

**MOYENS DE CALCUL POUR LA MESURE<sup>1]</sup> DES FORCE ET PHASE  
DES EFFETS PERTURBATEURS DES RESONANCES SUR LE FAISCEAU**

---

Edgar ASSEO

L'utilisation d'une modulation d'amplitude dans un algorithme itératif permet un gain notable en précision dans la mesure des caractéristiques (fréquence, phase, amortissement, amplitude) des oscillations bétatroniques amorties.

Sommaire

1. Introduction.....	1
2. Interpolation et phénomènes perturbateurs.....	2
3. Mesures autres que celle de la fréquence.....	4
4. Erreurs introduites par l'interpolation analytique.....	5
5. Analyse de l'erreur due à l'amortissement.....	6
6. Autres considérations et erreur due aux bruits.....	14
7. Choix du nombre d'échantillons et erreurs maxima attendues avec les mesures.....	30
8. Mesures de $\delta$ : Méthode de la FFT glissante.....	33
9. Algorithme itératif supprimant l'erreur due à l'amortissement..	44
10. Résultats.....	51
11. Références.....	60

<sup>1]</sup> : PS/LEA/Note 86-15 : "Resonance Measurements using Fourier Spectrum Analysis of Beam Oscillations" by J. Bengtsson, M. Chanel.

## 1- INTRODUCTION

L'utilisation de la transformée de Fourier discrète (DFT) pour mesurer la force et la phase des effets perturbateurs des résonances linéaires et non linéaires sur le faisceau<sup>2)</sup>, a montré que cela n'a été possible que parce que la DFT proprement dite a été associée à des méthodes mathématiques complémentaires. En effet la DFT, quoique très puissante, présente des handicaps importants si on veut l'utiliser pour expliciter sélectivement les valeurs des grandeurs physiques autre que la fréquence (phase, amplitude, amortissement) d'une composante oscillatoire d'un signal complexe fugitif. Nous avons montré qu'il est possible de mesurer ces grandeurs<sup>2)3)4)</sup> au moyen de traitements complémentaires mais il apparaît alors que la précision des résultats obtenus est directement liée à la précision avec laquelle on peut mesurer la fréquence. Il est ainsi important de chercher à obtenir la valeur de la fréquence avec une précision notablement plus grande que ne le laisse espérer une simple DFT opérée sur un nombre  $N$  limité, voire très limité, d'échantillons. Pour obtenir une erreur maximum inférieure à la limite théorique  $\pm \frac{1}{2N}$ , nous avons introduit la méthode de l'interpolation analytique<sup>2)3)4)</sup>. Elle permet, combinée avec

une modification de la fenêtre d'observation, de gagner une à trois décades dans la précision dans les cas où le taux d'amortissement  $\frac{N}{\delta}$  est relativement petit ( $N/\delta < 1$ ). En effet l'algorithme d'interpolation est basé sur la connaissance analytique de la fonction projectrice (spectre vraie de la fenêtre d'observation) pour laquelle, l'ignorance à priori du facteur  $\delta$ , fait qu'on ne peut que considérer le cas sans amortissement. Lorsque l'amortissement est important ( $N/\delta > 1$ ), l'interpolation analytique introduit une erreur qui vient limiter le gain en précision qu'elle doit normalement apporter. Pour pallier à cet inconvénient, nous avons développé une méthode analytique au moyen d'un algorithme itératif convergent. Il permet d'affranchir complètement la précision des résultats de l'interpolation analytique, de l'influence de l'amortissement. Cette méthode est basée sur l'analyse des erreurs introduites par l'amortissement lors de l'interpolation.

## 2. INTERPOLATION ET PHENOMENES PERTURBATEURS.

Soit  $M_{k_0}$  et  $M_{k_0+1}$ , les modules des raies données par une DFT de  $N$  échantillons et situées de part et d'autre

de la fréquence vraie  $q = \frac{K'_q}{N}$  (figure 1) de module  $M_q$ .

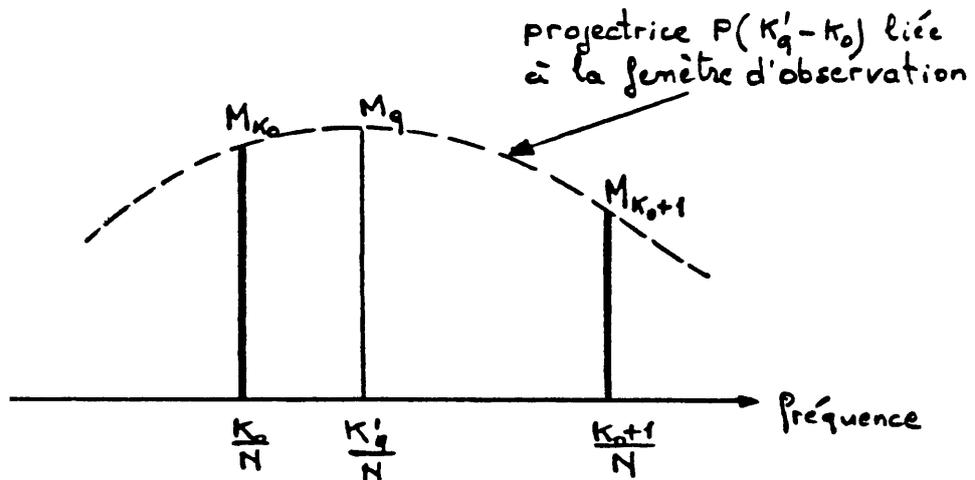


Fig. 1

Le calcul de la fréquence vraie  $K'_q/N$  utilise la connaissance analytique de la fonction projectrice  $P(K'_q - K_0)$  qui est symétrique et centrée sur l'axe symétrique qui correspond à la fréquence vraie  $K'_q/N$ .<sup>2)3)4)</sup>

Si la fenêtre est rectangulaire, la mesure  $q_m$  de  $q$  est donnée par :

$$q_m = \frac{1}{N} \left[ K_0 + \frac{M_{K_0+1}}{M_{K_0+1} + M_{K_0}} \right] \quad (1)$$

Si la fenêtre est  $\sin \frac{\pi n}{N}$ \*) la mesure  $q_m$  de  $q$  est donnée par :

$$q_m = \frac{1}{N} \left[ K_0 + \frac{2 \cdot M_{K_0+1}}{M_{K_0+1} + M_{K_0}} - \frac{1}{2} \right] \quad (2)$$

Deux sortes de phénomènes viennent perturber les résultats calculés avec le cas idéal d'une oscillation monochromatique vue à travers une fenêtre rectangulaire ou  $\sin \frac{\pi n}{N}$  sans amortissement :

\*)  $n$  est le numéro de l'échantillon :  $0 \leq n \leq N-1$ .

1. Les composantes vraies du spectre, autres que la composante qu'on mesure (bruit, couplage, spectre image qui, pour la mesure, seront considérées comme parasites) par le fait de la distribution ramèment des erreurs  $(dM_{K_0})_{\eta}$  et  $(dM_{K_0+1})_{\eta}$  sur les modules  $M_{K_0}$  et  $M_{K_0+1}$  du cas idéal.

2. L'amortissement (qui peut être vu comme une multiplication par  $e^{-\frac{\alpha}{\delta}}$  de la fenêtre d'observation) introduit des erreurs  $(dM_{K_0})_{\alpha}$  et  $(dM_{K_0+1})_{\alpha}$  sur les modules du cas idéal.

En utilisant l'interpolation analytique, il faut donc admettre que les modules  $M_{K_0}$  et  $M_{K_0+1}$  sont entachés des erreurs totales :

$$dM_{K_0} = (dM_{K_0})_{\eta} + (dM_{K_0})_{\alpha} \quad (3)$$

$$dM_{K_0+1} = (dM_{K_0+1})_{\eta} + (dM_{K_0+1})_{\alpha} \quad (4)$$

On peut montrer<sup>2)</sup> que l'ensemble des erreurs  $dM_{K_0}$  ou  $dM_{K_0+1}$  sont diminuées par l'utilisation de la fenêtre  $\frac{\sin \frac{\pi f}{N}}$ . Pour mesurer la fréquence vraie  $q_m = \frac{K_0}{N}$ , nous utiliserons donc exclusivement la fenêtre sinus.

### 3. MESURES AUTRES QUE CELLE DE LA FREQUENCE.

La mesure de la phase à partir de la mesure de la fréquence vraie a déjà été traitée dans une note<sup>3)</sup> séparée; nous n'en évoquerons ici que l'aspect précision.

Les mesures du facteur d'amortissement  $\delta$ , du module initial de l'oscillation et de la dispersion de fréquence  $\Delta q$  qui est lié à l'amortissement, seront simplement évoquées et calculées dans le cas des exemples donnés. La théorie des formulations utilisées est développée dans le rapport jaune<sup>4</sup> en préparation. Disons seulement que pour mesurer  $\delta$  et à sa suite  $\Delta q$  et le module initial, il faut au contraire de la mesure de fréquence, favoriser l'influence de l'amortissement. On utilisera donc dans ce cas la fenêtre rectangulaire.

#### 4. ERREURS INTRODUITES PAR L'INTERPOLATION ANALYTIQUE.

Il s'agit donc des erreurs de mesure de la fréquence pratiquées avec la fenêtre sinus.

$q$  est la valeur vraie de la fréquence. On en obtient la mesure  $q_m$ , après une DFT, avec la relation (3) pour laquelle il faut considérer les valeurs idéales  $M_{k_0}$  et  $M_{k_0+1}$  comme étant entachées par les erreurs  $dM_{k_0}$  et  $dM_{k_0+1}$  données en (3) et (4).

Si nous considérons les valeurs  $(M_{k_0})_{DFT}$  et  $(M_{k_0+1})_{DFT}$  données par une DFT dans un cas réel, on aura donc

$$(M_{k_0})_{DFT} = M_{k_0} + dM_{k_0} \quad (5)$$

$$(M_{k_0+1})_{DFT} = M_{k_0+1} + dM_{k_0+1} \quad (6)$$

L'interpolation analytique donne :

$$q_m = q + dq = \frac{1}{N} \left[ k_0 + \frac{z \cdot (M_{k_0+1})_{DFT}}{(M_{k_0+1})_{DFT} + (M_{k_0})_{DFT}} - \frac{1}{2} \right] \quad (7)$$

Le calcul de l'erreur<sup>(1)</sup> pratiquée sur la relation (2) donne :

$$dq = \frac{z}{N} \cdot \frac{M_{k_0} \cdot M_{k_0+1}}{(M_{k_0} + M_{k_0+1})^2} \left[ \frac{dM_{k_0+1}}{M_{k_0+1}} - \frac{dM_{k_0}}{M_{k_0}} \right] \quad (8)$$

En considérant les relations (3) et (4), on voit que l'erreur totale  $dq$  peut être vue comme :

$$dq = (dq)_\uparrow + (dq)_a \quad (9)$$

La part de l'erreur due à l'amortissement s'écrit alors :

$$(dq)_a = \underbrace{\frac{z}{N} \cdot \frac{M_{k_0} \cdot M_{k_0+1}}{(M_{k_0} + M_{k_0+1})^2}}_A \cdot \underbrace{\left[ \frac{(dM_{k_0+1})_a}{M_{k_0+1}} - \frac{(dM_{k_0})_a}{M_{k_0}} \right]}_B \quad (10)$$

### 5. ANALYSE DE L'ERREUR DUE A L'AMORTISSEMENT

La formulation (10) met en évidence deux facteurs, A et B. Le facteur A ne dépend que des valeurs idéales induite par la projectrice non amortie. On peut montrer<sup>(1)</sup> que, dans le cas de la fenêtre d'observation sinus sans amortissement, on obtient avec les notations de la figure 1 :

$$M_{K_0} = M_q \cdot \frac{-\cos \pi (K_0 - K'_q)}{2\pi \left[ (K_0 - K'_q)^2 - \frac{1}{4} \right]} \quad (11)$$

$$M_{K_0+1} = M_q \cdot \frac{\cos \pi (K_0 - K'_q)}{2\pi \left[ (K_0 + 1 - K'_q)^2 - \frac{1}{4} \right]} \quad (12)$$

Si on calcule le facteur  $A$  à partir des relations (11) et (12), on obtient :

$$A = \frac{\left[ (K_0 + 1 - K'_q)^2 - \frac{1}{4} \right] \cdot \left[ \frac{1}{4} - (K_0 - K'_q)^2 \right]}{\left[ 2(K_0 - K'_q) + 1 \right]^2} \quad (13)$$

Le facteur  $A$  ne dépend que de la différence  $K_0 - K'_q$  (valeur toujours négative) c'est à dire de la position de la fréquence vraie entre les deux valeurs entières  $K_0$  et  $K_0 + 1$ . La variation de  $A$  en fonction de la position de  $K'_q$  est représentée sur la figure 2.

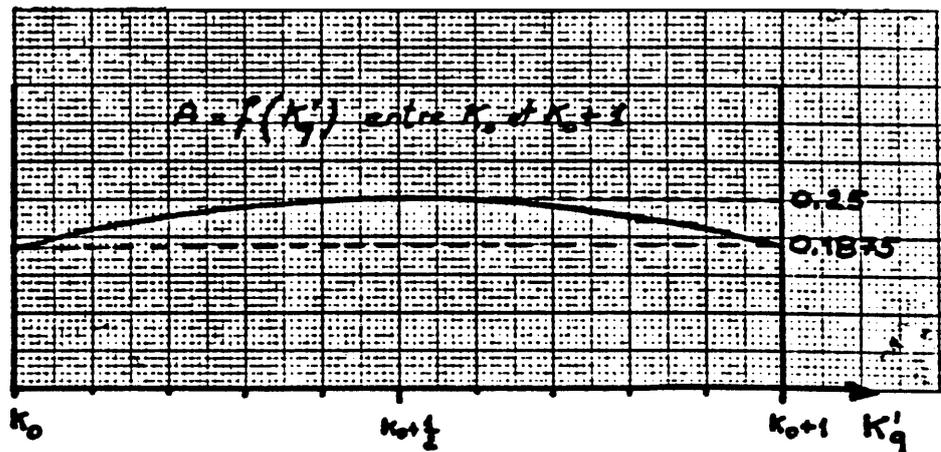


Fig. 2

A est une valeur très peu variable, toujours positive, qui évolue entre le maximum 0,25 et le minimum 0,1875.

Considérons maintenant le facteur B.

Les erreurs dues à l'amortissement  $(dM_{k_0})_a$  et  $(dM_{k_0+1})_a$  correspondent aux écarts

$$(dM_{k_0})_a = (M_{k_0})_s - M_{k_0} \quad (14)$$

$$(dM_{k_0+1})_a = (M_{k_0+1})_s - M_{k_0+1} \quad (15)$$

où  $M_{k_0}$  et  $M_{k_0+1}$  sont les valeurs (11) et (12) sans amortissement et  $(M_{k_0})_s$  et  $(M_{k_0+1})_s$  sont les valeurs ci après calculées<sup>2)</sup> pour la fenêtre sinus avec amortissement :

$$(M_{k_0})_s = M_g \times \pi \times \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2N}{\delta}} + 2e^{-\frac{N}{\delta}} \cos 2\pi(k_0 - k'_g)}{[4\pi^2(k_0 - k'_g + \frac{1}{2})^2 + (\frac{N}{\delta})^2] \cdot [4\pi^2(k_0 - k'_g - \frac{1}{2})^2 + (\frac{N}{\delta})^2]}} \quad (16)$$

$$(M_{k_0+1})_s = M_g \times \pi \times \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2N}{\delta}} + 2e^{-\frac{N}{\delta}} \cos 2\pi(k_0 - k'_g)}{[4\pi^2(k_0+1 - k'_g + \frac{1}{2})^2 + (\frac{N}{\delta})^2] \cdot [4\pi^2(k_0+1 - k'_g - \frac{1}{2})^2 + (\frac{N}{\delta})^2]}} \quad (17)$$

L'expression de B s'écrit, en tenant compte de (14) et (15):

$$B = \frac{(M_{k_0+1})_s - M_{k_0+1}}{M_{k_0+1}} - \frac{(M_{k_0})_s - M_{k_0}}{M_{k_0}}$$

$$B = \frac{(M_{k_0+1})_s}{M_{k_0+1}} - 1 - \frac{(M_{k_0})_s}{M_{k_0}} + 1$$

d'où

$$B = \frac{(M_{k_0+1})\delta}{M_{k_0+1}} - \frac{(M_{k_0})\delta}{M_{k_0}} \quad (18)$$

A partir des relations (11) et (12) et (16) et (17) on peut calculer<sup>4)</sup> la valeur de B. Pour ne pas compliquer la tâche du lecteur, nous nous contenterons ici, simplement de mettre en évidence les résultats importants de ce calcul vis à vis du but que nous poursuivons.

- D'une façon générale B est une fonction du taux d'amortissement  $N/\delta$  et de l'écart  $(k_0 - k'_q)$ ;
- étant donné la symétrie des fonctions projectrices par rapport à la fréquence vraie  $k'_q/N$ , le terme B est toujours nulle, indépendamment de la valeur du taux  $N/\delta$ , lorsque  $k'_q = k_0 + \frac{1}{2}$  c'est à dire se trouve au milieu de l'intervalle  $k_0, k_0+1$ . C'est le cas représenté sur la figure 3.

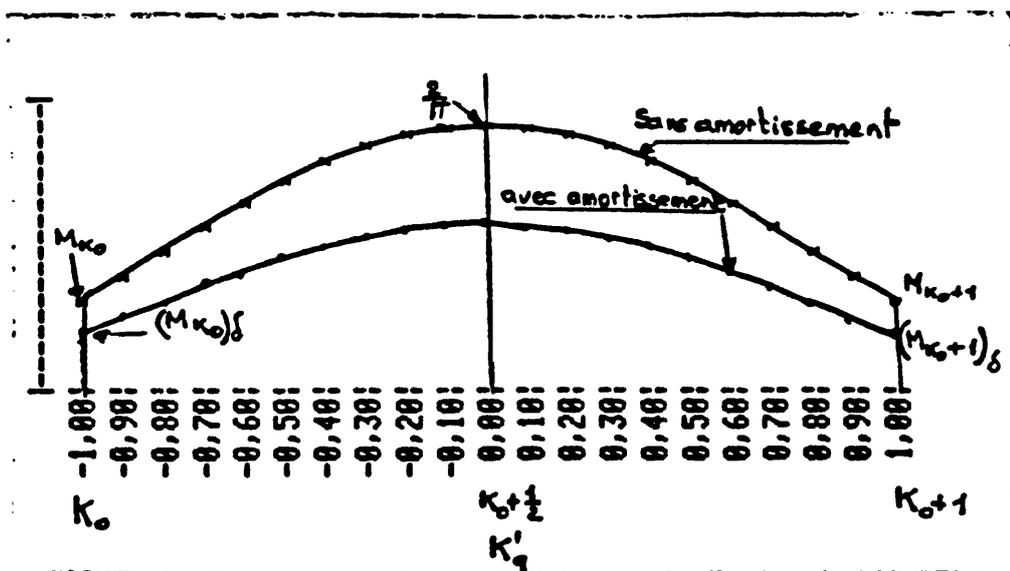


fig. 3

En effet dans ce cas :

$$(M_{\kappa_{0+1}})_S = (M_{\kappa_0})_S \text{ et } M_{\kappa_{0+1}} = M_{\kappa_0} \text{ donc } (dM_{\kappa_0})_a = (dM_{\kappa_{0+1}})_a$$

• pour les mêmes raisons de symétrie :

$$M_{\kappa_0} \text{ pour } (\kappa'_q - \kappa_0 = k) = M_{\kappa_{0+1}} \text{ pour } (\kappa'_q - \kappa_0 = 1-k)$$

$$(M_{\kappa_0})_S \text{ pour } (\kappa'_q - \kappa_0 = k) = M_{\kappa_{0+1}} \text{ pour } (\kappa'_q - \kappa_0 = 1-k)$$

Avec la relation (18) on voit alors que

$$B \text{ pour } (\kappa'_q - \kappa_0 = k) = -B \text{ pour } (\kappa'_q - \kappa_0 = 1-k) \quad (19)$$

c'est à dire : la variation de B en fonction de la position de  $\kappa'_q$  entre  $\kappa_0$  et  $\kappa_{0+1}$  est antisymétrique (même valeur absolue et signe contraire) par rapport à  $e(\kappa'_q - \kappa_0) = 1$  c'est à dire  $\kappa'_q - \kappa_0 = \frac{1}{2}$ .

La variation de l'erreur due à l'amortissement, exprimée par la relation (10) et qu'on aura normalisée en faisant  $N=1$ , donne des fonctions telles que représentées sur la figure 4 et pour lesquelles  $N/\delta$  est pris comme paramètre.

On peut alors faire les remarques suivantes et qui sont fondamentales pour la stratégie que nous allons envisager :

- $(dq)_a = 0$  lorsque  $\kappa'_q - \kappa_0 = \frac{1}{2}$  quelque soit  $N/\delta$ .
- pour une valeur quelconque du taux d'amortissement  $N/\delta$ , la fonction  $(dq)_a = f(\kappa_0 - \kappa'_q)$  est monotone c'est à dire : si on fait tendre  $\kappa'_q$  vers  $\kappa_0 + \frac{1}{2}$ , quelque soit le point

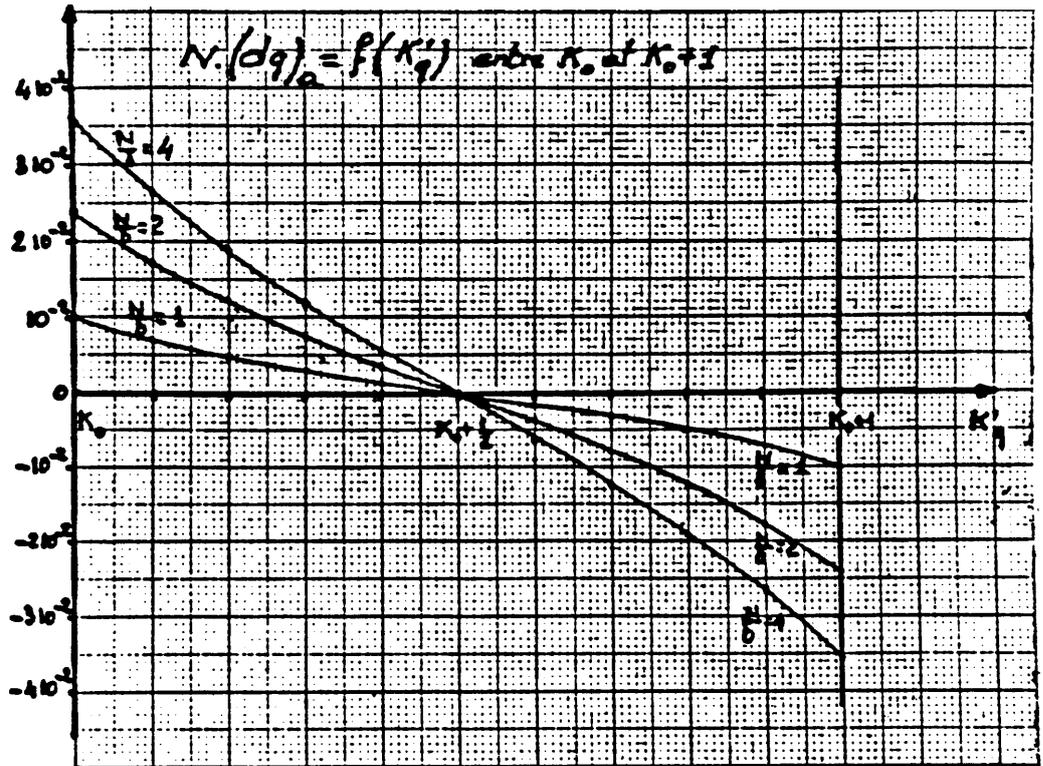


Fig. 4

de départ de  $k'_q$  entre  $k_0$  et  $k_0+1$ , la valeur absolue de l'erreur  $|(dq)_a|$  diminue et tend vers zéro.

Lorsque la condition  $k'_q - k_0 = \frac{1}{2}$  est atteinte :

- l'erreur introduite par l'interpolation analytique et due à l'amortissement de la composante qu'on mesure, est complètement éliminée;

- seule subsiste l'erreur  $(dq)_p$  due à l'ensemble des composantes vraies du spectre autres que la composante qu'on mesure (bruit, couplage, spectre image).

Si nous associons les remarques qui précèdent, avec le fait que nous savons<sup>3)</sup>, en utilisant une modulation d'amplitude adéquate, transposer une fréquence  $\frac{k'_q}{N}$  en

une fréquence quelconque et donc en particulier en une fréquence  $\frac{k_T + 1}{N}$  ( $k_T$  étant entier), nous avons à notre disposition tous les éléments nous permettant d'envisager une stratégie permettant d'éliminer de la mesure de  $q$  obtenue par l'interpolation analytique, les erreurs dues à l'amortissement.

Cette stratégie sera détaillée au paragraphe 9.

Auparavant, il est utile d'évaluer l'importance de l'erreur maximum  $[(dq)_a]_{\max}$  due à l'amortissement, en fonction du taux d'amortissement  $\frac{N}{\delta}$ . Nous le ferons sous la forme de l'erreur normalisée  $N \cdot [(dq)_a]_{\max}$ , de sorte qu'il suffira de le diviser par le nombre  $N$  d'échantillons, pour obtenir la valeur réelle de l'erreur maximum.

Nous avons vu, avec ce qui précède, que l'erreur maximum (en valeur absolue) est atteinte lorsque  $k'_q - k_0$  tend vers zéro ou vers 1. Dans ce cas le facteur  $A$  de la relation (10) tend vers 0,1875. Il nous reste donc à calculer le facteur  $B$  lorsque  $k'_q - k_0 = 0$ . On obtient dans cette condition:

• avec la relation (11):  $M_{k_0} = M_q \times \frac{2}{\pi}$  (20)

• avec la relation (12):  $M_{k_0+1} = M_q \times \frac{2}{3 \cdot \pi}$  (21)

de même :

• avec la relation (16) :  $(M_{k_0})_{\delta} = M_q \times \pi \cdot \frac{1 + e^{-\frac{N}{\delta}}}{\pi^2 + (\frac{N}{\delta})^2}$  (22)

• avec la relation (17) :  $(M_{k_0+1})_{\delta} = M_q \times \pi \cdot \frac{1 + e^{-\frac{N}{\delta}}}{\sqrt{[9\pi^2 + (\frac{N}{\delta})^2] \cdot [\pi^2 + (\frac{N}{\delta})^2]}}$  (23)

Avec les relations (20), (21), (22) et (23), on calcule le facteur B exprimé par la relation (18) :

$$B = \frac{3\pi^2 \cdot (1 + e^{-\frac{N}{\delta}})}{2 \cdot \sqrt{[9\pi^2 + (\frac{N}{\delta})^2] \cdot [\pi^2 + (\frac{N}{\delta})^2]}} - \frac{\pi^2 \cdot (1 + e^{-\frac{N}{\delta}})}{2 \cdot [\pi^2 + (\frac{N}{\delta})^2]}$$

d'où finalement l'expression :

$$N \cdot [(dq)_a]_{\max} = 0,1875 \times \pi^2 \cdot (1 + e^{-\frac{N}{\delta}}) \left[ \frac{3}{\sqrt{[9\pi^2 + (\frac{N}{\delta})^2] \cdot [\pi^2 + (\frac{N}{\delta})^2]}} - \frac{1}{\pi^2 + (\frac{N}{\delta})^2} \right] \quad (24)$$

La variation de cette fonction est représentée sur la figure 5.

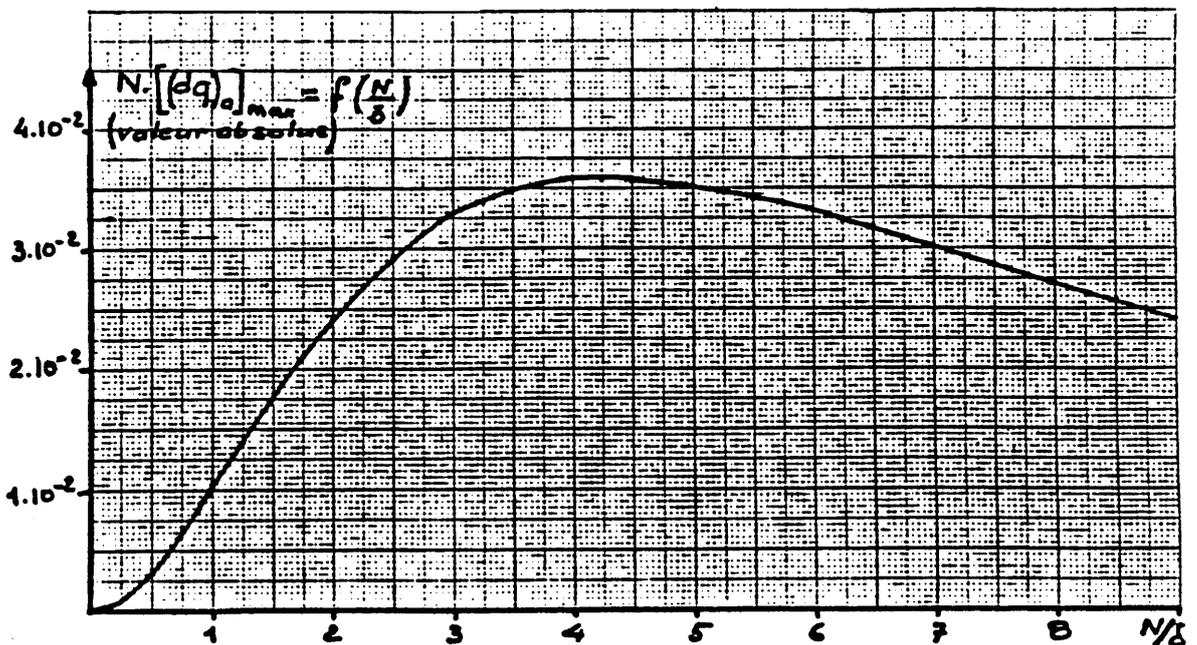


fig. 5

Ainsi, si la composante qu'on mesure a un facteur d'amortissement  $\delta$  et qu'on choisit  $N$  tel que, par exemple,  $N/\delta = 1$  avec  $N = 256$ , l'interpolation analytique conduit à obtenir une erreur due à l'amortissement qui sera :

$$|(dq)_a| \leq \underbrace{N \cdot [(dq)_a]_{\max}}_{\text{par } \frac{N}{\delta} = 1} \cdot \frac{1}{256} = \frac{0,01}{256} = 3,9 \cdot 10^{-5}$$

La fonction de l'erreur maximum représentée à la figure 5, jointe à des considérations concernant l'influence des sources d'erreurs autres que l'amortissement de la composante qu'on mesure, va nous permettre d'établir les conditions de mesure compte tenu de l'erreur maximum globale qu'on espère ne pas dépasser. Ce sera l'objet du paragraphe 6.

## 6. AUTRES CONSIDERATIONS ET ERREUR DUE AUX BRUITS

Il faut que la distance spectrale<sup>(2)4)</sup> entre la fréquence qu'on mesure et une fréquence de couplage soit suffisante - On a établi<sup>(2)4)</sup>; si  $\Delta q$  est l'écart de fréquence ( $\Delta q = |q_H - q_V|$ ), qu'il faut avoir  $N_{\min}$  tel que :

$$N_{\min} \geq \frac{5}{\Delta q} \quad (\text{avec la fenêtre sinus}) \quad (25)$$

par exemple si  $\Delta q \approx 0,04$ ,  $N_{\min} \geq \frac{5}{0,04} = 125$

Etant donné qu'il y a intérêt<sup>2)</sup>, si  $N_q$  est le nombre d'échantillons utilisé pour mesurer la fréquence et  $N_\phi$  le nombre d'échantillons utilisé pour mesurer la phase, à avoir :

$$N_q > N_\phi \quad (26)$$

on prendra

$$N_q \geq \frac{10}{\Delta q}$$

par exemple pour  $\Delta q = 0.04$

$$N_q \geq \frac{10}{0.04} = 250$$

$$\text{soit } N_q = 256$$

$$\text{et } N_\phi \geq \frac{5}{0.04} = 125$$

$$\text{soit } N_\phi = 128.$$

• Si on mesure la fréquence avec une erreur  $dq$ , la mesure de la phase sera entachée d'une erreur  $d\phi$ . On peut faire l'approximation suivante<sup>3)</sup>. Le saut de phase  $\Delta\phi$ , lorsqu'on passe de la raie  $\kappa_0$  à la raie  $\kappa_0 + 1$ , est au maximum de  $\pi$  radians<sup>4)</sup>. On pourra ainsi écrire l'approximation

$$|d\phi| \approx \pi \times N_\phi \cdot |dq|$$

d'où

$$|d\phi|_{\max} \approx \pi \cdot N_\phi \cdot |dq|_{\max} \quad (27)$$

$|dq|$  et  $|dq|_{\max}$  étant l'erreur totale entachant la mesure de  $q$ ; donc  $dq = (dq)_a + (dq)_r$ .

Par exemple, si on veut  $|\phi|_{\max} \approx 0,035$  rad. ( $\approx 2$  degrés)  
avec  $N_\phi = 128$ , on devra avoir :

$$|dq|_{\max} \approx \frac{0,035}{\pi \times 128} = 8,7 \cdot 10^{-5}$$

Si la composante qu'on mesure a un amortissement maximum caractérisé par le facteur  $\delta_{\min}$  (ce qui fait correspondre un taux  $\frac{N_q}{\delta_{\min}}$ ), on obtient avec la relation (24) ou la figure 5, la valeur normalisée de l'erreur due à l'amortissement :

$$N_q \times |(dq)_a|_{\max} = f\left(\frac{N_q}{\delta_{\min}}\right) \quad (28)$$

Prenons par exemple  $N_q = 256$  et  $\delta_{\min} \approx 200$ . On obtient :

$$\frac{N_q}{\delta_{\min}} = \frac{256}{200} = 1,28 \quad \text{et} \quad f(1,28) = 0,0144$$

donc l'erreur due à l'amortissement :

$$|(dq)_a|_{\max} = \frac{f(1,28)}{N_q} = \frac{1,44 \cdot 10^{-2}}{256} = 5,62 \cdot 10^{-5}$$

Ce qui représente une part importante de l'erreur totale tolérable ( $8,7 \cdot 10^{-5}$ ) pour atteindre  $|\phi|_{\max} \approx 0,035$  rad.  
Il est donc important de pouvoir supprimer, dans ce cas, l'erreur due à l'amortissement.

• Avec les considérations qui précèdent nous avons vu les limitations inférieures du nombre d'échantillons.

Nous allons maintenant considérer les limitations supérieures. Elles sont principalement dues à l'augmentation de l'influence du bruit lorsque le taux d'amortissement  $N/S$  augmente. Ce qui nous intéresse est l'évaluation de  $(dq)_p$  dans les conditions de mesure de la fréquence permettant l'élimination de l'erreur due à l'amortissement :

la composante à mesurer a été transférée sur une fréquence  $(K_T + 0,5)/N_q$ , par une modulation d'amplitude.

Nous allons donc considérer l'expression de l'erreur donnée par la relation (8) en supposant que seule subsiste l'erreur  $(dq)_p$  toute entière due au bruit (en effet par le choix de  $N_{min}$  l'influence du couplage a été minimisée) -

On aura donc

$$(dq)_p = (dq)_b = \frac{2}{N_q} \cdot \frac{M_{K_0} \cdot M_{K_0+1}}{(M_{K_0} + M_{K_0+1})^2} \left[ \frac{(dM_{K_0+1})_b}{M_{K_0+1}} - \frac{(dM_{K_0})_b}{M_{K_0}} \right] \quad (29)$$

Etant donné les conditions de mesure que nous venons de rappeler :  $M_{K_0} = M_{K_0+1}$ . Pour avoir l'erreur maximum on fera l'hypothèse

$$(dM_{K_0+1})_b = (dM_{K_0})_b = (dM)_b$$

d'où

$$\left| (dq)_b \right|_{\max} = \frac{2}{N_q} \times \frac{1}{4} \times \frac{2 (dM)_b}{M_{\kappa_0}} = \frac{1}{N_q} \times \frac{(dM)_b}{M_{\kappa_0}} \quad (30)$$

La valeur  $M_{\kappa_0}$  qu'il faut alors considérer est la valeur donnée par la relation (16) en faisant  $\kappa_0 - \kappa'_q = -\frac{1}{2}$  qui doit être divisé par 2 puisque nous considérons qu'une seule des deux composantes latérales introduites par la modulation.

On aura ainsi :

$$M_{\kappa_0} = M_q \times \pi \frac{1 - e^{-\frac{N_q}{\delta}}}{\sqrt{\left(\frac{N_q}{\delta}\right)^2 [4\pi^2 + \left(\frac{N_q}{\delta}\right)^2]} \times \frac{1}{2} \quad (31)$$

On peut représenter le signal échantillonné par

$$y(n) = M_q e^{-\frac{n}{\delta}} \cos(\varepsilon \pi q n + \phi_q) + b \cdot \sigma(n) \quad (32)$$

où :

$n$  = le numéro de l'échantillon  $0 \leq n \leq N_q - 1$

$M_q$  = le module initial de l'oscillation amortie

$\phi_q$  = phase initiale de l'oscillation

$\delta$  = facteur d'amortissement

$b$  = amplitude du bruit

$\sigma(n)$  = fonction aléatoire de  $n$  telle que  $-1 \leq \sigma(n) \leq 1$

Si on opère une DFT de  $N_q$  échantillons sur le signal  $y(n)$ , pour chacune des raies, on peut évaluer la contribution

en module due au bruit par l'approximation<sup>4)</sup>:

$$(dM)_b \approx \underbrace{\frac{b}{\sqrt{N_g}}}_{\text{avec fen\^etre rectangulaire}} \times \underbrace{\frac{4}{\pi}}_{\text{att\^enuation due \^a la fen\^etre sinus.}} \quad (33)$$

Etant donn\^e l'\^equidistribution du spectre de bruit nous supposons qu'aucune modification en module n'est introduite par la modulation d'amplitude. Nous avons fait une experimentation simul\^ee (figures 6 \^a 11 pages 20 \^a 25) avec laquelle on peut comparer les r\^esultats de la DFT sur le signal de bruit et les valeurs moyennes calcul\^ees avec la relation (33).

En introduisant les valeurs donn\^ees par les relations (31) et (33) dans la relation (30), on obtient:

$$\boxed{|(dq)_b|_{\max} = \frac{4}{\pi^2 \cdot N_g \cdot \sqrt{N_g}} \cdot \frac{\frac{N_g}{\delta} \sqrt{4\pi^2 + \left(\frac{N_g}{\delta}\right)^2}}{1 - e^{-\frac{N_g}{\delta}}} \times \frac{b}{M_g}} \quad (34)$$

Le terme  $\frac{b}{M_g}$  repr\^esente le rapport:  $\frac{\text{Amplitude du bruit}}{\text{Amplitude initiale de l'oscillation}}$

Ainsi si  $N_g = 256$ ,  $\delta = 100$ ,  $\frac{b}{M_g} = 0,1$  on obtient

$$|(dq)_b|_{\max} = 1,863 \cdot 10^{-4}$$

(suite page 26)

Analyse du bruit

fenêtre sinus

modulation d'amplitude  $\cos 2\pi f_m t$ :

$$f_m = 0,1 \text{ Hz}$$

$$N_q = 256$$

$$b = 2$$

$$(DM)_b = \frac{b}{\sqrt{N_q}} \cdot \frac{2}{\pi} = 0,0796$$

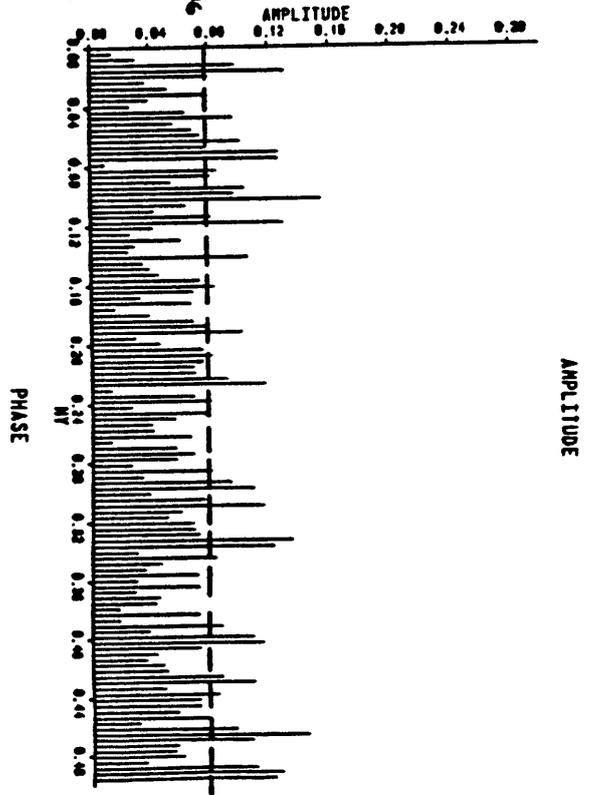
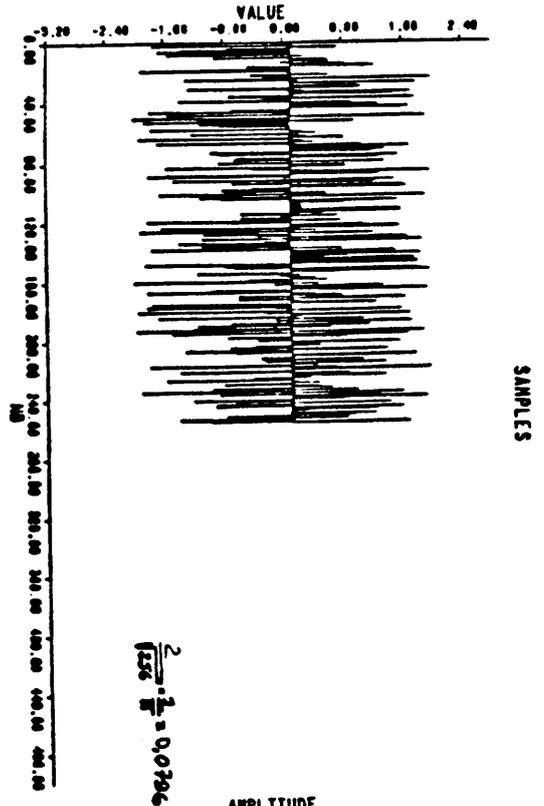
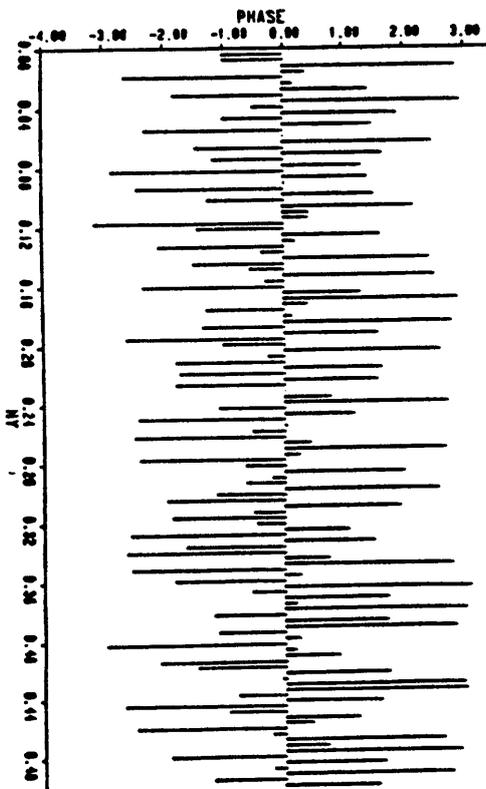


Fig. 6

Analyse du bruit

porteuse sinus  
 modulation d'amplitude  $\cos \pi f_m$   
 $f_m = 0,1 \text{ Hz}$

$N_q = 128$

$b = 2$

$(HM)_b = \frac{b}{\sqrt{N_q}} = \frac{2}{\sqrt{128}} = \frac{2}{11,3} = 0,177$

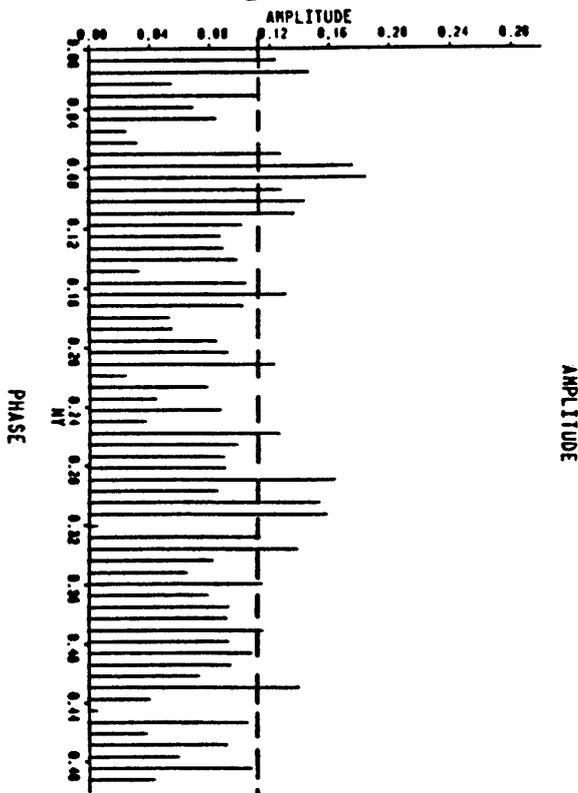
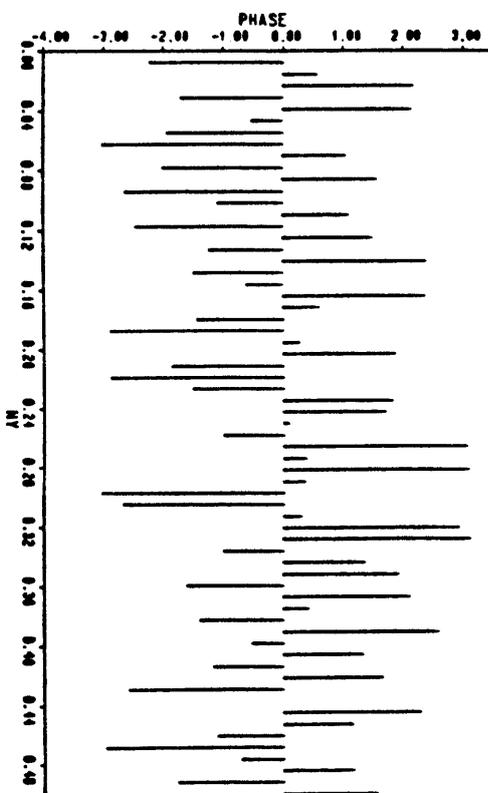
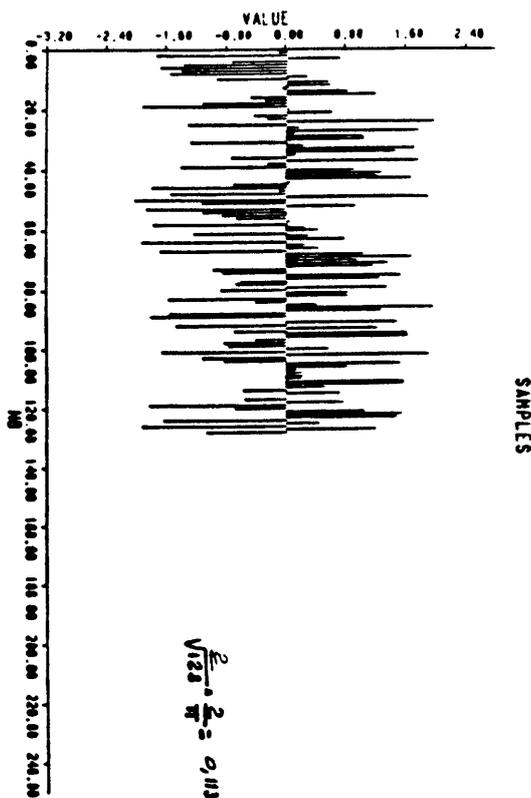


Fig. 7

Analyse du bruit

porteuse sinus  
 modulation d'amplitude  $\cos 2\pi f_m$   
 $f_m = 0,1 \text{ Hz}$

$$N_9 = 256$$

$$b = 1$$

$$(dM)_b = \frac{b}{\sqrt{N_9}} \times \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{256}} \times \frac{2}{\pi} = 0,0398$$

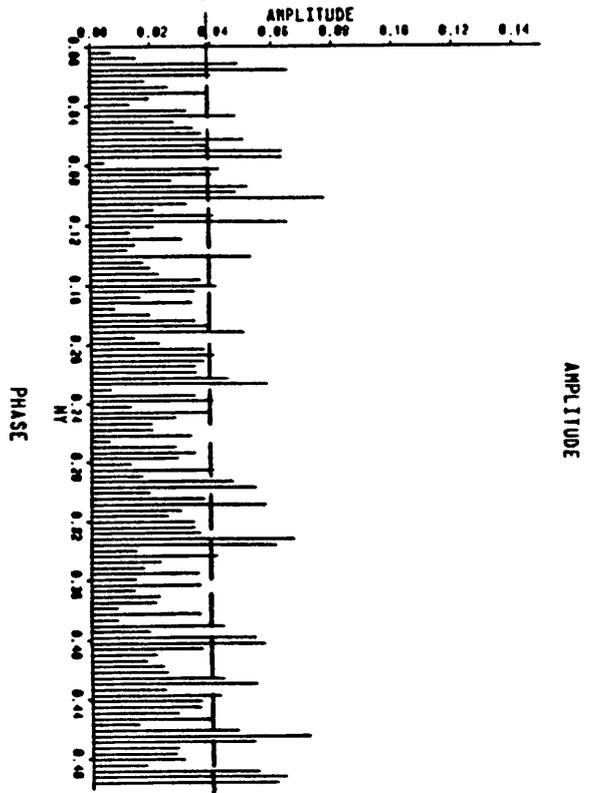
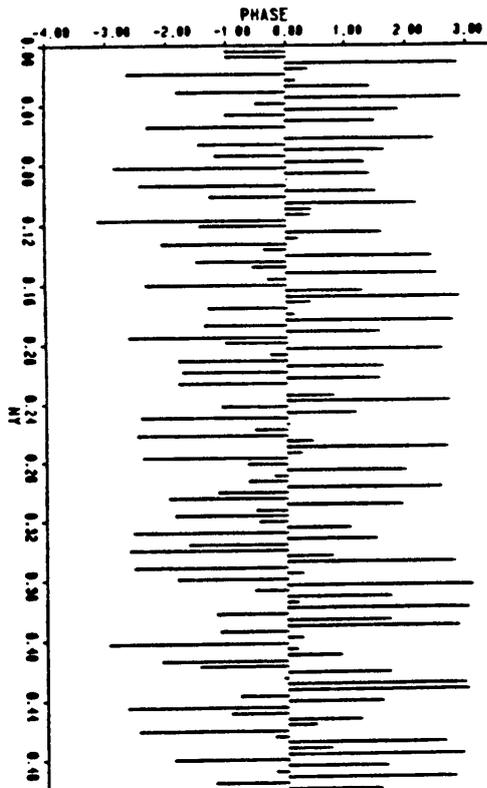
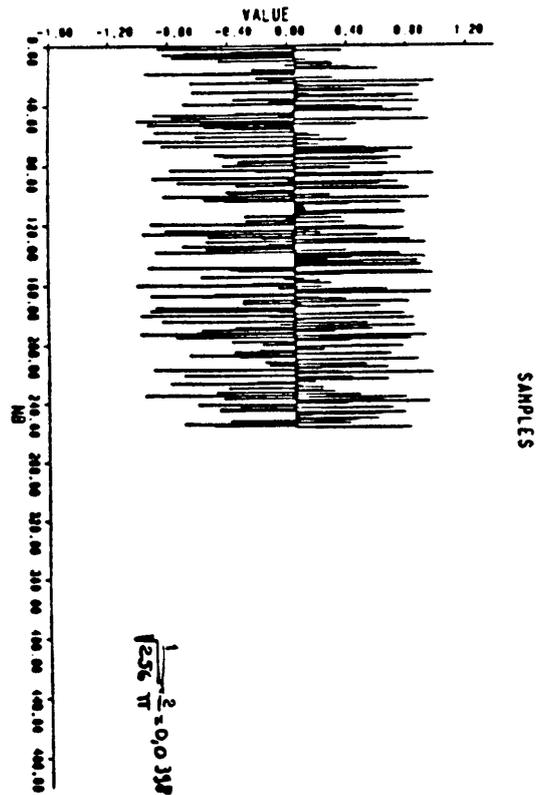


fig. 8

Analyse du bruit

fenêtre sinus  
modulation d'amplitude  $\cos 2\pi f_m$

$$f_m = 0,1 \text{ Hz}$$

$$N_g = 128$$

$$b = 1$$

$$(dH)_b = \frac{b}{\sqrt{N_g}} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{128}} \cdot \frac{2}{\pi} = 0,0563$$

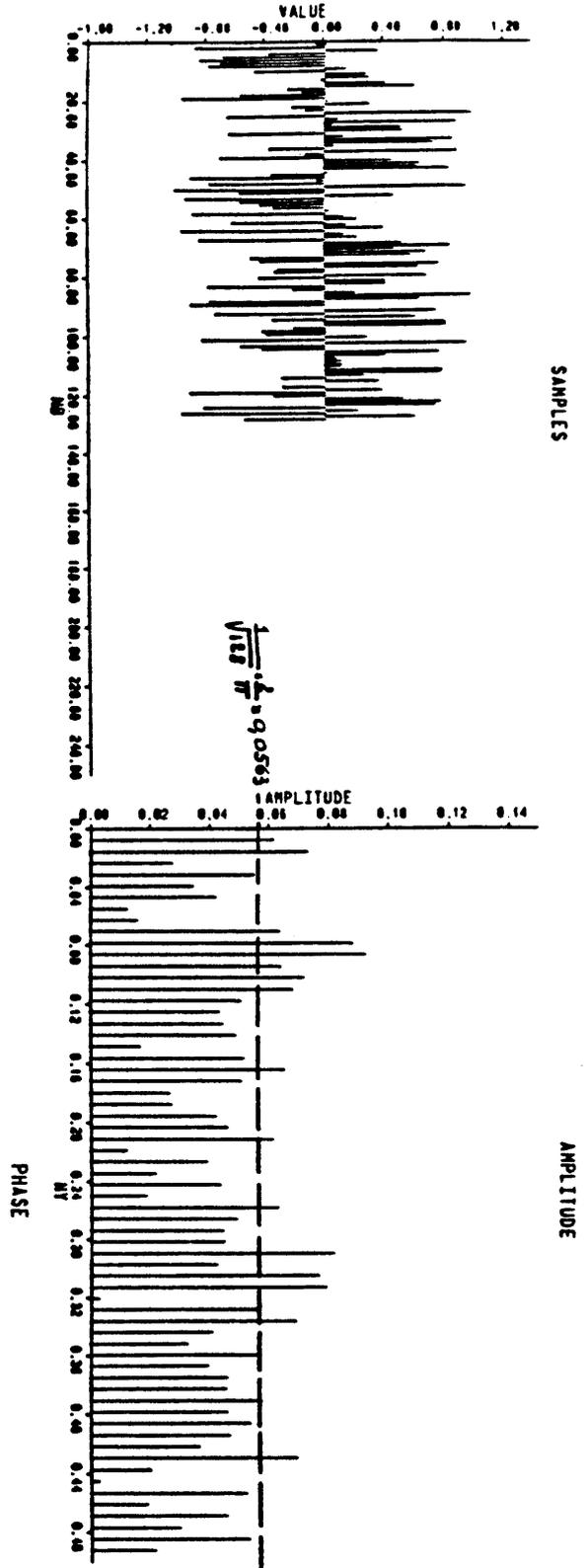
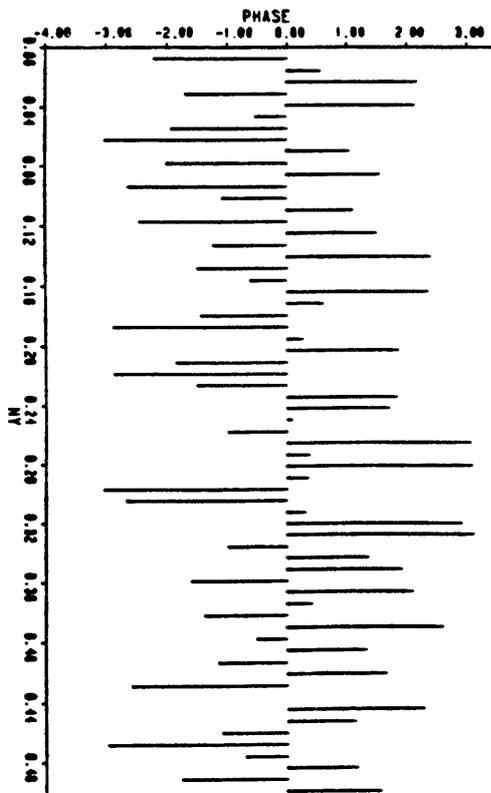


Fig. 9

### Analyse du bruit

fenêtre sinus  
modulation d'amplitude  $\cos 2\pi f_m t$

$$f_m = 0,1 \text{ Hz}$$

$$N_q = 256$$

$$b = 3$$

$$(dM)_b = \frac{b}{\sqrt{N_q}} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{3}{\sqrt{256}} \cdot \frac{2}{\pi} = 0,119$$

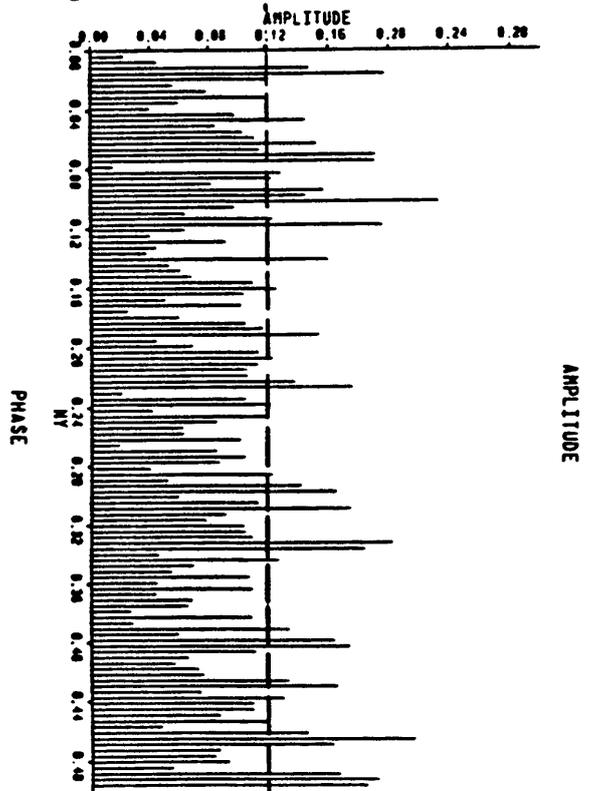
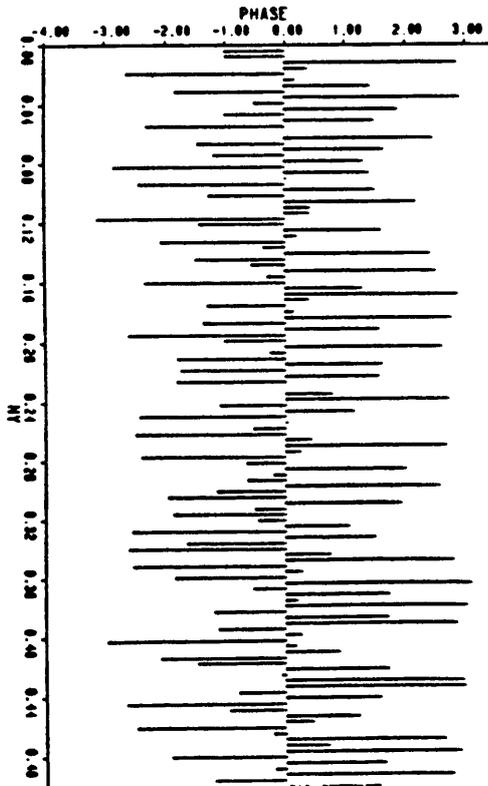
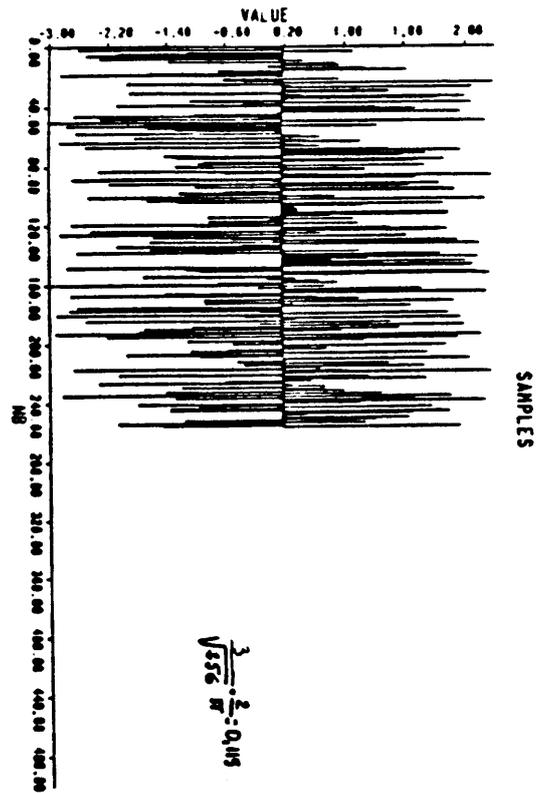


Fig. 10

### Analyse du bruit

fenêtre sinus  
modulation d'amplitude  $\cos 2\pi f_m$   
 $f_m = 0,1 \text{ Hz}$   
 $N_g = 512$   
 $b = 3$

$$(dM)_b = \frac{b}{\sqrt{N_g}} \times \frac{2}{\pi} = \frac{3}{\sqrt{512}} \cdot \frac{2}{\pi} = 0,084$$

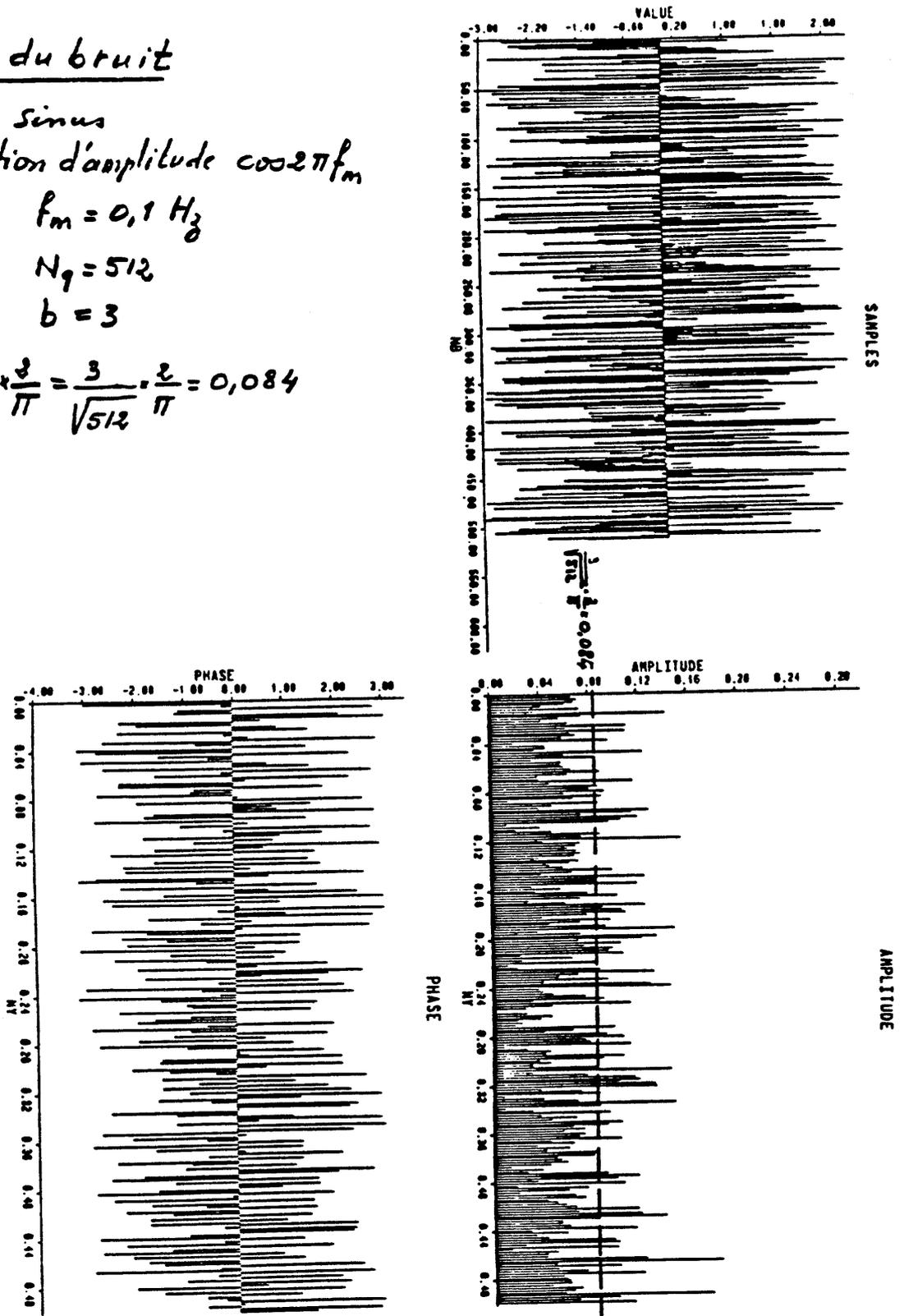


fig. 11

Si on porte  $\delta = 256$ , les autres paramètres restant inchangés, on obtient:

$$\left| (dq)_b \right|_{\max} = 6,822 \cdot 10^{-5}$$

Si on considère un taux d'amortissement nul, la quantité

$$\frac{\frac{M_q}{\delta} \times \sqrt{4\pi^2 + \left(\frac{M_q}{\delta}\right)^2}}{1 - e^{-\frac{M_q}{\delta}}} \rightarrow 2\pi \text{ lorsque } \frac{M_q}{\delta} \rightarrow 0$$

d'où

$$\left| (dq)_b \right|_{\max} = \frac{\delta}{\pi N_q \sqrt{N_q}} \times \frac{b}{M_q}$$

sans amortissement

(35)

On peut retrouver ce résultat directement en calculant  $M_{K_0}$  avec  $K_0 - K'_q = -\frac{1}{2}$ , non plus avec la relation (16) mais avec les relations (11) et (12) qui donnent:

$$M_{K_0} = M_{K_0+1} = \frac{M_q \times \underbrace{\frac{-\cos \pi (K_0 - K'_q)}{\pi [(K_0 - K'_q)^2 - \frac{1}{4}]}}_{\text{tend vers 1, lorsque } K_0 - K'_q \rightarrow -\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{1}{2} \quad \uparrow \text{ modulation}$$

$$= \frac{M_q}{4}$$

En portant cette valeur et la valeur du bruit donnée par la relation (33) dans l'expression (30), on retrouve l'expression (35).

En groupant les relations (34) et (35), on obtient:

$$\underbrace{\left| (dq)_b \right|_{\max}}_{N_q \neq 0} \quad \text{avec amortissement} \quad = \quad \underbrace{\left| (dq)_b \right|_{\max}}_{N_q = 0} \quad \text{sans amortissement} \quad \times \quad \underbrace{\frac{\frac{N_q}{\delta} \cdot \sqrt{4\pi^2 + \left(\frac{N_q}{\delta}\right)^2}}{2\pi \left(1 - e^{-\frac{N_q}{\delta}}\right)}}_{\gamma} \quad (36)$$

Pour une valeur de  $\delta$  donnée :

- l'erreur sans amortissement est une fonction décroissante de  $N_q$ ;

- le facteur  $\gamma$  est une fonction croissante de  $N_q$

$$\gamma = 1 \quad \text{pour} \quad \frac{N_q}{\delta} = 0 \quad (\text{donc pas d'amortissement})$$

La valeur de l'erreur avec amortissement, en tant que fonction de  $N_q$ , passe par un minimum ayant lieu pour une valeur de  $N_q$  d'autant plus grande que  $\delta$  est grand.

sur la figure 12, nous avons représenté la variation de l'erreur en fonction de  $N_q$  ( $\delta$  est pris comme paramètre) sous la forme normalisée :

$$\text{erreur normalisée} = \frac{\left| (dq)_b \right|_{\max}}{\frac{b}{M_q}} ;$$

il suffit de la multiplier par la valeur du rapport  $\frac{b}{\text{bruit}}$  signal pour obtenir l'erreur vraie. Pour  $\delta = \infty$ , on a la variation de l'erreur sans amortissement.

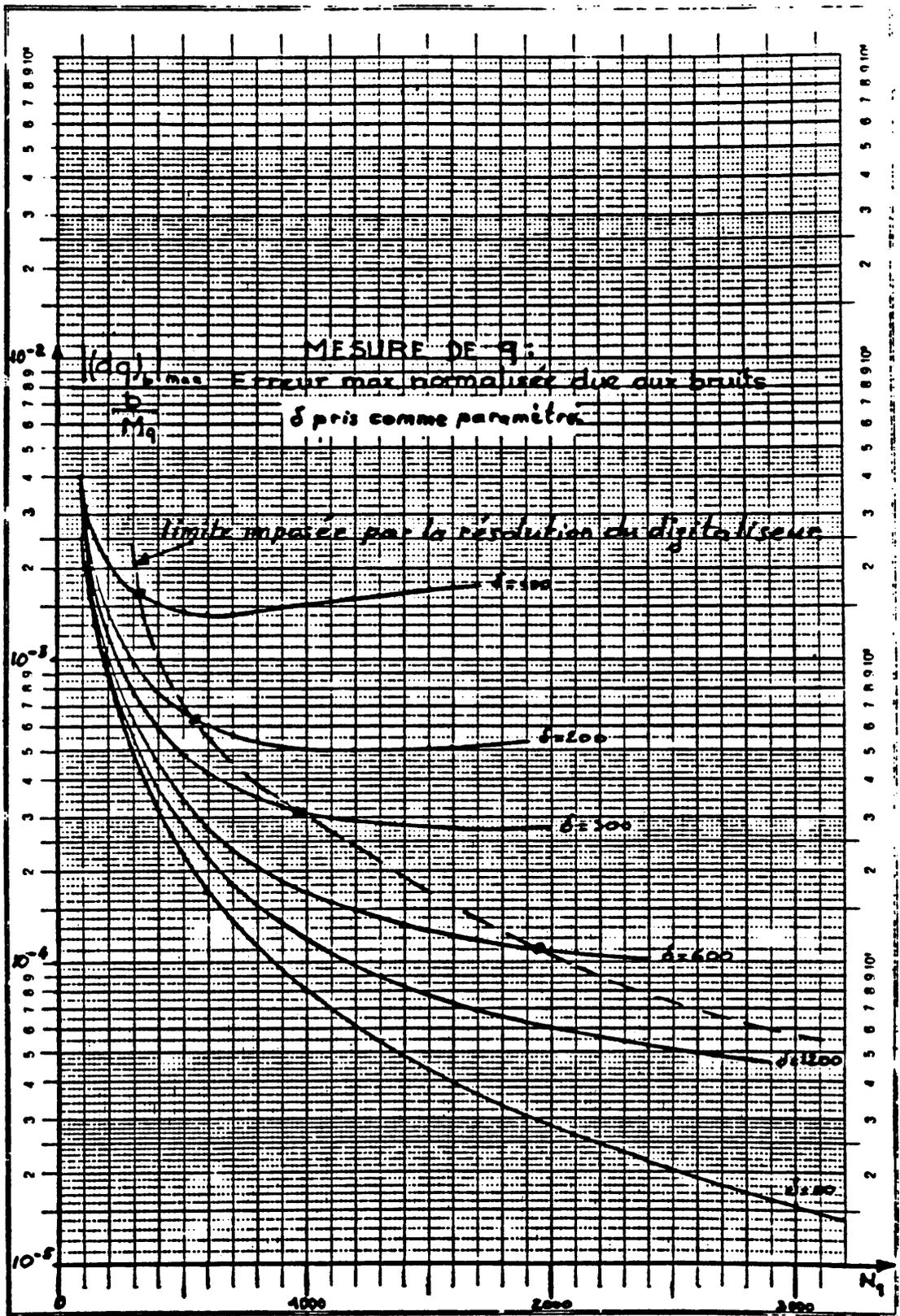


Fig. 12

Avec ce que nous avons vu, il apparaîtrait que le meil-

leur choix de  $N_q$ , pour une valeur donnée de  $\delta$ , serait de se placer au point d'erreurs minimum ou tout au moins à une valeur de  $N_q$  la plus proche possible.

On voit déjà sur la figure 12 que cela conduirait, sauf lorsque l'amortissement est très important, à des valeurs beaucoup trop grandes pour la pratique des mesures.

Par ailleurs un autre phénomène, beaucoup plus limitatif, intervient : la résolution du digitaliseur permettant la capture numérique des échantillons. Il faut en effet, pour ne pas capturer que du bruit, que (la valeur de l'orbite fermée du faisceau ayant été compensée au moment de la prise des échantillons) :

$$M_q \leq \frac{(N_q)_{\max}}{\delta} = \frac{M_q}{2^l - 1} \times m \quad (37)$$

$l$  étant le nombre de bit du convertisseur A/D;

$m$  étant le nombre minimum de LSB qu'on considère pour que l'échantillon soit valide.

On obtient alors :

$$\frac{(N_q)_{\max}}{\delta} = \ln(2^l - 1) - \ln(m)$$

soit

$$(N_q)_{\max} = \delta \times [\ln(2^l - 1) - \ln(m)] \quad (38)$$

Si, par exemple, on a:

$$\delta = 100$$

$$l = 8 \text{ bits}$$

$$m = 10 \text{ LSB}$$

} digitaliseur

$$\text{on trouve } (N_q)_{\max} = 384$$

En considérant un tel digitaliseur nous pouvons reporter sur la figure 12 les valeurs  $(N_q)_{\max}$  correspondantes aux différentes valeurs de  $\delta$ .

Remarquons que le calcul que nous venons de faire suppose que:

$$|\pm \text{"full scale"}| \text{ du digitaliseur} = M_q.$$

Dans les cas pratiques, en général,  $M_q < \text{"full scale"}$ ; la limite maximum de  $N_q$  est alors encore réduite. Nous considérons ainsi que la valeur donnée par la relation (38) est la limite maximum maximorum à ne jamais dépasser.

## 7. CHOIX DU NOMBRE D'ECHANTILLONS ET ERREURS MAXIMA ATTENDUES AVEC LES MESURES

Ce paragraphe est une application des analyses qui précèdent considérées dans le cas de LEAR. Elle pourra être faite par le lecteur pour d'autres conditions si cela est nécessaire. Rappelons qu'on utilise la fenêtre sinus.

valeurs minima du nombre d'échantillons:

Mesure de la fréquence :  $N_q \geq \frac{10}{|q_H - q_0|}$

Mesure de la phase :  $N_\phi \geq \frac{5}{|q_H - q_0|}$

Pour LEAR :  $N_q \geq 250$

$N_\phi \geq 128$

Valeurs maxima du nombre d'échantillons:

$$(N_q)_{\max} = \delta \cdot [\text{Ln}(2^l - 1) - \text{Ln}(m)]$$

Pour LEAR  $(N_q)_{\max} = \delta \times 3,24$

d'où 3 gammes dépendantes de  $\delta$

$100 \leq \delta < 200$  :  $N_q = 256$  ,  $N_\phi = 128$

$200 \leq \delta < 300$  :  $N_q = 512$  ,  $N_\phi = 256$

$\delta \geq 300$  :  $N_q = 1024$  ,  $N_\phi = 256$

\*) voir paragraphe 8

Erreurs maxima attendues avec la mesure de fréquence:

Erreur due à l'amortissement:

$|(dq)_q|_{\max} \cong 0$  avec la stratégie exposée dans le paragraphe 9.

sans la stratégie:

$$|(dq)_q|_{\max} = \frac{0,1875}{N_q} \cdot \pi^2 \cdot \left(1 + e^{-\frac{N_q}{\delta}}\right) \left[ \frac{3}{\left[\sqrt{9\pi^2 + \left(\frac{N_q}{\delta}\right)^2} + \left[\pi^2 + \left(\frac{N_q}{\delta}\right)^2\right]\right]} - \frac{1}{\pi^2 + \left(\frac{N_q}{\delta}\right)^2} \right]$$

Pour LEAR nous pratiquons la stratégie du paragraphe 9.

Erreur due aux bruits

$$\left| (dq)_b \right|_{\max} = \frac{4}{\pi^2 \cdot N_q \cdot \sqrt{N_q}} \cdot \frac{\frac{N_q}{\delta} \sqrt{4\pi^2 + \left(\frac{N_q}{\delta}\right)^2}}{1 - e^{-\frac{N_q}{\delta}}} \times \frac{b}{M_q}$$

$b$  = amplitude maximum du bruit,

$M_q$  = amplitude initiale de l'oscillation

Pour LEAR (en erreur normalisée) :

$$\left. \begin{array}{l} 100 \leq \delta < 200 \\ N_q = 256 \end{array} \right\} 1,86 \cdot 10^{-3} \geq \frac{\left| (dq)_b \right|_{\max}}{b/M_q} > 1,12 \cdot 10^{-3}$$

$$\left. \begin{array}{l} 200 \leq \delta < 300 \\ N_q = 512 \end{array} \right\} 6,58 \cdot 10^{-4} \geq \frac{\left| (dq)_b \right|_{\max}}{b/M_q} > 4,74 \cdot 10^{-4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta \geq 300 \\ N_q = 1024 \end{array} \right\} \frac{\left| (dq)_b \right|_{\max}}{b/M_q} \leq 3,12 \cdot 10^{-4}$$

Erreurs maxima attendues avec la mesure de la phase :

On suppose la mesure de fréquence sans erreur due à l'amortissement, donc en ne considérant que l'erreur due aux bruits.

$$\left| (d\phi_q)_b \right|_{\max} \approx \pi \cdot N_\phi \times \left| (dq)_b \right|_{\max}$$

En erreur normalisée on a :

$$\frac{|(d\phi_q)_b|_{\max}}{\frac{b}{N_q}} \approx \frac{4 N_\phi}{\pi \cdot N_q \sqrt{N_q}} \times \frac{\frac{N_q}{\delta} \sqrt{4\pi^2 + \left(\frac{N_q}{\delta}\right)^2}}{1 - e^{-\frac{N_q}{\delta}}}$$

Pour LEAR on obtient (en erreur normalisée) :

$$\left. \begin{array}{l} 100 \leq \delta < 200 \\ N_q = 256, N_\phi = 128 \end{array} \right\} 0,749 \text{ rad.} \geq \frac{|(d\phi_q)_b|_{\max}}{b/N_q} > 0,452 \text{ rad.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 200 \leq \delta < 300 \\ N_q = 512, N_\phi = 256 \end{array} \right\} 0,529 \text{ rad.} \geq \frac{|(d\phi_q)_b|_{\max}}{b/N_q} > 0,381 \text{ rad.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta \geq 300 \\ N_q = 1024, N_\phi = 256 \end{array} \right\} \frac{|(d\phi_q)_b|_{\max}}{b/N_q} \leq 0,251 \text{ rad.}$$

## 8 - MESURE DE $\delta$ : METHODE DE LA FFT GLISSANTE

Nous avons vu que le choix de  $N_q$  et  $N_\phi$  dépend de l'ordre de grandeur du facteur d'amortissement  $\delta$  qui a été considéré avec 3 gammes d'appartenance.

Si on acquiert un total de  $N$  échantillons correspondant à la valeur maximum (pour LEAR,  $N = 1024$ ), on peut montrer<sup>4)</sup> qu'en utilisant une FFT "glissante" de  $\Delta N$  échantillons on peut estimer  $\delta$  avec une précision suffisante. En effet, soit :

•  $M_1$  le module de la raie qu'on mesure, obtenue avec une FFT de  $\Delta N$  échantillons pris de  $n=0$  à  $n=\Delta N-1$ ;

•  $M_2$  le module de la raie qu'on mesure, obtenue avec une FFT de  $\Delta N$  échantillons pris de  $n=n_1$  à  $n=n_1+(\Delta N-1)$ .

On aura :

$$\frac{M_2}{M_1} = e^{-\frac{n_1}{\delta}} \quad (39)$$

d'où

$$\delta = \frac{n_1}{\ln \frac{M_1}{M_2}} \quad (40)$$

Pour la mesure de  $\delta$ , les FFT sont pratiquées avec la fenêtre rectangulaire <sup>2) 4)</sup> dont le spectre est plus sensible au taux d'amortissement  $\frac{N}{\delta}$  que celui de la fenêtre sinus.

Il faut déterminer les valeurs  $\Delta N$  du nombre d'échantillons et  $n_1$  du pas de glissement.

choix de  $\Delta N$  et de  $n_1$  :

On fait intervenir les considérations suivantes :

- le bruit  $b$  provoque une erreur  $dM \approx \frac{b}{\sqrt{\Delta N}}$ .

- le module minimum de  $M_1$  a lieu pour  $K'_q - K_0 = 0.5$

$$M_1 \geq M_q \times \frac{1 + e^{-\frac{\Delta N}{\delta}}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta N}{\delta}\right)^2 + \pi^2}} \quad (\text{avec la fenêtre rectangulaire})$$

- le module minimum de  $M_2$  est, dans les mêmes conditions :

$$M_2 \geq M_0 \times e^{-\frac{n_1}{\delta}} \times \frac{1 + e^{-\frac{\Delta N}{\delta}}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta N}{\delta}\right)^2 + \pi^2}} \quad (\text{avec la fen\^etre rechauffaire})$$

On voudra donc avoir  $dH \ll (M_2)_{\min}$ . On fixera par exemple :

$$dH \leq \frac{1}{10} (M_2)_{\min}$$

d'o\^u

$$\frac{b}{\Delta N} \leq \frac{1}{10} \times M_0 \cdot e^{-\frac{n_1}{\delta}} \times \frac{1 + e^{-\frac{\Delta N}{\delta}}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta N}{\delta}\right)^2 + \pi^2}}$$

$$\frac{b}{M_0} \leq \frac{1}{10} \times \sqrt{\Delta N} \times e^{-\frac{n_1}{\delta}} \times \frac{1 + e^{-\frac{\Delta N}{\delta}}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta N}{\delta}\right)^2 + \pi^2}} \quad (41)$$

Autres consid\^erations :

Il est n\^ecessaire de choisir le pas de glissement  $n_1$  tel que le r\^esultat de la mesure donne un rapport  $\frac{M_1}{M_2}$  suffisamment \^eloign\^e de 1 et de 0. Fixons

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)_{\max} \approx 0,75 \rightarrow \left(\frac{M_1}{M_2}\right)_{\min} = \frac{4}{3} = 1,333$$

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)_{\min} \approx 0,25 \rightarrow \left(\frac{M_1}{M_2}\right)_{\max} = 4$$

Avec la relation (39) on aura donc :

$$(\delta)_{\min} = \frac{n_1}{\text{Ln}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)_{\max}} = \frac{n_1}{\text{Ln}4} = 0,72 \cdot n_1$$

$$(\delta)_{\max} = \frac{n_1}{\text{Ln}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)_{\min}} = \frac{n_1}{\text{Ln}\left(\frac{4}{3}\right)} = 3,47 \cdot n_1$$

En choisissant une valeur  $n_1 \approx \frac{(\delta)_{\min}}{0,72}$  on pourra mesurer  $\delta$  de  $(\delta)_{\min}$  à  $\frac{3,47}{0,72}(\delta)_{\min} = 4,81(\delta)_{\min}$ .

Dans le cas de LEAR :

$$(\delta)_{\min} \approx 100$$

$$\text{d'où } n_1 \approx \frac{100}{0,72} = 139$$

pour mesurer  $\delta$  dans la gamme :

$$100 \leq \delta \leq 481$$

Ce qui doit nous permettre de choisir la gamme de la façon suivante. La relation (39) donne

$$\frac{M_2}{M_1} = e^{-\frac{139}{\delta}}$$

$$\text{pour } \delta \leq 200$$

$$\frac{M_2}{M_1} \leq e^{-\frac{139}{200}} = 0,5$$

$$\text{pour } \delta \leq 300$$

$$\frac{M_2}{M_1} \leq e^{-\frac{139}{300}} = 0,63$$

d'où :

$$\text{Gamme 1 : } N_g = 256, N_\phi = 128 \text{ si : } \frac{M_2}{M_1} < 0,5$$

$$\text{Gamme 2 : } N_g = 512, N_\phi = 256 \text{ si : } 0,5 \leq \frac{M_2}{M_1} < 0,63$$

$$\text{Gamme 3 : } N_g = 1024, N_\phi = 256 \text{ si : } \frac{M_2}{M_1} \geq 0,63$$

Reprenons maintenant la relation (41) pour calculer le nombre d'échantillons  $\Delta N$  le plus favorable, c'est à dire permettant de tolérer le maximum de bruit.

Nous reprenons la relation (41) en introduisant  $n_1$  calculé :

$$\frac{b}{M_g} \leq \frac{1}{10} \times \sqrt{\Delta N} \times \underbrace{e^{-\frac{139}{\delta}} \times \frac{1 + e^{-\frac{\Delta N}{\delta}}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta N}{\delta}\right)^2 + \pi^2}}}_{A} \quad (42)$$

le terme A est, pour une valeur donnée de  $\Delta N$ , minimum pour  $\delta = \delta_{min} = 100$ . On devra donc avoir :

$$\frac{b}{M_g} \leq \frac{1}{10} \sqrt{\Delta N} \times \underbrace{e^{-\frac{139}{100}} \times \frac{1 + e^{-\frac{\Delta N}{100}}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta N}{100}\right)^2 + \pi^2}}}_{f(\Delta N)}$$

Le cas le plus favorable, c'est à dire permettant de tolérer le bruit maximum, sera la valeur minimum de  $\Delta N$  rendant la fonction  $f(\Delta N)$  maximum.

La variation  $f(\Delta N)$  est représentée sur la figure 13. On voit directement que le choix de  $\Delta N$  est :

$$\Delta N = 128$$

Si nous portons cette valeur dans la relation (42) nous obtenons la valeur maximum du rapport  $\frac{b}{M_g}$  tolérable pour une faïe la mesure de  $\delta$  par la méthode de la FFT glissante

$$\left(\frac{b}{M_g}\right)_{max} = \frac{\sqrt{128}}{10} \times e^{-\frac{139}{\delta}} \times \frac{1 + e^{-\frac{128}{\delta}}}{\sqrt{\left(\frac{128}{\delta}\right)^2 + \pi^2}} \quad (43)$$

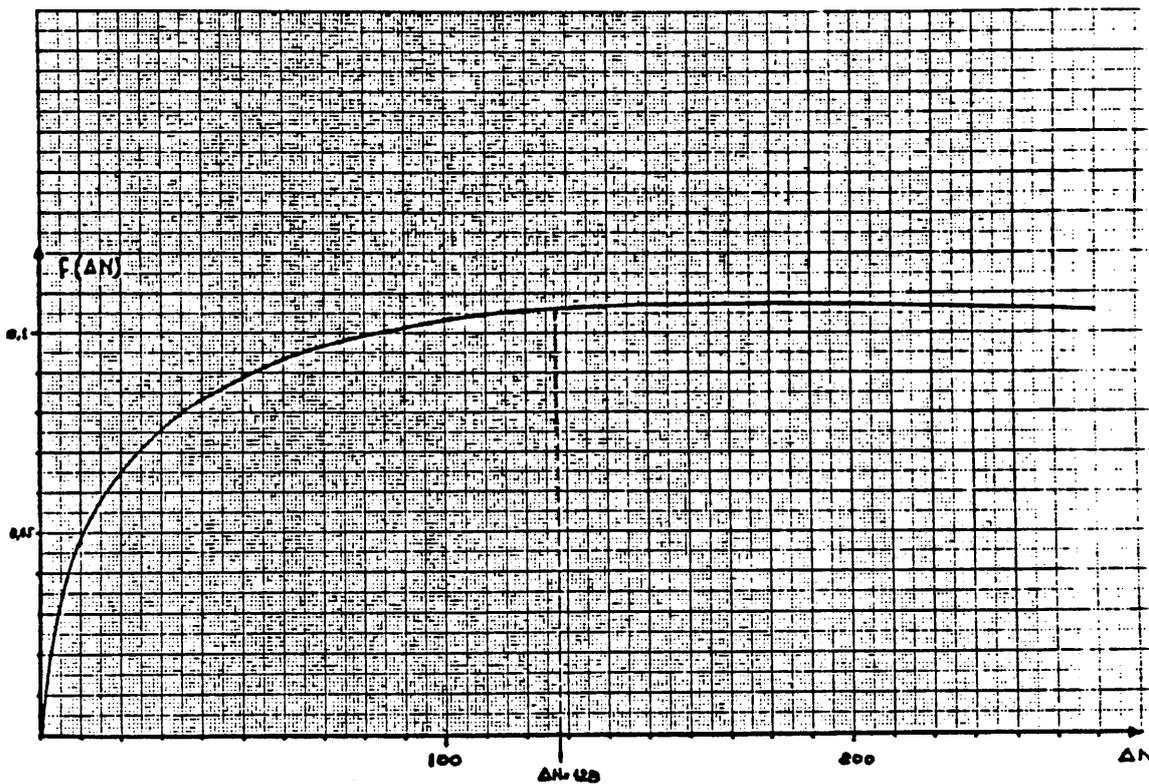


fig. 13

A la figure 14 est représentée la fonction  $(\frac{b}{M_q})_{max} = f(\delta)$

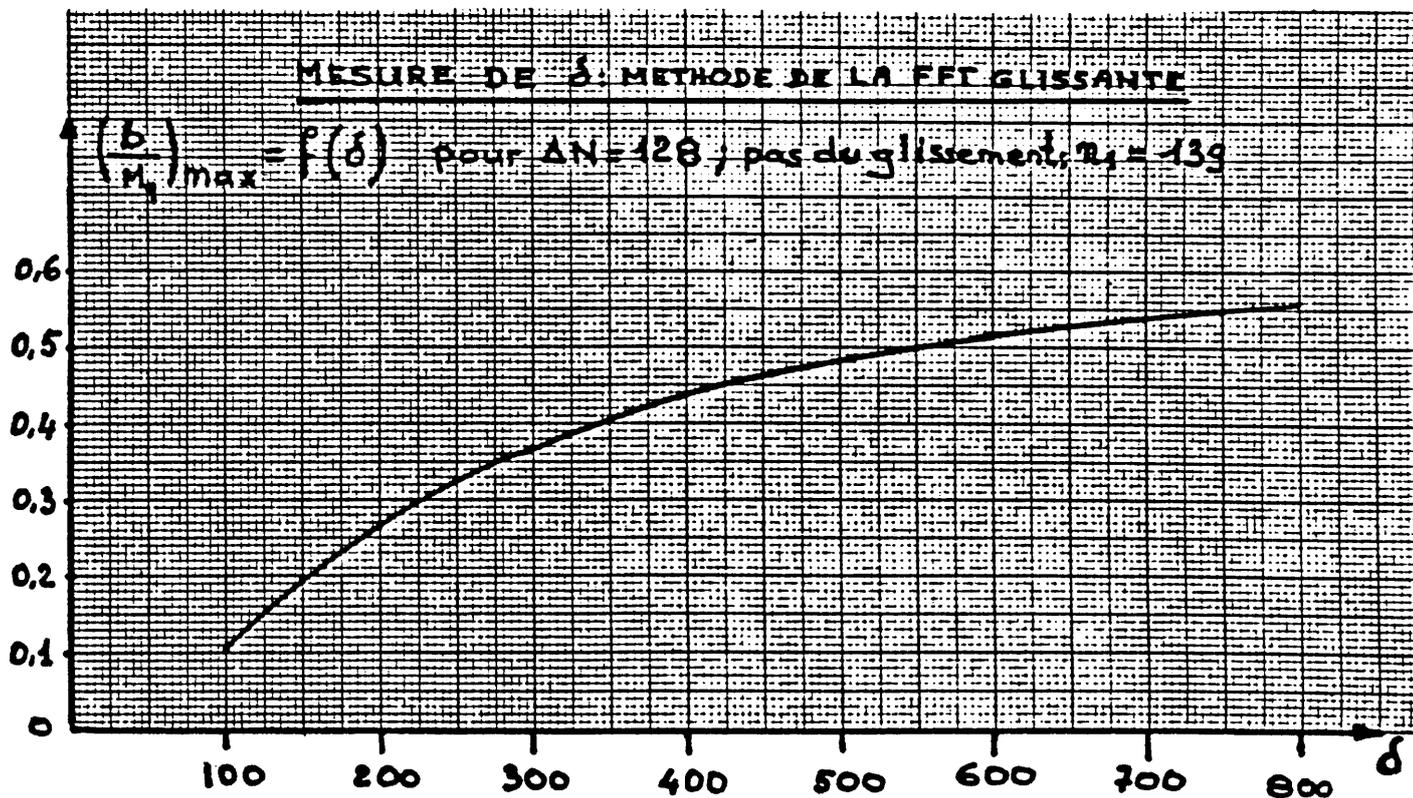


fig. 14

Exemple d'estimation du facteur  $\delta$ :

La simulation effectuée correspond à la réalité d'un cas extrême:

$$q_H = 0,2519531 \quad M_H = 10 \quad \delta_H = 250$$

Couplage très rapproché de  $q_H$ :

$$q_V = 0,2670898 \quad M_V = 3 \quad \delta_V = 250$$

bruit très important:

$$b = 3 \quad \frac{b}{M_H} = 0,30$$

Résultats:

• fig. 15 : prise de 1024 échantillons

• fig. 16 : FFT de  $\Delta N_{éch} = 128$  de  $n = 0$  à  $n = 127$

$$M_1 = 7,1378701317$$

#	reelle	imag.	phase	module
0	E.162272F868	E.0000000000	E.0000000000	E.162272F868
1	-C.F462293260	E.1435674848	1.8823162F12	E.15C8269647
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
31	-E.7727965797	1.578F22F914	2.F2619F251F	1.757F2F2555
32	-1.1712738133	7.F411155133	1.7356347F32	7.13787F1317 ← $M_1$
33	1.2F67614492	-2.2423367339	-1.F77F79F263	2.5464301445
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

• fig. 17 : FFT de  $\Delta N_{éch} = 128$  de  $n = n_1 = 139$  à  $n = n_1 + 127$

$$M_2 = 4,1008401221$$

#	reelle	imag.	phase	module
0	E.15F8919653	E.0000000000	E.0000000000	E.15F8919653
1	-E.85758F3853	E.1417924996	1.95654F8E19	E.153F379487
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
31	-E.5074101008	E.962246F785	2.F4762F9283	1.1F500427E3
32	-E.6875379360	4.F427937486	1.7392497F96	4.1F00F1221 ← $M_2$
33	E.7616712928	-1.401F39F991	-1.F7284341E1	1.594695493F
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\frac{M_2}{M_1} = 0,574518736 \quad \text{donc gamme 2: } 200 \leq \delta < 300$$

$$\text{mesure de } \delta = \frac{n_1}{L_n \frac{M_1}{M_2}} = 250,80$$

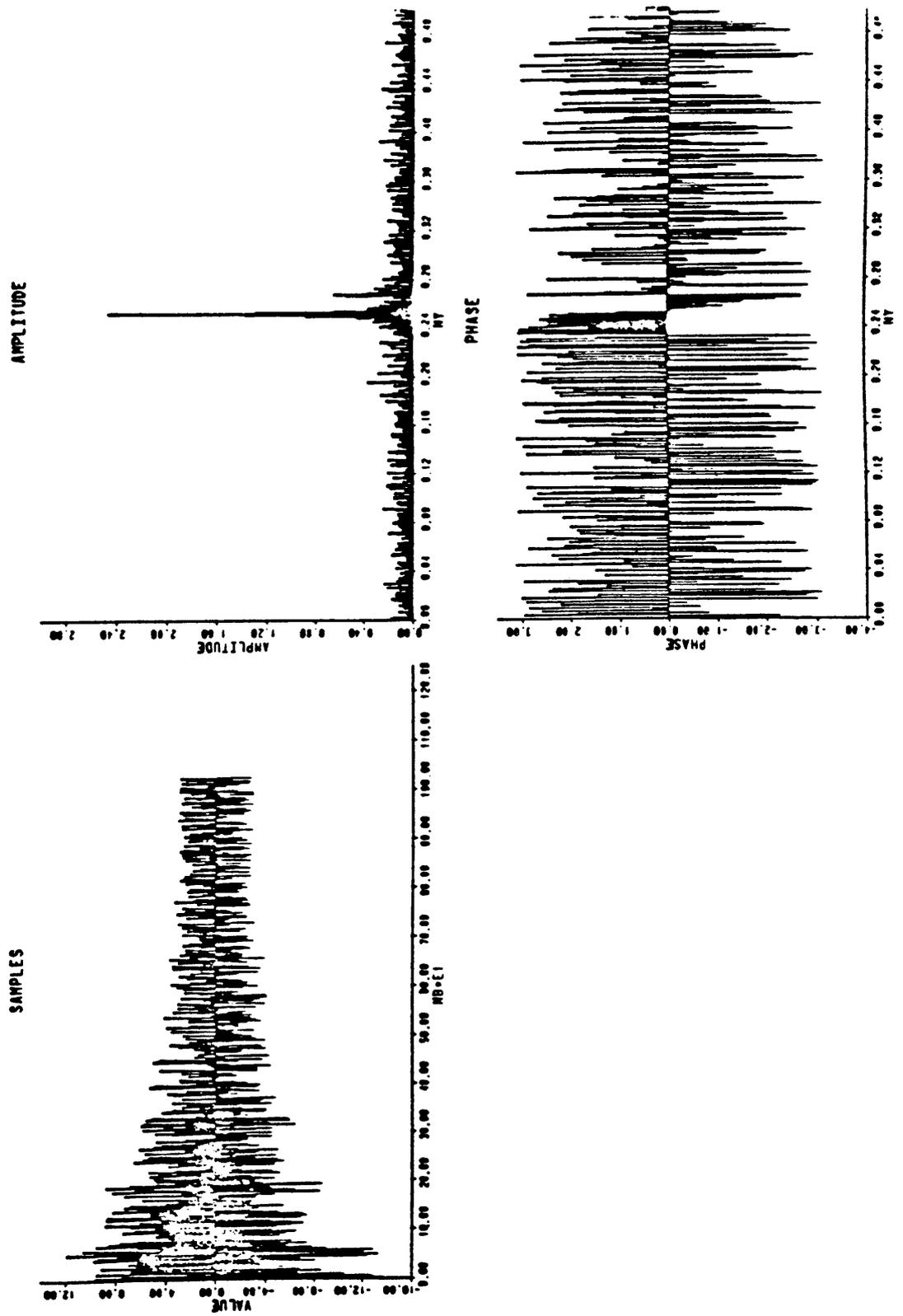


Fig. 15

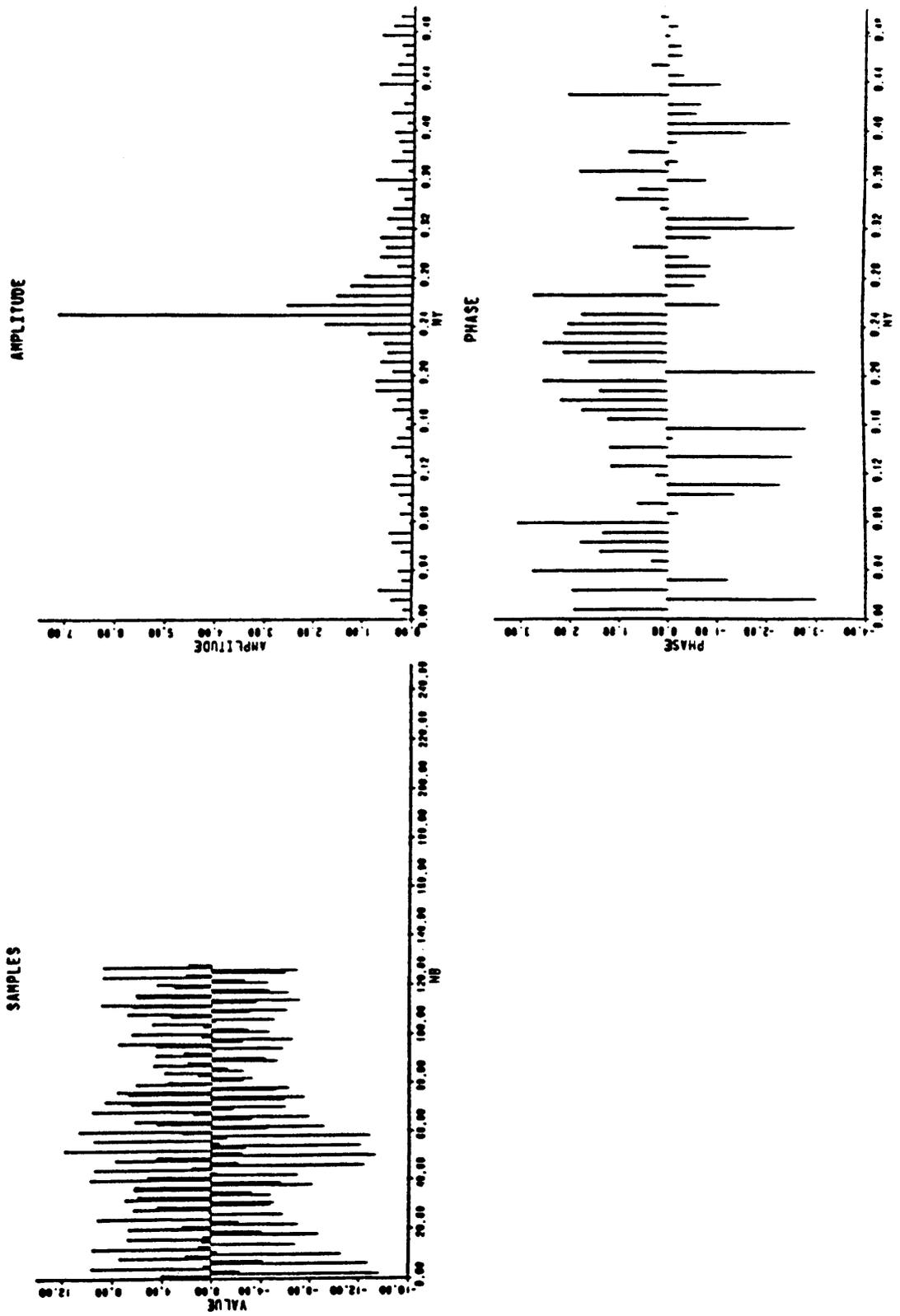


Fig. 16

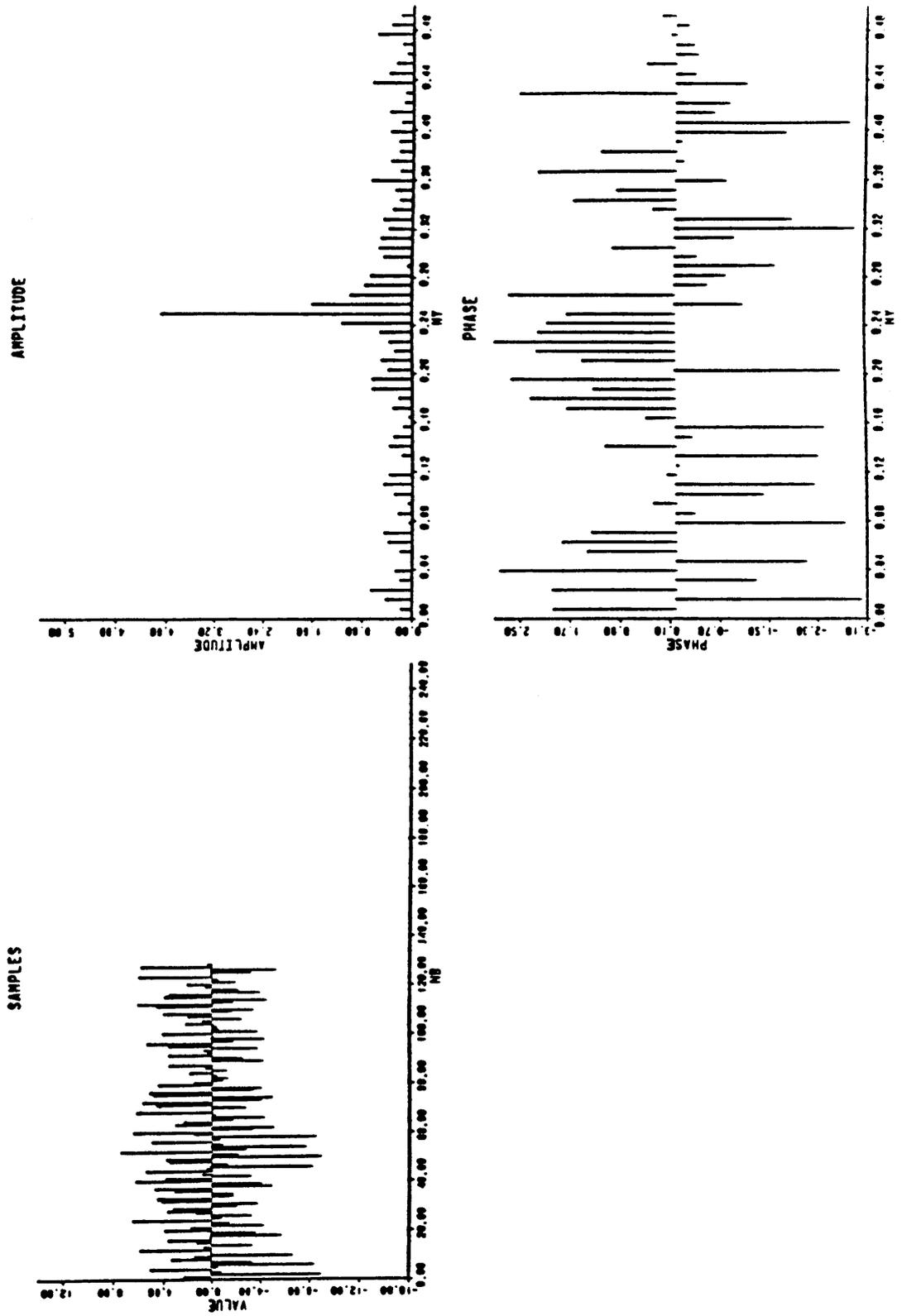


Fig. 17

Remarque :

Les valeurs du nombre d'échantillons  $\Delta N$  et du pas de glissement  $n_1$  ont été établies pour mesurer correctement les valeurs de  $\delta$  comprises entre les limites nécessaires pour choisir  $N_q$  et  $N_\phi$  pour la mesure de fréquence et de phase; donc pour évaluer la gamme de la mesure.

On pourrait évidemment utiliser la méthode de la DFT glissante pour mesurer le facteur d'amortissement  $\delta$  et à sa suite le module  $M_q$  et la dispersion  $\Delta q$ . Cela conduirait, si l'amortissement est peu important ( $\delta$  grand par exemple  $\delta \geq 1000$ ), à poursuivre la stratégie décrite jusqu'à ce que  $\delta$  tombe dans la gamme correcte repérée par :

$$0,5 \leq \frac{M_2}{M_1} < 0,63$$

Cette méthode a été étudiée<sup>4)</sup>, cependant on lui préférera une méthode plus rapide<sup>4)</sup> utilisant la modulation d'amplitude pour transférer la fréquence sur une valeur entière  $\frac{K_f}{N}$ . L'avantage de la méthode de la DFT glissante est qu'il n'est pas nécessaire de mesurer au préalable, la valeur de la fréquence. C'est d'ailleurs pour cette raison que nous l'avons utilisée pour rechercher la gamme correcte (choix de  $N_q$  et  $N_\phi$ ) pour la mesure de  $q$  et  $\phi_q$ .

### 9. ALGORITHME ITERATIF SUPPRIMANT L'ERREUR DUE A L'AMORTISSEMENT.

• Nous avons vu avec la relation (3) que la mesure  $q_m$  de la valeur vraie  $q$  à partir de l'interpolation analytique était entachée par deux types d'erreurs:

$$q_m = q + (dq)_a + (dq)_r \quad (44)$$

• Nous avons dit aussi que, dans les conditions de mesure (choix de  $N_q$ ), on pouvait admettre que :

$$(dq)_r \approx (dq)_b \quad (\text{uniquement due au bruit})$$

avec la remarque suivante :

$(dq)_b$  pour une valeur donnée de  $N_q$  et  $\delta$ , est pratiquement indépendant de la modulation d'amplitude

• Concernant  $(dq)_a$ , nous avons obtenu sur la figure 4 la variation de  $(dq)_a$  en fonction de l'écart  $\kappa_0 - \kappa'_q$ . Nous rappelons que :

$$q = \frac{\kappa'_q}{N_q} \quad \text{avec} \quad \kappa_0 \leq \kappa'_q < \kappa_0 + 1 \quad (\kappa_0 \text{ est un entier})$$

Si on assimile la variation à une droite telle que sur la figure 18, on peut écrire que, due à l'amortissement, l'interpolation analytique sur les résultats d'une DFT de  $N_q$  échantillons pratiquée avec la fenêtre sinus, donne l'erreur normalisée :

$$N_q \cdot (dq)_a = N_q \cdot |(dq)_a|_{\max} \times [1 - 2(K'_q - K_q)] \quad (45)$$

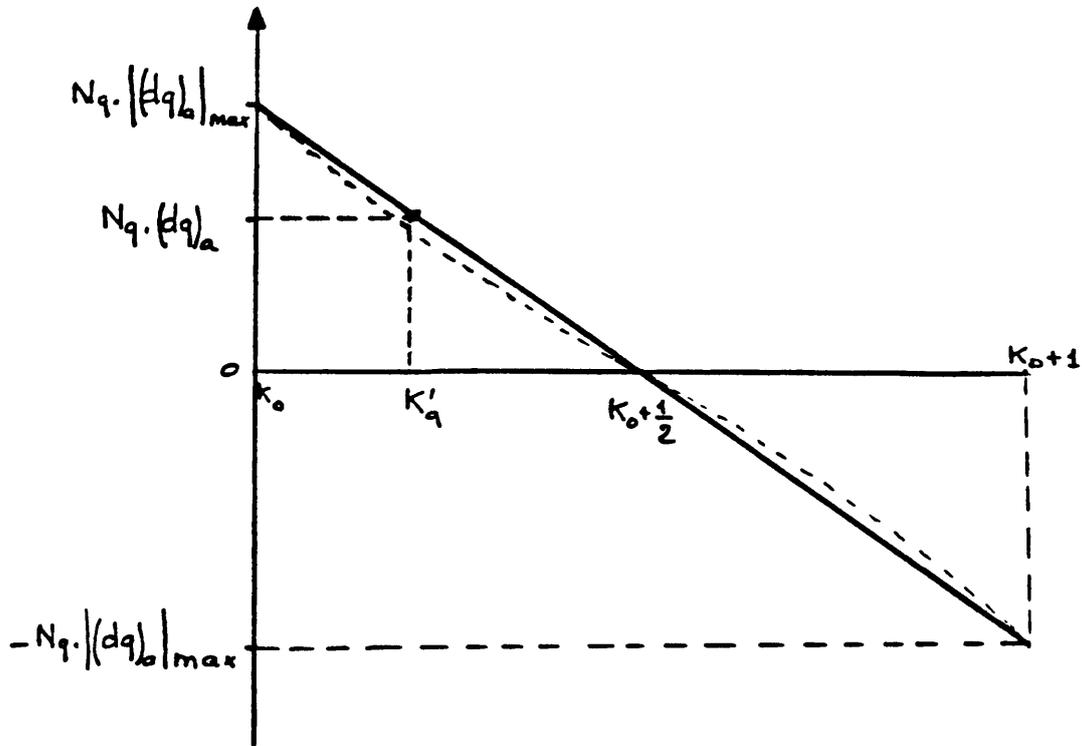


Fig. 10

On écrira l'expression (45) de l'axe normalisée sous la forme :

$$N_q \cdot (dq)_a = 2 N_q |(dq)_a|_{\max} \times [0,5 + K_0 - K'_q] \quad (46)$$

Pour faciliter l'écriture dans ce qui va suivre nous allons désigner plus simplement :

$$N_q \cdot (dq)_a = dA \cdot [0,5 + K_0 - K'_q] \quad (47)$$

$$\text{avec } dA = 2 N_q |(dq)_a|_{\max} \quad (48)$$

en rappelant que  $N_q |(dq)_a|_{\max}$  est donné par la relation (24) ou la fig. 5.

De même  $|(dq)_b|_{\max}$  donnée par la relation (34), sera désignée par :

$$|(dq)_b|_{\max} = dB. \quad (49)$$

Considérons maintenant la procédure ci après :

Etape 0 : détermination de  $N_q$

- Détermination de la gamme (choix de  $N_q$ ) par la méthode de la FFT glissante (avec fenêtre rectangulaire) avec  $\Delta N$  échantillons et un pas de glissement  $n_1$  (Pour LEAR  $\Delta N = 128$  et  $n_1 = 139$ ).

• dans ce qui suit, sauf spécification contraire, on considérera toujours la fenêtre sinus.

Etape 1 : mesure de  $q$

- FFT de  $N_q$  échantillons + interpolation analytique.

On obtient la 1<sup>re</sup> mesure  $(q_m)_1$  de  $q$  :

$$(q_m)_1 = q + \frac{dA}{N_q} (0,5 + \kappa_0 - \kappa'_1) + (dq_1)_b$$

$$\left. \begin{aligned} \boxed{(q_m)_1 = q + (dq_1)_a + (dq_1)_b} \\ \text{avec : } |(dq_1)_b| \leq dB \text{ et } |(dq_1)_a| \leq \frac{dA}{2} \end{aligned} \right\} (50)$$

Etape 2 : première itération.

- Transposition de la mesure  $(q_m)_1$  supposed être la fréquence vraie sur une valeur  $\frac{\kappa_T + 0,5}{N_q}$  en multipliant les

$N_q$  échantillons, via à travers la fenêtre sinus, par une modulation d'amplitude  $\cos 2\pi f_2$ . Le choix de  $K_T$  est obtenu par une méthode similaire à celle déjà traitée pour la mesure de la phase<sup>3)</sup>. Supposons  $\frac{K_T}{N_q} > q$ ; la fréquence de modulation  $f_2$  est alors :

$$f_2 = \frac{K_T + 0,5}{N_q} - (q_m)_a \quad (51)$$

La modulation introduit les deux composantes vraies de fréquence  $q + f_2$  et  $q - f_2$ . Considérons la composante :

$$Q_{2i} = q + f_2 \quad (52)$$

Avec les relations (50) et (51) elle s'écrit :

$$Q_2 = q + \frac{K_T + 0,5}{N_q} - q - (dq_1)_a - (dq_1)_b$$

$$Q_2 = \frac{1}{N_q} \left[ K_T + 0,5 - N_q \left[ (dq_1)_a + (dq_1)_b \right] \right] = \frac{K'_{Q_2}}{N_q} \quad (53)$$

- Une DFT faite pour les raies  $K_T$  et  $K_T + 1$  avec interpolation analytique donne la mesure de  $Q_2$  :

$$(Q_m)_2 = Q_2 + \frac{dA}{N_q} \left[ K_T + 0,5 - K'_{Q_2} \right] + (dq_2)_b \quad (54)$$

Etant donné qu'on considère que la modulation d'amplitude ne change pratiquement pas les erreurs dues aux bruits, on admet :

$$(dq_2)_b = (dq_1)_b \quad (55)$$

Entre les relations (53), (54) et (55) on obtient:

$$(Q_m)_2 = Q_2 + dA [(dq_1)_a + (dq_1)_b] + (dq_1)_b$$

- on obtient la 2<sup>ème</sup> mesure  $(q_m)_2$  de  $q$  :

$$(q_m)_2 = (Q_m)_2 - f_2 = Q_2 - f_2 + dA [(dq_1)_a + (dq_1)_b] + (dq_1)_b$$

Avec la relation (52) on a alors:

$$\boxed{(q_m)_2 = q + dA [(dq_1)_a + (dq_1)_b] + (dq_1)_b} \quad (56)$$

Etape 3: deuxième itération.

On répète les opérations de l'étape 2 mais en prenant la mesure  $(q_m)_2$  comme valeur supposée vraie. On aura avec la modulation:  $f_3 = \frac{\kappa_T + 0,5}{N_q}$ , la composante vraie:

$$Q_3 = q + f_3 = \frac{\kappa_T + 0,5}{N_q} - dA [(dq_1)_a + (dq_1)_b] - (dq_1)_b$$

$$Q_3 = \frac{1}{N_q} \left[ \underbrace{\kappa_T + 0,5 - N_q \cdot dA [(dq_1)_a + (dq_1)_b] - N_q (dq_1)_b}_{\kappa'_{Q_3}} \right]$$

d'où la mesure  $(Q_m)_3$  obtenue d'une DFT faite pour les raies  $\kappa_T$  et  $\kappa_{T+1}$  avec interpolation analytique:

$$(Q_m)_3 = Q_3 + \frac{dA}{N_q} [\kappa_T + 0,5 - \kappa'_{Q_3}] + (dq_3)_b$$

on obtient alors la mesure  $(q_m)_3$  de  $q$  :

$$\boxed{(q_m)_3 = (Q_m)_3 - f_3 = q + (dA)^2 (dq_1)_a + (dq_1)_b [(dA)^2 + dA + 1]} \quad (57)$$

Etape n: n-ième itération:

En répétant la procédure décrite on obtient pour l'expression de la n-ième mesure  $(q_m)_n$  de  $q$ :

$$(q_m)_n = q + (dA)^{n-1} (dq_1)_a + (dq_1)_b \left[ (dA)^{n-1} + (dA)^{n-2} + \dots + dA + 1 \right]$$

ce qu'on peut encore écrire:

$$(q_m)_n = q + (dA)^{n-1} \cdot (dq_1)_a + (dq_1)_b \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} (dA)^i \quad (58)$$

$dA$  étant défini par la relation (48), on voit avec la figure 5 que:

$$[dA]_{\max} \approx 2 \times 3,6 \cdot 10^{-2} = 7,2 \cdot 10^{-2} \quad (59)$$

donc on aura toujours  $0 \leq dA < 1$  ce qui permet d'écrire que pour une valeur bornée  $n$  du nombre d'itérations:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (dA)^i \leq \sum_{i=0}^{i=l-1} (dA)^i \quad \text{lorsque } l \rightarrow \infty$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (dA)^i \leq \frac{1}{1-dA}$$

où avec la valeur (59):

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (dA)^i \leq \frac{1}{1-7,2 \cdot 10^{-2}} = 1,07$$

Ainsi après  $n$  itérations, la mesure de  $q$  sera obtenue avec pour erreur:

$$(dq)_n = (q_m)_n - q < 7,2 \cdot 10^{-2 \times (n-1)} (dq_1)_a + 1,07 (dq_1)_b \quad (60)$$

$(dq_1)_a$  et  $(dq_1)_b$  étant les erreurs introduites par l'interpolation analytique de la 1<sup>ère</sup> mesure et dues respectivement à l'amortissement et aux bruits.

On voit ainsi qu'on peut diminuer l'erreur due à l'amortissement autant qu'on le veut, alors que l'erreur due aux bruits, reste pratiquement inchangée.

Le problème pratique qui se pose alors est d'expliquer un critère permettant d'arrêter le calcul des itérations.

On peut écrire la fréquence transposée sous la forme :

$$(Q_m)_n = (q_m)_n + f_n$$

$$\text{avec } f_n = \frac{K_T + 0,5}{N_q} - (q_m)_{n-1}$$

d'où

$$(Q_m)_n = \frac{K_T + 0,5}{N_q} + (q_m)_n - (q_m)_{n-1}$$

Si on calcule :

$$(Q_m)_n - \frac{K_T + 0,5}{N_q} = (q_m)_n - (q_m)_{n-1},$$

on a un moyen de vérifier l'avancement de la convergence.

On pourra arrêter le calcul, par exemple, si :

$$|(q_m)_n - (q_m)_{n-1}| < 10^{-6}$$

## 10. RESULTATS

Simulation :

$$q_H = 0,305078125 \quad \phi_{q_H} = 1 \text{ rad} \quad M_{q_H} = 10 \quad \sigma_H = 100$$

$$q_V = 0,267089844 \quad \phi_{q_V} = 2 \text{ rad} \quad M_{q_V} = 5 \quad \sigma_V = 100$$

$$\text{bruit } b = 1 \quad \frac{b}{M_q} = 10\%$$

Etape 0 :  $N_q = 256$  ,  $N_\phi = 128$

Etape 1 : mesure de  $q_H$  ; fig. 19

$$\text{interpolation : } (q_H)_1 = 0,305315782 \quad (dq_H)_1 = 2,37657 \cdot 10^{-4}$$

Etape 2 : première itération ; fig. 20

choix de la fréquence de modulation  $f_2$  :

$$(f_2)_{\max} = 0,5 - (q_H)_1 \frac{10}{2 \times 256} = 0,175152968$$

$$(f_2)_{\min} \approx \frac{q_H - q_V}{2} \approx 0,02$$

$$(f_2)_v = \frac{(f_2)_{\max} + (f_2)_{\min}}{2} = 0,097576484$$

$$K_T = \text{inter} \langle N_q [(f_2)_v + (q_H)_1] \rangle = 103$$

$$f_2 = \frac{103 + 0,5}{256} - (q_H)_1 = 0,098981093$$

Résultats :

$$(Q_m)_2 = 0,4041456648$$

$$(q_H)_2 = (Q_m)_2 - f_2 = 0,3051645718$$

$$(dq_H)_2 = 8,6447 \cdot 10^{-5}$$

$$(q_H)_2 - (q_H)_1 = -1,512102 \cdot 10^{-4}$$

Etape 3: deuxième itération: fig 21

$$f_3 = \frac{103 + 0,5}{256} - (q_H)_2 = 0,099132303$$

$$(Q_m)_3 = 0,4042914441$$

$$(q_H)_3 = (Q_m)_3 - f_3 = 0,3051591411$$

$$(dq_H)_3 = 8,1016 \cdot 10^{-5}$$

$$(q_H)_3 - (q_H)_2 = -5,4309 \cdot 10^{-6}$$

On remarque sur la figure 21 que les 2 modules des raies  $K_T$  et  $K_{T+1}$  ont une tendance à devenir identiques.

Etape 4: troisième itération: fig. 22.

$$f_4 = \frac{103 + 0,5}{256} - (q_H)_3 = 0,099137734$$

$$(Q_m)_4 = 0,4042965816$$

$$(q_H)_4 = (Q_m)_4 - f_4 = 0,3051588476$$

$$(dq_H)_4 = 8,0723 \cdot 10^{-5}$$

$$(q_H)_4 - (q_H)_3 = -2,934 \cdot 10^{-7}$$

On mesure voit que le critère de convergence

$$(Q_m)_4 - \frac{103 + 0,5}{256} = |(q_H)_4 - (q_H)_3| = 2,934 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$$

on arrête les itérations.

Mesure de la phase:  $N_\phi = 128$  (fenêtre sinus)

La transposition de fréquence se fera sur la raie

$$K_T = \text{int} \left\langle \frac{103}{256} \times 128 \right\rangle = 51$$

La fréquence de modulation est

$$f = \frac{51}{128} - (q_H)_4 = 0,0932786524$$

Résultats (fig. 23):

$$\phi_H = 0,9918119572 \text{ rad}$$

$$\begin{aligned} \text{erreur} &= d\phi_H = -0,0082 \text{ rad} \\ &= -0,47 \text{ degré} \end{aligned}$$

Mesure de l'amortissement et du module

Pénètre rectangulaire :

$$N = 256$$

$$\text{modulation } f = \frac{103}{256} - (q_H)_4 = 0,0971849024$$

Résultats (fig 24):

$$\delta_* = \frac{256}{2\pi} \times \sqrt{\left[ \frac{2M_{103}}{(M_{102} + M_{104})} \right]^2 - 1} = 100,372$$

$$\text{erreur} = 0,372$$

$$M_q = 2 \times \frac{M_{103}}{1 - e^{-\frac{256}{\delta_*}}} \times \frac{256}{\delta_*} = 10,703$$

$$\text{erreur} = 0,703$$

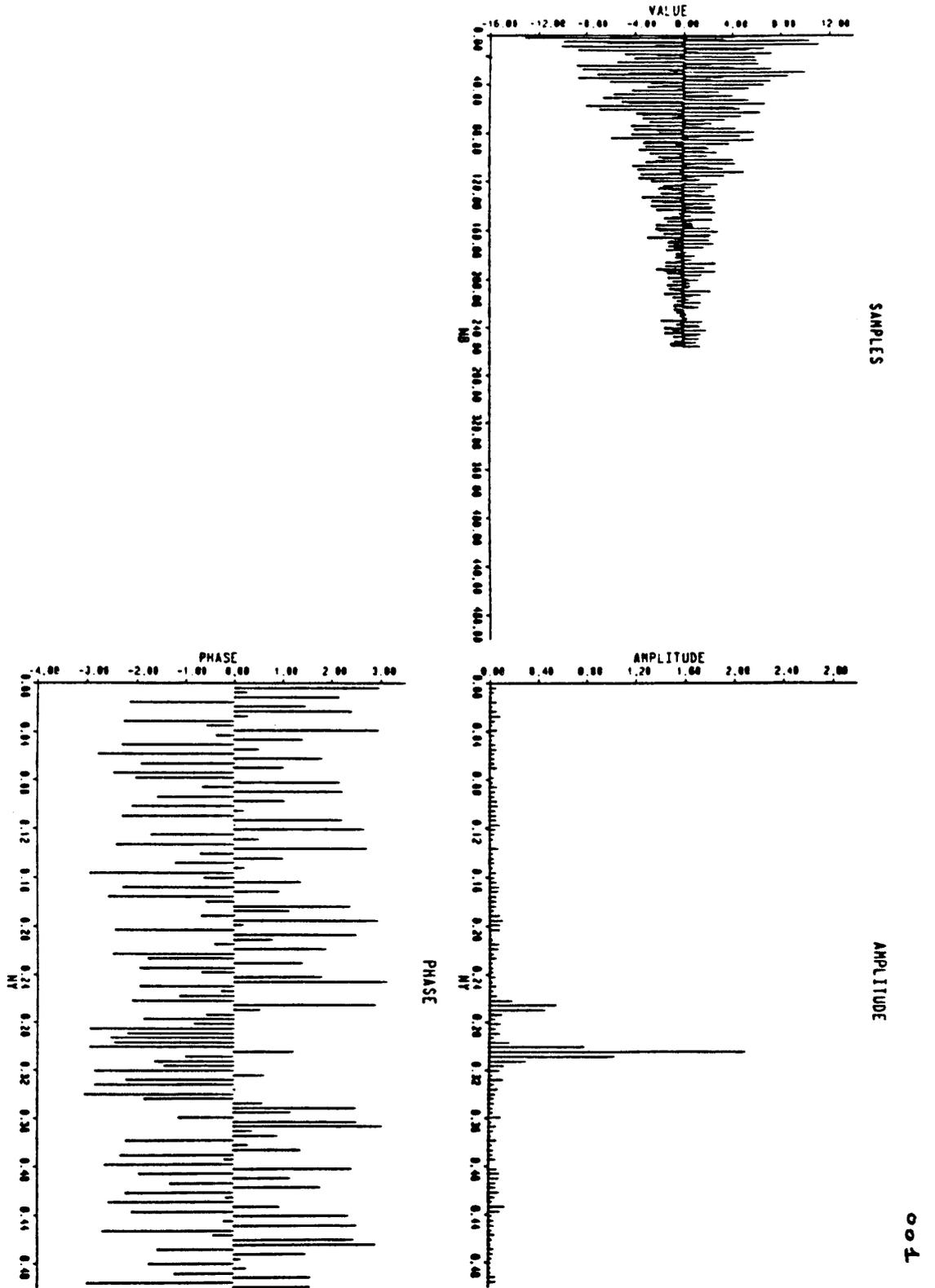


Fig. 13

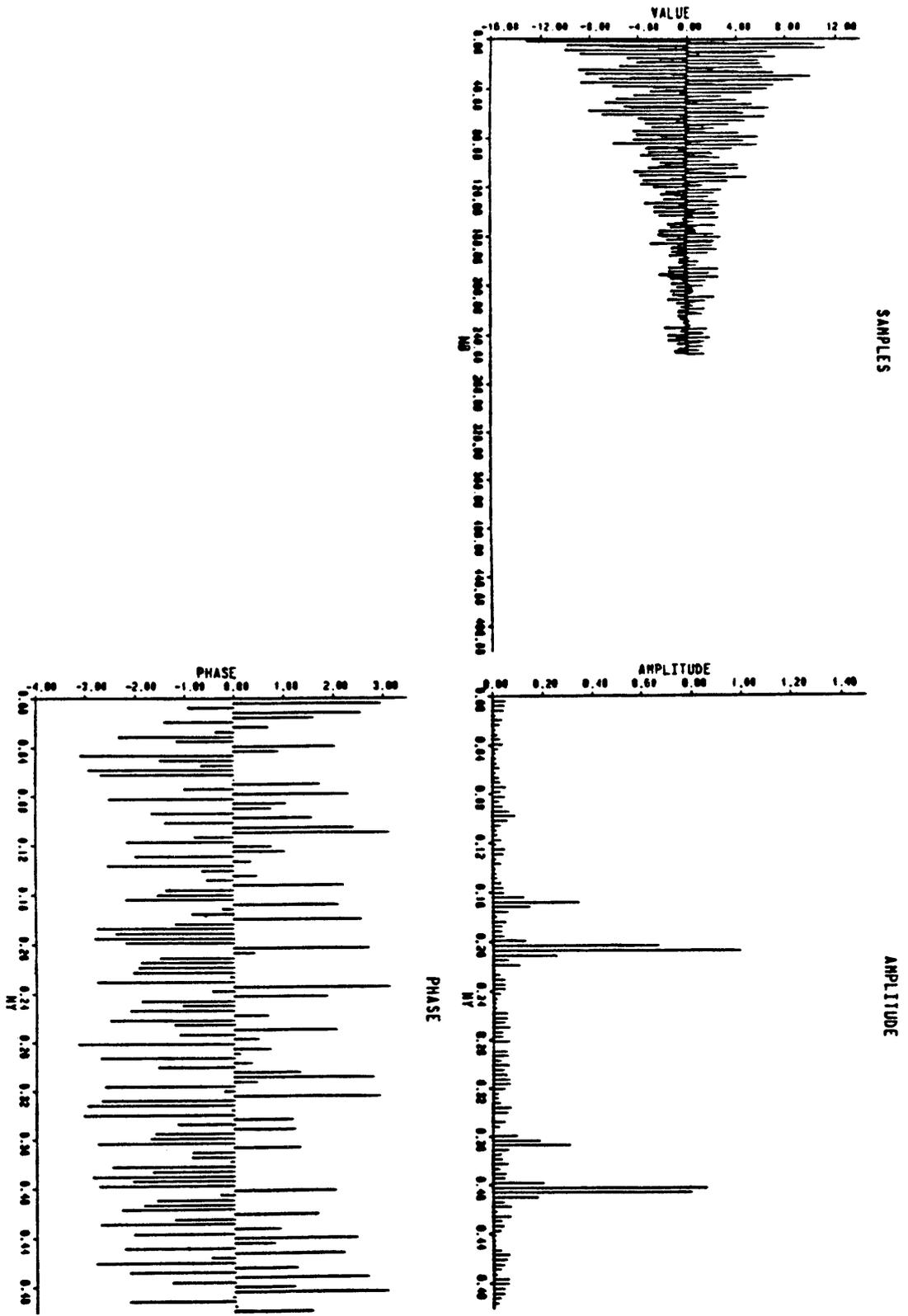


fig. 20

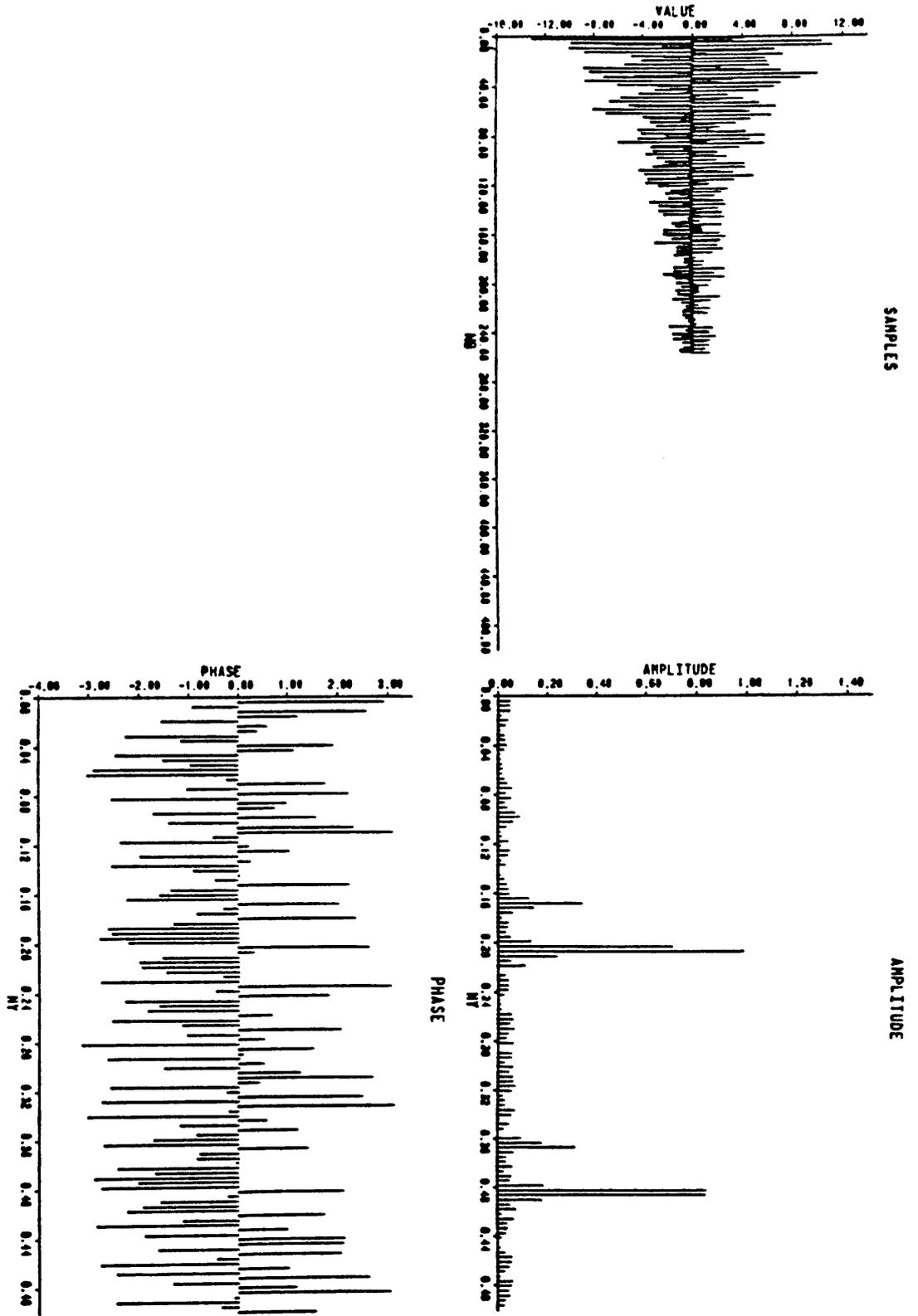


Fig. 21

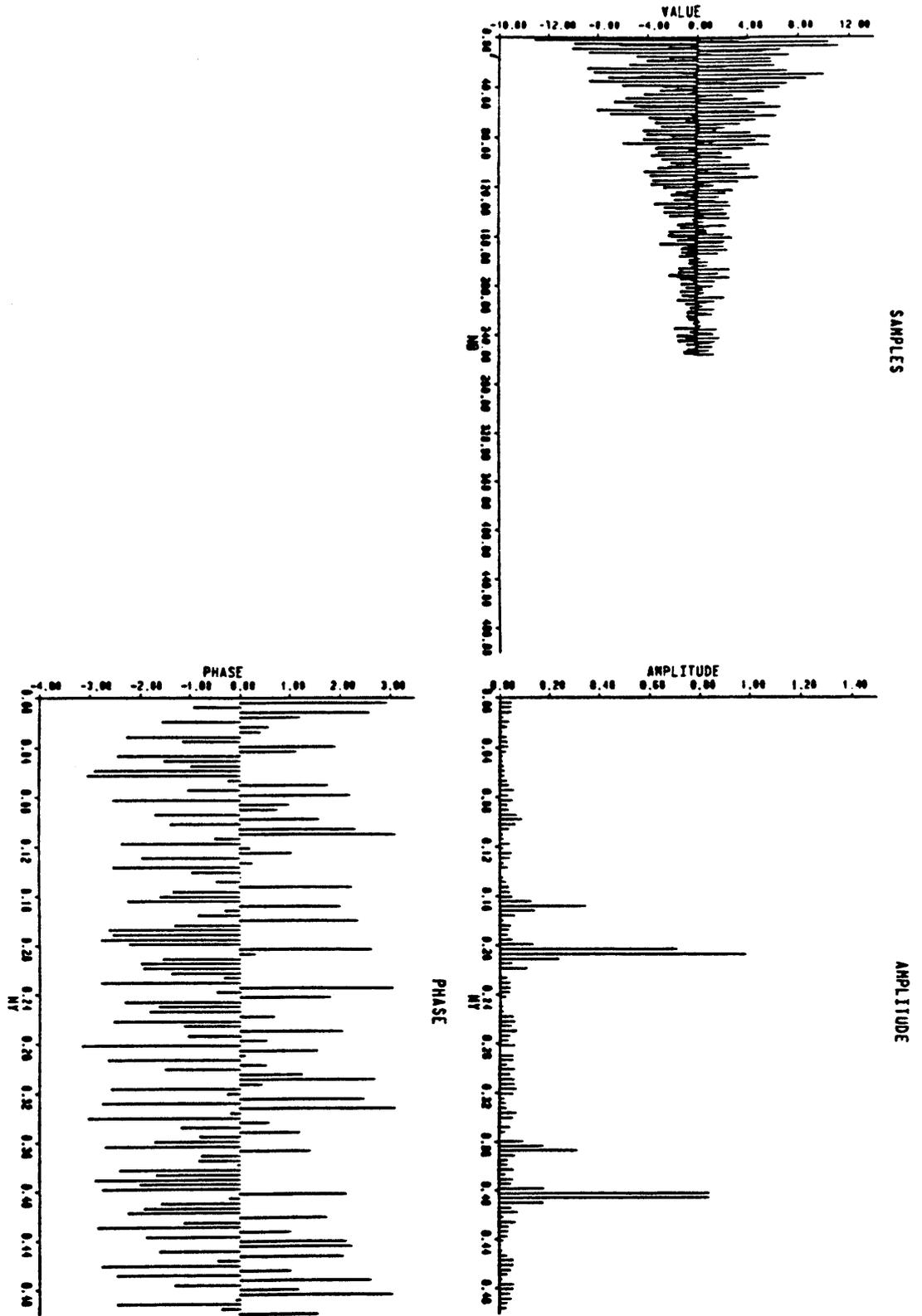
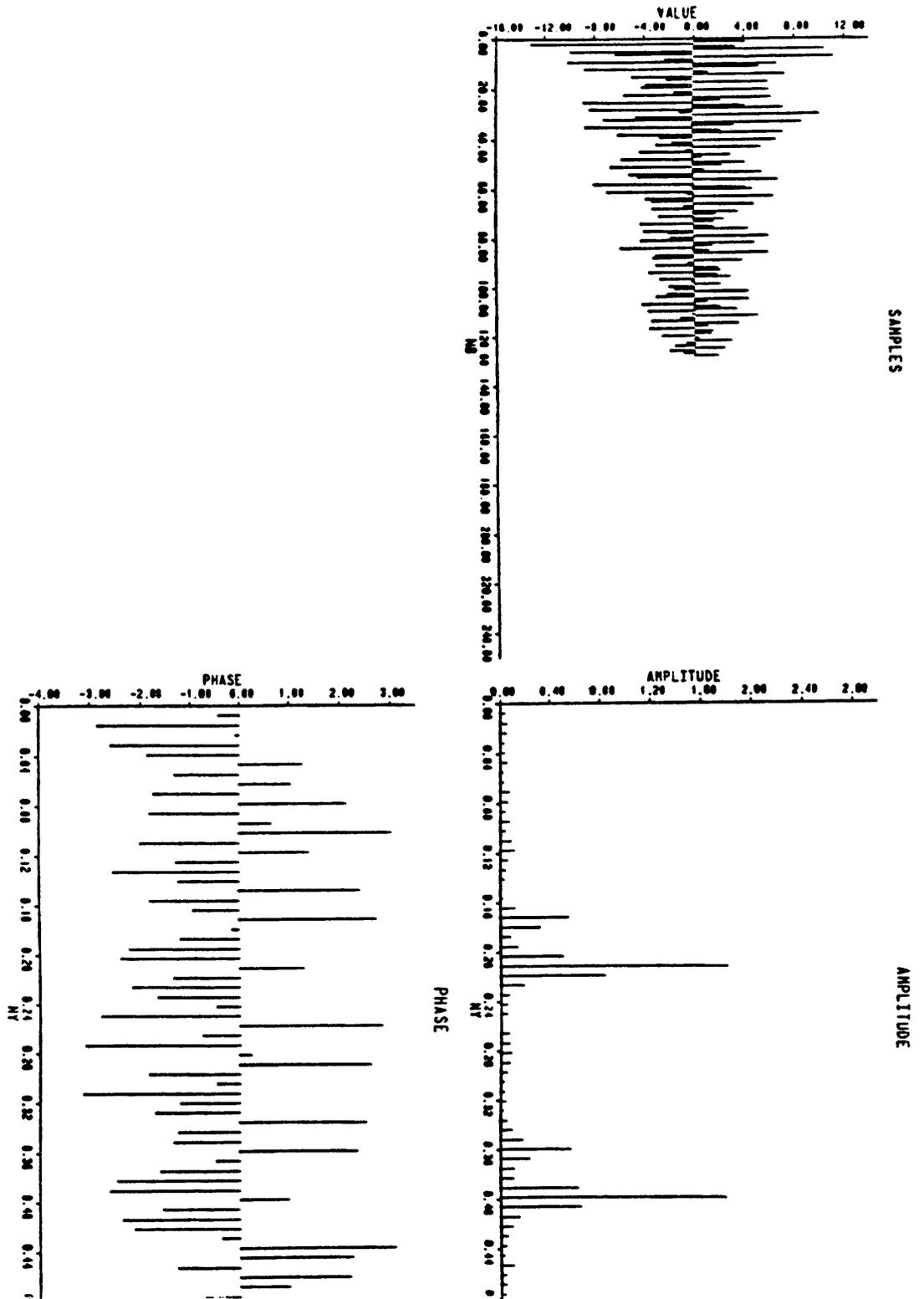
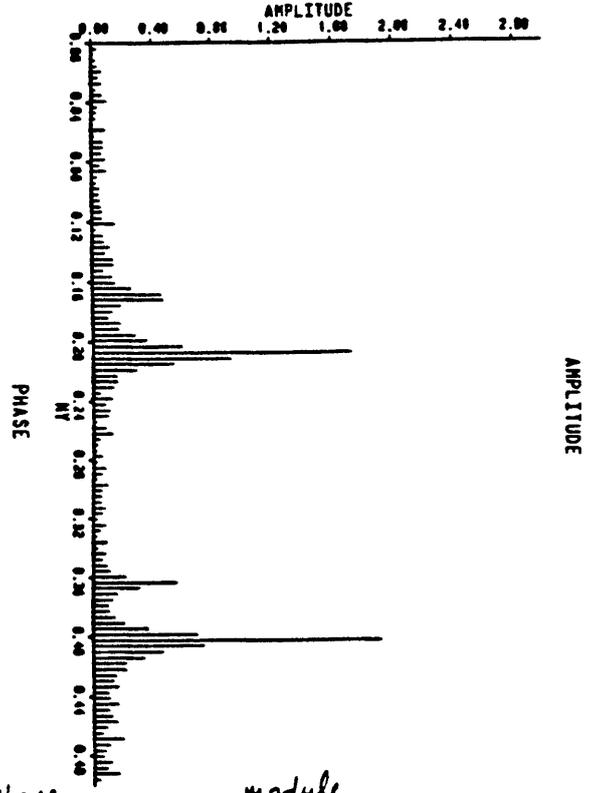
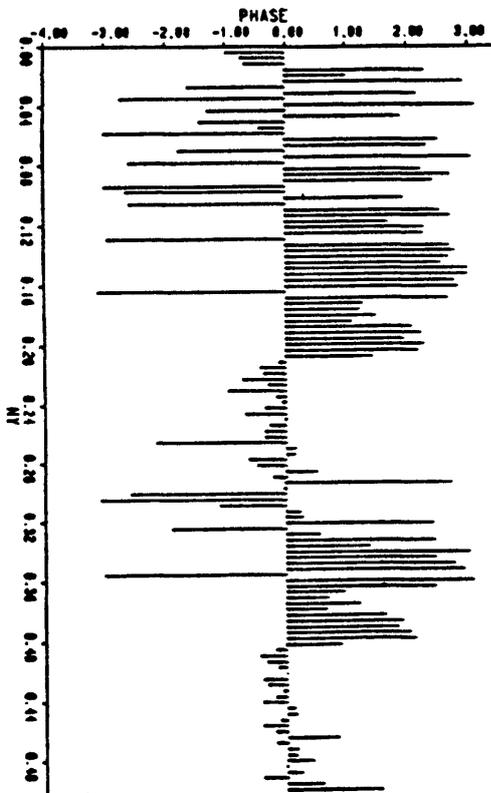
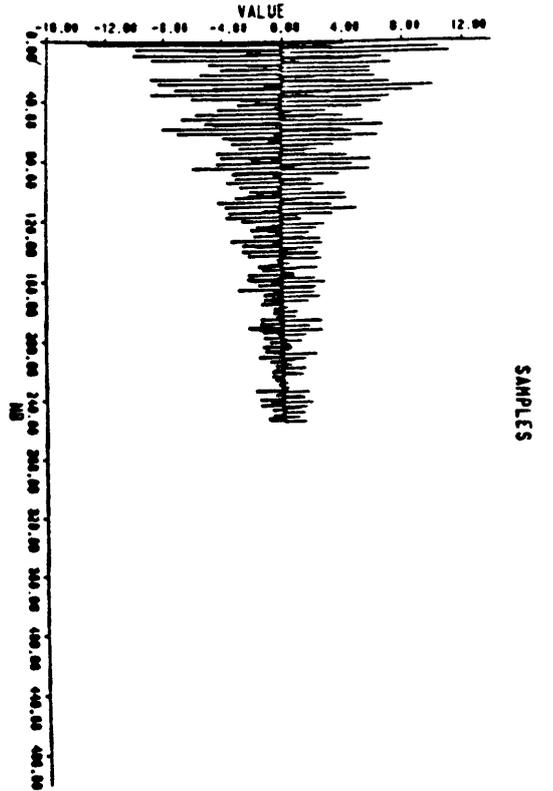


Fig. 22



	Reelle	Imag.	phase	Module
50	-0.5450582935	-0.3240530379	-2.6052055561	0.6341126987
51	0.9857944701	1.5079816208	0.9918119572	1.6016101981
52	0.0097757804	-0.6552226171	-1.5550776535	0.6552957393
53	-0.1088946482	-0.1085000817	-2.3560103035	0.1537216826

Fig. 23



	Real	Imag	Phase	module	
101	-0.1677535023	0.3232563650	2.0494878059	0.3641921403	
102	-0.3832882634	0.5920099857	2.1453666011	0.7052557806	← M102
103	1.1665590593	1.5431956392	0.9235061979	1.9345058335	← M103
104	0.7391186220	-2.1270007980	-0.1701656472	0.7499503584	← M104
105	0.4276291871	-0.1962351355	-0.4302229406	0.4705049948	

fig.24

11- REFERENCES :

- 1) PS/LEA/Note 86-15 : " Resonance measurements using spectrum analysis of beam oscillations " by J. Bengtsson, M. Chanol.
- 2) CERN PS 85-9 (LEA) : " Causes et corrections des erreurs dans la mesure de caractéristiques des oscillations betatroniques obtenues à partir d'une transformation de Fourier " par E. Asseo
- 3) PS/LEA/Note 86-14 : " Possibilité de mesure précise de la phase des oscillations betatroniques à partir d'une transformée de Fourier en introduisant un algorithme de modulation d'amplitude. " par E. Asseo
- 4) Rapport jaune en préparation