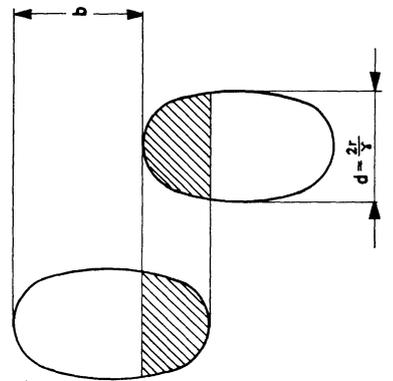


Fig. 3

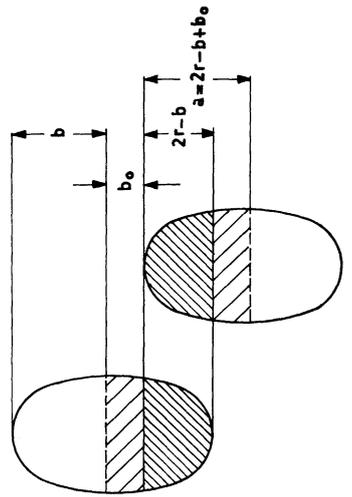


Fig. 4

$\psi(x), \psi(x_e) = 0, \quad e = \dots, \quad \text{to a staj'a}$

$x_e = \text{mnoštvo}$ no popl.

$$\psi(x) = \int G(x, x') dx'$$

$$\psi(x_e) = \int G(x_e, x') \psi(x') dx' = 0 \quad \int G(x_e - x')$$

obično je zavisnost Greenove funkcije takova, $G(x, x') = G(x-x')$, tako, ako je ~

$$\psi(x_e) = 0 = \int G(x_e - x') \psi(x') dx'$$

u ovom definisali problu

u ovom, $G(x_e - x')$

$$\int G(x_e - x') \psi(x') dx' = 0$$



$$\int G(x_e - x') \psi(x') dx' = 0$$

$$\int G(x_e - x') \psi(x') dx = p$$

$\psi(x')$ je singularno

pa ako mi je $\psi(x) \sim c$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x_e - x') dx' = 0$$

~~To je isto~~

$$\psi'(x) = \int \left(\frac{dG}{dx'}(x-x') \right) \psi(x') dx' =$$

$$= - \left(G(x-x') \psi(x') \right) + \int G(x-x') \psi'(x') dx'$$

$\delta(x-a) \delta$

$\delta(x+a) = \delta$

$\int \delta(x) \delta(x) = \delta(x) = \delta(x-a) = \delta(x+a)$