

ORGANISATION EUROPÉENNE POUR LA RECHERCHE NUCLÉAIRE
CERN EUROPEAN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH

INTRODUCTION AU CALCUL MATRICIEL

Application à l'espace des phases,
à l'optique lumineuse et corpusculaire,
et aux circuits électriques

R. Gouiran

Cours donné dans le cadre du programme
de l'enseignement technique du CERN 1969-1970

G E N E V E

1971

RESUME

On rassemble certaines connaissances relatives aux matrices et aux opérations qu'elles permettent. On étudie particulièrement les matrices 2×2 et les transformations de courbes coniques s'y rapportant. On présente les systèmes d'équations linéaires et le cas général de l'équation différentielle linéaire du second ordre. Ensuite, on montre comment ces connaissances générales s'appliquent directement à tous les systèmes à transformation linéaire : oscillateur harmonique, optique lumineuse ou corpusculaire, théorie des quadripôles et des lignes électriques.

TABLE DES MATIERES

	<u>Page</u>
REMARQUE PRELIMINAIRE	1
1. VECTEURS ET ESPACE VECTORIEL	3
Addition de deux vecteurs - Composantes d'un vecteur - Somme de deux vecteurs - Produit scalaire - Norme et longueur d'un vecteur - Projection - Coordonnées d'un point - Vecteur-colonne - Somme de vecteurs	
2. DEFINITION GENERALE D'UNE MATRICE - SOMME ET PRODUIT DE MATRICES	7
Définition - Sommes de matrices - Produit de matrices - Multiplication par un scalaire ρ - Multiplication en série - Matrice-unité	
3. DETERMINANTS, MATRICES INVERSEES ET CAS PARTICULIERS	11
Déterminant d'une matrice 2×2 - Mineurs - Cofacteur - Déterminant, formule générale - Produit de déterminants - Matrice adjointe - Matrice inverse - Division - Calcul d'une matrice inverse - Matrice diagonale - Matrice symétrique - Matrice transposée - Matrice hermitienne - Matrice unitaire - Matrice orthogonale - Trace d'une matrice - Multiplication - Produit scalaire - Déterminant fonctionnel ou Jacobien	
4. LES MATRICES DANS LES CHANGEMENTS DE COORDONNEES	17
Changement de base - Transformation des composantes - Transformation des composantes covariantes - Cas des bases orthonormées - Orthonormalisation - Le Jacobien de la transformation - Transformation des volumes élémentaires	
5. LES MATRICES COMME OPERATEURS DE TRANSFORMATION - ROTATIONS ET SYMETRIE	25
Transformation - Rotation - Nombres imaginaires - Multipliation de coordonnées - Symétries - Rotation à plusieurs dimensions - Transformation des axes de coordonnées	
6. MATRICES SEMBLABLES - VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES	33
Matrices semblables - Valeurs propres d'une matrice Diagonalisation - Vecteurs propres - Produit et division de matrices - Cas des matrices inverses - Matrices semblables et matrices similaires	

	<u>Page</u>
7. LES MATRICES COMME OPERATEURS DE ROTATION	41
Décomposition en opérateurs de rotation - Cas $n_{21} = 0$ - Matrice de Twiss - Multiplication et puissance - Cas $n_{12} = 0$ - Cas général - Conclusion - Autre formalisme possible - Directions propres et matrices similaires - Matrices inverses - Conditions d'orthonormalisation	
8. TRANSFORMATION MATRICIELLE DES COURBES CONIQUES	49
Définition des paramètres - Transformation matricielle - Normalisation - Cas particulier des paraboles - Note sur les matrices dites σ - Norme de X, N(X) - Cas d'une ellipse	
9. TRAJECTOIRES CONIQUES ET TRANSFORMATION D'ELLIPSES	57
Trajectoire conique - Transformation des ellipses - Ellipse invariante - Rotation propre - Vecteurs propres - Transfor- mations périodiques et stabilité - Le découpage d'un système périodique	
10. SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES	65
Résolution des équations inhomogènes - Résolution des équations homogènes	
11. L'EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU DEUXIEME ORDRE	67
Définition - Matrice de transformation - Wronskien - Equation inhomogène - Transformation des surfaces	
12. LES TRANSFORMATIONS DANS L'ESPACE DES PHASES DE LA MECANIQUE RATIONNELLE	71
Equations canoniques - Point matériel libre sans frottement - Espace des phases - Oscillateur harmonique libre sans frottement - Oscillateur harmonique avec frottement - Oscillateur électrique avec résistance	
13. OPTIQUE LUMINEUSE LINEAIRE	79
Matrices de transfert - Cas général - Eléments cardinaux - Matrices symétriques - Systèmes périodiques - Acceptance - Diaphragmes et polygone d'acceptance	

14. OPTIQUE CORPUSCULAIRE A HAUTE ENERGIE	91
Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique - Lentille quadripolaire - Matrices de transfert d'une lentille quadripolaire de longueur L (en m) - Aberrations chromatiques - Aimants de déflexion - Couplage - Systèmes périodiques - Acceptance - Emittance	
15. ELECTRICITE GENERALE	103
Multipôles passifs - Matrices de transfert d'un quadripôle - Quadripôle retourné - Quadripôle retournable ou symétrique - Transformation d'impédance - Quadripôle en circuit ouvert - Quadripôle en court-circuit - Autres représentations - Assemblage de quadripôles - Cas général - Impédance itérative - Ligne à constantes réparties - Régime quelconque - Quadripôles actifs - Réaction	
BIBLIOGRAPHIE	123

REMARQUE PRELIMINAIRE

Les matrices sont une extension de la notion de nombres, car elles effectuent des transformations linéaires dans plusieurs dimensions simultanément.

Le calcul matriciel permet de dégager d'une théorie physique la partie qui n'est en réalité qu'une suite de propriétés géométriques communes à tous les ensembles de variables liées par des relations linéaires.

En isolant la structure géométrique commune à des disciplines aussi diverses que l'optique, l'électricité, la focalisation des particules chargées ou la mécanique hamiltonienne, on peut les réduire à ce qu'elles ont réellement de spécifique.

1. VECTEURS ET ESPACE VECTORIEL

Un vecteur est un segment limité d'une droite orientée dans un espace vectoriel.

Un espace vectoriel à n dimensions, E_n , est défini par n directions portant chacune un vecteur de base, \vec{e}_i , $i = 1, n$ *) , et le long desquelles on peut mesurer une longueur quelconque a_i . L'ensemble des n vecteurs \vec{e}_i forment la base de E_n .

ADDITION DE DEUX VECTEURS

Les vecteurs que nous utiliserons sont définis à une translation près dans l'espace. La somme du vecteur \vec{A} et du vecteur \vec{B} est le vecteur \vec{C} joignant les extrémités de \vec{A} et de \vec{B} lorsqu'on met \vec{A} et \vec{B} bout à bout (fig. 1) :

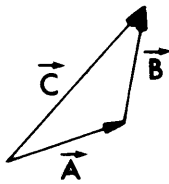


Fig. 1

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} . \quad (1)$$

COMPOSANTES D'UN VECTEUR

La composante d'un vecteur le long d'une direction \vec{e}_i est $a_i \vec{e}_i$.

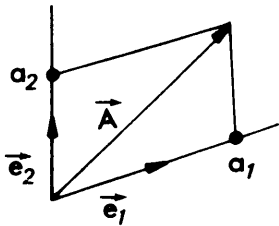


Fig. 2

Un vecteur \vec{A} dans E_n est la somme vectorielle de ses composantes (fig. 2) suivant :

$$\vec{A} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n = \sum a_i \vec{e}_i, \quad i = 1, n . \quad (2)$$

Ces a_i s'appellent aussi composantes contra-variantes.

SOMME DE DEUX VECTEURS

Un vecteur est donc un nombre à plusieurs dimensions. Soit a_i les composantes de \vec{A} et b_i celles de \vec{B} ; on a :

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \vec{e}_2 + \dots = \sum (a_i + b_i) \vec{e}_i, \quad i = 1, n . \quad (3)$$

*) Nous écrirons $i = 1, n$ pour signifier que l'indice i peut prendre les valeurs de 1 à n ; nous utiliserons aussi le signe abrégé \sum_i pour une sommation suivant toutes les valeurs de i .

PRODUIT SCALAIRE

On définit le produit scalaire $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = |\vec{e}_i| |\vec{e}_j| \cos \theta_{ij}, \quad (4)$$

où θ_{ij} est l'angle entre les directions \vec{e}_i et \vec{e}_j , et $|\vec{e}_{i,j}|$ sont les longueurs de $\vec{e}_{i,j}$:

$$g_{ij} = g_{ji}.$$

Si ces deux directions sont perpendiculaires (ou orthogonales), alors :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0.$$

Si $|\vec{e}_i| = 1$ pour tout i , alors $g_{ij} = \cos \theta_{ij}$. Nous dirons que E_n est un espace orthogonal si :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \text{ pour tout } i \neq j \quad (5a)$$

et, de plus, E_n est orthonormé si :

$$g_{ii} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 \text{ pour tout } i, \quad (5b)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad *)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} , de composantes respectives a_i et b_i , est :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + \dots) = \sum_i \sum_j g_{ij} a_i b_j. \quad (6a)$$

Si E_n est orthonormé [conditions (5)], on a :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots = \sum_i a_i b_i. \quad (6b)$$

NORME ET LONGUEUR D'UN VECTEUR

La norme de \vec{A} est le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{A}$, soit :

$$N(\vec{A}) = \sum_i \sum_j g_{ij} a_i a_j, \quad (7)$$

*) δ_{ij} est le symbole de Kronecker; il vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.

et le module est défini comme :

$$|\vec{A}| = \sqrt{N(\vec{A})} . \quad (8)$$

Si l'espace E_n est orthonormé, le module de \vec{A} est sa longueur; nous avons alors :

$$N(\vec{A}) = \sum_i a_i^2 ,$$

d'où longueur de \vec{A} :

$$\sqrt{\sum_i a_i^2} . \quad (9)$$

PROJECTION

On définit d'abord la composante covariante de \vec{A} suivant \vec{e}_i comme le produit scalaire :

$$A_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i = \sum_j g_{ij} a_j . \quad (10a)$$

La projection normale suivant \vec{e}_i peut être définie comme :

$$\frac{1}{|\vec{e}_i|} \vec{A} \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{|\vec{e}_i|} \sum_j g_{ij} a_j . \quad (10b)$$

Les composantes contravariantes et covariantes ainsi que les projections sont toutes identiques dans une base orthonormée.

COORDONNEES D'UN POINT

L'espace vectoriel est "affin" lorsqu'on y définit un repère formé d'une base \vec{e}_i et d'une origine 0. Les coordonnées d'un point A sont les composantes du vecteur \vec{OA} .

VECTEUR-COLONNE

On peut représenter symboliquement \vec{A} dans E_n défini suivant (2) par une colonne à n lignes :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} . \quad (11)$$

SOMME DE VECTEURS

Soit aussi \vec{B} défini dans E_n par ses composantes b_i ; on peut écrire, suivant (3) :

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Exemple

Soit un espace cartésien à deux axes de coordonnées rectangulaires

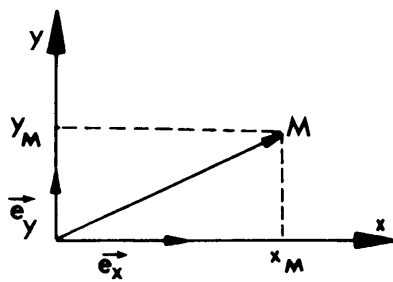


Fig. 3

Ox, Oy , et soient \vec{e}_x, \vec{e}_y les vecteurs-unités portés par ces axes (fig. 3). Le point M est l'extrémité du vecteur $OM = \vec{M}$.

Alors :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0,$$

$$\vec{M} = x_M \vec{e}_x + y_M \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}.$$

La longueur de M est $\sqrt{x_M^2 + y_M^2}$.

Exercice

Soient deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} dans un espace à quatre dimensions.

Trouver leur produit scalaire :

- i) Si l'espace est orthonormé;
- ii) Si l'espace possède l'ensemble suivant : $g_{ij} = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, 3$ et $g_{ij} = -\delta_{ij}$ pour $i, j = 4$.

Définir le module de \vec{A} dans chacun des cas.

2. DEFINITION GENERALE D'UNE MATRICE SOMME ET PRODUIT DE MATRICES

DEFINITION

Une matrice est un opérateur de transformation linéaire dans un espace vectoriel. Nous verrons que cette transformation peut se comparer à une forme particulière de rotation.

Soient deux points A et B dans l'espace vectoriel E_n (par définition, $\vec{A} = \vec{OA}$, $\vec{B} = \vec{OB}$, etc.) dont les composantes sont respectivement a_i et b_i . Nous dirons que les composantes b_i se déduisent de l'ensemble des a_i par transformation linéaire (ou du premier degré) si nous pouvons écrire, pour chaque b_i :

$$b_i = t_{i1} a_1 + t_{i2} a_2 + \dots + t_{ij} a_j + \dots + t_{in} a_n = \sum t_{ij} a_j, \quad j=1, n. \quad (13)$$

Il y a donc n^2 termes t_{ij} que nous définissons comme les éléments d'une matrice carrée à n lignes et n colonnes :

$$T(A \rightarrow B) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Nous écrirons symboliquement l'ensemble des n équations (13), pour $i = 1, n$, suivant :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = T(A \rightarrow B) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Nous pourrions dire aussi que la matrice $T(A \rightarrow B)$ fait "passer" du point A au point B dans E_n , ou "transforme" le point A en un point B, ce qui s'écrit symboliquement :

$$\vec{B} = T(A \rightarrow B) \vec{A}. \quad (16)$$

D'une façon générale la dimension d'une matrice rectangulaire à m lignes et n colonnes est mn. Si $m = n$ la matrice est dite carrée. Toute matrice rectangulaire peut se ramener à une matrice carrée en

remplaçant par des zéros les éléments des lignes ou colonnes manquantes. L'élément t_{ij} est celui de la ligne i et de la colonne j .

La multiplication, symbolisée par (15), d'un vecteur par une matrice s'obtient, suivant le détail de l'équation (13) en multipliant successivement les éléments de matrice de la ligne i par l'élément correspondant de la colonne du vecteur.

Exemple

Soient A et B définis dans un système orthogonal Ox, Oy (fig. 4) :

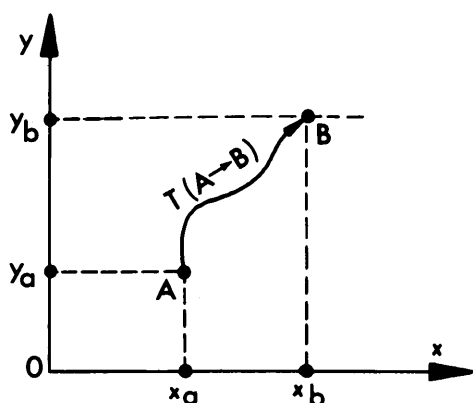


Fig. 4

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}.$$

Si :

$$T(A \rightarrow B) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix},$$

alors le symbole $\vec{B} = T\vec{A}$ signifie :

$$\begin{cases} x_b = t_{11} x_a + t_{12} y_a \\ y_b = t_{21} x_a + t_{22} y_a \end{cases} \quad (17)$$

Note

Maintenant, d'une façon générale, nous représenterons matrices et vecteurs par des lettres capitales T, A, B... et leurs éléments par des minuscules, comme t_{ij} , a_i , b_i , etc.

SOMME DE MATRICES

Soient deux matrices A et B. Leur somme est :

$$T = A + B = B + A$$

avec :

$$t_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (18)$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = A + B.$$

PRODUIT DE MATRICES

Le produit à gauche (ou pré-multiplication) d'une matrice B par une matrice A est une matrice T = AB (A à gauche de B) dont les éléments sont :

$$t_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}, \quad k=1, n, \quad (19)$$

t_{ij} s'obtient en additionnant les produits successifs de chacun des éléments de la ligne i de A par l'élément correspondant de la colonne j de B.

Exemple

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Le produit n'est pas nécessairement commutatif, et la multiplication à droite (ou post-multiplication) peut être différente, donc :

$$A \cdot B \neq B \cdot A. \quad (20)$$

Nous n'utiliserons ici que le concept de multiplication à gauche, tel qu'il est décrit par (19). Par contre le produit est distributif, donc :

$$A(B+C) = AB + AC. \quad (21)$$

On appelle "commutateur" la différence H = AB - BA. Si H = 0, les opérations figurées par A et B sont "commutatives".

MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE ρ

$$T = \rho A \quad \text{si} \quad t_{ij} = \rho a_{ij}. \quad (22)$$

MULTIPLICATION EN SERIE

Soit à multiplier à gauche, et dans cet ordre, la matrice A₁ par A₂, puis le résultat par A₃. Le produit est :

$$T = A_3 A_2 A_1 \quad (23)$$

et l'ordre des multiplications est suivi successivement de droite à gauche. Le groupement en facteurs est indifférent; donc :

$$A_3 (A_2 A_1) = (A_3 A_2) A_1. \quad (24)$$

MATRICE-UNITE

C'est une matrice I dont tous les termes sont nuls sauf ceux de la diagonale principale (celle qui descend de gauche à droite) et qui valent 1, soit :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

On a toujours :

$$T I = I T = T. \quad (26)$$

Les éléments de I sont les δ_{ij} .

Exercice

a) Effectuer l'opération matricielle $T = A + (B \cdot C)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées d'un point M étant $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, trouver les coordonnées de N tel que $\vec{ON} = T \vec{OM}$, O étant l'origine des coordonnées.

b) Trouver le commutateur des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. DETERMINANTS, MATRICES INVERSES ET CAS PARTICULIERS

Nous sommes obligés de donner dès maintenant quelques définitions un peu brutales, mais dont le sens physique apparaîtra rapidement, surtout pour les matrices inverses qui ne s'obtiennent que si l'on connaît les déterminants.

DETERMINANT D'UNE MATRICE 2 × 2

Si :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

le déterminant de A est un nombre symbolisé par $|A|$, tel que :

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (27)$$

Nous allons construire tous les déterminants de n'importe quelle matrice en partant de cette première équation.

MINEURS

On appelle mineur (M_{ij}) le déterminant de la matrice déduite de A en supprimant toute la ligne i et toute la colonne j.

Exemple

Si :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

alors :

$$M_{22} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}, \quad (28)$$

et ainsi de proche en proche pour des matrices de plus en plus grandes.

COFACTEUR

Pour déterminer le signe suivant lequel les mineurs vont s'additionner dans le déterminant, on forme à sa place le cofacteur Γ_{ij} par :

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}. \quad (29)$$

DETERMINANT -- FORMULE GENERALE

$$|A| = \sum a_{ij} \Gamma_{ij} \quad , \quad i = 1, n \quad (30)$$

Ce développement est indépendant du j choisi. On peut aussi écrire :

$$|A| = \sum a_{ij} \Gamma_{ij} \quad , \quad j = 1, n \quad (31)$$

Exemple

Soit la matrice $n \times n$. Considérons d'abord la matrice 2×2 No 1

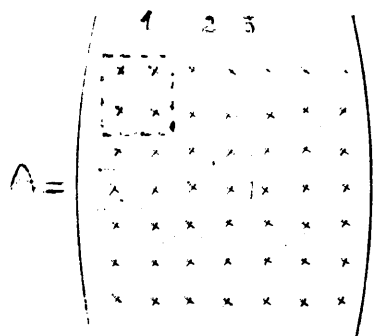


Fig. 5

(fig. 5). Son déterminant (27) est

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. On s'aperçoit que c'est

aussi le mineur M_{33} de la matrice 3×3 ,

No 2. Le cofacteur correspondant est

$\Gamma_{33} = (-1)^6 M_{33} = M_{33}$. On calcule ensuite

$M_{32} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}$ et $\Gamma_{32} = -M_{32}$.

On obtient ainsi le déterminant d'une

matrice 3×3 ce qui est le cas de la ma-

trice No 2 suivant :

$$a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \quad (32)$$

qui s'écrit aussi, suivant la règle de Sarrus des permutations d'indices :

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \quad (33)$$

On considère alors que ce déterminant est le mineur M_{44} de la matrice

4×4 No 3, et ainsi de proche en proche on obtient le déterminant de la

matrice $n \times n$.

PRODUIT DE DETERMINANTS

Le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants de chaque matrice individuelle, et ce produit est commutatif :

$$|ABC| = |A||B||C| \quad (34)$$

On a toujours :

$$|I| = 1; \quad (35a)$$

$$|pI| = p^n; \quad (35b)$$

$$|pA| = p^n |A|; \quad (35c)$$

p étant un scalaire.

MATRICE ADJOINTE

C'est la matrice A^Γ dont les éléments i, j sont les cofacteurs Γ_{ji} de A. Attention à l'inversion des indices :

$$a_{ij}^\Gamma = \overline{j_i}(A). \quad (36)$$

MATRICE INVERSE

La matrice inverse de A s'écrit A^{-1} et est telle que :

$$A^{-1}A = \overline{I} \text{ (matrice-unité)}. \quad (37)$$

On a :

$$A^{-1}A = AA^{-1} \quad (38)$$

et :

$$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}. \quad (39)$$

DIVISION

On symbolise la division B/A par BA^{-1} . Si $BA^{-1} = C$, on a $BA^{-1}A = CA$, donc $B = CA$.

CALCUL D'UNE MATRICE INVERSE

La matrice inverse de A est la matrice adjointe de A divisée par le déterminant, soit :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^\Gamma, \quad (40)$$

calculée suivant (29) et (30).

Exemple

$$\text{Si : } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{|M|}. \quad (41)$$

Nous retrouverons les matrices inverses en optique, dans le cas où les rayons vont en sens inverse du sens original.

MATRICE DIAGONALE

A est diagonale si tous ses éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale (celle qui descend de gauche à droite).

MATRICE SYMETRIQUE

A est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$. [Mais nous trouverons en optique des matrices symétriques par rapport à la seconde diagonale (celle qui monte de gauche à droite); dans ce cas $a_{i,j} = a_{n+1-j, n+1-i}$, n étant le nombre de lignes et de colonnes.]

MATRICE TRANSPOSEE

A^T est la transposée de A si :

$$a_{ij}^T = a_{ji} . \quad (42)$$

Une matrice symétrique est sa propre transposée. (On écrit aussi $A^T \equiv \tilde{A}$.)

MATRICE HERMITIENNE

On suppose que les éléments sont des nombres imaginaires. La valeur conjuguée de a_{ij} et a_{ij}^* est obtenue en changeant le signe de la composante imaginaire. A est hermitienne si :

$$a_{ij} = a_{ji}^* . \quad (43)$$

MATRICE UNITAIRE

C'est une matrice A telle que :

$$a_{ji}^* = \frac{\overline{I_{ij}}}{|A|} . \quad (44)$$

MATRICE ORTHOGONALE

C'est une matrice A telle que :

$$a_{ij} = \frac{\overline{I_{ij}}}{|A|} . \quad (45)$$

TRACE D'UNE MATRICE

C'est la somme des éléments de la diagonale principale :

$$\text{Tr}(A) = \sum a_{ii} , i = 1, n . \quad (46)$$

MULTIPLICATION

$$A^{-1} B^{-1} = (BA)^{-1}, \quad (47a)$$

$$A^T B^T = (BA)^T. \quad (47b)$$

PRODUIT SCALAIRE

Soient \vec{A} et \vec{B} deux vecteurs-colonnes et G la matrice des g_{ij} de l'espace [voir éq. (6a)]. Le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$ peut s'écrire :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^T G B. \quad (48)$$

(Dans un espace orthonormé $G = I$.)

DETERMINANT FONCTIONNEL OU JACOBIEN

Soient n fonctions X_i de n variables x_i suivant $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, etc. Formons les n^2 dérivées partielles $\partial X_i / \partial x_j$ ($i = 1, n; j = 1, n$). On appelle Jacobien, ou déterminant fonctionnel, le déterminant de la matrice ainsi formée :

$$J = \frac{\partial(X_i)}{\partial(x_i)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad (49a)$$

c'est-à-dire le déterminant J de la matrice D dont les éléments sont :

$$d_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}. \quad (49b)$$

Exemple

Soient les équations :

$$\begin{cases} X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ X_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \end{cases}$$

où les a_{ij} seraient donc des éléments d'une matrice A . Le Jacobien de cette transformation linéaire est simplement :

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A|. \quad (49c)$$

Exercice

Calculer le déterminant du produit :

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Donner $\text{Tr}(t)$ et T^{-1} . Vérifier que si $B = TA$,
et que $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a bien $A = T^{-1}B$.

4. LES MATRICES DANS LES CHANGEMENTS DE COORDONNEES

CHANGEMENT DE BASE

Considérons l'ensemble des n vecteurs de base \vec{e}_i dans l'espace vectoriel E . Imaginons une autre base possible de n vecteurs \vec{e}'_μ tels qu'ils se déduisent linéairement l'un de l'autre suivant :

$$\vec{e}'_\mu = s_{\mu 1} \vec{e}_1 + s_{\mu 2} \vec{e}_2 + \dots = \sum_i s_{\mu i} \vec{e}_i, \quad \mu = 1, n, \quad (50a)$$

$$\vec{e}_i = s'_{i 1} \vec{e}'_1 + s'_{i 2} \vec{e}'_2 + \dots = \sum_\mu s'_{i \mu} \vec{e}'_\mu, \quad \mu = 1, n. \quad (50b)$$

Les $s_{\mu i}$ sont les éléments d'une matrice de changement de base S et les $s'_{i \mu}$ sont ceux d'une matrice S' (nous verrons que $S' = S^{-1}$). Les n composantes de \vec{e}'_μ (nouvelle base) dans la base originale \vec{e}_i sont les n éléments de la ligne μ de S .

TRANSFORMATION DES COMPOSANTES

Nous allons essayer d'exprimer les coordonnées d'un point fixe A de E (soit l'extrémité du vecteur \vec{OA} ou \vec{A}) dans la nouvelle base \vec{e}'_μ et nous allons voir que la connaissance de S est suffisante pour cette opération. Soit :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_i a_i \vec{e}_i, \quad (51a)$$

et :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \sum_\mu a'_\mu \vec{e}'_\mu. \quad (51b)$$

Les a_i et a'_μ sont les composantes (contravariantes) de \vec{A} .

Suivant les équations (50), nous avons :

$$\vec{A} = \sum_i a_i \sum_\mu s'_{i \mu} \vec{e}'_\mu = \sum_\mu a'_\mu \sum_i s_{\mu i} \vec{e}_i. \quad (51c)$$

En comparant les équations (51a) et (51b) avec les équations (51c), nous déduisons :

$$a_i = \sum_\mu a'_\mu s_{\mu i}, \quad (52a)$$

$$a'_\mu = \sum_i a_i s'_{i \mu}. \quad (52b)$$

Définissons la matrice de transformation des coordonnées T dans le changement de base S par la transposée :

$$T = (S')^T.$$

Nous déduisons que le vecteur colonne A, fixe dans E, voit ses coordonnées se transformer par la multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (53a)$$

On déduit que :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \quad (53b)$$

et donc que :

$$T^{-1} = S^T \quad \text{et que} \quad S' = S^{-1}. \quad (54)$$

Donc $T = (S^{-1})^T$; c'est la matrice qui transforme les composantes (contravariantes) de A.

On peut convenir d'appeler T une matrice de changement de coordonnées; mais il faut noter que les projections (et les composantes covariantes) ne sont égales aux composantes (contravariantes) que dans des bases orthonormées.

TRANSFORMATION DES COMPOSANTES COVARIANTES

La composante covariante de \vec{A} suivant \vec{e}_i est le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{e}_i$ [éq. (10)] et elle sera $\vec{A} \cdot \vec{e}'_\mu$ dans la nouvelle base; or nous avons :

$$\vec{A} \cdot \vec{e}'_\mu = \vec{A} \sum_i s_{\mu i} \vec{e}_i = \sum_i s_{\mu i} (\vec{A} \cdot \vec{e}_i).$$

Donc les composantes covariantes se transforment par l'intermédiaire de la matrice S, d'où leur nom. Nous allons voir maintenant que dans des bases orthonormées, $S = T$, car les composantes (contravariantes) et les projections (covariantes) y sont identiques (cas des coordonnées rectangulaires cartésiennes normées); alors le mot coordonnée ne prête plus à confusion.

CAS DES BASES ORTHONORMEES

On peut donc poser la question : si l'ensemble des n vecteurs de base \vec{e}_i est orthonormé, quelle condition doit remplir S pour que la nouvelle base $\vec{e}'_\mu (= \sum_i s_{\mu i} \vec{e}_i)$ soit aussi orthonormée? Si les bases \vec{e}_i et \vec{e}'_μ sont toutes deux orthonormées, alors nous obtenons :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} , \tag{55a}$$

$$\vec{e}'_\mu \cdot \vec{e}'_\nu = \delta_{\mu\nu} . \tag{55b}$$

D'après la relation (50a), nous obtenons :

$$\vec{e}'_\mu \cdot \vec{e}'_\nu = \sum_i s_{\mu i} \sum_j s_{\nu j} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j ,$$

soit :

$$\sum_{ij} s_{\mu i} s_{\nu j} \delta_{ij} = \delta_{\mu\nu} .$$

Soit S^T la transposée de S; la relation ci-dessus s'écrit alors :

$$\sum_i s_{\mu i} s_{i\nu}^T = \delta_{\mu\nu} ,$$

ce qui est exactement la définition de :

$$S S^T = I ,$$

d'où :

$$S^T = S^{-1} \quad \text{ou} \quad S = (S^T)^{-1} . \tag{56}$$

La condition pour que les deux bases soient orthonormées lorsque l'une l'est déjà est que S soit égale à l'inverse de sa transposée. Or, dans ces espaces orthonormés les composantes contravariantes et les composantes covariantes (projections) sont identiques. Si S et $(S^T)^{-1}$ sont identiques, cette propriété se conserve dans le changement de base, et alors $T = S$.

ORTHONORMALISATION

Connaissant une base quelconque \vec{e}_i , soit à trouver une base \vec{e}'_μ qui soit orthonormée, c'est-à-dire telle que $\vec{e}'_\mu \cdot \vec{e}'_\nu = \delta_{\mu\nu}$. Soit $s'_{i\mu}$ un

élément de S^{-1} . Nous avons :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} = \sum_{\mu} \sum_{\nu} s'_{i\mu} s'_{j\nu} \vec{e}'_{\mu} \vec{e}'_{\nu},$$

d'où :

$$\sum_{\mu} s'_{i\mu} s'_{j\mu} = g_{ij},$$

d'où S^{-1} ; on peut écrire aussi $S^{-1}(S^{-1})^T = (g_{ij})$. En utilisant la matrice $T = (S^{-1})^T$, cette condition s'écrit aussi :

$$T^T T = (g_{ij}) \quad \text{ou} \quad \sum_k t_{ki} t_{kj} = g_{ij}.$$

Exemple

Soit un point A de coordonnées $\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ dans un système rectangulaire orthonormé Oxy. Soit un deuxième système de coordonnées Ox'y' déduit du précédent par trois opérations successives : a) une multiplication des abscisses par p; b) une multiplication des ordonnées par q; c) une rotation d'un angle θ autour de l'origine, le sens positif étant le sens trigonométrique direct. Soient \vec{e}_x, \vec{e}_y les vecteurs-unités de Oxy et \vec{e}'_x, \vec{e}'_y les vecteurs de base de Ox'y'. Les deux premières opérations transforment \vec{e}_x et \vec{e}_y en $p\vec{e}_x$ et $q\vec{e}_y$, et la troisième opération donne :

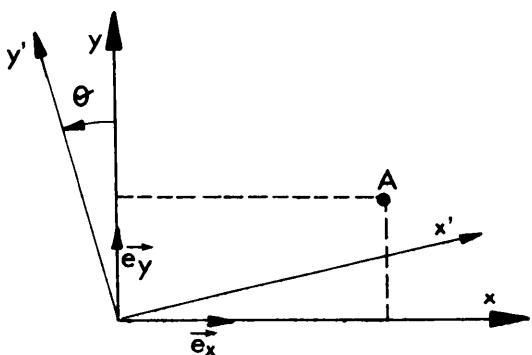


Fig. 6

$$\begin{aligned} \vec{e}'_x &= p \cos \theta \vec{e}_x + p \sin \theta \vec{e}_y, \\ \vec{e}'_y &= -q \sin \theta \vec{e}_x + q \cos \theta \vec{e}_y, \end{aligned} \tag{57}$$

ce qui n'est pas autre chose que le développement du produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_x \\ \vec{e}'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cos \theta & p \sin \theta \\ -q \sin \theta & q \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}, \tag{58}$$

d'où nous déduisons :

$$T = (S^{-1})^T$$

et :

$$\begin{aligned}x'_a &= (1/p) \cos \theta x_a + (1/p) \sin \theta y_a, \\y'_a &= (-1/q) \sin \theta x_a + (1/q) \cos \theta y_a.\end{aligned}\tag{59}$$

Nous aurions pu obtenir ce résultat plus directement en considérant les matrices individuelles de chacune des opérations, soit : $S = S_3 S_2 S_1$, ou :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/q \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},\tag{60}$$

puis en notant que la matrice de transformation finale est le produit :

$$T = (S^{-1})^T = T_1 T_2 T_3,\tag{61}$$

ce qui nous aurait redonné la matrice de l'équation (59). La matrice T_3 est un exemple d'opérateur de rotation que nous retrouverons souvent, et nous écrirons symboliquement $T_3 = R(-\theta)$ (R signifiant : opérateur de rotation d'un angle).

En remarquant que :

$$T_1 T_2 = \begin{pmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 1/q \end{pmatrix},$$

nous pouvons donc avoir directement la matrice T cherchée, qui est alors :

$$T = \begin{pmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 1/q \end{pmatrix} R(-\theta)\tag{62}$$

et nous vérifions bien que :

$$\begin{pmatrix} x'_a \\ y'_a \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}.\tag{63}$$

Quelle est T^{-1} dans cet exemple? Le passage de E'_n vers E_n se fait en sens inverse; d'abord une rotation de $+\theta$, soit $R(+\theta)$, puis T_2^{-1} , puis T_1^{-1} , d'où nous déduisons :

$$T^{-1} = R(\theta) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Comme :

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x'_a \\ y'_a \end{pmatrix}, \quad (65)$$

nous obtenons l'inverse des relations (57), soit :

$$\begin{aligned} x_a &= p \cos \theta x'_a - q \sin \theta y'_a, \\ y_a &= p \sin \theta x'_a + q \cos \theta y'_a. \end{aligned} \quad (66)$$

On aurait pu aussi calculer directement T^{-1} par la formule (40).

LE JACOBIEN DE LA TRANSFORMATION

Considérons les coordonnées a'_i comme des fonctions des a_j . On constate [en dérivant (54)] que :

$$\frac{\partial a'_i}{\partial a_j} = \epsilon_{ij}. \quad (67)$$

Si nous prenons la définition du Jacobien suivant (49a), nous trouvons simplement que, dans le cas de changement de coordonnées par une matrice T suivant (51) :

$$J = |T|. \quad (68)$$

TRANSFORMATION DES VOLUMES ELEMENTAIRES

On sait, depuis Jacobi, que dans un changement de variables, le volume élémentaire $dV = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ de l'espace E_n se transforme en un volume $dV' = dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n$ tel que :

$$dV' = J dV, \quad (69)$$

où J est justement le déterminant fonctionnel, ou Jacobien, de la transformation de x_i en x'_i suivant [voir éq. (47)] :

$$J = \frac{\partial(x'_i)}{\partial(x_i)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}. \quad (70)$$

Dans le cas des changements linéaires de coordonnées, nous avons vu (68) que J se réduisait à $|T|$, d'où :

$$dV' = |T| dV. \quad (71)$$

Les volumes ne sont donc conservés dans la transformation T que si $|T| = 1$.

Mais nous devons faire attention de distinguer les matrices qui changent les coordonnées d'un point fixe, comme nous les avons examinées dans cette section, de celles qui transforment les coordonnées en déplaçant le point, comme nous le verrons à la section suivante (l'une sera l'inverse de l'autre).

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus [éq. (57)], la nouvelle mesure de la surface donnera un résultat pq fois plus petit au moyen des composantes contravariantes.

Exercice

Considérons un espace orthonormé à deux dimensions qui subirait les transformations suivantes :

- i) Une multiplication des abscisses par 2 ($p = 2, q = 1$);
- ii) Une rotation de $-(\pi/4)$ [$\theta = -(\pi/4)$].

Trouver les composantes contravariantes et covariantes ainsi que les projections normales de $\vec{A} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans ce nouvel espace. Décrire la base de ce nouvel espace et ses g_{ij} . Par la forme de S , montrer qu'il ne pouvait pas être orthonormé, mais qu'il est néanmoins orthogonal. Que devient la mesure d'un carré ayant pour sommets opposés A et l'origine O ?

5. LES MATRICES COMME OPERATEURS DE TRANSFORMATION ROTATIONS ET SYMETRIE

TRANSFORMATION

Dans un espace vectoriel E_n , une matrice T "transforme" un point A en un point A' (ou "fait passer un point représentatif de A à A' ") lorsque :

$$A' = TA \text{ ou } \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad (72)$$

ce qui s'écrit :

$$a'_i = a_1 t_{i1} + a_2 t_{i2} + \dots = \sum_j a_j t_{ij}.$$

C'est une correspondance ponctuelle, point à point, dans E_n supposé isotrope et homogène.

Si, d'une façon générale :

$$a'_i = F(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (73)$$

le déterminant fonctionnel est donné par (47) suivant :

$$J = \frac{\partial(a'_i)}{\partial(a_i)}, \quad (74)$$

et le volume élémentaire de E_n :

$$dV = dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (75)$$

devient [éq. (57)] :

$$dV' = J dV. \quad (76)$$

Si les relations (73) sont linéaires et se réduisent à (72) :

$$dV' = |T| dV. \quad (77)$$

En transformant tous les points de E_n , la matrice T transforme donc aussi des figures.

ROTATION

a) Angle réel

Si B se déduit de A par une rotation θ dans un système orthonormé Oxy , nous avons :

$$\begin{cases} x_B = x_A \cos \theta - y_A \sin \theta \\ y_B = x_A \sin \theta + y_A \cos \theta \end{cases} \quad (78)$$

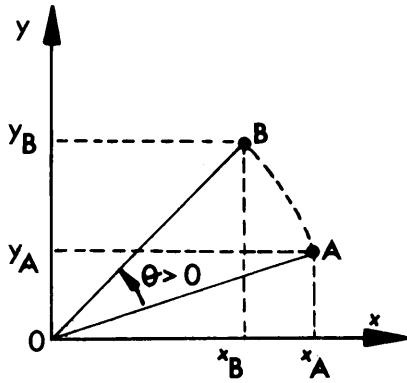


Fig. 7

Appelons $R(\theta)$ la matrice "opérateur de rotation θ " définie par :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (79)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \quad (\text{ou } \vec{OB} = R(\theta) \vec{OA}). \quad (80)$$

Note

La matrice (79) peut être définie dans n'importe quel repère à deux dimensions. Mais quelles sont les conditions pour qu'elle corresponde à une rotation physique d'un angle θ qui conserverait la longueur du rayon? Cette condition correspond à faire $|\vec{OB}| = |\vec{OA}|$ sur la figure 7, ou $N(\vec{OB}) = N(\vec{OA})$ [cf. éq. (7)]. Si le rayon est conservé, nous avons $|\vec{OB}| \cos(\theta + \alpha) = |\vec{OA}| \cos \alpha \cos \theta - |\vec{OA}| \sin \alpha \sin \theta$, soit

$x_B = x_A \cos \theta - y_A \sin \theta$ (α étant l'angle entre OA et Ox); de même pour y_B , d'où les équations (78) et (79). Or $N(\vec{OB}) = g_{11}x_B^2 + 2g_{12}x_By_B + g_{22}y_B^2$ et $N(\vec{OA}) = g_{11}x_A^2 + 2g_{12}x_Ay_A + g_{22}y_A^2$. On trouve que, si l'on remplace x_B et y_B suivant l'équation (78), alors $N(\vec{OB}) = N(\vec{OA})$ si $g_{12} = 0$, $g_{11} = g_{22}$, donc si l'espace est orthonormé (à un facteur d'homothétie près).

b) Angle imaginaire

Par définition nous appellerons $R(i\theta)$ la matrice :

$$R(i\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -i \sinh \theta \\ i \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (81)$$

(Cette définition est toutefois légèrement insuffisante, car $\cosh \theta$ est une fonction qui ne peut pas être négative, et il sera nécessaire d'explicitier un signe moins devant le cosinus hyperbolique lorsque nous utiliserons des matrices de ce genre avec des termes 11 et 22 négatifs.)

c) Déterminant

$$|R(\theta)| = |R(i\theta)| = 1. \quad (82)$$

d) Addition des arcs

$$\begin{aligned} R(\theta_1 + \theta_2) &= R(\theta_2) R(\theta_1) = R(\theta_1) R(\theta_2) \\ R(i(\theta_1 + \theta_2)) &= R(i\theta_2) R(i\theta_1) = R(i\theta_1) R(i\theta_2) \\ R(n\theta) &= R^n(\theta) \\ R(ni\theta) &= R^n(i\theta). \end{aligned} \quad (83)$$

e) Opération inverse

$$\begin{aligned} R^{-1}(\theta) &= R(-\theta) \\ R^{-1}(i\theta) &= R(-i\theta). \end{aligned} \quad (84)$$

f) Cas particuliers

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ R\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ R(\pi) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \\ R(2\pi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \end{aligned} \quad (85)$$

NOMBRES IMAGINAIRES

Le nombre imaginaire $i = \sqrt{-1}$ peut être comparé à $R(\pi/2)$. En effet, nous pouvons écrire :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \theta + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \theta = I \cos \theta + R\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \theta. \quad (86)$$

Si nous transposons cette notation en langage imaginaire avec $I = 1$, $R(\pi/2) = i$, nous obtenons :

$$R(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{-i\theta}. \quad (87)$$

Nous remarquons en même temps que, dans un espace orthonormé Oxy :

$$\vec{e}_y = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_x,$$

donc que :

$$\vec{OA} = \vec{A} = \left[\underset{\cdot}{I} x_a + R\left(\frac{\pi}{2}\right) y_a \right] \vec{e}_x, \quad (88)$$

ce qui, transposé en langage imaginaire, s'écrirait :

$$A = x_a + i y_a. \quad (89)$$

Ainsi, la rotation d'un angle θ dans un espace à deux dimensions de l'équation (78) aurait pu aussi se symboliser par :

$$x_B + i y_B = (\cos \theta + i \sin \theta) (x_A + i y_A), \quad (90)$$

le module du nombre complexe A est aussi celui du vecteur OA, qui est ici sa longueur.

Ce formalisme revient à remplacer la multiplication matricielle $\vec{B} = R(\theta)\vec{A}$ par la multiplication imaginaire $B = e^{-i\theta} A$, avec les mêmes propriétés de multiplication et d'addition. Alors on voit que les équations (83) ne sont pas autre chose que la formule de Moivre.

MULTIPLICATION DE COORDONNEES

Le point $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_A$ est transformé en $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$ tel que :

$$x_B = p x_A, \quad y_B = q y_A \quad (91)$$

par la transformation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Exemple

Nous reprenons un exemple qui devra être comparé à celui de la section précédente. Soit un espace rectangulaire orthonormé Oxy dont les points subissent les trois transformations successives suivantes : a) un allongement des abscisses par un facteur p; b) un allongement des ordonnées par un facteur q; c) une rotation autour de l'origine d'un angle $+\theta$. Ces opérations amènent un point A_0 successivement en A_1 , A_2 et A_3 sur la figure 8. Soit :

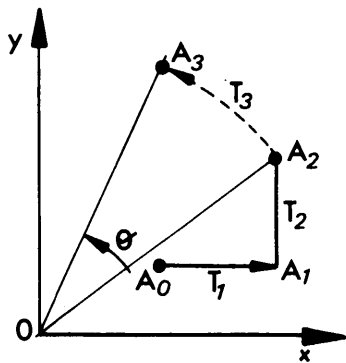


Fig. 8

$$T_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},$$

$$T_3 = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (93)$$

et :

$$T = T_3 T_2 T_1 = R(\theta) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Noter, pour cette multiplication à gauche, l'ordre inverse de l'équation (61).

Nous avons :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{A_3} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{A_0}, \quad (95)$$

(Les matrices de transformation sont alignées de gauche à droite, en sens inverse de leur ordre d'effet, parce que $A_1 = T_1 A_0$, $A_2 = T_2 A_1 = T_2 T_1 A_0$, etc.)

d'où :

$$x_{A_3} = p \cos \theta x_{A_0} - q \sin \theta y_{A_0},$$

$$y_{A_3} = p \sin \theta x_{A_0} + q \cos \theta y_{A_0}. \quad (96)$$

La matrice inverse T^{-1} fait "revenir" A_3 vers A_0 . Le Jacobien de la transformation (95) est $|T| = pq$. Donc un volume élémentaire dV autour de A_0 devient dV' autour de A_3 , tel que $dV' = pq dV$. Il devient donc pq fois plus grand. Nous noterons qu'ici T est l'inverse de celle utilisée en (59).

SYMETRIES

- a) Par rapport à l'axe Ox : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- b) Par rapport à l'axe Oy : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- c) Par rapport à l'origine : $R(\pi)$;
- d) Par rapport à la première bissectrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ROTATION A PLUSIEURS DIMENSIONS

En réalité toute transformation de A en B qui conserve la longueur du vecteur OA dans des changements de base orthonormés est un opérateur de rotation.

Exemple à trois dimensions orthogonales

Nous considérons que nous passons de A à B par une rotation θ_z autour de l'axe Oz, plus une rotation θ_x autour de l'axe Ox. Alors, nous écrivons :

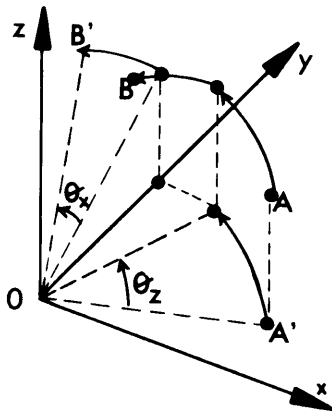


Fig. 9

$$B = R(\theta_z, \theta_x)A = R(\theta_x)R(\theta_z)A$$

avec :

$$R(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix},$$

et :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_A.$$

On obtient :

$$R(\theta_z, \theta_x) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z \cos \theta_x & \cos \theta_z \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ \sin \theta_z \sin \theta_x & \cos \theta_z \sin \theta_x & \cos \theta_z \end{pmatrix} \quad (97)$$

dont le déterminant est toujours égal à 1.

L'angle ϕ entre \vec{OA} et \vec{OB} qui représente la rotation finale s'obtient en considérant le produit scalaire :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 \right) \cos \phi = N \cos \phi,$$

où N est la norme de A. Or en se reportant à l'équation (6) qui définit le produit scalaire :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B, \quad (98)$$

on obtient :

$$\cos \phi = \frac{x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B}{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}. \quad (99)$$

TRANSFORMATION DES AXES DE COORDONNEES

L'espace vectoriel E_n est défini par l'ensemble des vecteurs \vec{e}_i portés par les axes de coordonnées. La colonne représentant par exemple le vecteur \vec{e}_1 est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

les composantes de \vec{e}_i sont des zéros, sauf à la ligne i où il y a un 1. Cet ensemble \vec{e}_i est transformé par T en un ensemble \vec{e}'_μ où, à chaque \vec{e}_i , correspond un transformé \vec{e}'_μ tel que :

$$\vec{e}'_\mu = T \vec{e}_i. \quad (100)$$

On voit immédiatement que les composantes de \vec{e}'_μ dans l'espace E_n sont les éléments de la colonne i de la matrice T; nous avons donc :

$$\vec{e}'_\mu = \sum_j t_{j\mu} \vec{e}_j. \quad (101)$$

L'ensemble \vec{e}'_μ peut former une nouvelle base. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur \vec{A} fixe dans ce nouveau système? Nous avons (en appelant $t'_{\mu i}$ les éléments de T^{-1}) :

$$\vec{A} = \sum_i a_i \vec{e}_i = \sum_i a_i \sum_\mu t'_{\mu i} \vec{e}'_\mu.$$

Donc les coordonnées de \vec{A} deviennent \vec{A}' telles que :

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (102)$$

On comprend alors le sens de la relation d'inversion qui relie les définitions de la section 4 (transformation des coordonnées d'un point fixe dans un changement de base) et celles de ce chapitre (transformation ponctuelle de l'espace sans changement de base).

En résumé, si dans le système de base \vec{e}_i un point de coordonnées \vec{A} est transformé en un point B de coordonnées $\vec{B} = T\vec{A}$, ce point B aura les coordonnées A dans une base transformée $\vec{e}'_\mu = \sum_j t_{j\mu} \vec{e}_j$, tandis que A y aura les coordonnées $T^{-1}A$.

Cela s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vdots \\ \vec{e}'_\mu \\ \vdots \\ \vec{e}'_i \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_i \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que les n composantes de la nouvelle base e'_μ dans la base originale \vec{e}_i sont les n éléments de la ligne μ de T^T (ou de la colonne μ de T).

Exercice

Tout point d'un espace orthonormé à deux dimensions subit une rotation de $(\pi/4)$ [$\theta = (\pi/4)$] et une homothétie de 2 dans toutes les directions ($p = q = 2$). Donner les coordonnées transformées du point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ainsi que la surface du carré ayant A et O (l'origine) comme sommets opposés. Décrire la nouvelle base où les coordonnées de A resteraient invariables.

6. MATRICES SEMBLABLES VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

MATRICES SEMBLABLES

Soit A une matrice transformant toutes les coordonnées (contra-variantes) des points d'un espace vectoriel E_n , de telle sorte que le vecteur X devienne AX . Cela veut dire que l'ensemble des vecteurs de base de E_n est transformé en un ensemble de vecteurs de base $\vec{e}_i^A = A\vec{e}_i$; l'espace E_n^A est celui basé sur cet ensemble et nous l'appellerons espace transformé par l'opération A . Nous avons vu à la section précédente que chaque vecteur de base de l'espace transformé \vec{e}_i^A a pour composantes dans E_n les éléments de la colonne i de A , soit $\vec{e}_i^A = \sum_j a_{ji} \vec{e}_j$. Nous revenons de E_n^A dans E_n par l'opération inverse.

La transformation A est donc définie par : tout vecteur de coordonnées X dans la base E_n a les coordonnées X^A dans la base E_n^A , telles que :

$$X^A = AX. \quad (103)$$

Soit maintenant une matrice T qui transforme tout point P de E_n en un autre point Q de E_n , donc telle que :

$$\vec{Q} = T \vec{P}^* \quad (104)$$

Dans l'espace transformé E_n^A , le point P devient P^A et Q devient Q^A . Nous appellerons "matrice semblable" à T , toute matrice T^A capable d'effectuer, dans l'espace transformé E_n^A , la transformation :

$$\vec{Q}^A = T^A \vec{P}^A. \quad (105)$$

Calculons T^A . On sait que $\vec{P}^A = A\vec{P}$, $\vec{Q} = A^{-1}\vec{Q}^A$. Nous pouvons aller de P vers Q par le chemin $P \rightarrow P^A \rightarrow Q^A \rightarrow Q$; nous en déduisons que T^A est une matrice semblable à T dans la transformation A si elle satisfait l'équation :

*) Pour simplifier, nous écrirons $\vec{Q} = OQ$, $\vec{P} = OP$, etc.

$$T = A^{-1} T^A A, \tag{106}$$

ou :

$$T^A = A T A^{-1}.$$

Cela veut dire : on transforme l'espace suivant A, on applique T^A , puis on reforme l'espace initial suivant A^{-1} ; le résultat est T.

Nous allons ainsi trouver qu'une matrice apparemment compliquée peut être un opérateur très simple dans un certain espace judicieusement transformé. Entre autre, nous allons voir comment une matrice peut se réduire à une simple homothétie, et même à une simple rotation.

VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE

Existe-t-il un nombre scalaire λ tel que tout vecteur \vec{X} soit transformé par la matrice T en un vecteur $\lambda\vec{X}$ simplement homothétique à \vec{X} ? Il faut trouver λ tel que :

$$T \vec{X} = \lambda \vec{X}. \tag{107}$$

Si x_i est l'une des n composantes de \vec{X} , (107) revient à former l'ensemble des n équations linéaires :

$$\left| \begin{array}{cccc} t_{11} x_1 + t_{12} x_2 + \dots & = & \lambda x_1 \\ t_{21} x_1 + t_{22} x_2 + \dots & = & \lambda x_2 \\ \dots & & \dots \end{array} \right. \tag{108}$$

Nous avons là un ensemble à n inconnues x_i , sans terme constant. Nous verrons plus loin (section 10) que cet ensemble n'admet des solutions non nulles que si le déterminant des coefficients des inconnues est nul, donc si :

$$\left| \begin{array}{cccc} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} & \dots \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & t_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & t_{nn} - \lambda \end{array} \right| = 0, \tag{109}$$

ou plus simplement si :

$$|\overline{T} - \lambda \overline{I}| = 0. \quad (110)$$

L'équation (110) est "l'équation caractéristique" de la matrice T , de degré n , donnant n solutions pour λ , qui sont les n "valeurs propres" de T . On démontre aussi [(12), (13)] que la somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice et que leur produit est égal au déterminant, c'est-à-dire :

$$\text{Tr}(T) = \sum_i \lambda_i, \quad i=1, n, \quad (111a)$$

$$|T| = \prod_i \lambda_i, \quad i=1, n. \quad (111b)$$

Exemple

Dans un espace à deux dimensions, l'équation caractéristique de T est :

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Posons :

$$\text{Tr}(T) = t_{11} + t_{22},$$

$$|T| = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21},$$

l'équation (111) devient :

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(T) + |T| = 0, \quad (112)$$

soit :

$$\lambda = \sqrt{|T|} \left[\frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(T)}{|T|} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(T)}{|T|}\right)^2 - 1} \right]. \quad (113)$$

Deux cas se présentent :

a) $-2\sqrt{|T|} \leq \text{Tr}(T) \leq 2\sqrt{|T|}$ (ou $|t_{11} + t_{22}| \leq 2\sqrt{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}}$). (114)

Posons :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(T)}{\sqrt{|T|}} = \frac{t_{11} + t_{22}}{2\sqrt{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}}}, \quad (115)$$

d'où :

$$\lambda = \sqrt{|T|} [\cos \theta \pm i \sin \theta] = \sqrt{|T|} e^{\pm i \theta} \quad (116)$$

b) $| \text{Tr}(T) | > 2 \sqrt{|T|} . \quad (117)$

Posons :

$$\cosh \theta = \frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(T)}{\sqrt{|T|}}, \quad (118)$$

d'où

$$\lambda = \sqrt{|T|} [\cosh \theta \pm \sinh \theta] = \sqrt{|T|} e^{\pm \theta}. \quad (119)$$

DIAGONALISATION

Nous voulons trouver une matrice T^A semblable à T , et qui soit "diagonale", c'est-à-dire dont seuls les termes t_{ii}^A ne soient pas nuls, soit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} t_{11}^A & 0 & 0 & & & \\ 0 & t_{22}^A & 0 & & & \\ 0 & 0 & t_{33}^A & & & \end{array} \right) .$$

T^A représente donc une transformation simple, car il suffit que chaque coordonnée x_i^A d'un vecteur X^A soit multipliée par un seul scalaire t_{ii}^A . Quelle est la transformation A qui, selon (103), nous transporte dans un espace E_n^A où T^A est semblable à T ? Suivant (106) nous savons déjà que nous aurons la relation :

$$T = A^{-1} T^A A . \quad (120)$$

Le nouvel espace E_n^A où opère T^A est défini par un ensemble de vecteurs de base \vec{e}_i^A déduits de la base originale \vec{e}_i de E_n suivant (101), soit :

$$\vec{e}_i^A = \sum_j a_{ji} \vec{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Les a_{ij} sont les composantes de \vec{e}_i^A mesurées dans E_n . Les composantes de \vec{e}_i^A sont les n éléments de la colonne i de T^A . Considérons un vecteur \vec{u}_i de composantes $\vec{u}_i = \sum_j \delta_{ij} \vec{e}_j$ (ses composantes sont nulles sauf la i^e qui vaut 1, à un facteur près). T^A est diagonale si elle transforme \vec{u}_i en un vecteur homothétique, soit :

$$T^A \vec{u}_i = t_{ii}^A \vec{u}_i, \quad (122)$$

puisque $t_{ij}^A = 0$ pour $i \neq j$. Cela veut dire que si nous considérons un des vecteurs \vec{u}_i portés par les directions des coordonnées, l'opération de T^A le transforme en un vecteur homothétique; donc les éléments diagonaux de T^A sont ses valeurs propres, car l'équation (122) est un cas de l'équation caractéristique générale (107). Il faut maintenant prouver que ces valeurs sont les mêmes que celles de T . Or on remarque que l'équation caractéristique (110) peut aussi s'écrire :

$$|A^{-1}(T - \lambda I)A| = |A^{-1}TA - \lambda A^{-1}IA| = |A^{-1}TA - \lambda I| = |T^A - \lambda I| = 0. \quad (123)$$

Donc toutes les matrices semblables liées par la relation (106) ont les mêmes valeurs propres λ ; d'où la conclusion très importante : les n éléments diagonaux d'une matrice diagonale semblable à une matrice T sont les n solutions de l'équation caractéristique de T , c'est-à-dire ses n valeurs propres. Les éléments de la matrice diagonale T^A semblable à T sont $t_{ij}^A = \delta_{ij} \lambda_i$. D'après (111a) et (111b), on déduit que les matrices semblables ont toutes la même trace et le même déterminant.

VECTEURS PROPRES

Nous avons donc trouvé une matrice semblable à T et qui est diagonale. Nous voulons connaître quel est cet espace E_n^A où elle opère, c'est-à-dire connaître A . Comme le déterminant des coefficients des x_i

de l'ensemble (108) est nul, si nous y remplaçons λ par chacune des n solutions λ_k de l'équation caractéristique (110), nous obtenons chaque fois un ensemble de $n - 1$ relations entre les x_i , qui déterminent une direction sur laquelle nous pouvons définir un vecteur \vec{v}_k dans E_n , $k = 1, n$. Ce vecteur \vec{v}_k est une des n solutions possibles de (109) lorsque λ y est remplacé par les n solutions λ_k de l'équation (110). Nous obtiendrons ainsi les n directions propres. Si $T\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$, alors $ATA^{-1}A\vec{v}_k = \lambda A\vec{v}_k$ (car $A^{-1}A = I$), d'où $T^A A\vec{v}_k = \lambda_k A\vec{v}_k$. En comparant avec (122), nous voyons que $A\vec{v}_k$ n'est pas autre chose que le vecteur de l'espace transformé correspondant à la direction k lorsque λ_k est le k^e élément diagonal de T^A . Donc $A\vec{v}_k = \vec{u}_k$, et c'est donc une colonne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dont seul le terme de la ligne k n'est pas nul. Nous appellerons "vecteurs propres", ou "directions propres", les n vecteurs \vec{v}_k qui sont, dans E_n , les transformés de vecteurs de base de E par la transformation A^{-1} . Donc "les n composantes des vecteurs propres \vec{v}_k obtenues en remplaçant λ par λ_k dans (107) forment les n éléments de la k^e colonne de la matrice A^{-1} (à un facteur constant près)", telle que ATA^{-1} soit diagonale.

Exemple

Par l'équation (116), nous avons trouvé les valeurs propres d'une matrice 2×2 [satisfaisant la condition (114)] suivant :

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{|T|} e^{\pm i\theta}. \tag{124}$$

L'équation caractéristique (109) devient :

$$\begin{aligned} (\epsilon_{11} - \lambda_{1,2}) x_1 + \epsilon_{12} x_2 &= 0, \\ \epsilon_{21} x_1 + (\epsilon_{22} - \lambda_{1,2}) x_2 &= 0, \end{aligned} \tag{125}$$

d'où :

$$\frac{x_1}{x_2} = - \frac{\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \lambda_{1,2}} = - \frac{\epsilon_{22} - \lambda_{1,2}}{\epsilon_{21}},$$

d'où les deux vecteurs propres :

$$\vec{v}_{1,2} \propto \begin{pmatrix} t_{12} \\ \sqrt{|T|} e^{\pm i\theta} - t_{11} \end{pmatrix}. \quad (126)$$

(Une expression simplifiée de ces directions propres est donnée à la section 9, pour $|T| = 1$, comme asymptotes de courbes coniques.) Une matrice possible de transformation A^{-1} telle que ATA^{-1} soit diagonale est donnée :

$$A^{-1} \propto \begin{pmatrix} t_{12} & t_{12} \\ \sqrt{|T|} e^{+i\theta} - t_{11} & \sqrt{|T|} e^{-i\theta} - t_{11} \end{pmatrix},$$

la matrice diagonale est :

$$T^A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \sqrt{|T|} \begin{pmatrix} e^{+i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix},$$

et on vérifie que $T^A = ATA^{-1}$.

PRODUIT ET DIVISION DE MATRICES

Le produit matriciel T_1T_2 donne une matrice semblable au produit T_2T_1 . En effet T_1T_2 est semblable à $T_2(T_1T_2)T_2^{-1}$ par définition, ce qui n'est pas autre chose que T_2T_1 .

Donc T_1T_2 possède les mêmes valeurs propres que T_2T_1 . On en tirera plus loin des conséquences importantes pour les systèmes à répétition périodique. Cela signifie en effet qu'on peut diviser une matrice T en deux tronçons (ou plus), sous la forme $T = T_1T_2$, puis passer à droite la partie de gauche pour obtenir une autre matrice $T' = T_2T_1$, qui aura les mêmes valeurs propres que T quels que soient l'endroit et le nombre des césures. On en déduit :

a) Si \vec{X}_k est un vecteur propre de T correspondant à la valeur propre λ_k telle que $T\vec{X}_k = \lambda_k\vec{X}_k$, le vecteur $A\vec{X}_k$ sera le vecteur propre de la matrice semblable $T' = ATA^{-1}$ correspondant à la même valeur propre λ_k , car $T'A\vec{X}_k = \lambda_k A\vec{X}_k$.

b) Si \vec{X}_k est un vecteur propre de $T = T_2 T_1$, $T_1 \vec{X}_k$ sera le vecteur propre de $T_1 T_2$ correspondant à la même valeur propre.

CAS DES MATRICES INVERSES

Si les λ_i sont les valeurs propres de A, et X_i les vecteurs propres correspondants, alors λ_i^{-1} sont les valeurs propres de A^{-1} correspondant aux mêmes vecteurs propres X_i . En effet, d'après (110) $|A - \lambda_i I| = 0$, d'où la déduction logique $|A - \lambda_i A A^{-1}| = |A(I - \lambda_i A^{-1})| = |A| |I - \lambda_i A^{-1}| = |A^{-1} - I/\lambda_i| = 0$ et en même temps $A \vec{X}_i = \lambda_i X_i \rightarrow A^{-1} A X_i / \lambda_i = A^{-1} X_i = X_i / \lambda_i$.

MATRICES SEMBLABLES ET MATRICES SIMILAIRES

Nous appellerons "matrices similaires" toutes les matrices ayant les mêmes directions propres bien que n'ayant pas les mêmes valeurs propres, alors que les "matrices semblables" seront celles qui ont les mêmes valeurs propres sans avoir nécessairement les mêmes directions propres.

La valeur propre d'ordre k du produit de deux matrices similaires est le produit des valeurs propres du même ordre de chacune des deux matrices.

Soit en effet le vecteur propre X_k correspondant à la valeur propre λ_k pour une matrice T et λ'_k pour une matrice T' similaire de T. La condition de similarité signifie que $T X_k = \lambda_k X_k$ [cf. éq. (107)] et qu'aussi $T' X_k = \lambda'_k X_k$ pour le même vecteur X_k . On en déduit $T' T X_k = \lambda'_k T X_k = \lambda'_k \lambda_k X_k$ soit $(T' T) X_k = (\lambda'_k \lambda_k) X_k$, C.Q.F.D. Des paragraphes précédents, on déduit aussi que le produit de deux matrices similaires est commutatif ($T' T = T T'$) et que des matrices inverses l'une de l'autre sont similaires.

Exercice

Soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres, les vecteurs propres, la matrice semblable diagonale T^A et une matrice A telle que $T^A = A T A^{-1}$.

7. LES MATRICES COMME OPERATEURS DE ROTATION

Cette section concerne uniquement les matrices 2×2 dont le déterminant est égal à 1.

DECOMPOSITION EN OPERATEURS DE ROTATION

Nous allons montrer maintenant qu'une telle matrice T possède une matrice semblable qui est un opérateur de rotation $R(\theta)$. Donc T peut être considérée comme équivalente à une rotation suivant (79) et (81) dans un certain espace transformé. $R(\theta)$ satisfait les équations :

$$\begin{aligned} T &= N^{-1} R(\theta) N \\ R(\theta) &= N T N^{-1} . \end{aligned} \quad (127)$$

N sera appelée "matrice de normalisation" et l'espace où les coordonnées ont subi la transformation N sera "l'espace normé". Nous considérerons N comme une matrice de changement de coordonnées, c'est-à-dire que tout vecteur de coordonnées \vec{X} dans l'espace original aura des coordonnées X' telles que :

$$\vec{X}' = N \vec{X} . \quad (128)$$

L'équation (127) admet une infinité de solutions prises dans un groupe de rotation. Aussi, avant d'aborder ce cas général, nous étudierons deux cas particuliers de N , à savoir $n_{21} = 0$, puis $n_{12} = 0$. Par (127), $R(\theta)$ est semblable à T , donc $\text{Tr} [R(\theta)] = \text{Tr} (T)$, d'où $\cos \theta = (t_{11} + t_{22})/2$.

7.1 Cas $n_{21} = 0$

7.1.1 *Première possibilité :*

$$-2 \leq t_{11} + t_{22} \leq +2 . \quad (129)$$

On calcule aisément que si :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} , \quad (130)$$

on obtient de (127) les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} (t_{11} + t_{22}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(T) \\ \sin \theta &= \frac{t_{21}}{n_{11}^2} = \frac{t_{22} - t_{11}}{2 n_{11} n_{22}} . \end{aligned} \quad (131)$$

On retrouve les valeurs propres de T suivant (116), soit $\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\mp i\theta}$. Nous utiliserons maintenant les conventions suivantes :

$$\begin{cases} \gamma = n_{11}^2 = t_{21} / \sin \theta \\ \alpha = n_{11} n_{12} = (t_{22} - t_{11}) / 2 \sin \theta \\ \beta = (1 + \alpha^2) / \gamma \quad (\text{ou } \beta \gamma - \alpha^2 = 1). \end{cases} \quad (132)$$

On obtient aussitôt la série des relations :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{Tr}(T) \quad (133)$$

$$\sin \theta = (t_{22} - t_{11}) / 2\alpha = t_{21} / \gamma = -t_{12} / \beta,$$

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \end{pmatrix}, \quad (134)$$

le problème est donc résolu, et (127) se développe ainsi :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\gamma}} & -\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \end{pmatrix}, \quad (135)$$

d'où :

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta - \alpha \sin \theta & -\beta \sin \theta \\ \gamma \sin \theta & \cos \theta + \alpha \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (136)$$

Par suite la décomposition suivant (136) s'écrira $T = R(\theta, \alpha, \beta, \gamma)$.

(Attention le signe de θ est toujours le signe trigonométrique direct.)

7.1.2 Deuxième possibilité :

$$|t_{11} + t_{22}| > 2.$$

On remplace $R(\theta)$ par :

$$R(i\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -i \sinh \theta \\ i \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \quad (137)$$

d'où avec la même matrice de normalisation qu'en (134) :

$$T = N^{-1} R(i\theta) N = \begin{pmatrix} \cosh \theta - i\alpha \sinh \theta & -i\beta \sinh \theta \\ +i\gamma \sinh \theta & \cosh \theta + i\alpha \sinh \theta \end{pmatrix}. \quad (138)$$

Si nous considérons les α, β, γ comme des imaginaires purs de la forme $\alpha = -i\bar{\alpha}, \beta = -i\bar{\beta}, \gamma = i\bar{\gamma}$, les termes surlignés étant réels, nous pouvons aussi écrire :

$$T = \begin{pmatrix} \cosh \theta - \bar{\alpha} \sinh \theta & -\bar{\beta} \sinh \theta \\ -\bar{\gamma} \sinh \theta & \cosh \theta + \bar{\alpha} \sinh \theta \end{pmatrix} \quad (139)$$

avec :

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{\gamma}} & \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\bar{\gamma}}} \\ 0 & 1/\sqrt{\bar{\gamma}} \end{pmatrix}.$$

Pour des raisons explicitées plus loin, les matrices du type (111) seront appelées "convergentes", et celles du type (138) seront appelées "divergentes".

Toute représentation d'une matrice divergente est équivalente à celle d'une matrice convergente où l'on remplacerait θ par $i\theta$. Malheureusement la fonction $\cosh \theta$ est toujours positive par définition, c'est pourquoi, lorsqu'on décomposera une matrice divergente suivant (138), il faudra toujours expliciter un signe moins devant $\cosh \theta$ lorsque ce terme aura une valeur négative. On a toujours :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cosh \theta = \frac{1}{2} \text{Tr}(T) \\ \sinh \theta = -t_{12}/i\beta \\ \alpha = (t_{22} - t_{11})/2i \sinh \theta \\ n_{11} = \sqrt{\bar{\gamma}}, n_{12} = \alpha/\sqrt{\bar{\gamma}}, n_{22} = 1/\sqrt{\bar{\gamma}}, n_{21} = 0 \\ \beta\bar{\gamma} - \alpha^2 = 1 \quad (\text{Mais } \bar{\beta}\bar{\gamma} + \alpha^2 = 1). \end{array} \right. \quad (140)$$

Par la suite, la décomposition suivant (138) s'écrira $T = R(i\theta, \alpha, \beta, \gamma)$.

MATRICE DE TWISS

On peut écrire (136) suivant :

$$T = I \cos \theta - J \sin \theta, \quad (141)$$

où I est la matrice-unité et J est la matrice de Twiss :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

avec :

$$J^2 = -I. \quad (142)$$

De même (138) s'écrit aussi :

$$T = I \cosh \theta - J' \sinh \theta \quad (143)$$

avec : $J = i J'$ (144)

et : $J'^2 = I$.

MULTIPLICATION ET PUISSANCE

Nous allons montrer un résultat remarquable qui permet de nombreuses simplifications :

$$T^2 = N^{-1} R(\theta) N N^{-1} R(\theta) N = N^{-1} R(2\theta) N$$

et d'une façon générale :

$$T^n = N^{-1} R(n\theta) N. \quad (145)$$

Ainsi en élevant T à une puissance n, la matrice de normalisation reste la même, et seule la rotation est multipliée par n, ce qui peut s'écrire :

$$T^n = I \cos n\theta - J \sin n\theta = \begin{pmatrix} \cos n\theta - \alpha \sin n\theta & -\beta \sin n\theta \\ \gamma \sin n\theta & \cos n\theta + \alpha \sin n\theta \end{pmatrix}. \quad (146)$$

(Le résultat est exactement le même pour les matrices divergentes où $\cosh \theta$ devient $\cosh n\theta$ et $\sin n\theta$ devient $i \sinh n\theta$.)

Donc :

$$T^n = R(n\theta, \alpha, \beta, \gamma). \quad (147)$$

Les équations (145) et (146) nous font remarquer que si l'on multiplie deux matrices T_1 et T_2 ayant les mêmes coefficients de Twiss α, β, γ , le produit $T_2 T_1$ est :

$$T_2 T_1 = R(\theta_1 + \theta_2, \alpha, \beta, \gamma).$$

Nous allons voir à la fin de cette section que de telles matrices sont similaires.

7.2 Cas $n_{12} = 0$

Refaisons les mêmes calculs que ci-dessus; nous trouvons le même opérateur de rotation θ , mais la matrice N est alors :

$$N^\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta}} & 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix}. \quad (148)$$

[Pour la différencier, nous appellerons maintenant N^γ la matrice (134).]

7.3 Cas général

Les deux matrices de normalisation N^γ et N^β ci-dessus ne sont que des cas particuliers des matrices $N(\nu)$ appartenant au groupe :

$$N(\nu) = R(\nu) N^\gamma \quad (149)$$

pour toute rotation d'un angle ν . (Le fait de prendre N^γ comme référence permet simplement de fixer une origine arbitraire à l'angle ν .) On le comprend tout de suite en écrivant (127) suivant :

$$T = (N^\gamma)^{-1} R(-\nu) R(\theta) R(\nu) N^\gamma \quad (150)$$

qui reste vraie quel que soit ν . D'où :

$$T = N(\nu)^{-1} R(\theta) N(\nu) . \quad (151)$$

Explicitons $N(\nu)$ en fonction de ν suivant (150); nous obtenons :

$$N(\nu) = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} \cos \nu & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\alpha \cos \nu - \sin \nu) \\ \sqrt{\gamma} \sin \nu & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\cos \nu + \alpha \sin \nu) \end{pmatrix} . \quad (152)$$

On remarque aussitôt qu'en faisant $\operatorname{tg} \nu = \alpha$ on obtient N^β de l'équation (148). Cela veut dire : on passe du point transformé par N^γ au point transformé par N^β au moyen d'une rotation $\nu = \operatorname{arctg} \alpha$. Pour une matrice divergente, nous écrirons par définition :

$$T = N(i\nu)^{-1} R(i\theta) N(i\nu)$$

avec :

$$N(i\nu) = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} \cosh \nu & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\alpha \cosh \nu - i \sinh \nu) \\ \sqrt{\gamma} i \sinh \nu & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\cosh \nu + i \alpha \sinh \nu) \end{pmatrix} . \quad (153)$$

CONCLUSION

Toute matrice 2×2 , T , de déterminant égal à 1 possède une matrice semblable qui est un opérateur de rotation $R(\theta)$ suivant (127). On résout l'équation caractéristique $|T - \lambda I| = 0$ qui donne $\lambda = e^{\pm i\theta}$. On en déduit θ et trois paramètres α , β , γ , suivant les décompositions (132) ou (140) suivant que $|\operatorname{Tr}(T)|$ est inférieure ou supérieure à 2 (matrice convergente

ou divergente). Les matrices de normalisation N de l'équation (127) appartiennent aux groupes $N(v)$ ou $N(iv)$ définis par les équations (152) ou (153).

Remarque

Si t_{12} est > 0 , on laisse β toujours > 0 , donc θ est < 0 .

AUTRE FORMALISME POSSIBLE

Au lieu du paramètre α des équations (132) et (140), on peut utiliser un angle ν_0 tel que :

$$\tan \nu_0 = 1/\alpha \quad (154)$$

(les termes entre parenthèses sont ceux correspondant aux matrices divergentes). De cette équation, on tire :

$$\begin{aligned} \sin \nu_0 &= 1/\sqrt{1+\alpha^2} \\ \cos \nu_0 &= \alpha/\sqrt{1+\alpha^2} \end{aligned} \quad (155)$$

et :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\nu_0 + \theta)}{\sin \nu_0} & -\beta \sin \theta \\ \gamma \sin \theta & \frac{\sin(\nu_0 - \theta)}{\sin \nu_0} \end{pmatrix} \quad (156)$$

avec :

$$\beta\gamma = 1/\sin^2 \nu_0, \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \text{Tr}(T). \quad (157)$$

Dans la théorie des accélérateurs de particules, les matrices décrivant les trajectoires d'espace de phase sont explicitées en utilisant les paramètres $\beta\gamma\alpha$ [théorie de Courant-Snyder, par exemple^{*)}], tandis que le formalisme (156) est plutôt utilisé en Union soviétique. Ce formalisme est délicat à utiliser pour les matrices divergentes, car une tangente hyperbolique doit rester entre -1 et +1.

*) Voir Bibliographie, numéro 5.

DIRECTIONS PROPRES ET MATRICES SIMILAIRES

Suivant l'équation (126), on déduit que les vecteurs propres de ces matrices sont proportionnels à $\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \pm i \end{pmatrix}$ pour des matrices convergentes et à $\begin{pmatrix} i\beta \\ -i\alpha \pm 1 \end{pmatrix}$ pour les matrices divergentes, ou à $\begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ -\bar{\alpha} \pm 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi toutes les matrices ayant les mêmes α, β, γ sont similaires. Soient T_1 et T_2 deux matrices similaires de valeurs propres respectives $e^{+i\theta_1}$ et $e^{+i\theta_2}$; par le théorème décrit à la section 6 on retrouve que la valeur propre du produit T_1T_2 sera $e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, et que T_1 et T_2 commutent, donc que $T_1T_2 = T_2T_1 = R(\theta_1 + \theta_2, \alpha, \beta, \gamma)$. Toutes les matrices similaires ont le même espace normé, car les matrices de normalisation (134) et (148) sont les mêmes.

Ainsi, une succession de transformations par matrices similaires T_i correspond à une avance de phase $\sum_i \theta_i$ dans un même espace normé.

MATRICES INVERSES

D'après ce qui fut dit à la section 6, la matrice inverse de T possède les mêmes vecteurs propres que T et ses valeurs propres sont les inverses de celles de T . On en déduit immédiatement que si $T = R(\theta, \alpha, \beta, \gamma)$, $T^{-1} = R(-\theta, \alpha, \beta, \gamma)$ avec θ réel ou imaginaire.

CONDITIONS D'ORTHONORMALISATION

Il y a trois façons de considérer la normalisation N .

a) Si N est une matrice qui transforme les coordonnées par changement de base, $R(\theta)$ correspond à une rotation physique si l'espace normé où il agit possède un repère g_{ij}^* de la forme :

$$\begin{pmatrix} g_{11}^* & 0 \\ 0 & g_{22}^* \end{pmatrix}.$$

D'après la règle d'orthonormalisation [éq. (56)], cela signifie que les g_{ij} de l'espace original doivent former la matrice :

$$\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

donc que $|\vec{e}_1| = \sqrt{\gamma}$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{\beta}$, et que l'angle entre \vec{e}_1 et \vec{e}_2 est ν , tel que $\text{tg } \nu = 1/\alpha$;

b) On peut aussi dire que, si le repère original \vec{e}_i est orthonormé, la matrice (136) représente une rotation physique dans un repère \vec{e}_i^* , où $\vec{e}_1^* = n_{11}\vec{e}_1 + n_{21}\vec{e}_2$, $\vec{e}_2^* = n_{12}\vec{e}_1 + n_{22}\vec{e}_2$, ou :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1^* \\ \vec{e}_2^* \end{pmatrix} = N^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}.$$

c) Considérons maintenant N comme une matrice de transformation ponctuelle dans un repère (g_{ij}) . Pour que $R(\theta)$ corresponde à une rotation physique dans cet espace, il faut que les g_{ij} forment la matrice :

$$\begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix},$$

donc que le repère soit orthonormé, à un facteur près. C'est ce cas que nous considérerons par la suite.

Exercice

Trouver θ , α , β , γ et former N^β pour les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0,8 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1,68}{\sqrt{3}} & 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. TRANSFORMATION MATRICIELLE DES COURBES CONIQUES

DEFINITION DES PARAMETRES

Soit une courbe du deuxième degré de la famille des coniques. Son équation est :

$$\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \gamma_e x^2 + 2 \alpha_e x y + \beta_e y^2 = \varepsilon, \quad (158)$$

où ε est, pour une ellipse, la surface divisée par π . β_e et γ_e étant supposés positifs, l'équation (158) est celle d'une ellipse avec les signes normaux ou bien celle d'une hyperbole avec le signe entre parenthèses. On a la relation :

$$\beta_e \gamma_e = 1 + (-) \alpha_e^2. \quad (159)$$

D'une façon générale toute équation valable pour une ellipse devient celle d'une hyperbole de même surface si l'on remplace γ par $i\bar{\gamma}$, α par $-i\bar{\alpha}$, β par $-i\bar{\beta}$ et ε par $-i\bar{\varepsilon}$, suivant les définitions de l'équation (139).

[Note

Pour éviter une confusion possible entre ces paramètres et ceux de la matrice de Twiss, on conviendra en cas de doute de les écrire avec un indice inférieur lorsqu'ils s'appliquent à une figure, comme β_e , α_e , γ_e , etc. Par la suite, nous omettrons généralement l'indice "e".]

Nous définissons aussi, pour l'ellipse, une série de quatre paramètres c_i suivant :

$$\gamma = (c_3^2 + c_4^2) / \varepsilon, \quad \alpha = -(c_1 c_3 + c_2 c_4) / \varepsilon, \quad \beta = (c_1^2 + c_2^2) / \varepsilon. \quad (160)$$

L'équation de l'ellipse (158) devient $(c_3 x - c_1 y)^2 + (c_4 x - c_2 y)^2 = \varepsilon^2$.

(On choisit souvent $c_2 = 0$.) Les demi-axes d'une ellipse sont a et b , et nous définissons le rapport d'axe $z = a/b$. Nous écrivons :

$$z = H \pm \sqrt{H^2 - 1} \quad (161)$$

avec :

$$H = \frac{1}{2} (\beta + \gamma) = \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) / \varepsilon, \quad (162)$$

z est la solution de $z^2 - Hz + 1 = 0$.

Tableau 1

Point	Ellipse ou hyperbole	Ellipse	
1	x_1	$\sqrt{\epsilon/\gamma}$	$\epsilon/\sqrt{c_3^2 + c_4^2}$
	y_1	0	0
2	x_2	$\sqrt{\epsilon\beta}$	$\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$
	y_2	$-\alpha \sqrt{\epsilon/\beta}$	$(c_1c_3 + c_2c_4)/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$
3	x_3	$\begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \alpha \sqrt{\epsilon/\gamma}$	$(c_1c_3 + c_2c_4)/\sqrt{c_3^2 + c_4^2}$
	y_3	$\sqrt{\epsilon\gamma}$	$\sqrt{c_3^2 + c_4^2}$
4	x_4	0	0
	y_4	$\sqrt{\epsilon/\beta}$	$\epsilon/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$
a		$\sqrt{\epsilon/2}(\sqrt{H+1} + \sqrt{H-1})$	
b		$\sqrt{\epsilon/2}(\sqrt{H+1} - \sqrt{H-1})$	
$z = \frac{a}{b}$		$H \pm \sqrt{H^2 - 1}$	

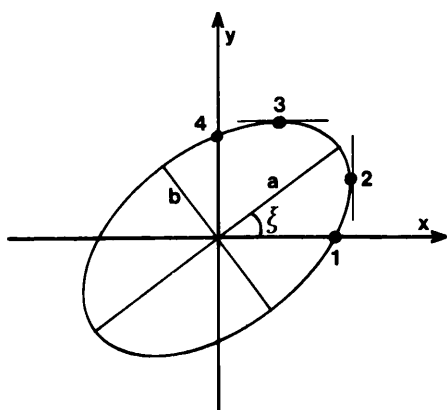


Fig. 10

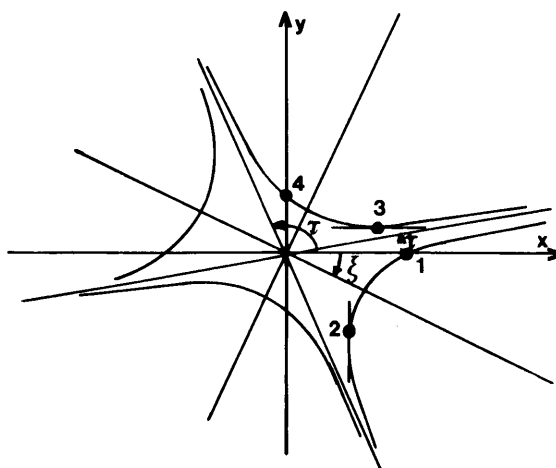


Fig. 11

Le tableau 1 résume les correspondances géométriques de ces paramètres suivant les coordonnées x_i et y_i du point No i des figures 10 et 11.

L'angle d'inclinaison des axes est donné pour l'ellipse par :

$$\begin{aligned} \tan 2\xi &= -2\alpha / (\beta - \delta) \\ \sin 2\xi &= -\alpha / \sqrt{\alpha^2 - 1} \\ \tan \xi &= \frac{1}{2\alpha} (\beta - \delta \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 - 4}) = \frac{\alpha - \delta}{\alpha}, \end{aligned} \quad (163)$$

et pour l'hyperbole par :

$$\tan \xi = \frac{1}{2\alpha} (\beta + \delta \pm \sqrt{(\beta - \delta)^2 - 4}).$$

Les angles d'inclinaison des asymptotes de l'hyperbole sont τ_i , donnés par :

$$\tan \tau = (-\alpha \pm 1) / \beta. \quad (164)$$

Pour l'ellipse, les asymptotes sont imaginaires et alors :

$$\tan \tau = (-\alpha \pm i) / \beta. \quad (165)$$

Note

α est < 0 lorsque le grand axe de l'ellipse se trouve dans le quadrant de x et $y > 0$.

TRANSFORMATION MATRICIELLE

Si les coordonnées de l'espace sont soumises à la transformation matricielle T, de déterminant égal à 1, la conique devient une autre conique dont l'équation est :

$$\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \gamma' x^2 + 2\alpha' xy + \beta' y^2 = \mathcal{E}, \quad \left[\text{avec } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]. \quad (166)$$

Les nouveaux paramètres se déduisent des anciens par la multiplication matricielle ^{*)} :

$$\begin{pmatrix} \beta' \\ \alpha' \\ + \\ - \end{pmatrix} \gamma' = \begin{pmatrix} t_{11}^2 & -2t_{11}t_{12} & t_{12}^2 \\ -t_{21}t_{11} & 1 + 2t_{12}t_{21} & -t_{12}t_{22} \\ t_{21}^2 & -2t_{22}t_{21} & t_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ + \\ - \end{pmatrix} \gamma, \quad (167)$$

la surface est conservée puisque $|T| = 1$.

*) Voir Bibliographie, numéro 11.

Les coefficients c_i forment une matrice $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ qui se transforme à travers T suivant $C' = TC$; donc les c_i deviennent c'_i tels que :

$$\begin{pmatrix} c'_1 & c'_2 \\ c'_3 & c'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}. \quad (168)$$

NORMALISATION

La "normalisation" sera la transformation des coordonnées changeant l'équation de l'ellipse en celle d'un cercle de même surface, ou changeant une hyperbole en une hyperbole équilatère droite. Elle sera obtenue par des matrices de normalisation N identiques à celles de la section précédente. Mais un cercle est défini à une rotation près ν ; il y a donc une infinité de telles matrices N définies à $R(\nu)$ [ou $R(i\nu)$] près. Les paramètres d'un cercle sont $\beta = \gamma = 1$, $\alpha = 0$, $c_1 = c_4 = R$, $c_3 = c_2 = 0$, $z = 1$, $\varepsilon = R^2$. On trouve alors aisément que :

$$N(\nu) = R(\nu) N^\delta \quad \text{avec} \quad N^\delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\delta} & \frac{\alpha}{\sqrt{\delta}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\delta}} \end{pmatrix} \quad (169)$$

quel que soit ν . Cela veut dire que si les coordonnées de l'espace subissent la transformation matricielle $N(\nu)$, alors les paramètres de la courbe conique transformés suivant les équations (167) et (168) donnent les paramètres d'un cercle de même surface $\varepsilon = R^2$, à savoir $\beta = \gamma = 1$, $\alpha = 0$, $c_1 = c_4 = \sqrt{\varepsilon}$, $c_3 = c_2 = 0$ (ou ceux d'une hyperbole équilatère droite).

On trouve aussi que le N^β de l'équation (148) satisfait aussi à cette exigence. Les matrices capables de transformer une ellipse en un cercle, ou une hyperbole en une hyperbole équilatère droite de même surface et de même centre sont les mêmes que les matrices de normalisation N de la section 7, où les paramètres α , β , γ seraient maintenant ceux de l'ellipse ou de l'hyperbole^{*)} suivant les figures 10 et 11. Nous allons mieux comprendre le sens de ce théorème dans la section suivante.

CAS PARTICULIER DES PARABOLES

Une parabole centrée est une ellipse étendue à l'infini et se résume à deux droites parallèles. On trouve alors que $\beta = \gamma = \infty$, $\alpha = \pm\infty = \pm\sqrt{\beta\gamma}$,

*) A condition de prendre les termes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ pour l'hyperbole.

et l'équation (158) devient celle d'une droite, considérée comme une conique dégénérée, soit $x + (\beta/\alpha)y = \pm c$ (avec $c = \sqrt{\epsilon/\gamma}$). Les angles ξ et τ des équations (163) et (164) sont tels que $\text{tg } \xi = \text{tg } \tau = -\alpha/\beta$.

NOTE SUR LES MATRICES DITES σ

Tout ellipsoïde centré sur l'origine d'un espace orthonormé à n dimensions, x_1, x_2, \dots, x_n , peut être défini comme la surface où se vérifie l'équation :

$$\sum_i \sum_j s_{ij} x_i x_j = 1, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

les s_{ij} étant les éléments d'une matrice S symétrique.

Soit le vecteur :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

et sa transposée :

$$X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation précédente peut s'écrire :

$$X^T S X = 1. \tag{170}$$

Soit une transformation $R(0 \rightarrow t)$ telle que :

$$X(t) = R X(0).$$

On peut écrire l'équation (170) ainsi :

$$X^T(0) \{ R^T R^{-1} \} S(0) \{ R^{-1} R \} X(0) = 1.$$

En sachant que, pour toutes matrices A et B , on a $AA^{-1} = I$, $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$ et $A^T B^T = (BA)^T$, cette équation devient :

$$X^T(t) R S(0) R^T X(t) = 1.$$

Ceci veut dire que l'équation de l'ellipsoïde (170) peut s'écrire :

$$X^T(t) S(t) X(t) = 1 \tag{171a}$$

avec :

$$S(t) = R^{T^{-1}} S(0) R^{-1} . \quad (171b)$$

L'équation (171b) décrit la transformation de S lorsque X subit la transformation R. On trouve dans la littérature^{*)} la définition de la matrice σ suivant :

$$\sigma = S^{-1} .$$

L'équation (170) s'écrit alors :

$$X^T(t) \sigma^{-1}(t) X(t) = 1 , \quad (171c)$$

et l'équation (171b) devient :

$$\sigma(t) = R \sigma(0) R^T . \quad (171d)$$

L'équation (171d) est une généralisation de l'équation (167).

NORME DE X, N(X)

La norme d'un vecteur est le produit scalaire de ce vecteur par lui-même, soit $N(X) = X^T X$ si l'espace est orthonormé; soit $N(X) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Mais d'après l'équation (7), dans un espace quelconque :

$$N(x) = \sum_i \sum_j g_{ij} x_i x_j ,$$

ce qui peut s'écrire :

$$N(x) = X^T G X ,$$

où G est la matrice des g_{ij} [voir éq. (4) et (48)].

En comparant avec l'éq. (170), on voit qu'elle peut être l'équation d'une surface où la norme de X est constante, dans un espace où les g_{ij} seraient identiques aux éléments s_{ij} de S de l'équation (170). Dans un tel espace, X décrit donc une sphère.

*) Voir Bibliographie, numéro 17.

Nous retrouvons là l'idée de la normalisation : un ellipsoïde peut toujours être considéré comme une sphère, soit dans un espace quelconque ayant les g_{ij} convenables, soit dans un espace orthonormé ayant subi une transformation de normalisation.

Nous avons vu les rapports entre ces " g_{ij} convenables" et les matrices de normalisation à la page 47 pour une ellipse. Les matrices σ généralisent ce formalisme pour toutes dimensions.

CAS D'UNE ELLIPSE

Pour une ellipse on trouve :

$$S = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

($\pi\varepsilon$ = surface de l'ellipse). Donc :

$$\sigma = \varepsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

suivant les définitions des figures 10 et 11. La transformation de σ suivant (171d) est identique à la transformation décrite par l'éq. (167). On remarquera une forte analogie avec les matrices de Twiss J [éq. (142)], où $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$.

Exercice

Soit une ellipse de surface $\pi \text{ mm}^2$ inscrite dans un rectangle de 2 mm de haut selon Oy et de 4 mm de large suivant Ox, centrée sur l'origine. Trouver α , β , γ , z et ξ .

9. TRAJECTOIRES CONIQUES ET TRANSFORMATION D'ELLIPSES

Nous ne nous occuperons dans cette section que des matrices 2×2 dont le déterminant est égal à 1.

TRAJECTOIRE CONIQUE (fig. 12)

Soit un espace rectangulaire orthonormé à deux dimensions. Si les

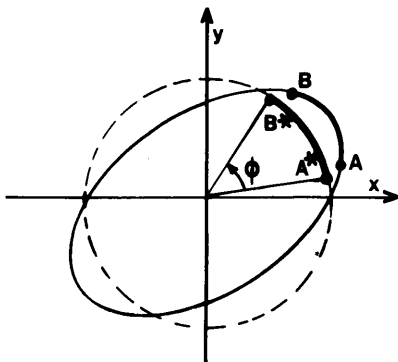


Fig. 12

coordonnées d'un point A sont multipliées par la matrice T, elle deviennent celles du point B, tel que :

$$\vec{B} = T \vec{A}. \quad (172)$$

On dit que T fait passer de A à B. La réciproque n'est pas vraie, car il y a une infinité de possibilités de passer de A à B, alors qu'à un \vec{A} correspond un seul $T\vec{A}$ pour T donnée.

Il est toujours possible de dire que A et B sont sur un arc de conique, ellipse ou hyperbole, que nous allons calculer. Nous avons vu que T peut se décomposer suivant $R(\theta, \alpha, \beta, \gamma)$, soit :

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta - \alpha \sin \theta & -\beta \sin \theta \\ \gamma \sin \theta & \cos \theta + \alpha \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (173a)$$

ou suivant la forme divergente équivalente de l'équation (138).

Nous avons vu à la section 7 que :

$$T(A \rightarrow B) = (N^\beta)^{-1} R(\theta) N^\gamma \quad (173b)$$

avec :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{Tr}(T) \quad \text{et} \quad N^\gamma = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & \frac{x}{\sqrt{\gamma}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \end{pmatrix}. \quad (173c)$$

Transportons-nous dans l'espace normé par N^γ . A devient A^* tel que

$A^* = N^\gamma A$ et B devient $B^* = N^\gamma B$. A^* et B^* sont sur un cercle, séparés par un angle θ . Or ce cercle est le transformé d'une ellipse :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

dans la transformation N^γ . Donc A et B sont tous deux sur une ellipse ayant pour équation :

$$\gamma x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 = \varepsilon, \quad (174)$$

l'ellipse et le cercle ont la même surface. On peut faire le même raisonnement pour une matrice T divergente; d'où la conclusion : la transformation opérée par une matrice T de déterminant égal à 1 est équivalente à la circulation le long d'un arc θ_e d'une ellipse (ou d'une hyperbole) dont les paramètres $\beta_e, \alpha_e, \gamma_e$, décrits à la section 8, sont reliés aux paramètres de Twiss β, α, γ de la matrice T décrits à la section 7 par $\alpha_e = \alpha, \beta_e = \beta, \gamma_e = \gamma, \theta_e = \theta$, si on utilise les équations (136) ou (139) pour des ellipses ou des hyperboles, ou bien par les relations particulières à l'hyperbole $\alpha_e = i\alpha, \beta_e = i\beta, \gamma_e = -i\gamma, \theta_e = i\theta$ si on utilise l'équation (136). Cette circulation correspond à une rotation dans le plan normé de l'angle θ des équations (131) ou (139) sur un cercle de même surface pour une matrice convergente ($|\text{Tr}(T)| \leq 2$), ou sur une hyperbole équilatère droite de même "surface" [même ε dans l'équation (158)] pour une matrice divergente ($|\text{Tr}(T)| > 2$). (On rappelle qu'un angle hyperbolique est la surface balayée par le rayon OM lorsque le point M se déplace sur une hyperbole équilatère droite de rayon l.)

Note

La trajectoire conique devient une droite, inclinée d'un angle ξ sur Ox si, dans (173a), on a $\theta = 0, \alpha = \beta = \gamma = \infty$, mais $\alpha \sin \theta = \rho$ (fini) et $-\alpha/\beta = \text{tg } \xi$ (fini). Alors, T prend la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 1-\rho & \rho/\text{tg } \xi \\ -\rho \text{tg } \xi & 1+\rho \end{pmatrix}.$$

TRANSFORMATION DES ELLIPSES

Nous ne décrivons que le cas des ellipses, mais le même raisonnement est valable pour les hyperboles. Soit une ellipse :

$$E_1 \left(\begin{array}{c} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{array} \right)$$

et une ellipse :

$$E_2 \left(\begin{array}{c} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{array} \right)$$

de même surface et de même centre. Quelle est la matrice $T(E_1 \rightarrow E_2)$ qui transforme l'ellipse E_1 en l'ellipse E_2 , point par point?

Considérons les matrices :

$$N^{\gamma_i} = \left(\begin{array}{cc} \sqrt{\gamma_i} & \frac{\alpha_i}{\sqrt{\gamma_i}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_i}} \end{array} \right) \text{ pour } i=1,2. \quad (175)$$

Nous allons découper $T(E_1 \rightarrow E_2)$ en : a) une transformation de E_1 en un cercle c ; b) une rotation χ quelconque sur c ; c) une transformation de c en E_2 . D'où :

$$T(E_1 \rightarrow E_2) = (N^{\gamma_2})^{-1} R(\chi) N^{\gamma_1} \quad (176)$$

pour χ quelconque. Le calcul est fastidieux, mais simple; il donne :

$$T(E_1 \rightarrow E_2) = \left(\begin{array}{cc} \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} (\cos \chi - \alpha_2 \sin \chi) & \frac{1}{\sqrt{\gamma_2 \gamma_1}} [(d_1 - d_2) \cos \chi - (1 + d_1 d_2) \sin \chi] \\ \sqrt{\gamma_2 \gamma_1} \sin \chi & \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} (\cos \chi + \alpha_1 \sin \chi) \end{array} \right). \quad (177)$$

Si nous choisissons la plus simple, pour $\chi = 0$ (origine arbitraire), nous avons :

$$T(E_1 \rightarrow E_2) = \left(\begin{array}{cc} \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} & \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \end{array} \right). \quad (178)$$

Si au lieu de (176) nous avons écrit :

$$T(E_1 \rightarrow E_2) = (N^{\beta_2})^{-1} R(\psi) N^{\beta_1}, \quad (179)$$

nous aurions trouvé :

$$T(E_1 \rightarrow E_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi - \alpha_1 \sin \psi) & -\sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \psi \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} [(1 + \alpha_1 \alpha_2) \sin \psi - (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \psi] & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos \psi + \alpha_2 \sin \psi) \end{pmatrix} \quad (180)$$

avec la plus simple pour $\psi = 0$:

$$T(E_1 \rightarrow E_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} & 0 \\ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \end{pmatrix}. \quad (181)$$

Ces matrices sont utilisées en optique corpusculaire. De plus, la matrice T fait correspondre rigoureusement, à un point A de E_1 , un même point B de E_2 dans chaque cas [(180) ou (177)] si nous avons la relation :

$$L_g(\psi - \chi) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 + \alpha_1 \alpha_2}. \quad (182)$$

ELLIPSE INVARIANTE

Si les paramètres $\alpha_e, \beta_e, \gamma_e$ d'une ellipse sont identiques aux paramètres de Twiss α, β, γ de la matrice T, donc si $\alpha_e = \alpha, \beta_e = \beta, \gamma_e = \gamma$, cette ellipse reste invariante dans la transformation T qui correspond alors simplement à un glissement le long d'elle-même. Cette ellipse est donc bien la trajectoire conique apparente de la transformation T décrite par l'équation (174). Cette propriété est vraie pour toute ellipse homothétique ayant les mêmes paramètres $\alpha_e, \beta_e, \gamma_e$, mais une surface ϵ différente. On définirait de même une hyperbole invariante pour les matrices divergentes.

ROTATION PROPRE

On peut se demander, par analogie avec la recherche des valeurs propres, s'il existe un angle ϕ et un vecteur \vec{X} tels que la longueur de \vec{X} soit conservée dans la transformation T, T étant une matrice convergente de déterminant égal à 1. Cela revient à résoudre l'équation :

$$T \vec{X} = R(\phi) \vec{X}. \quad (183)$$

Soient $\theta, \alpha, \beta, \gamma$ les paramètres déduits de T par sa décomposition suivant (136). On forme les paramètres $H = (\beta + \gamma)/2$ et $z = H \pm \sqrt{H^2 - 1}$ (qui est le rapport d'axe de l'ellipse invariante liée à T). Tout calcul fait, nous trouvons :

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \pm z \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = z \sqrt{\frac{2 - \operatorname{Tr}(T)}{2 + \operatorname{Tr}(T)}} \quad (184)$$

et :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ tel que } \frac{x_1}{x_2} = \frac{c_{12} \pm \sin \phi}{c_{22} - c_{11}} \quad (185)$$

donnant ainsi deux directions le long desquelles tout vecteur sera trans-

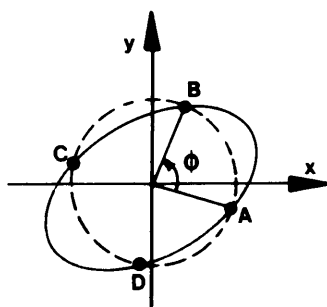


Fig. 13

formé par une simple rotation de ϕ . On voit très bien sur la figure 13 que les vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ se transforment ainsi les uns en les autres par rotation d'un angle ϕ : ce sont les points de rencontre d'un cercle passant par A et de l'ellipse invariante de T passant par A. (On obtiendrait des résultats analogues avec les matrices divergentes, mais en utilisant les points de rencontre

entre l'hyperbole invariante et une hyperbole équilatère droite.)

VECTEURS PROPRES

Cette analogie nous permet de comprendre que les directions propres d'une matrice 2×2 de déterminant égal à 1, suivant la définition de la section 6, ne sont pas autre chose que les asymptotes des coniques invariantes :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

de cette matrice [éq. (158)], imaginaires si la valeur absolue de la trace est ≤ 2 , réelles si cette valeur est > 2 . En effet, tout vecteur porté par une asymptote reste sur cette asymptote. Les directions propres d'une matrice 2×2 étaient données en (126) par :

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\sqrt{|T|} e^{i\theta} - c_{11}}{c_{12}}$$

En utilisant l'expression (164) et en posant $|T| = 1$, on peut les écrire ainsi :

$$L_{ij} \tau_{\pm} = \frac{-\alpha \pm i}{\beta} \quad (\text{si } |\text{Tr}(T)| \leq 2), \quad (186)$$

$$L_{ij} \tau_{\pm} = \frac{-\bar{\alpha} \pm 1}{\bar{\beta}} \quad (\text{si } |\text{Tr}(T)| > 2), \quad (187)$$

[toujours en ne considérant ici que les $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ suivant l'équation (139)].
On propose ^{*)} un nombre complexe :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\beta} (1 + i\alpha) \quad (188a)$$

pour définir toute ellipse; on s'aperçoit alors que ce n'est pas autre chose que $-i \text{tg } \tau_+$ ou que $\text{tg } \tau_+ = iY$. Y_1 se transforme en Y_2 à travers une matrice M suivant :

$$Y_2 = \frac{m_{22} Y_1 - i m_{21}}{m_{11} + i m_{12} Y_1}, \quad (188b)$$

ce qui correspond à :

$$L_{ij} \tau_2 = \frac{m_{22} \text{tg } \tau_1 + m_{21}}{m_{11} + m_{12} \text{tg } \tau_1}, \quad (189)$$

pour toute conique.

TRANSFORMATIONS PERIODIQUES ET STABILITE

Nous rencontrerons souvent des transformations matricielles répétées identiquement en optique et en électricité.

D'une façon générale, tout vecteur porté par les directions propres d'une matrice T est multiplié simplement par la valeur propre λ_i correspondant à cette direction. Donc la matrice T^n , où l'opération T est répétée n fois, transformera un tel vecteur en le multipliant simplement par λ_i^n .

Nous allons considérer maintenant le cas des matrices 2×2 de déterminant égal à 1. Elles peuvent se décomposer suivant (136), (138) ou (139). Si l'opération T est répétée successivement n fois, nous savons, suivant (146), que θ devient $n\theta$, mais que α , β , γ restent invariants.

*) Voir Bibliographie, numéro 8.

Dans l'espace normé, le point image A^* du point A tourne sur le cercle image de l'ellipse invariante passant par A , en avançant d'une phase θ à chaque multiplication par T . De même, dans le cas d'une matrice divergente, il avancerait d'un angle hyperbolique θ sur l'hyperbole équilatère équivalente.

Ainsi, si T est convergente, le mouvement de A est stable car, si l'opération T est répétée indéfiniment, il parcourt l'ellipse invariante passant par A . Par contre, si T est divergente, A s'enfuit le long des branches de l'hyperbole invariante et sa trajectoire est divergente : le mouvement de A est instable si T est répétée indéfiniment.

Si A est situé sur une asymptote de l'hyperbole invariante, le vecteur \vec{OA} est un vecteur propre de la transformation T , donc $y_a/x_a = (-\alpha \pm 1)/\beta$ [voir éq. (187)]. En répétant T , A va s'enfuir sur l'asymptote et on peut définir le "saut" qu'il y fait à chaque répétition de T , de n à $n + 1$ par le rapport d'accroissement de ses coordonnées :

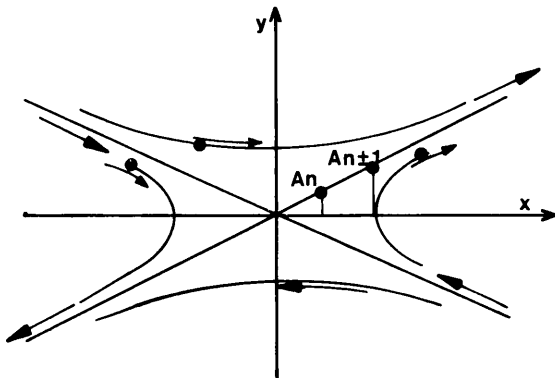


Fig. 14

$$\frac{x_a(n+1)}{x_a(n)} = e^{\pm \theta} \quad (190)$$

Ces différents mouvements sont figurés sur la figure 14 pour le cas particulier $\theta < 0$ et $\alpha = 0$.

LE DECOUPAGE D'UN SYSTEME PERIODIQUE

Considérons que la matrice T_0 corresponde à une transformation se déroulant le long d'un paramètre s . Nous coupons cette transformation en deux pour une certaine valeur de s , de telle façon que $T_0 = T_2 T_1$, soit : " T_1 puis T_2 donnent T_0 ". Ensuite nous reportons la transformation T_1 à droite de T_2 et nous examinons la matrice $T(s) = T_2 T_1$ (fig. 15) qui a la même "longueur" L que T_0 le long du paramètre s (le mot longueur est arbitraire car s pourrait être aussi bien un temps). Nous savons (cf.

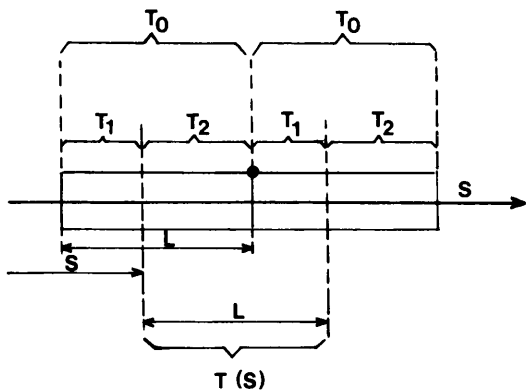


Fig. 15

section 6) que $T(s)$ a les mêmes valeurs propres que T_0 . Donc si $T_0 = R(\theta, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, nous aurons $T(s) = [R(\theta), \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)]$ (toujours pour des matrices 2×2 de déterminant égal à 1); l'angle θ est le même quel que soit l'endroit de la césure à s , car il est donné par les valeurs propres [éq. (124)]. Les tangentes des directions propres se transforment suivant (189).

Exercice

Soient deux ellipses droites E_1 et E_2 ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), de même surface et de même centre avec $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 4$. Trouver les matrices les plus simples transformant E_1 en E_2 . Former leur nombre complexe Y [éq. (188a) et (188b)]

Soit la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Définir un point sur l'asymptote de l'hyperbole invariante. Trouver l'accroissement des coordonnées de ce point lorsque cette matrice de transformation est appliquée plusieurs fois aux points de l'espace [éq. (190)].

10. SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES*)

a) Equation linéaire homogène à n inconnues

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0, \text{ ou } \sum_i a_{ki}x_i = 0, i=1, n; k=1, n. \quad (191)$$

b) Equation linéaire inhomogène

$$\sum_i a_{ki}x_i = b_k, i=1, n; k=1, n. \quad (192)$$

RESOLUTION DES EQUATIONS INHOMOGENES

Soit à résoudre l'ensemble des n équations pour les n variables x_i :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots = b_1 \\ \vdots \\ a_{ki}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots = b_k \\ \vdots \end{cases} \quad (193)$$

ou :

$$\sum_i a_{ki}x_i = b_k, i=1, n \text{ pour } k=1, n.$$

On étudie le déterminant $|A|$ formé par la matrice des coefficients a_{ij} , soit :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|. \quad (194)$$

L'ensemble d'équations (193) peut être symbolisé par :

$$A\vec{X} = \vec{B}, \quad (195)$$

d'où la solution :

$$\vec{X} = A^{-1}\vec{B}. \quad (196)$$

Il suffirait donc de calculer A^{-1} . On peut aussi utiliser la règle de Cramer suivante. On forme un déterminant $|A_i|$ qui est celui de la matrice des coefficients a_{ij} , mais où tous les coefficients de la variable x_i , donc tous les a_{ki} pour $k=1, n$, sont remplacés par le terme constant b_k . Par exemple, pour $i=2$, on aurait :

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

*) Ce problème étant largement traité dans d'autres ouvrages, nous ne mentionnerons que les résultats bruts.

La variable cherchée x_i est donnée par :

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} . \quad (197)$$

Exemple

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$|A| = -1$, $|A_1| = 1$, $|A_2| = -4$, d'où $x_1 = -1$, $x_2 = +4$.

On peut aussi résoudre les équations par $\vec{X} = A^{-1}\vec{B}$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où } \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +4 \end{pmatrix} \text{ C.Q.F.D. .}$$

RESOLUTION DES EQUATIONS HOMOGENES

Si tous les b_i sont nuls, l'ensemble (193) n'admet de solutions non nulles que si :

$$|A| = 0 .$$

Alors les n équations homogènes permettent de résoudre un système à $n - 1$ inconnues. La condition ci-dessus permet seulement de déterminer des rapports entre les n x_i ; on choisit alors une solution particulière *a priori* pour un x_i et on fait passer tous les $a_{ki}x_i$ à droite de façon qu'ils deviennent les termes constants d'un système de $n - 1$ équations inhomogènes à $n - 1$ inconnues.

Exercice

Résoudre le système :

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 , \end{aligned}$$

i) pour $a = 3$,

ii) pour $a = -1/2$, en supposant que tous les termes constants de droite sont nuls.

11. L'EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU DEUXIEME ORDRE

DEFINITION

Une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = 0, \quad (198)$$

où t est une variable quelconque. En ajoutant un terme constant à droite de (198), on en fait une équation inhomogène. On sait^{*)} que toute solution $x_i(t)$ de (198) est une combinaison linéaire de deux autres solutions connues $x_1(t)$ et $x_2(t)$ selon :

$$x_i(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t), \quad (199)$$

$\lambda_{1,2}$ étant des coefficients quelconques.

MATRICE DE TRANSFORMATION

On sait aussi que toute solution de (198) dépend linéairement de ses conditions initiales à $t = 0$ suivant des coefficients $t_{ij}(t)$:

$$\begin{cases} x_i(t) = t_{11}(t) x_i(0) + t_{12}(t) x'_i(0) \\ x'_i(t) = t_{21}(t) x_i(0) + t_{22}(t) x'_i(0) \end{cases} \quad (200)$$

(les symboles x' et x'' signifient respectivement dx/dt et d^2x/dt^2). On en déduit que $x_i(t)$ et $x'_i(t)$ forment un vecteur \vec{X}_i se transformant ainsi dans le changement de t_1 en t_2 :

$$\vec{X}_i(t_2) = \begin{pmatrix} x_i(t_2) \\ x'_i(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}(t_1 \rightarrow t_2) & t_{12}(t_1 \rightarrow t_2) \\ t_{21}(t_1 \rightarrow t_2) & t_{22}(t_1 \rightarrow t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i(t_1) \\ x'_i(t_1) \end{pmatrix}, \quad (201)$$

soit :

$$\vec{X}_i(t_2) = T(t_1 \rightarrow t_2) \vec{X}_i(t_1).$$

On remarque que :

$$t_{21} = t'_{11}, \quad t_{22} = t'_{12}. \quad (202)$$

*) Voir Bibliographie, numéro 3.

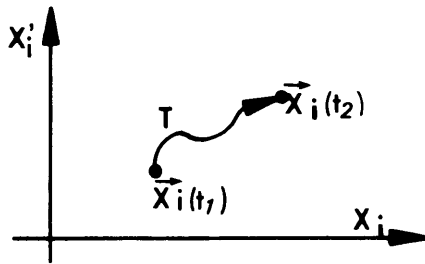


Fig. 16

Dans l'espace x_i, x_i' de la figure 16, les points représentatifs $\begin{pmatrix} x_i(t) \\ x_i'(t) \end{pmatrix}$ suivent une trajectoire lorsque T varie en suivant la transformation matricielle (200). Cette trajectoire est la solution complète de (198) pour des conditions initiales données.

WRONSKIEN

Supposons deux solutions connues de (198) $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et construisons le déterminant suivant appelé "Wronskien" :

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}. \tag{203}$$

Dérivons-le. On sait^{*)} que la dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants des matrices où les termes d'une ligne sont dérivés ligne après ligne. Donc nous aurons :

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix}. \tag{204}$$

En appliquant l'équation (198), on obtient :

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -ax_1' & -ax_2' \end{vmatrix} = -a W(t)$$

$$W(t) = W(0) e^{-\int_0^t a(t) dt}. \tag{205}$$

Or en considérant (201) et (203), on a :

$$W(t) = |T(t)| W(0) \tag{206}$$

$$|T| = e^{-\int_0^t a(t) dt}.$$

On remarque que $|T|$ est le déterminant fonctionnel ou Jacobien [cf. éq. (49a)] :

*) Voir Bibliographie, numéro 6.

$$|T| = \frac{D(x(t), x'(t))}{D(x(0), x'(0))} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} & \frac{\partial x(t)}{\partial x'(0)} \\ \frac{\partial x'(t)}{\partial x(0)} & \frac{\partial x'(t)}{\partial x'(0)} \end{array} \right|. \quad (207)$$

Une première conclusion est que $|T| = 1$ si $a(t) = 0$, c'est-à-dire s'il n'y a pas de terme d'amortissement dans (198).

EQUATION INHOMOGENE

La solution générale de l'équation inhomogène est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation inhomogène.

TRANSFORMATION DES SURFACES

Dans l'espace x_i, x_i' de la figure 16, considérons un élément de surface $dS = dx_i(t)dx_i'(t)$. Après la transformation T de chaque point de cet espace, cet élément devient $dS' = |T|dS$.

Appelons $\rho_0 = \rho(t)$ la densité des conditions initiales de (198) dans $dS(t_0)$. Ces conditions initiales x_{i_0}, x_{i_0}' sont les origines d'un faisceau de trajectoires suivant la figure 16. Après la transformation T les traces des trajectoires de ce faisceau auront une densité $\rho(t)$ dans l'élément de surface $dS(t)$, telle que $\rho(t) = \rho_0/|T|$, d'où :

$$\rho(t) = \rho_0 e^{+\int_0^t a(t) dt}$$

Si $a(t) = 0$, la densité est conservée. C'est un des aspects du théorème de Liouville.

12. LES TRANSFORMATIONS DANS L'ESPACE DES PHASES DE LA MECANIQUE RATIONNELLE

Nous traiterons ce sujet comme un exemple d'application et non d'une façon exhaustive. Nous ferons d'abord quelques brefs rappels.

EQUATIONS CANONIQUES

Soit un ensemble de n couples de variables dites "conjuguées", u_i, v_i ($i = 1, n$), c'est-à-dire qu'à un u_i correspond un seul v_i , et réciproquement.

Soit $G = f(u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n)$. On appelle "équations canoniques" les n couples d'équations conjuguées :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial G}{\partial u_i}, \quad (208)$$

G étant une fonction. On démontre que, si G ne dépend pas explicitement du temps, (208) entraîne $dG/dt = 0$, $G = \text{constante}$ et G est donc une "intégrale première" du mouvement, puisque c'est un invariant dans le mouvement.

POINT MATERIEL LIBRE SANS FROTTEMENT

Soit dans un espace vectoriel orthonormé à 3 dimensions un point de coordonnées x_i ($i = 1, 3$), de masse m , soumis à une force \vec{F} qui le meut et dont les composantes sont F_i . Appelons $p_i = m(dx_i/dt)$ les composantes de la quantité de mouvement; nous avons :

$$\vec{F}_i = \frac{dp_i}{dt} \quad \left(= m \frac{d^2x_i}{dt^2} \text{ dans les cas non relativistes} \right). \quad (209)$$

Supposons que \vec{F} dérive d'une fonction de forces $U[F_i = (\partial U/\partial x_i)]$ et que U soit fonction seulement des x_i (et non des dx_i/dt). Les forces ne dépendent donc pas de la vitesse. Définissons l'énergie cinétique par :

$$T = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}, \quad (210)$$

où $p_i = m(dx_i/dt)$ (composantes de la quantité de mouvement). Posons :

$$H = T - U. \quad (211)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (212)$$

Ces équations sont les "équations canoniques" du mouvement et la fonction H qui les "engendre" est appelée "hamiltonien".

Si l'hamiltonien H ne dépend pas explicitement du temps ($\partial H / \partial t = 0$), H = constante et il est une intégrale première du mouvement. On l'a donc assimilé à une "énergie totale" qui se conserverait.

ESPACE DES PHASES

Nous appelons "espace des phases" l'espace orthogonal à 6 dimensions, x_i, p_i . Nous considérerons alors la trajectoire suivie par le point x_i, p_i dans cet espace; nous rencontrerons souvent des trajectoires à H constant, car on peut faire cette approximation adiabatique si H varie lentement par rapport au phénomène étudié. H sera alors un invariant le long de cette courbe.

OSCILLATEUR HARMONIQUE LIBRE SANS FROTTEMENT

Soit une masse m oscillant sur un ressort linéaire de force k, suivant

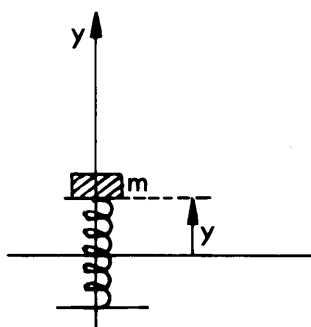


Fig. 17

l'axe vertical Oy. Soit g l'accélération de la pesanteur. L'équation du mouvement est :

$$k(y-b) = -m \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + g \right), \quad (213)$$

b étant quelconque. Par un choix approprié des coordonnées, cette équation s'écrit :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (214)$$

avec $\omega^2 = k/m$. La solution libre est :

$$\begin{cases} y = a \cos(\omega t + \delta) \\ p = -m a \omega \sin(\omega t + \delta) \end{cases} \quad (215)$$

($p = p_y = m y'$; a et δ sont des constantes.) Les conditions initiales à $t = 0$ sont y_0 et p_0 , d'où :

$$\begin{cases} \sin \delta = -p_0 / m a \omega \\ \cos \delta = y_0 / a \end{cases} \quad (216)$$

En appliquant le formalisme de la section 11, nous déduisons la transformation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{m \omega} \\ -m \omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \delta \\ -m a \omega \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (217)$$

Dans le plan de phase y, p , la trajectoire suit l'ellipse invariante de la matrice de transformation. En décomposant cette matrice convergente suivant (136), nous trouvons $\theta = -\omega t$, $\alpha = 0$, $\gamma = 1/\beta = m\omega$. Dans l'espace normé grâce à la transformation :

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{m\omega} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \end{pmatrix}, \quad (218)$$

cette trajectoire devient un cercle de rayon $a\sqrt{m\omega}$, de même surface

que l'ellipse invariante et sur lequel le point représentatif du mouvement se déplace suivant une rotation $-\omega t$. Cette conclusion est vraie quelles que soient les conditions initiales, seuls changent le rayon du cercle et la phase (fig. 18).

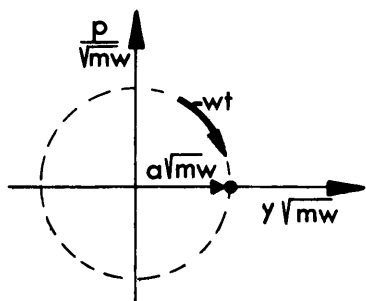


Fig. 18

L'invariant H est :

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{k y^2}{2} = \frac{1}{2} a^2 m \omega^2 = \frac{1}{2} a^2 k, \quad (219)$$

l'équation de l'ellipse du mouvement dans le plan de phase est :

$$\gamma y^2 + \frac{1}{\gamma} p^2 = \mathcal{E}, \quad (220)$$

\mathcal{E} étant la surface de l'ellipse divisée par π :

$$\mathcal{E} = a^2 m \omega = 2H/\omega. \quad (221)$$

La surface est proportionnelle à H/ω .

OSCILLATEUR HARMONIQUE AVEC FROTTEMENT

Considérons le frottement comme un amortissement proportionnel à la vitesse suivant un coefficient normalisé f [cela veut dire que la "force" d'amortissement s'opposant au mouvement est $(-fm)y'$]; on a :

$$y'' + f y' + \omega^2 y = 0. \quad (222)$$

On trouve :

$$\left| \begin{array}{l} y = a e^{-\frac{f}{2}t} \cos(\Omega t + \delta) \\ \Omega^2 = \omega^2 - \frac{f^2}{4} \text{ (si } \frac{f}{2} < \omega, \text{ dans notre exemple)} \\ p = m y' = -m a e^{-\frac{f}{2}t} \left[\frac{f}{2} \cos(\Omega t + \delta) + \Omega \sin(\Omega t + \delta) \right]. \end{array} \right. \quad (223)$$

Introduisons un angle de frottement :

$$\operatorname{tg} v = \frac{f}{2\Omega}, \quad \left(\cos v = \frac{\Omega}{\omega}, \sin v = \frac{f}{2\omega} \right), \quad (224)$$

on obtient :

$$p = -m a \omega e^{-\frac{f}{2}t} \sin(\Omega t + \delta + v), \quad (225)$$

les conditions initiales à $t = 0$ sont :

$$\left| \begin{array}{l} y(0) = a \cos \delta \\ p(0) = -a m \omega \sin(\delta + v). \end{array} \right. \quad (226)$$

Cherchons la matrice T telle que :

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = T(t) \begin{pmatrix} y(0) \\ p(0) \end{pmatrix}. \quad (227)$$

D'après l'équation (206), nous savons que :

$$|T| = e^{-\frac{f}{2}t}, \quad (228)$$

ce qui nous permet d'écrire que :

$$T = e^{-\frac{f}{2}t} Q. \quad (229)$$

Dans cette équation :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \Omega t + \alpha \sin \Omega t & \beta \sin \Omega t \\ -\gamma \sin \Omega t & \cos \Omega t - \alpha \sin \Omega t \end{pmatrix} \quad (230)$$

(ou $Q = R(-\Omega t, \alpha, \beta, \gamma)$),

où :

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{tg} \nu = \frac{f}{2\Omega} & , \quad |\varphi| = 1 \\ \beta = \frac{1}{m\omega \cos \nu} & , \quad \gamma = \frac{m\omega}{\cos \nu} \end{cases} \quad (231)$$

[la décomposition suivant (156) serait intéressante ici].

Les trajectoires dans le plan de phases y, p sont des ellipses inclinées α, β, γ dont la surface ε diminue régulièrement suivant e^{-ft} . La surface initiale de l'ellipse correspondant aux conditions initiales $y = a, p = 0$ est donnée par $a = \sqrt{\varepsilon/\gamma}$, d'où :

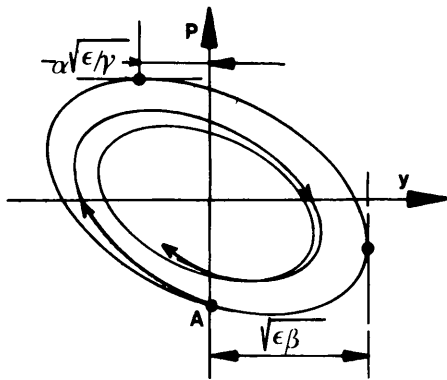


Fig. 19

$$\varepsilon = \gamma a^2 = m\omega a^2 / \cos \nu. \quad (232)$$

Les trajectoires sont des spirales.

Si nous passons dans l'espace normé par la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m\omega}{\cos \nu}} & \operatorname{tg} \nu \sqrt{\frac{\cos \nu}{m\omega}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\cos \nu}{m\omega}} \end{pmatrix}, \quad (233)$$

les trajectoires deviennent des cercles parcourus à vitesse $-\Omega$, dont les rayons diminuent suivant $R = R_0 e^{-(f/2)t}$, où :

$$\operatorname{Log} \frac{R_n}{R_{n-1}} = -\frac{\pi f}{\Omega} = -2\pi \operatorname{tg} \nu. \quad (234)$$

La densité des états initiaux possibles dans l'espace py augmente suivant :

$$\rho(t) e^{+ft}. \quad (235)$$

L'énergie dissipée par frottement correspond à la perte de surface de l'ellipse. Si nous avons $f/2 > \omega$, les trajectoires d'espace de phase seraient des arcs d'hyperboles x rétrécissant avec le temps, et il n'y aurait pas d'oscillations.

Si les conditions initiales sont telles que :

$$\frac{p_0}{y_0} = - \frac{\alpha \pm 1}{\beta} = m \omega (\pm \cos \nu - \sin \nu), \quad (236)$$

nous partons et nous restons sur l'asymptote de l'hyperbole qui est une direction propre de la matrice Q; p restera alors toujours proportionnelle à y et :

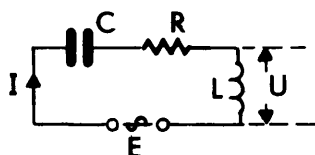
$$\text{Log } y(t) = \left(-\frac{f}{2} \pm \Omega \right) t. \quad (237)$$

Si $f/2 = \omega$, alors y et p diminuent dans tous les cas suivant le facteur $e^{-(f/2)t}$, car $\Omega = 0$.

OSCILLATEUR ELECTRIQUE AVEC RESISTANCE

a) Oscillations libres

Considérons le circuit de la figure 20 avec d'abord $E = 0$; le courant I est donné par l'équation (222) où :



$$y = I, \quad f = \frac{R}{L}, \quad \omega^2 = 1/LC, \quad (238)$$

Fig. 20

le plan équivalent au plan de phase sera I, U car $U = LI'$ (soit $m \equiv L$, $C \equiv 1/k$, $U \equiv p$). Si $R = 0$, les trajectoires dans le plan I, U sont des ellipses d'équations [voir éq. (220)] :

$$L \omega I^2 + \frac{U^2}{L \omega} = \varepsilon. \quad (239)$$

L'énergie oscillante emmagasinée est :

$$W = H/\omega^2 = \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} L I^2 + \frac{U^2}{2L\omega^2} = \frac{\varepsilon}{2\omega}, \quad (240)$$

donc $\varepsilon = 2H/\omega$, ce qui est tout à fait comparable à (221). Si R est différent de zéro, cette ellipse diminue de surface avec le temps, car de

l'énergie est dissipée sous la forme RI^2 . On peut appliquer exactement les résultats (223) à (237) en y faisant les équivalences (238). On remarque entre autre que :

$$\alpha = \operatorname{tg} \nu = \frac{f}{2\Omega} \text{ devient } \operatorname{tg} \nu = 1 / \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}. \quad (241)$$

b) Oscillations forcées

Si $E = E_0 \cos \xi t$, une solution forcée se superpose à la solution libre décrite ci-dessus, en ajoutant $(1/L)(dE/dt)$ comme second membre à droite de (222) qui devient :

$$I'' + \frac{R}{L} I' + \frac{1}{LC} I = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt}, \quad (242)$$

d'où :

$$I = I_0 \cos(\xi t + \phi) \quad (243)$$

$$U = LI' = -U_0 \sin(\xi t + \phi)$$

avec :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{L}{R} \frac{\omega^2 - \xi^2}{\xi} = \frac{1 - LC\xi^2}{RC\xi} \quad \left(\omega^2 = \frac{1}{LC} \right), \quad (244)$$

$$I_0 = E_0 / \left(R \cos \phi + L \xi \left[\frac{\omega^2}{\xi^2} - 1 \right] \sin \phi \right) = E_0 / Z. \quad (245)$$

Avec les correspondances de l'équation (238), ces résultats sont applicables à tout oscillateur harmonique avec frottement soumis à des oscillations forcées de fréquence ξ .

Exercice

Soit le circuit de la figure 20 en oscillations libres, avec $L = 100 \mu\text{H}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R = 10 \text{ ohms}$. Trouver Ω et $\operatorname{tg} \nu$ [éq. (223) et éq. (224)]. Faire le bilan énergétique en montrant que $\int_0^\infty Ri^2 dt$ est égale à l'énergie emmagasinée dans le circuit à $t = 0$.

13. OPTIQUE LUMINEUSE LINEAIRE

Nous ne traiterons dans cet exemple que des systèmes linéaires, centrés, paraxiaux, à lentilles minces ou miroir sphérique. Les conclusions ne sont valables que dans cette approximation.

Nous allons considérer à titre d'exemple les trajectoires de rayons lumineux dans des systèmes optiques simples paraxiaux et centrés.

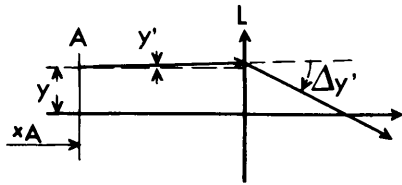


Fig. 21

Les appareils sont donc disposés le long d'un axe x. Un rayon est défini en A par sa distance y de l'axe des x et l'angle y' qu'il fait avec l'axe des x (l'angle est confondu avec la tangente, donc $y' = dy/dx$). L'abscisse x, d'origine arbitraire, est définie comme le point de l'axe "le plus proche" de A.

Dans un espace libre, le rayon se propage en ligne droite, donc y' ne change pas et y s'accroît de $\Delta xy'$. A travers une lentille ou un miroir sphérique, l'angle varie de $\Delta y' = y/f$, f étant la distance focale de la lentille considérée supposée infiniment mince et plate. Par convention, nous dirons que le système est convergent si f est < 0 et divergent si f est > 0 , et nous utiliserons le symbole $\delta = 1/f$ pour indiquer la force de la lentille (en m^{-1}).

Les coordonnées yy' représentent une forme simplifiée de l'espace des phases (certains ont proposé de l'appeler espace des traces, mais nous continuerons à appeler "espace des phases" l'espace orthogonal yy', bien que ce soit un abus de langage).

MATRICES DE TRANSFERT

Soit un système optique d'entrée E et de sortie S. Etant donné que y et y' se transforment linéairement, on aura toujours :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_S = T(E \rightarrow S) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_E, \quad (246)$$

où $T(E \rightarrow S)$ est la "matrice de transfert" de E à S.

a) Espace libre de longueur L

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (247)$$

b) Lentille mince (ou miroir sphérique, mais attention aux signes!)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}. \quad (248)$$

c) Succession de systèmes

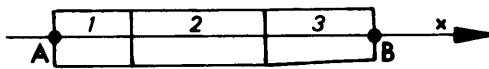


Fig. 22

Si le rayon traverse successivement les systèmes 1, 2 puis 3, ayant chacun une matrice de transfert T_1, T_2, T_3 , la matrice totale de A à B sera le produit matriciel, à gauche, des matrices individuelles (fig. 22) :

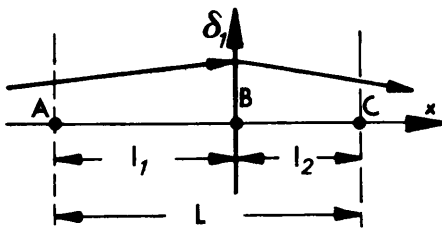
$$T(A \rightarrow B) = T_3 T_2 T_1, \quad (249)$$

$$|T| = 1. \quad (250)$$

Nous allons donc pouvoir appliquer les résultats réservés aux matrices 2×2 de déterminant égal à 1.

Exemple

a) Soit un espace l_1 suivi d'une lentille de force δ_1 , c'est-à-dire de



A à B sur la figure 23. Si nous dénotons $\eta_1 = \delta_1 l_1$, nous obtenons :

$$T(A \rightarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ \delta_1 & 1 + \eta_1 \end{pmatrix}. \quad (251)$$

Fig. 23

b) Soit un espace l_1 , une lentille de force δ_1 , un espace l_2 , c'est-à-dire de

A à C sur la figure 23. Posons $\eta_2 = \delta_1 l_2$, $L = l_1 + l_2$:

$$T(A \rightarrow C) = \begin{pmatrix} 1 + \eta_2 & L + \eta_1 l_2 \\ \delta_1 & 1 + \eta_1 \end{pmatrix}. \quad (252)$$

c) Trajectoires correspondantes dans l'espace des phases

Sur la figure 24, on considère l'espace orthogonal yy' . Le rayon part du point A et on peut suivre sa trajectoire de phase jusqu'en C.

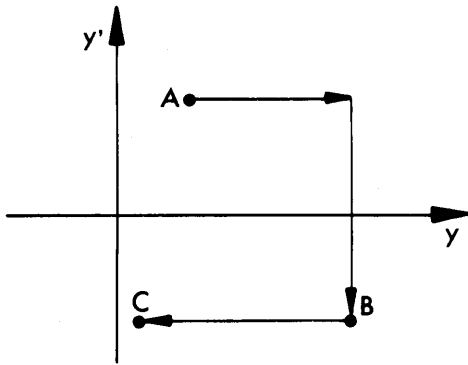


Fig. 24

d) Conditions de conjugaison

A et C seront "points conjugués" s'ils sont dans un rapport objet-image, donc si tout rayon passant en A sur l'axe passe aussi en C sur l'axe. Il faut alors que $T(A \rightarrow C)$ satisfasse l'équation :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}_C = T(A \rightarrow C) \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}_A \quad (253)$$

On voit qu'il suffit pour cela que :

$$t_{12} = 0 \quad (254)$$

Dans notre exemple, cette condition s'écrit :

$$L + \eta_1 l_2 = 0, \text{ soit } \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = -S_1 = -\frac{1}{f_1} \quad (255)$$

e) Grandissement

Si A et C sont conjugués, donc si $t_{12}(A \rightarrow C) = 0$, on peut écrire que :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_C = T(A \rightarrow C) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_A, \text{ d'où } y_C = t_{11} y_A, \quad (256)$$

donc t_{11} est le grandissement g , et T peut s'écrire :

$$T = \begin{pmatrix} g & 0 \\ t_{21} & 1/g \end{pmatrix} \quad (257)$$

CAS GENERAL

Nous pouvons appliquer les décompositions $\theta, \alpha, \beta, \gamma$ suivant (136) (matrices convergentes) ou (138) (matrices divergentes) avec les mêmes

conventions sur les signes de θ , α , β , γ que celles décrites à la section 7. Ainsi, la trajectoire dans l'espace des phases yy' se traduit par une rotation (circulaire ou hyperbolique) de θ dans un espace normalisé par les matrices des équations (134), (149) ou (152), car $T = R(\theta, \alpha, \beta, \gamma)$. Si $\theta = \pi$, alors $T = -I$; c'est une correspondance objet-image de grandissement -1 . Si $\theta = 2\pi$, alors $T = I$; c'est une correspondance objet-image de grandissement $+1$. Entre deux points conjugués, $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $\cosh \theta = 1/2[g + (1/g)]$.

ELEMENTS CARDINAUX

Définitions

Soit un système optique, compris entre E et S, ayant une matrice de transfert $T(E \rightarrow S)$. On définit

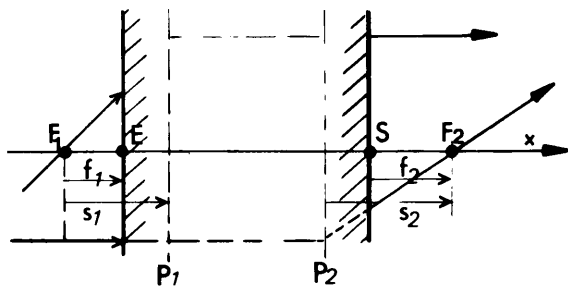


Fig. 25

(fig. 25) : a) les foyers F_1 , F_2 tels que tout rayon passant par F_1 ou F_2 sera, ou était, parallèle à l'axe après, ou avant; b) les plans principaux P_1 ou P_2 qui sont les lieux des points de rencontre du prolongement des rayons définis

au paragraphe ci-dessus. On se reportera à la figure 25 pour la définition de f_1 , f_2 , s_1 , s_2 comptées algébriquement suivant l'orientation de l'axe des x .

a) Foyers

f_1 répond à l'équation :

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}_{F_1}, \quad (258)$$

d'où :

$$f_1 = - \frac{t_{22}}{t_{21}}, \quad (259)$$

et similairement :

$$f_2 = - \frac{t_{11}}{t_{21}}. \quad (260)$$

b) Plans principaux

s_1 répond à l'équation (258) en posant, en plus, que y_S vaut $y'_{F_1} s_1$.
D'où l'on tire :

$$s_1 = -1/t_{21} \quad (261)$$

et :

$$s_2 = s_1. \quad (262)$$

Les points P_1 et P_2 sont conjugués.

c) Condition de conjugaison (formule de Newton)

P et P' sont deux points conjugués si les distances p et p' comptées suivant la figure 26 (où l'axe des x est orienté) satisfont la relation :

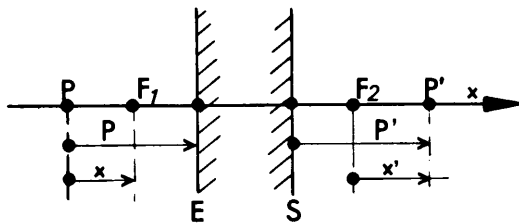


Fig. 26

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}_{P'} = \begin{pmatrix} 1 & p' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}_P, \quad (263)$$

d'où :

$$p p' t_{21} + p t_{11} + p' t_{22} = \frac{1}{t_{21}} \quad (264)$$

et la formule de Newton :

$$x x' = s_1^2 = s_2^2 = 1/t_{21}^2, \quad (\text{avec } x = p + \frac{t_{22}}{t_{21}}, x' = p' + \frac{t_{11}}{t_{21}}). \quad (265)$$

MATRICES SYMETRIQUES

Nous aurons souvent l'occasion de trouver des systèmes optiques qui

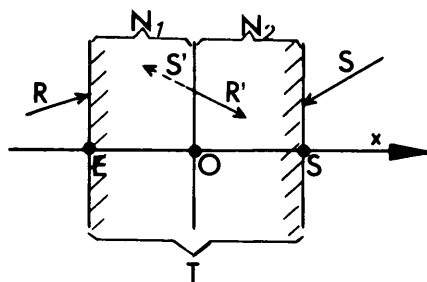


Fig. 27

sont symétriques physiquement par rapport à un centre O . Le système est alors composé de deux parties $N_1 N_2$ telles que la matrice de transfert totale est :

$$T = N_2 N_1 \quad (266)$$

(N_1 est la partie à l'entrée, cf. fig. 27).

Tout rayon traversant N_1 de gauche à droite se transforme de R en R', et tout rayon traversant N_2 de droite à gauche se transforme de S en S', RR' et SS' étant respectivement déduits l'un de l'autre par une symétrie telle que N_2 et N_1 se conduisent identiquement si on les traverse dans des directions opposées. Cela s'exprime par :

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} N_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (267)$$

d'où :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} N_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} N_1. \quad (268)$$

En appelant t_{ij} les éléments de T, et n_{ij}^1 ceux de N_1 , on obtient :

$$\begin{cases} t_{11} = t_{22} = 1 + 2 n_{12}^1 n_{21}^1 \\ t_{12} = 2 n_{12}^1 n_{22}^1 \\ t_{21} = 2 n_{11}^1 n_{21}^1. \end{cases} \quad (269)$$

On peut ainsi simplifier beaucoup de calculs de matrices en cherchant à les rendre symétriques (en ajoutant des longueurs fictives ou en coupant des lentilles en deux, par exemple). On remarque que $t_{11} = t_{22}$, donc $\alpha = 0$, $\beta = 1/\gamma$, d'où le nom de "matrices symétriques" donné aux matrices où $\alpha = 0$.

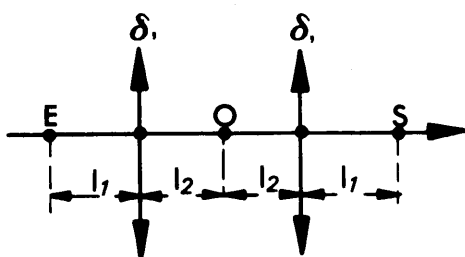


Fig. 28

Exemple

Considérons le système de la figure 28, fait de deux ensembles de la figure 23 symétriques par rapport à O. On déduit immédiatement, suivant (269) que :

$$t_{11}(E \rightarrow S) = 1 + 2 \delta_1 (l_1 + l_2 + \delta_1 l_1 l_2), \text{ etc.}$$

SYSTEMES PERIODIQUES

Suivant la définition de la section 9, une répétition de systèmes identiques de matrice T donne une matrice T^n , convergente si T est convergente et divergente si T est divergente.

Exemple

a) Soit une succession régulière de lentilles focalisantes de force δ , séparées par une distance ℓ [$(\delta = 1/f) < 0$].

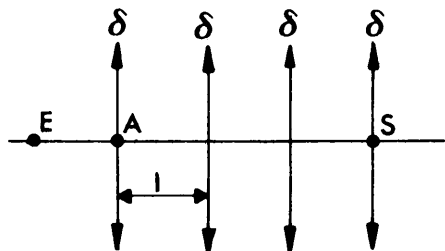


Fig. 29a

La matrice d'une période (comme E \rightarrow A) faite d'une longueur ℓ et d'une lentille δ est celle de l'équation (251). On en déduit que $T(E \rightarrow A) = R(\theta, \alpha, \beta, \gamma)$, avec $\cos \theta = 1 + \eta_{1/2}$, $\beta = \ell_1 / \sin \theta$, $2\alpha = \eta / \sin \theta$, $\gamma = (1 + \alpha^2)\beta/2$.

Après n périodes, la matrice sera :

$$R(n\theta, \alpha, \beta, \gamma) \quad (270)$$

et la focalisation sera stable (convergente) si θ est réel, donc si $-4 < \eta_1 < 0$, ou $|f| > \ell/4$.

Si cette condition de stabilité est satisfaite, chaque rayon semble avoir une trajectoire oscillante, de longueur d'onde λ correspondant à n périodes, telle que $n = \theta/2\pi$. Dans l'espace yy' , son point représentatif se trouve sur l'ellipse :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

à chaque période. [Ou sur l'hyperbole :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

si le système est divergent, c'est-à-dire si les lentilles sont trop rapprochées (ou trop faibles).] L'ellipse (ou l'hyperbole) est une trajectoire "apparente" de l'espace yy' qui ne coïncide avec la trajectoire réelle que de période en période. Si, par exemple, $\eta = -2$ (soit $-f = 2\ell$),

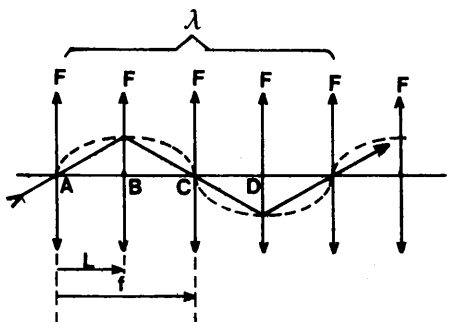


Fig. 29b

alors $\theta = -\pi/2$, $\lambda = 4\ell$, et le mouvement est représenté, sur la figure 29b, pour un rayon particulier [la trajectoire vraie est en trait plein, la trajectoire apparente correspondant à l'ellipse :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

est en pointillés].

La figure 29c représente les trajectoires équivalentes dans le plan yy' ,

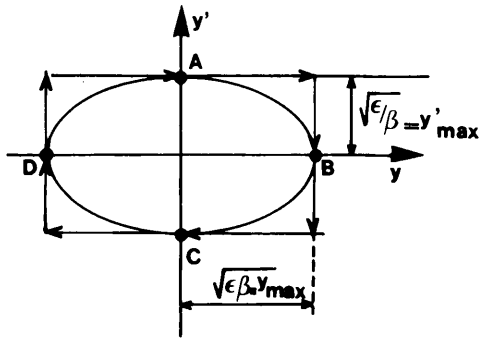


Fig. 29c

lors des passages au milieu des lentilles, c'est-à-dire aux points où la période est symétrique, donc où $\alpha = 0$; dans cet exemple particulier, la matrice de la période "symétrisée" $(\delta/2)l(\delta/2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\beta \sin \theta \\ \sin \theta / \beta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta = -\pi/2$ (ou $\eta = -2$), $\beta = l/\sqrt{(-\eta^2/4) - \eta} = l$.

b) Soit une alternance régulière de lentilles focalisantes et défocalisantes,

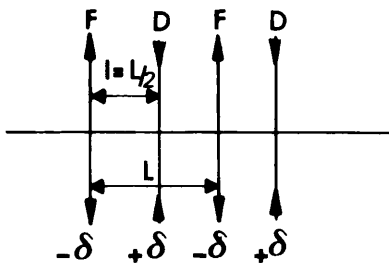


Fig. 30a

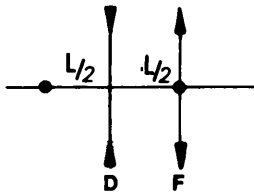


Fig. 30b

c'est-à-dire le système de la figure 30a : des lentilles successivement focalisantes (F) et défocalisantes (D), de même force mais de signe contraire (δ et $-\delta$) sont séparées par une distance l . C'est la répétition périodique de la cellule élémentaire de la figure 30b, à savoir $(L/2)(D)(L/2)(F)$. La matrice de transfert de cette cellule est suivant l'équation (252) (avec $\eta = \delta l = L/2F$) :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ \delta & 1+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ -\delta & 1-\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\eta & \frac{L}{2}(2-\eta) \\ -\eta^2 \frac{L}{2} & 1-\eta^2+\eta \end{pmatrix}. \quad (271)$$

Le système est stable (convergent) si $\cos \theta (= 1 - \eta^2/2)$ est compris entre -1 et +1, donc si :

$$|\eta| < 2 \quad \text{ou} \quad |\eta| > \frac{6}{2} (= \frac{L}{2}). \quad (272)$$

Si :

$$T = R(\theta, \alpha, \beta, \gamma),$$

alors :

$$T^n = R(n\theta, \alpha, \beta, \gamma).$$

On peut faire ici les mêmes remarques concernant la longueur d'onde de l'oscillation des rayons pour les systèmes stables et la représentation des trajectoires elliptiques (ou hyperboliques) "apparentes" dans l'espace yy' . Pour que $\theta = -\pi/2$, donc pour que la longueur d'onde λ vaille $4L$ (ou 8ℓ), il faut que $\eta = \pm\sqrt{2}$; donc, pour une même longueur

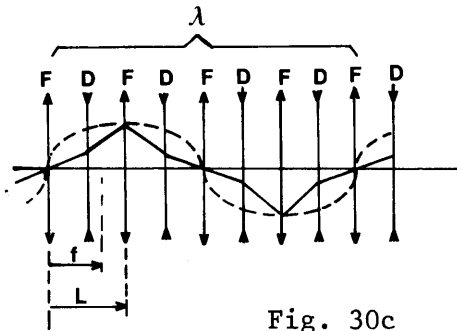


Fig. 30c

d'onde (voir fig. 30c), on peut mettre 8 lentilles au lieu de 4, chacune ayant une force (alternée) 2 fois plus grande que dans l'exemple (a) ci-dessus.

On en déduira (voir plus loin) que la transmission est plus "lumineuse", car "l'acceptance" est plus grande dans l'exemple (b) que dans l'exemple (a).

On démontrera [cf. éq. (295)], que dans ce cas le facteur β de la période "symétrisée" commençant au milieu d'une lentille F [donc de la forme $(F/2)\ell D \ell (F/2)$, où $\alpha = 0$] vaut $(L/|\eta|) [\sqrt{(2-\eta)/(2+\eta)}]$, soit $3,4\ell$ pour $\eta = -\sqrt{2}$.

ACCEPTANCE

On appelle acceptance à l'entrée E du système la figure (et sa surface) dans le plan yy' qui contient tous les points figuratifs des rayons qui traverseront le système sans être arrêtés. Tout rayon ayant des données initiales yy' en dehors de l'acceptance sera arrêté quelque part. (Une grande surface d'acceptance correspond par exemple à une grande luminosité d'objectif.)

DIAPHRAGMES ET POLYGONE D'ACCEPTANCE

Considérons par exemple le système étudié de la figure 23, mais qui

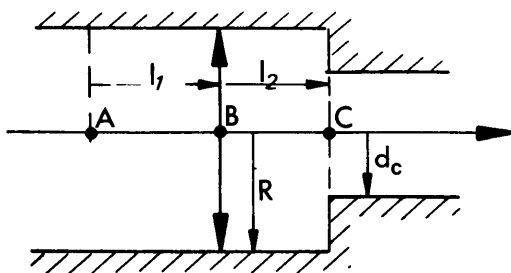


Fig. 31

est limité : a) par un tube de rayon R ; b) par un diaphragme circulaire en C de rayon d_c (fig. 31). Nous voulons construire le polygone d'acceptance, en A, du système $A \rightarrow C$. La limitation en A est donnée par $y = \pm R$; ce sont, dans le plan yy' , deux droites verticales ($D_A D'_A$ de la fig. 32). La

limitation en B est telle qu'en A nous aurions, pour les rayons extrêmes acceptables, la relation :

$$\begin{pmatrix} R \\ y' \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_A, \quad (273)$$

ce qui correspond à l'équation de deux droites D_B et D'_B données par les équations en A :

$$y + l_1 y' = \pm R. \quad (274)$$

Finalement, le diaphragme C donnera de même deux droites en A, D_C et D'_C , déterminées par :

$$\begin{pmatrix} d_c \\ y' \end{pmatrix}_C = T(A \rightarrow C) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_A.$$

On utilise l'équation (252) et l'on obtient les équations des droites D_C et D'_C en A :

$$t_{11} y + t_{12} y' = \pm d_c. \quad (275)$$

Si A et C sont conjuguées, $t_{12} = 0$; D_C et D'_C deviennent alors :

$$y = \pm \frac{d_c}{g}. \quad (276)$$

Le polygone d'acceptance est ainsi la surface à l'intérieur de ces droites : tout rayon issu de A avec des conditions initiales dans la zone hachurée ne sortira pas en C (fig. 32).

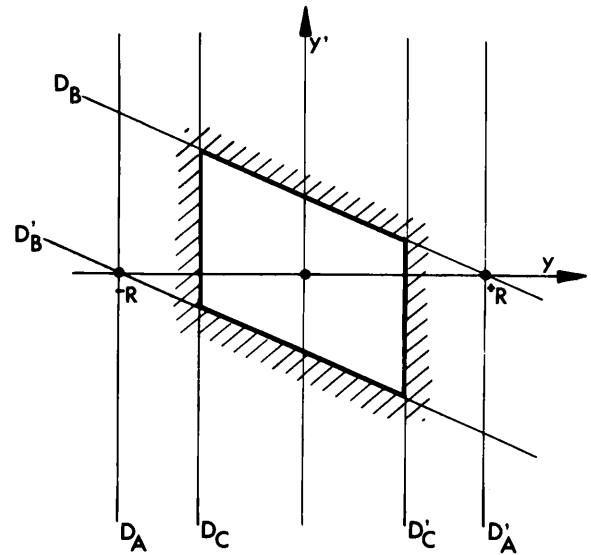
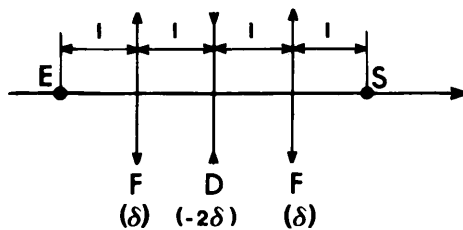


Fig. 32

Exercice

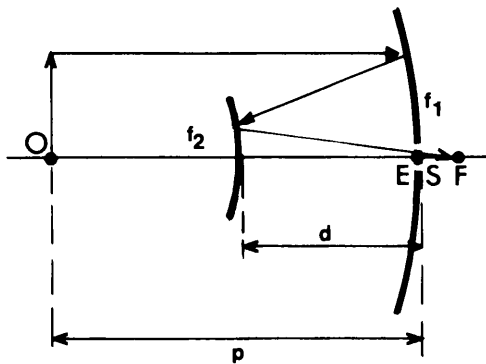
Donner rapidement l'élément t_{12} de la matrice de transfert du système



symétrique ci-contre où la lentille déformante du milieu est deux fois plus forte que les lentilles focalisantes.

[Utiliser les équations (271) et (269).]

Soit le télescope ci-contre fait de deux miroirs sphériques de focales $f_1 (< 0)$ et $f_2 (> 0)$.



Trouver les éléments cardinaux pour $d = 20$ cm, $f_1 = -25$ cm, $f_2 = 6,6$ cm, pour le système ayant l'entrée E et la sortie S réunies au point indiqué. En déduire la position de l'image pour un objet situé à 10 m ($p = 10$ m) (éq. 264).

14. OPTIQUE CORPUSCULAIRE A HAUTE ENERGIE

Nous ne traiterons dans cet exemple que des mouvements dans des champs magnétiques nuls, dipolaires ou quadripolaires, à l'exception de champs multipolaires d'ordre supérieur. Les conclusions ne sont valables que dans cette hypothèse.

TRAJECTOIRE D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE

Dans un champ B une particule de charge e , animée d'une quantité de mouvement p , est soumise à une force :

$$\vec{F} = \frac{e}{m} \vec{p} \wedge \vec{B}. \quad (277)$$

Sa trajectoire devient un arc de cercle de rayon ρ suivant :

$$\rho (m) = 3.3 p (GeV/c) / B (\text{Tesla}) \quad (278)$$

pour e égal à une unité de charge électronique (soit $1,6 \cdot 10^{-19}$ coulomb).

LENTILLE QUADRIPOLAIRE

Cet appareil possède quatre pôles magnétiques disposés symétriquement

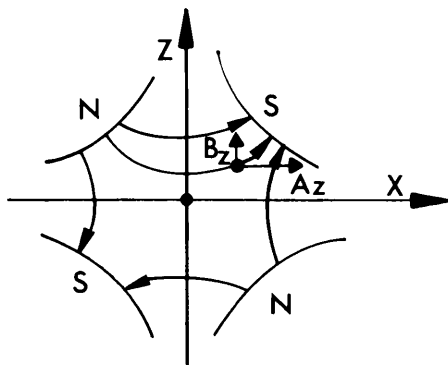


Fig. 33a

suitant la section transversale de la figure 33a. Les faces des pièces polaires étant hyperboliques, le champ B a une configuration telle que :

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = g, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -g,$$

(g est le gradient) et le champ est nul au centre. Donc :

$$B_x = gz, \quad B_z = -gx. \quad (279)$$

Les équations du mouvement de la particule, traversant ces champs suivant la figure 33b, sont donc [suivant (209) et (277)]:

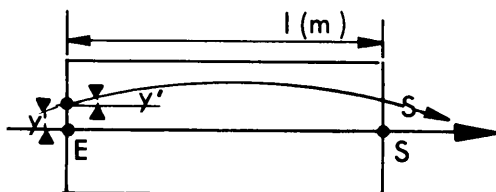


Fig. 33b

$$\frac{dp_x}{dt} = -gz \frac{e}{m}, \quad \frac{dp_z}{dt} = gx \frac{e}{m}$$

$$\left(p_x = m \frac{dx}{dt}, \quad p_z = m \frac{dz}{dt} \right). \quad (280)$$

On fait l'approximation que la longueur du vecteur quantité de mouvement p est constante, de même que sa projection sur l'axe des s , donc que la vitesse longitudinale, le long de s , reste constante. Comme $p = mv^*$, on en déduit les équations en x et en z en fonction de s :

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ z'' - \omega^2 z = 0 \end{cases} \quad \left(x'' = \frac{d^2 x}{ds^2}, z'' = \frac{d^2 z}{ds^2}, x' = \frac{dx}{ds}, z' = \frac{dz}{ds} \right) \quad (281)$$

avec $\omega^2 = 3|g|/p$ (en m^{-1} si g est en g/cm et p en MeV/c ; on écrit aussi $\omega^2 = K$). On reconnaît le mouvement harmonique étudié à la section 12, éq. (214).

MATRICES DE TRANSFERT D'UNE LENTILLE QUADRIPOLAIRE
DE LONGUEUR L (EN m)

a) Plan focalisant (ou matrice convergente)

Sur la figure 33a, c'est le plan où se projette le mouvement horizontal en x pour des particules positives (charge $+e$) entrant dans la figure :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_S = T_F \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_E$$

En comparant avec (217), on trouve :

$$T_F = R(\theta, \alpha, \beta, \gamma) \quad \text{avec} \quad (282)$$

$$\theta = -\omega L, \alpha = 0, \beta = 1/\gamma = 1/\omega, \quad (283)$$

$$\text{d'où } T_F = \begin{pmatrix} \cos \omega L & \frac{1}{\omega} \sin \omega L \\ -\omega \sin \omega L & \cos \omega L \end{pmatrix}. \quad (284)$$

b) Plan défocalisant

C'est le plan perpendiculaire au précédent, vertical sur la figure 33a avec les conventions ci-dessus. On a alors :

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_S = T_D \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_E$$

*) $v = ds/dt$; d'une façon générale x et z sont les coordonnées transversales à l'axe du mouvement et s est la coordonnée longitudinale. y est utilisée pour signifier "x ou z".

avec :

$$T_D = R(-i\theta, \alpha, \beta, \gamma),$$

soit :

$$T_D = \begin{pmatrix} \cosh \omega L & \frac{1}{\omega} \sinh \omega L \\ \omega \sinh \omega L & \cosh \omega L \end{pmatrix}. \quad (285)$$

[C'est pour des raisons historiques de simplification que l'angle de rotation ωL est défini positif dans le sens horaire dans l'espace des traces xx' et zz' , d'où le signe moins dans les équations (283).]

c) Espace libre (ou de glissement) de longueur L ($\omega = 0$)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (286)$$

Toutes ces matrices, ainsi que les suivantes, ont un déterminant égal à 1, le Wronskien est constant car il n'y a pas de termes en y' dans les équations (281) [voir section 11, éq. (206)].

d) Approximation lentille mince

Si L est suffisamment petit, on peut écrire :

$$T_{F,D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \quad (287)$$

avec :

$$\delta = \mp \omega^2 L = \mp \frac{3|g|L}{p}. \quad (288)$$

e) Cas général

A tout système optique centré paraxial correspond une matrice de transfert $T = R[(i)\theta, \alpha, \beta, \gamma]$ suivant les définitions (136) et (138). En général, on adopte de préférence un angle μ valant $-\theta$ car les trajectoires dans le plan de phase tournent plutôt dans le sens horaire.

ABERRATIONS CHROMATIQUES

Lorsque p varie légèrement de Δp , il est parfois possible de faire une approximation linéaire du premier ordre en disant qu'à travers le

système T les coordonnées y et y' sont augmentées linéairement d'un terme en $\Delta p/p$. Dans ce cas, la matrice T prend trois dimensions, et l'on écrit :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}_E, \quad (289)$$

où les t_{ij} sont les éléments normaux de T pour $i, j = 1, 2$ et où t_{13} et t_{23} sont deux termes supplémentaires dits de "dispersion" au premier ordre. Pour les matrices (284) et (285), ces termes sont nuls, mais ils sont importants dans les aimants de déflexion.

AIMANTS DE DEFLEXION

Considérons un aimant à pôles plats et parallèles dont les faces

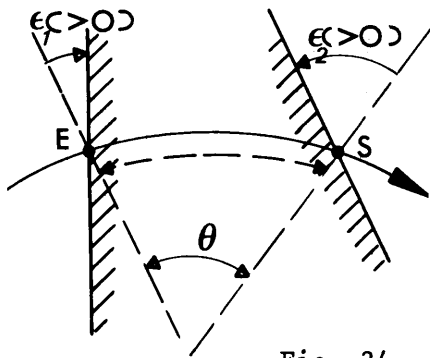


Fig. 34

d'entrée et de sortie font respectivement un angle ε_1 et ε_2 avec la normale à l'axe central du faisceau (observer les signes de la figure 34). On va définir les écarts x, x' et z, z' par rapport à un axe nominal tel que les particules ayant $p = p_0$ et entrant en E sur cet axe en ressortent en S. La matrice totale de E à S sera

$$T = T_S T_A T_E, \text{ où } T_E \text{ est une matrice repré-}$$

sentant la focalisation due au bord d'entrée considéré comme faisant un effet de lentille mince; T_A est la matrice propre à l'aimant sans ses bords; T_S est une matrice représentant l'effet focalisant de lentille mince du bord de sortie.

a) Plan de déflexion (horizontal)

$$T_A^H = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (290)$$

où ρ est donné par (278) et où $\theta = L/\rho$:

$$T_{E,S}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\cos \varepsilon_2}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varepsilon = \varepsilon_1 \text{ pour } T_E, \\ \varepsilon = \varepsilon_2 \text{ pour } T_S. \end{matrix} \quad (291)$$

b) Plan perpendiculaire au plan de déflexion (vertical)

$$T_A^V = \begin{pmatrix} 1 & p_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (292)$$

$$T_{E,S}^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L \tan \alpha_{1,2}}{r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (293)$$

Exemple

Considérons le triplet symétrique de lentilles de E à S (fig. 35)

composé d'une lentille défocalisante D de force $-\delta$, entourée de deux lentilles focalisantes F dans le plan H de force $+\delta/2$ et séparée d'elles par une distance $L/2$. Dans l'approximation lentille mince, en posant :

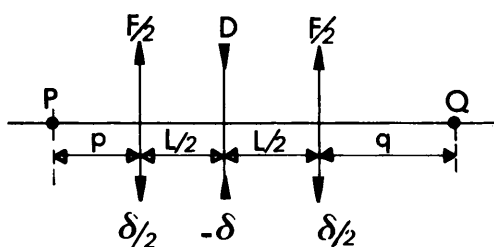


Fig. 35

$$\eta = \delta \frac{L}{2}, \quad (294)$$

on trouve $T(E \rightarrow S) = R(-\theta, \alpha, \beta, \gamma)$, avec :

$$\cos \theta = 1 - \frac{\eta^2}{2}, \quad \gamma_{u,v} = 0, \quad (295)$$

$$\beta_u = \frac{L}{|\eta|} \sqrt{\frac{2-\eta}{2+\eta}}, \quad \delta = 1/\beta,$$

ce que nous pouvons comparer au résultat (271) car la matrice de E à S sur la figure 35 est semblable à celle de la figure 30a, à une translation près d'une demi-lentille focalisante.

Dans le plan perpendiculaire où le système est $(D/2)(L/2)F(L/2)(D/2)$, l'angle θ est le même, $\alpha_v = 0$ et $\beta_v = (L/|\eta|)\sqrt{(2+\eta)/(2-\eta)}$. Nous cherchons les conditions de conjugaison qui mettraient P et Q dans une relation objet-image dans un plan :

$$T(P \rightarrow Q) = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T(E \rightarrow S) \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R(-\theta, \alpha, \beta, \gamma). \quad (296)$$

La condition de conjugaison est que l'élément t_{12} de cette matrice soit nul [éq. (254)], c'est-à-dire qu'il faut résoudre l'équation :

$$(p+q) \cos \theta + \beta \sin \theta - \frac{pq}{\beta} \sin \theta = 0, \quad (297)$$

[θ et β suivant (295)]. Le grandissement sera donné par l'équation (257).
Si $q = \infty$, on obtient un foyer tel que :

$$p = \beta \cot \theta. \quad (298)$$

Si $\cos \mu = \pm 1$ [éq. (296)], $T(P \rightarrow Q) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g = \pm 1$. Ce système simple ne permet pas d'avoir les mêmes points conjugués simultanément dans les deux plans.

COUPLAGE

On considère une matrice 5×5 correspondant à la transformation :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}_S = T(E \rightarrow S) \begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}_E. \quad (299)$$

S'il n'y a pas de couplage la matrice T se réduit à :

$$\begin{pmatrix} T^H & 0 & 0 & 0 & t_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{25} \\ 0 & 0 & T^V & 0 & t_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (300)$$

où T^H et T^V sont les matrices normales de transfert 2×2 du plan horizontal et du plan vertical, et les t_{i5} sont les termes de dispersion décrits dans l'équation (289), mais repoussés ici à la cinquième colonne.

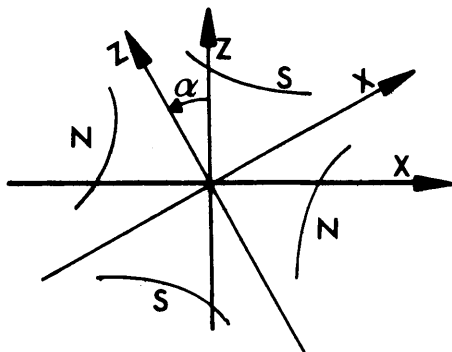


Fig. 36

Exemple de couplage

Cherchons la matrice de transfert 4×4 d'un quadripôle incliné d'un angle α suivant la figure 36. (Il n'y a donc pas de termes de dispersion au premier ordre.) Le référentiel XZ lié au quadripôle a tourné d'un angle α par rapport au référentiel fixe xz. Donc, suivant l'équation (58) :

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = R(-\alpha) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad (301)$$

et de même :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Z' \end{pmatrix} = R(-\alpha) \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix},$$

puisque $d\alpha/ds = 0$. D'où nous déduisons que :

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \\ Z \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \end{pmatrix} = R_4(-\alpha) \begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \end{pmatrix}. \quad (302)$$

Or nous savons déjà qu'à travers un quadripôle normal nous avons :

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \\ Z \\ Z' \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} T^H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^V \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \\ Z \\ Z' \end{pmatrix}_E = T_4 \begin{pmatrix} X \\ X' \\ Z \\ Z' \end{pmatrix}_E, \quad (303)$$

T^H et T^V étant les matrices de transfert normales 2×2 des équations (284) et (285); d'où la matrice de transfert cherchée dans le plan xz à travers le quadripôle $T_4(\alpha)$:

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \\ Z \\ Z' \end{pmatrix}_S = T_4(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \end{pmatrix}_E \quad \text{avec} \quad T_4(\alpha) = R_4(\alpha) T_4 R_4(-\alpha). \quad (304)$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$T_4(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha T^H + \sin^2\alpha T^V & \sin\alpha \cos\alpha (T^H - T^V) \\ \sin\alpha \cos\alpha (T^H - T^V) & \sin^2\alpha T^H + \cos^2\alpha T^V \end{pmatrix}. \quad (305)$$

(On note que, si $\alpha = \pi/2$, T^H et T^V sont simplement interchangées.)

SYSTEMES PERIODIQUES

Un système périodique est constitué soit par un alignement de périodes identiques successives, soit par un cycle fermé qui répète toujours la même transformation.

Nous avons vu à la section 9 qu'un système périodique n'était stable

que si la matrice de la période était convergente. Soit $T = R(\theta, \alpha, \beta, \gamma)$ une matrice telle que $|\text{Tr}(T)| \leq 2$, et ayant une longueur L le long de l'axe des s (fig. 37). Considérons l'ensemble des matrices semblables (cf. section 9) :

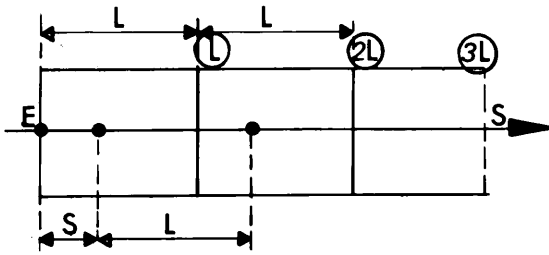


Fig. 37

$$T(s) = T(s \rightarrow s + L).$$

Nous savons qu'elles ont toutes les mêmes valeurs propres (cf. section 6), donc que :

$$T(s) = R(\theta, \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)) \quad (306)$$

avec toujours $\beta(s)\gamma(s) = 1 + \alpha^2(s)$.

Ces paramètres de Twiss sont donc fonction de s et se répètent périodiquement suivant $\beta(s) = \beta(s + L)$, $\alpha(s) = \alpha(s + L)$, tandis que θ reste invariant. Comme nous ne considérons ici que les matrices 2×2 découplées et où il n'y a que des champs magnétiques dipolaires et quadripolaires, nous aurons seulement deux séries de paramètres θ , $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$, une pour un plan dit horizontal et l'autre pour le plan perpendiculaire dit vertical.

Pour simplifier, nous traiterons d'un plan sans spécifier lequel et nous appellerons yy' les coordonnées dans ce plan d'une particule chargée traversant le système.

On démontre^{*)} que le mouvement de cette particule répond à la série d'équations suivantes :

$$y = \alpha \sqrt{\beta(s)} \cos(\Psi(s) + \delta), \quad (307a)$$

$$y' = \alpha \sqrt{\gamma(s)} \cos(\chi(s) + \delta), \quad (307b)$$

$$\tan(\Psi - \chi) = 1/\alpha(s), \quad (307c)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -2\alpha, \quad (307d)$$

$$\Psi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}, \quad (307e)$$

$$\mu = -\theta = \Psi(s+L) - \Psi(s) = \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta(s)}, \quad (307f)$$

μ et δ sont des constantes dépendant des conditions initiales.

*) Voir Bibliographie, numéro 5.

[Les angles $\psi(s)$ et μ (avance de phase pour une période) sont habituellement comptés positifs dans le sens horaire, c'est pourquoi nous avons écrit $\mu = -\theta$.] C'est un mouvement oscillatoire d'amplitude et de fréquence variables autour de valeurs moyennes.

La distance λ telle que $\psi(s + L) - \psi(s) = 2\pi$ est la "longueur d'onde" du système. La courbe $a\sqrt{\beta(s)}$ représente l'enveloppe d'un faisceau de particules pour tous les δ possibles.

ACCEPTANCE

Ce problème se traite de la même façon qu'à la section 13, en assimilant les trajectoires des particules chargées à des rayons lumineux. Mais ici il faut distinguer les deux acceptances, A^H dans le plan horizontal et A^V dans le plan vertical.

A travers un système périodique, on montre^{*)} que l'acceptance tend vers une limite :

$$A^{H,V} = \pi R^2 / \beta_{\max}^{H,V}, \quad (308)$$

où β_{\max} est la valeur maximum de $\beta(s)$ [éq. (306)] et où R est la demi-largeur disponible dans le faisceau pour le plan considéré. En vérité, on comprend qu'il suffit qu'il y ait des diaphragmes aux points où $\beta(s) = \beta_{\max}$, car c'est là que le mouvement des particules peut avoir la plus grande amplitude [éq. (307a)]; à ces points, $\alpha(s) = 0$ [éq. (307d)].

EMITTANCE

On appelle émittance d'un faisceau de particules la figure, et la valeur de sa surface, dessinée dans l'espace de phase et qui contient tous les états yy' représentatifs des particules formant le faisceau. Nous les appellerons aussi E^H et E^V . Si l'émittance à l'entrée du système est contenue dans l'acceptance, le faisceau sera transmis sans perte à travers le système en question.

Exemple

Alternance régulière de lentilles minces focalisantes et défocalisantes de même force $|\delta|$ et séparées par une longueur $L/2$ suivant l'exemple de la figure 35 déjà traité.

*) Voir Bibliographie, numéros 2, 5, 7 et 11.

Prenons l'origine des s au milieu d'une lentille F, là où la matrice est symétrique; dans ce cas $\alpha(0) = 0$ et $\beta(0)$ est donc à un extremum. On voit immédiatement que c'est un maximum (lentille focalisante), d'où :

$$\cos \mu = 1 - \frac{\eta^2}{2}, \quad \beta(0) = \beta_{\max} = \frac{L}{|\eta|} \sqrt{\frac{2-\eta}{2+\eta}}. \quad (309)$$

On déduit ensuite $\beta(s)$ en lui faisant subir les transformations (167), et l'on arrive au milieu d'une lentille D où la matrice est à nouveau symétrique; à ce point, nous avons $\alpha(s) = 0$ et $\beta(s)$ passe par un minimum $(L/|\eta|)\sqrt{(2-\eta)/(2+\eta)}$. Puis $\beta(s)$ remonte pour redevenir β_{\max} au milieu de la lentille F suivante.

Y a-t-il une disposition qui donnerait la plus grande acceptance suivant (308)? On remarque d'abord que, comme une lentille F devient une lentille D pour le plan perpendiculaire, nous avons $\beta^V(s) = \beta_{\min}$ lorsque $\beta^H(s) = \beta_{\max}$ et inversement. Suivant (308) on voit que $dA/A = -d\beta_{\max}/\beta_{\max}$ et que A est maximum si $(d\beta_{\max}/d\eta) = 0$ quel que soit le plan considéré. On dérive (309) et l'on trouve*) un régime dit optimum donnant l'acceptance maximum :

$$\eta_{\text{opt}} = 1,24, \quad \mu_{\text{opt}} = 76^\circ. \quad (310)$$

Maintenant nous voulons observer les transformations de l'émittance.

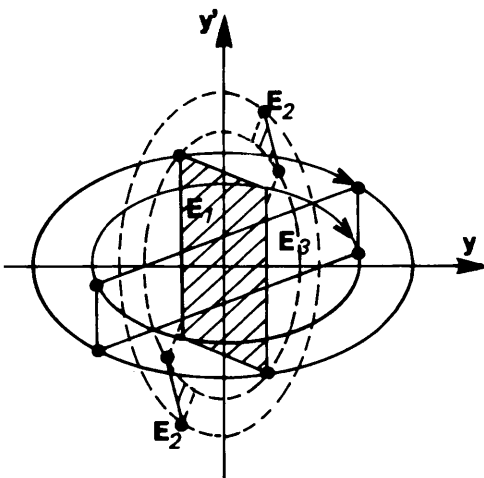


Fig. 38

Soit E_1 l'émittance au milieu d'une lentille F (fig. 38). Après une période, elle sera devenue E_3 . Chacun de ses points aura décrit un arc d'ellipse invariante $\alpha(s_1), \beta(s_1), \gamma(s_1)$ passant par ce point et correspondant à la rotation normalisée μ . Dans notre exemple, $\alpha(s_1) = 0, \beta(s_1) = \beta_{\max}$. Au milieu de la lentille D, cette émittance sera devenue E_2 , et ses points se retrouveront sur l'ellipse invariante en ce point et dont les paramètres sont $\alpha = 0$ et $\beta = \beta_{\min}$.

*) Voir Bibliographie, numéro 7.

Exercice

Soit le triplet de lentilles minces de la figure 35. Trouver le gradient g des lentilles pour $p = 2 \text{ GeV}/c$, $L/2 = 2 \text{ m}$, $\theta = \pi/2$ (éq. 295). Si la distance $p = 2 \text{ m}$, trouver q dans les plans H et V (éq. 297) (longueur de la lentille $0,50 \text{ m}$).

15. ELECTRICITE GENERALE

Nous traiterons d'abord dans cet exemple le cas des régimes sinusoïdaux permanents à travers des impédances linéaires passives.

Dans un circuit électrique Z de self-induction L , de résistance R et de capacité C , le courant I et la tension aux bornes U (fig. 39) sont donnés par l'équation différentielle linéaire du deuxième degré (242). On sait que la solution en est :

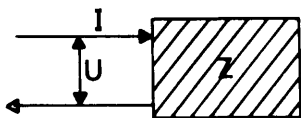


Fig. 39

$$I = U/Z, \text{ avec } Z = R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right), \quad (311)$$

si ω est la fréquence de la source d'énergie. Si $U = U_0 \cos \omega t$, $I = I_0 \cos (\omega t - \phi)$, avec :

$$I_0 = U_0/|Z|, \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega} \right)^2}, \quad \cos \phi = \frac{R}{|Z|}, \quad (312)$$

U et I sont donc liés linéairement et le formalisme matriciel peut donc être utilisé.

MULTIPOLES PASSIFS

Considérons un appareil passif T (fig. 40) ayant n bornes d'entrée et n bornes de sortie. (S'il n'y avait pas le même nombre de bornes à l'entrée et à la sortie, on créerait des bornes fictives à courant nul.)

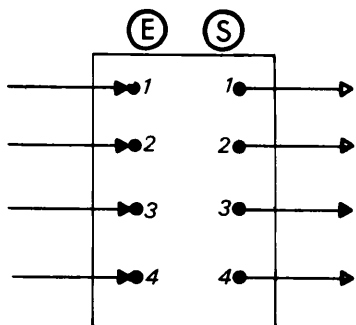


Fig. 40

Soient I_i le courant arrivant à la borne i depuis la gauche (c'est donc le courant "sortant" pour les bornes de sortie) et U_i le potentiel de cette borne par rapport à un niveau de base arbitraire (par exemple celui de la dernière borne, alors $U_n = 0$ et $U_i = U_i - U_n$). On peut écrire que :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \\ U_2 \\ I_2 \\ \vdots \\ U_n \\ I_n \end{pmatrix}_S = T \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \\ U_2 \\ I_2 \\ \vdots \\ U_n \\ I_n \end{pmatrix}_E, \quad (313)$$

où T est une matrice de transfert à $2n \times 2n$ dimensions.

Si $n = 2$, nous avons un quadripôle et la matrice de transfert se réduit à la dimension 2×2 car $U_2 = 0$ et $I_2 = -I_1$.

Si plusieurs multipôles T_1, T_2, T_3 sont en série dans cet ordre, la matrice de transfert sera le produit à gauche $T = T_3 T_2 T_1$ comme nous l'avons vu en optique, c'est-à-dire les matrices individuelles étant rangées de gauche à droite dans l'ordre inverse de traversée. Nous utilisons les variables dans le sens $\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}$ par cohérence avec la littérature sur ce sujet. Les éléments des matrices sont maintenant des nombres complexes.

MATRICES DE TRANSFERT D'UN QUADRIPOLE

($Z =$ impédance, $A = 1/Z =$ admittance, $M =$ inductance mutuelle)

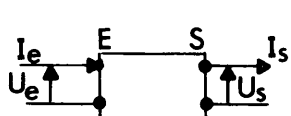


Fig. 41

$$\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}_S = T(E \rightarrow S) \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}_E \quad (314)$$

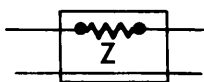


Fig. 42a

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (même si Z est dans la branche du bas),} \quad (315a)$$

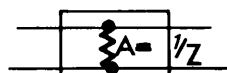


Fig. 42b

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A & 1 \end{pmatrix}, \quad (315b)$$



Fig. 42c

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} 1 & -Z_1 \\ -A_2 & 1 + Z_1 A_2 \end{pmatrix}, \quad (315c)$$

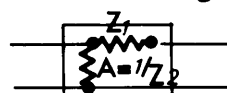


Fig. 42d

$$T = \begin{pmatrix} 1 + Z_1 A_2 & -Z_1 \\ -A_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (315d)$$

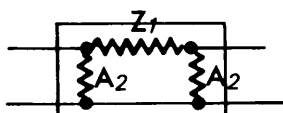


Fig. 42e

$$T = \begin{pmatrix} 1 + Z_1 A_2 & -Z_1 \\ -A_2 (2 + Z_1 A_2) & 1 + Z_1 A_2 \end{pmatrix}. \quad (315e)$$

Soit m tel que $m = jM\omega$ pour des courants sinusoïdaux (M est le coefficient d'induction mutuelle tel que $U_2 = M dI_1/dt$ et $U_1 = M dI_2/dt$) :



Fig. 42f

$$T = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1/m & 0 \end{pmatrix}, \quad (315f)$$

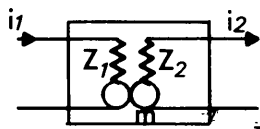


Fig. 42g

$$T = \begin{pmatrix} Z_2/m & m - Z_1 Z_2/m \\ -1/m & Z_1/m \end{pmatrix}, \quad (315g)$$

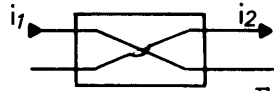


Fig. 42h

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \quad (\text{pour le treillis, voir l'exercice}). \quad (315h)$$

Dans tous les cas $|T| = 1$.

Exemple

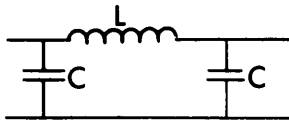


Fig. 43

$$Z_1 = iL\omega, \quad A_2 = iC\omega,$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 - LC\omega^2 & -iL\omega \\ -iC\omega(2 - LC\omega^2) & 1 - LC\omega^2 \end{pmatrix}. \quad (315i)$$

QUADRIPOLE RETOURNE

Soit un quadripôle T' identique au quadripôle T lorsqu'il est parcouru dans l'autre sens (de droite à gauche dans nos conventions). On voit que, pour conserver les conventions de signe, on doit avoir $\begin{pmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{pmatrix} = T' \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$, où $T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'où :

$$T' = \frac{1}{|T|} \begin{pmatrix} t_{22} & t_{12} \\ t_{21} & t_{11} \end{pmatrix} \quad (316)$$

(à condition que les éléments des circuits soient toujours linéaires).

QUADRIPOLE RETOURNABLE OU SYMETRIQUE

Soit un quadripôle symétrique par rapport à son centre, il présente donc les mêmes caractéristiques s'il est parcouru dans un sens ou dans l'autre. C'est le cas par exemple de la figure 43. De l'équation (316), on déduit que, dans la matrice T d'un tel quadripôle, $t_{11} = t_{22}$. De plus, si n_{ij} sont les éléments de la moitié d'entrée, on a :

$$\begin{cases} t_{11} = t_{22} = [2n_{22}n_{11}/|N|] - 1 \\ t_{12} = 2n_{22}n_{12}/|N| \\ t_{21} = 2n_{11}n_{21}/|N|. \end{cases} \quad (317)$$

[Comparer avec les équations (269). Pour les quadripôles passifs, $|N| = 1$ et $|T| = 1$.]

TRANSFORMATION D'IMPEDANCE

Soit Z_S l'impédance à la sortie du quadripôle T ($U_S = Z_S I_S$) et Z_e l'impédance à l'entrée ($U_e = Z_e I_e$); on déduit que :

$$Z_S = \frac{t_{12} + t_{11} Z_e}{t_{22} + t_{21} Z_e} \quad (318)$$

QUADRIPOLE EN CIRCUIT OUVERT

a) A la sortie seule :

$$U_S = U_e / t_{21} \quad (319a)$$

b) Aux deux extrémités; l'équation :

$$\begin{pmatrix} I \\ U \end{pmatrix}_S = T \begin{pmatrix} I \\ U \end{pmatrix}_E$$

n'a de solution que si $t_{21} = 0$. Les fréquences qui annulent t_{21} sont celles d'oscillations libres (résonances) en circuit ouvert.

QUADRIPOLE EN COURT-CIRCUIT

a) A la sortie seule :

$$I_S = I_e / t_{11} \quad (319b)$$

b) Aux deux extrémités; les fréquences d'oscillations libres (résonances) sont celles qui annulent t_{12} .

Exemple

Dans la figure 43, $t_{21} = 0$ si $LC\omega^2 = 2$, $\omega_0 = \sqrt{2/LC}$ (oscillation en circuit ouvert); la fréquence de coupure ($I_S = 0$) est :

$$\omega_c = 1/\sqrt{LC} \quad \left(\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = 2 \right).$$

AUTRES REPRESENTATIONS

Il est souvent nécessaire de manier les variables différemment. On utilise donc les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} U_1 \\ \bar{I}_1 \end{pmatrix}, \quad (320a)$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ -\bar{I}_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} U_1 \\ -\bar{I}_1 \end{pmatrix}, \quad (320b)$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ -\bar{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (320c)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ -\bar{I}_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}; \quad Y = Z^{-1}, \quad (320d)$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ -\bar{I}_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad (320e)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} U_1 \\ -\bar{I}_2 \end{pmatrix}; \quad G = H^{-1}, \quad (320f)$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \bar{I}_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix}; \quad A = T^{-1}. \quad (320g)$$

Attention aux signes des courants I_1 et I_2 ; ils varient suivant les auteurs.

Le tableau suivant^{*)} donne les relations entre les éléments de ces différentes matrices et leurs déterminants (qui ne sont plus égaux à 1 pour des quadripôles actifs).

*) Voir Bibliographie, numéro 15.

Tableau 2

Relations entre les éléments de matrices et les déterminants

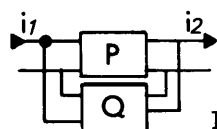
	z_{ij}	y_{ij}	h_{ij}	t_{ij}
Z	-	$\frac{y_{22}}{ Y } - \frac{y_{12}}{ Y }$	$\frac{ H }{h_{22}} \quad \frac{h_{12}}{h_{22}}$	$-\frac{t_{22}}{t_{21}} - \frac{1}{t_{21}}$
		$-\frac{y_{21}}{ Y } \quad \frac{y_{11}}{ Y }$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}} \quad \frac{1}{h_{22}}$	$-\frac{ T }{t_{21}} - \frac{t_{11}}{t_{21}}$
		$ Z = 1/ Y $	$ Z = h_{11}/h_{22}$	$ Z = t_{12}/t_{21}$
Y	$\frac{z_{22}}{ Z } - \frac{z_{12}}{ Z }$	-	$\frac{1}{h_{11}} - \frac{h_{12}}{h_{11}}$	$-\frac{t_{11}}{t_{12}} \quad \frac{1}{t_{12}}$
	$-\frac{z_{21}}{ Z } \quad \frac{z_{11}}{ Z }$		$\frac{h_{21}}{h_{11}} \quad \frac{ H }{h_{11}}$	$\frac{ T }{t_{12}} - \frac{t_{22}}{t_{12}}$
	$ Y = 1/ Z $		$ Y = h_{22}/h_{11}$	$ Y = t_{21}/t_{12}$
H	$\frac{ Z }{z_{22}} \quad \frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}} - \frac{y_{12}}{y_{11}}$	-	$-\frac{t_{12}}{t_{11}} \quad \frac{1}{t_{11}}$
	$-\frac{z_{21}}{z_{22}} \quad \frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}} \quad \frac{ Y }{y_{11}}$		$\frac{ T }{t_{11}} - \frac{t_{21}}{t_{11}}$
	$ H = z_{11}/z_{22}$	$ H = y_{22}/y_{11}$		$ H = t_{22}/t_{11}$
T	$\frac{z_{22}}{z_{12}} - \frac{ Z }{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}} \quad \frac{1}{y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}} - \frac{h_{11}}{h_{12}}$	-
	$-\frac{1}{z_{12}} \quad \frac{z_{11}}{z_{12}}$	$\frac{ Y }{y_{12}} - \frac{y_{22}}{y_{12}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{12}} \quad \frac{ H }{h_{12}}$	
	$ T = z_{21}/z_{12}$	$ T = y_{21}/y_{12}$	$ T = -h_{21}/h_{12}$	

Rappelons que $A = T^{-1}$, $G = H^{-1}$ et que l'inverse d'une matrice T est :

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{21} & t_{11} \end{pmatrix}.$$

ASSEMBLAGE DE QUADRIPOLES (actifs ou passifs)

a) En parallèle



(321a)

$$Y = Y(P) + Y(Q).$$

b) En série

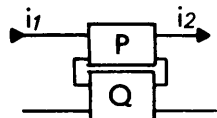


Fig. 44a

(321b)

$$Z = Z(P) + Z(Q).$$

c) En série-parallèle

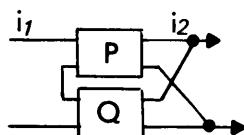


Fig. 44b

(321c)

$$H = H(P) + H(Q).$$

d) En parallèle-série

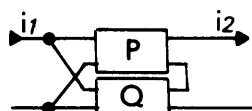


Fig. 44c

(321d)

$$G = G(P) + G(Q).$$

e) En cascade



Fig. 44d

(321e)

$$T = T(Q)T(P)$$

$$A = A(P)A(Q).$$

Fig. 44e

Critères de validité pour les formules ci-dessus

La formule (321e) pour le couplage en cascade est toujours valable. Mais les formules (321a) à (321d) représentant les couplages série et parallèle ne sont valables que si chaque quadripôle reste identique dans le couplage. On vérifiera aisément les critères suivants^{*)} :

a) Couplage en série

Si la sortie est ouverte ($I_2 = 0$), aucun courant ne doit circuler dans les branches qui relient les quadripôles entre eux.

b) Couplage en parallèle

Si les quadripôles sont découplés à la sortie et si leurs sorties sont court-circuitées, aucune tension ne doit apparaître entre les quadripôles à leurs sorties.

*) Voir Bibliographie, numéro 16.

Ces critères doivent aussi être vérifiées aux entrées. Sinon, on fera le calcul par l'étude traditionnelle des circuits. Le problème de la validité ne se pose pas avec des quadripôles ayant chacun une des bornes de sortie et d'entrée reliées à une masse commune.

CAS GENERAL

Pour conserver notre formalisme, et comme $|T| = 1$, nous écrirons que $T = R(\theta, \alpha, \beta, \gamma)$ mais que maintenant tous ces paramètres sont des nombres complexes, ce qui nous permet de conserver les définitions (131) à (138). En restant prudent avec l'emploi des imaginaires, nous pourrions retrouver le cas de (138), où θ et β sont imaginaires purs. Mais il faut faire attention à toujours expliciter le signe devant la fonction $\cosh \theta$, qui reste positive par définition.

Rappelons que $\cos i\theta = \cosh \theta$, $\sin i\theta = i \sinh \theta$ et que $\cos(a + ib) = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$. D'une façon générale, nous écrirons pour simplifier que, si θ est un nombre complexe de la forme $\theta = a + bi$:

$$\cos \Theta = \frac{1}{2} \left(e^{ia-b} + e^{-ia+b} \right) \quad (322)$$

et :

$$\sin \Theta = \frac{1}{2} \left(e^{ia-b} - e^{-ia+b} \right).$$

Pour ne pas perdre d'imaginaire pendant le calcul, il faut partir de la définition originale de l'équation (113) qui est :

$$\cos \Theta = \frac{t_{11} + t_{22}}{2}, \quad \sin \Theta = i \sqrt{\left(\frac{t_{11} + t_{22}}{2} \right)^2 - 1}. \quad (323)$$

Nous conserverons néanmoins la notion "d'ellipse invariante complexe" qui devient une hyperbole si θ, β, α sont imaginaires purs. Ainsi la matrice du quadripôle conserve l'information sur les phases. Si un quadripôle est répété n fois, la matrice de transfert devient :

$$T^n = R(n\Theta, \alpha, \beta, \delta). \quad (324)$$

Dans tout quadripôle retournable, $\alpha = 0$.

IMPEDANCE ITERATIVE

Le quadripôle de matrice T est fermé sur son impédance itérative Z_i si nous avons, à l'entrée, $U_e = Z_i I_e$ lorsque nous avons, à la sortie, $U_s = Z_i I_s$. On voit que Z_i^{-1} est une direction propre de T, donc que, suivant (186) :

$$Z_i = \frac{\beta}{-\alpha \pm i} \quad , \quad (325)$$

lorsque $T = R(\theta, \alpha, \beta, \gamma)$ suivant (136) généralisée pour les nombres complexes. Le choix du signe dépend du sens de circulation de l'énergie.

Attention : comme maintenant, dans cette section, α et β sont considérés intégralement comme des nombres complexes, seule l'équation (324) est valable, même pour des matrices divergentes sans appliquer la simplification de l'équation (139).]

En d'autres termes [cf. éq. (126)] :

$$Z_i = \frac{\lambda - t_{22}}{t_{21}} \quad , \quad (326)$$

lorsque λ est solution de l'équation caractéristique $|T - \lambda I| = 0$, soit $\lambda = e^{\pm i\theta} = e^{\pm(ia+b)}$, si $\theta = a + ib$, mais seul le signe qui fait $\text{Re}(Z_i) > 0$ correspond à une perte d'énergie entre l'entrée et la sortie, et définit le sens de circulation. On peut aussi écrire :

$$Z_i = \frac{t_{11} - t_{22} \pm \sqrt{(t_{11} + t_{22})^2 - 4}}{2t_{21}} \quad , \quad (327)$$

ce qui montre que Z_i est solution de :

$$t_{21} Z_i^2 + (t_{22} - t_{11}) Z_i - t_{12} = 0 \quad . \quad (328)$$

Les deux solutions Z_i^+ et Z_i^- de (327) et (328) correspondent aux impédances itératives Z_i^+ et $\xi_i = -Z_i^-$ du quadripôle parcouru soit dans un sens, soit dans l'autre (quadripôle retourné).

Tous les quadripôles ayant des matrices de transfert "similaires", au sens de la section 6, auront une même impédance itérative qui est bien indépendante de θ . Ainsi toute succession de quadripôles, ayant une même impédance itérative mais des phases θ_i différentes, aura toujours la même impédance itérative, et la phase totale à travers l'ensemble deviendra :

$$\sum_i \theta_i .$$

A *fortiori* pour n quadripôles identiques en série, Z_i est conservée et θ devient $n\theta$.

On pourrait maintenant remplacer la représentation (136) par :

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta - \alpha \sin \theta & -(-\alpha \pm i) Z_i^{\pm} \sin \theta \\ [(-\alpha \pm i) / Z_i^{\pm}] \sin \theta & \cos \theta + \alpha \sin \theta \end{pmatrix} . \quad (329)$$

Tout circuit symétrique retournable (comme par exemple celui de la figure 42e), donc un circuit où $\alpha = 0$, possède une matrice de transfert de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \mp i Z_i^{\pm} \sin \theta \\ [\mp i / Z_i^{\pm}] \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} . \quad (330)$$

[Rappelons qu'on a toujours :

$$\sin \theta = i \sqrt{\left(\frac{t_{11} + t_{22}}{2}\right)^2 - 1} .$$

Cette quantité est un nombre complexe.]

Par exemple, dans le cas particulier de la figure 42e, on aurait :

$$\cos \theta = 1 + \frac{Z_1 A_2}{2} , \quad \sin \theta = \frac{i}{2} \sqrt{Z_1 A_2 (4 + Z_1 A_2)} .$$

Si $Z_1 A_2$ est réel pur, θ est imaginaire pur et nous obtenons des fonctions hyperboliques ou trigonométriques pures.

Exemple de répétition périodique

Soit le circuit de la figure 43, sans résistance. Nous avons une transmission pure sans perte. Appelons $\omega_c^2 = 1/LC$ (correspondant à la fréquence de coupure $f_c = \omega_c / 2\pi$). D'où :

$$\cos \theta = 1 - (\omega^2/\omega_c^2) \quad , \quad \sin \theta = \frac{i\omega}{\omega_c} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 2} \quad ,$$

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = -\frac{t_{12}}{\sin \theta} = L\omega_c^2 / \sqrt{\omega^2 - 2\omega_c^2} \quad , \quad Z_i = 1/C \sqrt{\omega^2 - 2\omega_c^2} \quad . \quad (331)$$

(On notera que $2\omega_c^2 = \omega_0^2$, où $\omega_0/2\pi$ est la fréquence libre d'oscillation en circuit ouvert; voir ci-dessus.)

Z_i est réel ou imaginaire pur et sera, soit une résistance pure, soit une capacité pure (donc de la forme R ou $-i/C\omega$). Si le quadripôle est répété n fois, la matrice du système devient :

$$T^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & +iZ_i^+ \sin n\theta \\ [+i/Z_i^+] \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \quad . \quad (332)$$

D'une façon générale, pour un système sans perte, la bande passante est celle qui laisse θ réel.

Ici θ est réel si $\omega < \omega_0$ ($\omega_0 = \sqrt{2}\omega_c = \sqrt{2/LC}$). Le système est passant, I et U vont varier sinusoidalement le long du système avec une longueur d'onde λ telle que $n = 2\pi/\theta$. Si à la fin le système est fermé sur son impédance itérative, $U_s = U_e e^{-in\theta}$, et c'est un vecteur tournant avec n .

Si θ est imaginaire pur [$\omega > \omega_0 (= \sqrt{2/LC})$], $Z_i = -i/C\omega$ avec $C' = C \sqrt{1 - (\omega_0^2/\omega^2)}$, le circuit est divergent et n'est plus passant, U et I décroissent régulièrement avec n . S'il est fermé à la fin sur Z_i alors $U_s = U_e e^{-n\theta}$: la décroissance est exponentielle avec n .

Si cette ligne est en circuit ouvert aux deux extrémités, ses fréquences de résonance sont celles qui annulent t_{21} , soit $\sin n\theta = 0$ ou $\theta = k\pi/n$, soit $\omega_k = \omega_c \sqrt{1 - \cos k\pi}$ pour tout k entier, inférieur ou égal.

Exemple d'un calcul de bande passante

L'exemple de la figure 45 illustrera les avantages de la méthode.

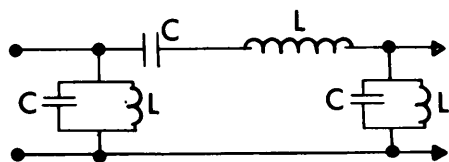


Fig. 45

Le système correspond à celui de la figure 42e. La bande passante sera celle qui fera θ réel et $t_{11} > -1$.

$$t_{11} = 1 + Z_1 A_2 \quad , \quad \text{avec} \quad :$$

$$A_2 = i(LC\omega^2 - 1)/L\omega ,$$

$$Z_1 = i(LC\omega^2 - 1)/C\omega ,$$

d'où :

$$t_{11} = \cos \Theta = 1 - [(LC\omega^2 - 1)^2 / LC\omega^2] .$$

Appelons $LC\omega^2 = Q$, alors la condition $t_{11} > -1$ équivaut à résoudre $Q^2 - 4Q + 1 < 0$, d'où la bande passante :

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{Lc} < \omega^2 < \frac{2 + \sqrt{3}}{Lc} .$$

L'impédance itérative Z_i sera donnée par :

$$t_{21} = -A_2 (Z + Z_1 A_2) = \frac{i}{Z_i} \sin \Theta ,$$

d'où :

$$Z_i = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{Q}{[2Q - (Q-1)^2]}} .$$

LIGNE A CONSTANTES REPARTIES

Soit une ligne représentée par une impédance longitudinale par unité de longueur Z (de la forme $R + iL\omega$) et par une admittance de perte vers le sol A par unité de longueur (de la forme $G + iC\omega$). Appelons s la distance le long de la ligne; U et I sont maintenant fonction de s , et nous avons^{*)} :

$$\frac{dU}{ds} = -Z I , \quad \frac{dI}{ds} = -A U , \quad (333)$$

soit

$$\begin{pmatrix} U + dU \\ I + dI \end{pmatrix}_{s+ds} = \begin{pmatrix} 1 & -Z ds \\ -A ds & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}_{(s)} . \quad (334)$$

*) Voir Bibliographie, numéro 1.

Soient $-Ad_s = (i/Z_i) \sin d\theta$, $-Zds = iZ_i \sin d\theta$ [suivant (330)]. En considérant la ligne comme une répétition périodique de cellules élémentaires suivant (332), on obtient :

$$\begin{pmatrix} U(s) \\ I(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega s & iZ_i \sin \Omega s \\ (i/Z_i) \sin \Omega s & \cos \Omega s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(0) \\ I(0) \end{pmatrix} \quad (335)$$

avec :

$$\Omega = c \sqrt{AZ} \quad , \quad Z_i = \sqrt{\frac{Z}{A}} \quad . \quad (336)$$

La matrice (335) peut aussi s'écrire :

$$T(s) = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{AZ} s & -\sqrt{\frac{Z}{A}} \sinh \sqrt{AZ} s \\ -\sqrt{\frac{A}{Z}} \sinh \sqrt{AZ} s & \cosh \sqrt{AZ} s \end{pmatrix} \quad . \quad (337)$$

Exemple

a) Ligne à résistance pure

Si AZ est réel et positif, les points représentatifs de l'état de la

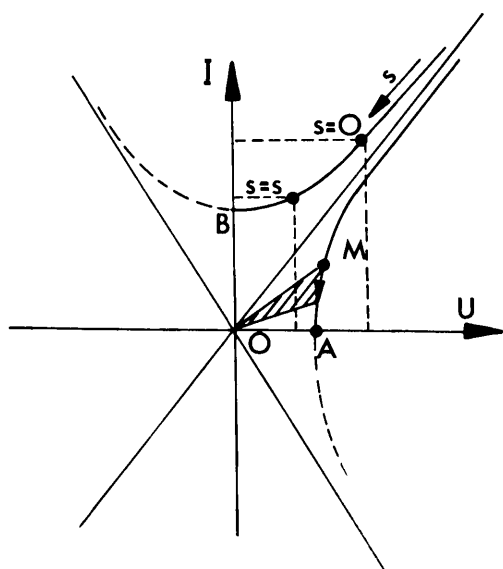


Fig. 46

ligne dans l'espace U, I se déplacent sur des branches d'hyperbole droite (fig. 46), dont les asymptotes ont un angle $\pm \sqrt{A/Z} = \pm Z_i^{-1}$. Le point A représente la ligne ouverte, le point B la ligne en court-circuit. Tout point représentatif situé sur l'asymptote y restera, car il représente la ligne fermée sur son impédance itérative. L'angle hyperbolique $\sqrt{AZ}s$ est lié à la surface balayée par le rayon OM (fig. 46).

b) Ligne sans perte

$R = 0, G = 0, Z_i = \sqrt{L/c}$; appelons $\omega_L = \omega \sqrt{Lc}$:

$$T(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \omega_L \beta & -i \sqrt{\frac{L}{C}} \sin \omega_L \beta \\ -i \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_L \beta & \cos \omega_L \beta \end{pmatrix}. \quad (338)$$

C'est une oscillation sinusoïdale de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/\omega \sqrt{LC}$.

REGIME QUELCONQUE

Ce formalisme s'applique aussi bien au calcul opérationnel sur les transformées de Carson-Laplace $e(p)$ et $i(p)$ des tensions et des courants, même lorsqu'ils ne sont pas sinusoïdaux. Les matrices de transfert sont toujours celles des équations (314) et (315a) à (315g), en se rappelant qu'une impédance transformée d'un circuit série R, L, C s'écrit $Z(p) = R + Lp + 1/Cp$, et que le coefficient d'induction mutuelle est $M = \mu p$.

QUADRIPOLES ACTIFS

Nous ne décrivons pas les amplificateurs de tension ou de courant qui, tels la lampe triode, se ramènent à des dipôles. Par contre, les transistors peuvent être considérés comme des quadripôles pour des petits signaux c.a. (courant alternatif), lorsque les polarisations c.c. (courant continu) sont données. Sauf indication contraire, nous utiliserons les paramètres h_{ij} en base commune.

Les figures (47a) et (47b) montrent le circuit équivalent simplifié du transistor idéal hybride p-n-p, régi par les équations linéaires :

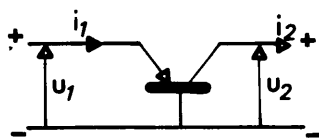


Fig. 47a

$$U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \quad (339)$$

$$-I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2.$$

Ce circuit est équivalent au quadripôle (47c) suivant :

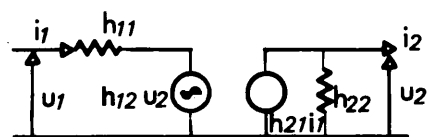


Fig. 47b

$$\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}_2 = T \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}_1$$



Fig. 47c

avec :

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{12}} & -\frac{h_{11}}{h_{12}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{h_{22}h_{11} - h_{21}}{h_{12}} \end{pmatrix} = \frac{1}{h_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -h_{11} \\ -h_{22} & |H| \end{pmatrix} \quad (340)$$

$$|\bar{T}| = -\frac{h_{21}}{h_{12}}$$

(les h_{ij} sont souvent définis comme impédances ou gains en circuit ouvert ou fermé).

Exemple

Le gain en tension avec une impédance de charge Z est :

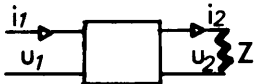


Fig. 48

$$\frac{u_2}{u_1} = A_v = \frac{Z h_{21}}{h_{11} + Z |H|} \quad (341a)$$

et le gain en courant serait :

$$\frac{i_2}{i_1} = A_i = -\frac{h_{21}}{1 + Z h_{22}} \quad (341b)$$

Les valeurs de h_{ij} sont données en fonction des conditions en courant continu et de la température. Par exemple, si $h_{11} = 40$ ohms, $h_{22} = 0,4 \cdot 10^{-6}$ ohms, $h_{12} = 5 \cdot 10^4$, $h_{21} = -0,98$, d'où $|H| = 5 \cdot 10^{-4}$. Si $Z = 2 \cdot 10^4$ ohms, on a $A_v = -4 \cdot 10^2$ et $A_i = -0,97$, d'où $G = A_v A_i = 410^{+2}$ (27 décibels).

Les paramètres h_{ij}^e en émetteur commun se déduisent de h_{ij}^b en base commune par des formules ^{*}, dont les suivantes (qui sont des simplifications) :

$$h_{11}^e \approx h_{11}^b / [1 + h_{21}^b], \quad (342a)$$

$$h_{12}^e \approx [|H|^b - h_{12}^b] / [1 + h_{21}^b], \quad (342b)$$

$$h_{21}^e \approx -h_{21}^b / [1 + h_{21}^b], \quad (342c)$$

$$h_{22}^e \approx h_{22}^b / [1 + h_{21}^b]. \quad (342d)$$

*) Voir Bibliographie, numéro 15.

REACTION

Soient un quadripôle actif en A et un quadripôle passif en P connectés suivant un schéma parallèle (fig. 49). Suivant (321c), nous avons :

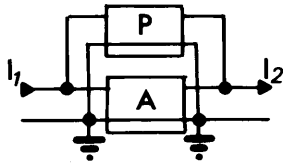


Fig. 49

$$Y = Y(P) + Y(A) . \quad (343)$$

Si, par exemple, nous nous mettons en circuit ouvert ($I_2 = 0$), nous avons $y_{21} \bar{U}_1 + y_{22} \bar{U}_2 = 0$, d'où :

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = - \frac{y_{21}}{y_{22}} , \quad (344)$$

si $y_{22} = 0$, $U_2 = \infty$.

Exemple d'application

Considérons (fig. 50) un amplificateur simple à réaction avec transistor p-n-p monté en émetteur commun.

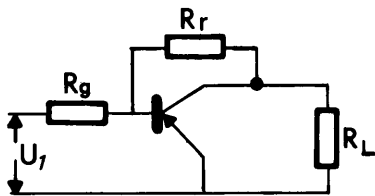


Fig. 50a

La figure 50b montre comment on peut le décomposer en deux quadripôles en parallèle (2 et 3) plus un en cascade (1) et nous allons y appliquer le formalisme matriciel. Les quadripôles (2 et 3) sont en parallèle, donc :

$$Y_{2,3} = Y_2 + Y_3 .$$

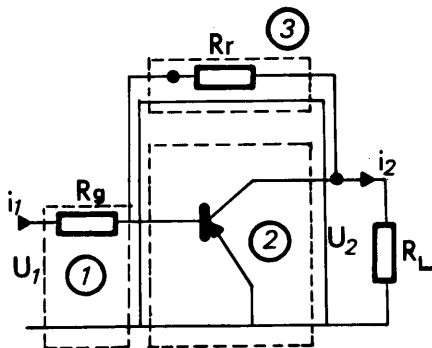


Fig. 50b

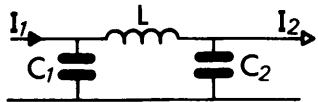
Le tableau 2 nous donne les Y en fonction des H ou des Z. Connaissant $Y_{2,3}$, nous en déduisons $T_{2,3}$ suivant le tableau 2. Puis nous calculons $T_{1,2,3} = T_{2,3}T_1$. Nous avons alors la matrice de transfert de l'amplificateur. Il suffit alors d'écrire que $U_2 = R_L I_2$ et nous en déduirons les gains en tension et en courant. Un tel calcul, fastidieux à la main, peut être fait en moins d'une seconde par un simple ordinateur.

* * *

Comme nous avons développé un formalisme matriciel à éléments et angle complexe, il peut s'appliquer à tous les systèmes linéaires, qu'ils soient électriques, mécaniques ou acoustiques, et à leurs combinaisons. On peut ainsi très bien définir une seule matrice de transfert pour un ensemble mécano-électro-acoustique, comme un haut-parleur par exemple, en cherchant les analogies entre les variables.

Exercices

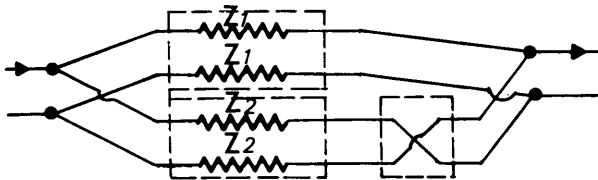
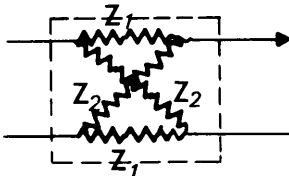
a) Soit le circuit de la figure ci-contre. Trouver la bande passante, la résonance en circuit ouvert et l'impédance itérative (décomposer C_2 en $C_1 + C'$).



b) Soit le schéma de la figure 50b avec $R_r = 15 \text{ k}\Omega$, $R_G = 1400 \Omega$, $R_L = 10 \text{ k}\Omega$, et les h_{ij}^e en émetteur commun étant $h_{11} = 2200 \text{ ohms}$, $h_{12} = 3,6 \cdot 10^{-4}$, $h_{21} = 55$, $h_{22} = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ ohms}$; trouver le gain en tension par la méthode matricielle.

c) Retrouver les formules du transformateur idéal en partant de l'équation (315g) avec $M = \sqrt{L_1 L_2}$, $Z_1 = iL_1\omega$, $Z_2 = iL_2\omega$, $\sqrt{(L_1/L_2)} = (n_1/n_2)$ (rapport du nombre de spires).

d) Trouver la matrice de transfert T du treillis de la figure ci-contre en utilisant la décomposition en trois quadripôles indiquée en dessous. Vérifier le critère de validité. Réponse :



$$T = \frac{1}{Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & -2Z_1 Z_2 \\ -2 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}$$

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier MM. G. Vanderhaeghe, O. Barbalat, C. Bovet et J. Fronteau pour les conseils et le soutien qu'ils m'ont apportés dans ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- 1) L. Brillouin et M. Parodi, Propagation des ondes dans les milieux périodiques (Masson, Paris, 1956).
- 2) H. Brück, Les accélérateurs circulaires de particules (P.U.F., Paris, 1966).
- 3) G. Bruhat, Mécanique (Masson, Paris, 1968).
- 4) G. Bruhat, Optique (Masson, Paris, 1959).
- 5) E.D. Courant et M.S. Snyder, Theory of alternating gradient synchrotron, Ann. Phys. (USA) 3, 1 (1958).
- 6) M. Denis-Papin et C.R. Kaufmann, Cours de calcul matriciel appliqué (Albin-Michel, Paris, 1961).
- 7) R. Gouiran, Focalisation et aberrations chromatiques des faisceaux de particules dans des dispositifs périodiques, Thèse à l'Université de Rennes (1967), ou CERN MU/EP 67-4 (1967) ou Ann. Phys. (France) 3, 67 (1968).
- 8) H.G. Hereward, The properties of particle beams in optical matching system in terms of phase plane ellipses, CERN MPS/Int. TH 59-5 (1959).
- 9) A. Lichnerowicz, Eléments de calcul tensoriel (Armand-Colin, Paris, 1955).
- 10) M. Morand, Introduction mathématique aux théories physiques modernes (Vuibert, Paris, 1948).
- 11) K.G. Steffen, High energy beam optics (Interscience Publ., New York, 1965).
- 12) J. Heading, Matrix theory for physicists (Longmans, Green and Co., London, 1958).
- 13) F.R. Gantmacher, Théorie des matrices (Dunod, Paris, 1966).
- 14) J. Ortusi, Mathématiques appliquées à l'électronique (Dunod, Paris, 1969).
- 15) R. Shea, Transistor applications (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968).
- 16) J. Lagasse, Etudes des circuits électriques (Eyrolles, Paris, 1965).
- 17) K. Brown et S. Howry, Transport, A computer program for designing a charged particle beam transport system, Rapport Stanford Linear Accelerator Center, SLAC-91 (juillet 1970).