

PS/LEA/Note 86-9

11 août 1986

PROGRAMME POUR LA SYNTHÈSE ET L'ANALYSE DES TRANSFORMATEURS
TOROIDAUX DE MESURE (transfo rapide en Ultraperm)

Dimensionnement magnétique et mécanique en relation
avec les caractéristiques électriques

Edgar ASSEO

TABLE DES MATIERES

1. THEORIE DE BASE	1
1.1 En considérant séparément le primaire et le secondaire . . .	1
1.2 En considérant ensemble le primaire et le secondaire . . .	3
1.2.1 La Réductance	3
1.2.2 Transfert d'énergie du primaire vers le secondaire . . .	6
1.2.3 Transfert d'énergie du secondaire vers le primaire . . .	8
1.2.4 L'inductance mutuelle	9
1.2.5 Conservation des flux	10
1.2.6 Le transformateur d'intensité ; transference réelle . . .	11
1.2.7 Formulation pour la synthèse	19
1.2.8 Formulation pour l'analyse	19
1.2.9 Connaissance algorithmique de $\mu(f)$	20
1.2.10 La réponse indiciaire idéale	24
1.2.11 Influence de l'enroulement de calibration	25
2. ALGORITHMES ET ORGANISATION DES CALCULS PRATIQUES	31
2.1 Détails des cheminements	33
2.2 Compléments sur les cheminements	38
2.2.1 Concerne l'enroulement secondaire	38
2.2.2 Concerne l'enroulement de calibration et son effet . . .	38
2.2.3. Concerne le calcul des dimensions du tore	41
2.2.4. Concerne le calcul de l'inductance à 1KHz	45
2.2.5. Concerne la constante de temps de la réponse indi-	
cielle, la fréquence de coupure et la valeur de la	
permeabilité relative pour $f \neq f_c$	46
2.2.6 Concerne l'encombrement total	53
3. VERIFICATION EXPERIMENTALE	53
4 REMARQUES COMPLEMENTAIRES	56
5 BIBLIOGRAPHIE ET RAPPORT	58

1 - THEORIE DE BASE

1.1 En considérant séparément le primaire et le secondaire

On définit l'inductance propre du primaire et l'inductance propre du secondaire (fig. I.1)

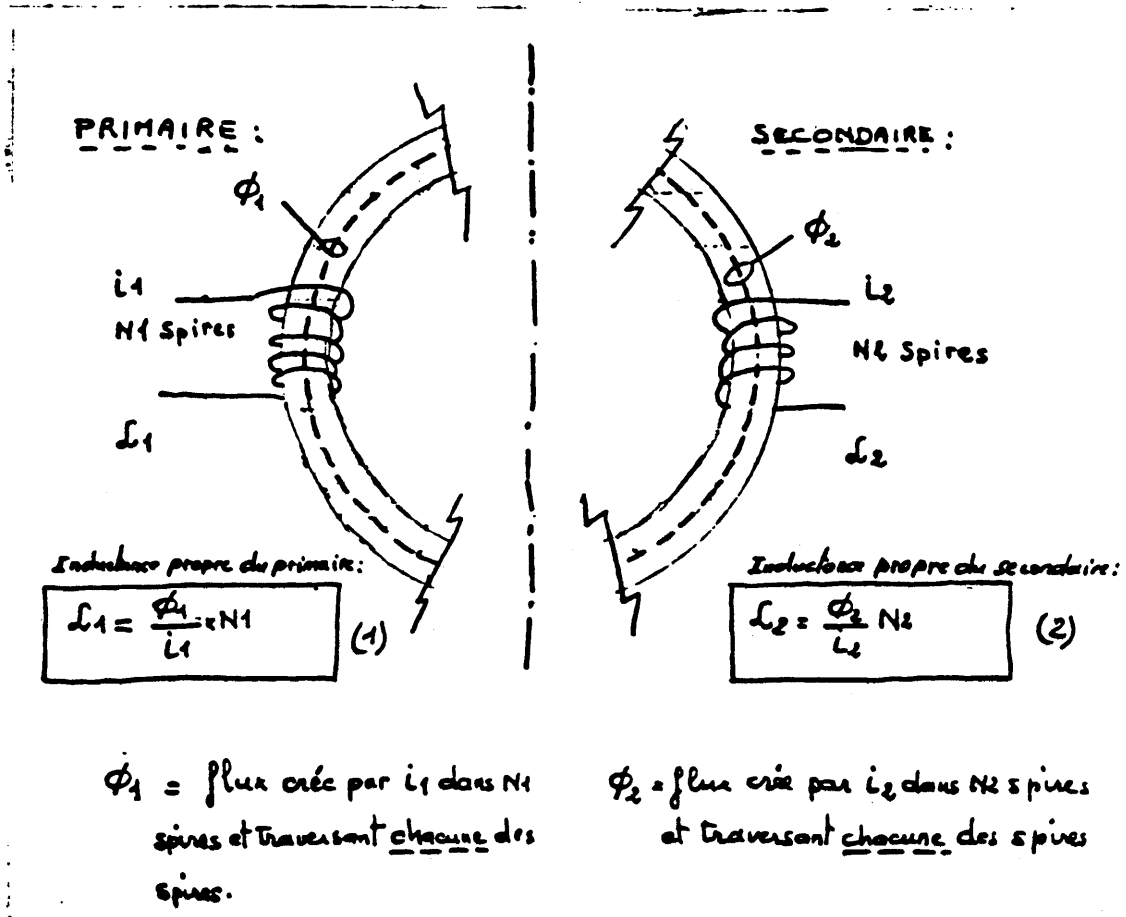


Fig. I.1

On notera :

$\Phi_{11} = N_1 \cdot \phi_1$ le flux créé par i_1 et embrassé par l'ensemble des N_1 spires primaires;

$\Phi_{22} = N_2 \cdot \phi_2$ le flux créé par i_2 et embrassé par l'ensemble des N_2 spires secondaires.

On aura donc

$$\boxed{L_1 = \frac{\Phi_{11}}{i_1}} \quad (3)$$

$$\boxed{L_2 = \frac{\Phi_{22}}{i_2}} \quad (4)$$

Le flux Φ_1 vu par chacune des spires N_1 est aussi celui vu par une section du tore. Il est produit par les $N_1 \cdot i_1$ Ampère-tours primaires et sa valeur Φ_1 dépend de la réductance R_{r1} (résistance magnétique) présentée par le tore vu du côté primaire.

$$\boxed{\Phi_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{R_{r1}}} \quad (5)$$

d'où on obtient facilement entre les relations

(1) et (5) :

$$\boxed{L_1 = \frac{(N_1)^2}{R_{r1}}} \quad (6)$$

Avec le même raisonnement du côté secondaire, on obtient

$$\boxed{\Phi_2 = \frac{N_2 \cdot i_2}{R_{r2}}} \quad (7)$$

et

$$\boxed{L_2 = \frac{(N_2)^2}{R_{r2}}} \quad (8)$$

1.2 En considérant ensemble primaire et secondaire

1.2.1 La réluctance :

Dans le cas du tore, le circuit magnétique est commun aux deux enroulements, donc :

$$R_1 = R_2 = R \quad (9)$$

Sa valeur se calcule par une formulation qui rappelle celle du calcul d'une résistance :

$$R = \frac{1}{\mu\mu_0} \times \frac{l}{S} \quad (10)$$

S = section du conducteur magnétique

l = longueur du conducteur magnétique

μ_0 = perméabilité absolue ou constante d'induction

μ = perméabilité relative (sans dimension)

Avec le système international d'unités (SI) :

$R = \frac{1}{\mu \cdot \mu_0} \cdot \frac{l}{S}$ <p>$\frac{A}{T \cdot m^2}$ $\frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}}$ $\frac{m}{m^2}$</p>	<p>m = mètre T = Tesla A = Ampère</p>	(11)
--	--	------

Rappelons que l'équation aux dimensions du Tesla est

$$T = \frac{\overset{\text{volt}}{V} \cdot \underset{\text{seconde}}{s}}{m^2}$$

Remarque 1 :

La réluctance R est d'autant plus petite que :

- la perméabilité relative μ est grande,
- le rapport $\frac{l}{S}$ est petit, donc que l est petit et S grand.

Dans le cas du tore (fig 1.2), S est maximum pour l minimum, pour une section carré du tore c'est à dire :

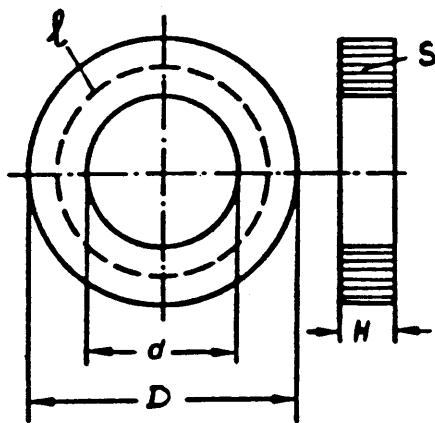


fig 1.2

$$H = \frac{D-d}{2} \quad (12)$$

Pour une réluctance donnée, cela correspond au volume et au poids minimum de matériau magnétique.

Remarque 2 :

La perméabilité relative μ est dépendante de la fréquence. Elle décroît avec la fréquence. La cause en est due aux courants de Foucault. Pour les diminuer le tore est réalisé par une bande de matériau magnétique isolée et enroulée d'où un facteur de lamination η dans le calcul de la section magnétique effective :

$$S = H \times \frac{D-d}{2} \cdot \eta \quad (13)$$

η dépend de l'épaisseur de la lame utilisée. Il est égal

à 0,8 pour l'Ultraperm 10 en épaisseur de 0,03 mm.

Remarque 3:

Le calcul de la longueur l du circuit magnétique est, lorsque que le rapport $\frac{D}{d}$ est voisin de l'unité (par exemple compris entre 1 et 1,5), obtenu par :

$$l = \pi \cdot \frac{D+d}{2} \quad (14)$$

C'est le cas de la quasi-totalité des tores utilisés dans les transformateurs de mesure du faisceau.

Lorsque le rapport $\frac{D}{d}$ devient important, on obtiendra la valeur de l par :

$$l = \frac{D-d}{\ln \frac{D}{d}} \cdot \pi \quad (15)$$

ou encore par :

$$l = \frac{D \cdot d}{D-d} \cdot \pi \cdot \ln \frac{D}{d} \quad (16)$$

Dans tous les calculs nous avons utilisé la relation (14).

1.2.2 Transfert d'énergie du primaire vers le secondaire

On considère la figure 1.3.

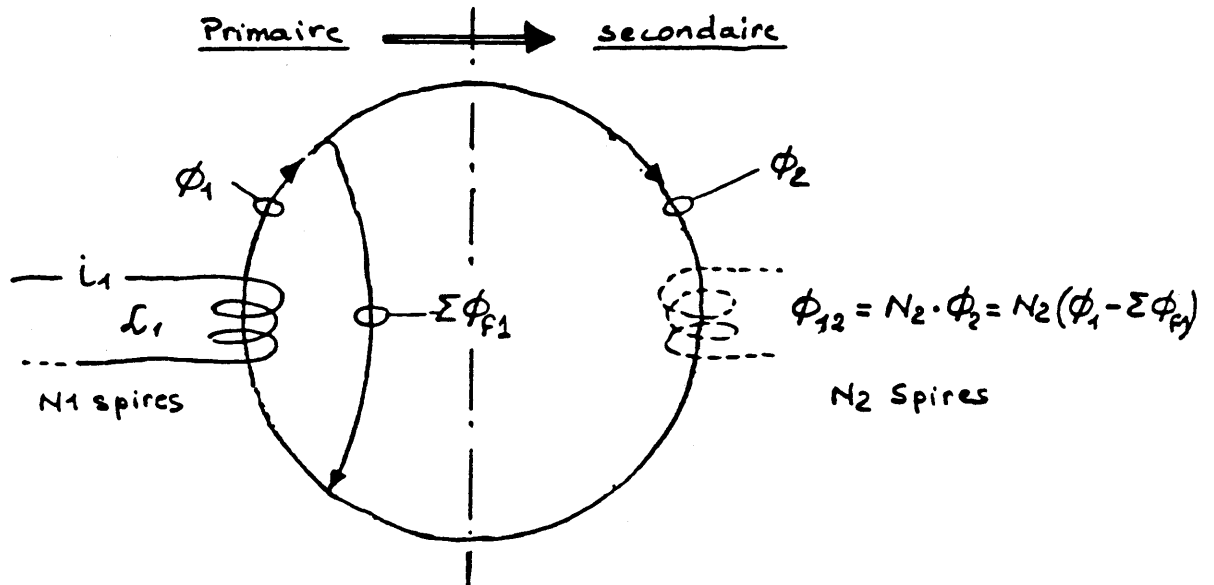


Fig. 1.3

Le flux Φ_1 produit par le courant primaire est donné à partir de la relation (1) par :

$$\Phi_1 = \frac{L_1 i_1}{N_1} \quad (17)$$

Le flux Φ_2 vu par une section du tore à l'endroit du secondaire est le flux Φ_1 diminué de l'ensemble $\Sigma \Phi_{f1}$ des flux de fuite à travers l'ensemble des réluctances de fuite ΣR_f .

On aura donc :

$$\Phi_2 = \Phi_1 - \Sigma \Phi_{f1}$$

$$\text{et} \quad \Sigma \Phi_{f1} = \Phi_1 \times \frac{R}{R + \Sigma R_f}$$

d'où

$$\Phi_2 = \Phi_1 \frac{\Sigma R_f}{R + \Sigma R_f} = k \cdot \Phi_1$$

avec :

$$0 < \frac{\Sigma R_f}{R + \Sigma R_f} = k \leq 1$$

(18)

k est proche de 1 lorsque les fuites sont très faibles
c'est à dire que

$$\Sigma R_f \gg R$$

Les N_2 spires du secondaire embrassent alors un flux total qui est

$$\Phi_{12} = N_2 \cdot \Phi_2 = N_2 \cdot k \cdot \Phi_1$$

D'où avec la relation (17) :

$$\Phi_{12} = \left(k \cdot d_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} \right) \cdot i_1 \quad (19)$$

Tout se passe comme si Φ_{12} était produit par un courant i_1 circulant dans une inductance :

$$\boxed{M_{21} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = k \cdot d_1 \cdot \frac{N_2}{N_1}} \quad (20)$$

M_{21} est l'inductance mutuelle de couplage vue du côté secondaire.

1.2.3 Transfert d'énergie du secondaire vers le primaire

On considère la figure 1.4.

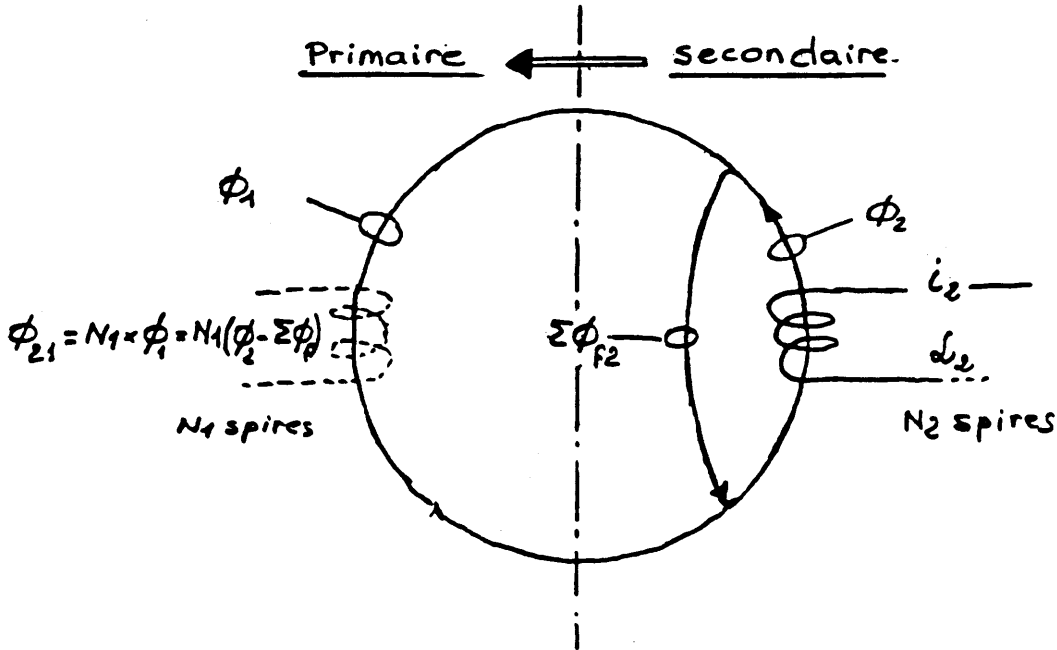


fig. 1.4

Le flux Φ_2 produit par le courant secondaire est donné à partir de la relation (2) par :

$$\Phi_2 = \frac{L_2 i_2}{N_2} \quad (21)$$

Le flux Φ_1 vu par une section du tore à l'endroit du primaire est le flux Φ_2 diminué de l'ensemble $\Sigma \Phi_{f2}$ des flux de fuite à travers l'ensemble des reluctances de fuite ΣR_f .

On aura donc

$$\Phi_1 = \Phi_2 - \Sigma \Phi_{f2}$$

et $\Sigma \Phi_{f2} = \Phi_2 \times \frac{R}{R + \Sigma R_f}$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \frac{\sum R_f}{R + \sum R_f} = k \phi_2 \\ \text{avec} \\ 0 < \frac{\sum R_f}{R + \sum R_f} = k &\leq 1 \end{aligned} \right\} (22)$$

Le coefficient de perte k est le même dans les deux transferts primaire \rightarrow secondaire et secondaire \rightarrow primaire.

Les N_1 spires du primaire embrassent alors un flux total qui est :

$$\phi_{21} = N_1 \cdot \phi_1 = N_1 \cdot k \cdot \phi_2$$

D'où avec la relation (21)

$$\phi_{21} = \left(k \cdot \frac{N_1}{N_2} \right) \cdot L_2 \cdot i_2 \quad (23)$$

Tout se passe comme si ϕ_{21} était produit par un courant i_2 circulant dans une inductance

$$\boxed{M_{12} = \frac{\phi_{21}}{i_2} = k \cdot \frac{N_1}{N_2} L_2} \quad (24)$$

M_{12} est l'inductance mutuelle de couplage vue du côté primaire.

1.2.4 L'inductance mutuelle

Avec les relations (6) et (8) on remarque que :

$$\boxed{\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2} \quad (25)$$

soit encore

$$\mathcal{L}_1 \times \frac{N_2}{N_1} = \mathcal{L}_2 \frac{N_1}{N_2}$$

On voit ainsi avec les relations (20) et (24) que

$$M_{12} = M_{21} = M$$

c'est à dire

$$M^2 = M_{12} \times M_{21} = K^2 \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2$$

d'où

$$\boxed{M = K \cdot \sqrt{\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2}} \quad (26)$$

K représente, nous l'avons vu, un coefficient de couplage ($0 < K \leq 1$) qui est d'autant plus petit que la réluctance \mathcal{R} du tore est moins négligeable vis à vis de la réluctance de fuite $\Sigma \mathcal{R}_f$.

En fait pratiquement $\Sigma \mathcal{R}_f \gg \mathcal{R}$ et $K \approx 1$.

1.2.5. Conservation du flux

Le principe de conservation du flux impose que

$$\Phi_1 - \Sigma \Phi_{f1} = \Phi_2 - \Sigma \Phi_{f2}$$

c'est à dire avec les relations (18) et (22)

$$K \Phi_2 = K \Phi_1$$

soit

$$\boxed{\Phi_2 = \Phi_1} \quad (27)$$

d'où avec les relations (17) et (21), on obtient:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{L_1}{L_2} \times \frac{N_2}{N_1}$$

et avec la relation (25):

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

soit $\boxed{L_2 = L_1 \frac{N_1}{N_2}} \quad (28)$

1.2.6. Le Transformateur d'intensité: transference reelle.

Si le primaire est alimenté par une source de courant (c'est le cas du faisceau) qui n'est pas affecté par la présence du transformateur, on peut considérer le courant primaire $i_1(t)$ comme une variable indépendante. Dans ces conditions la réponse qui nous intéresse concerne les tensions et courants secondaires.

Considérons donc le circuit secondaire au repos (fig. 1.5)

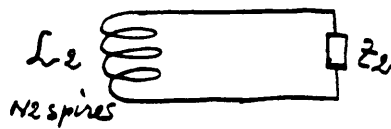


fig. 1.5

Si un courant $i_1(t)$ est injecté dans le primaire les N_2 spires secondaires embrassent un flux total

$$\Phi_{12}(t) = k L_1 \frac{N_2}{N_1} i_1(t) \quad (\text{relation 19})$$

Ce flux induit dans le circuit secondaire de la figure 1.5 une f.e.m $e_2(t)$ telle que :

$$e_2(t) = - \frac{d\Phi_{12}(t)}{dt} = k L_1 \frac{N_2}{N_1} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (29)$$

En régime dynamique, le circuit secondaire devient équivalent à la figure 1.6 .

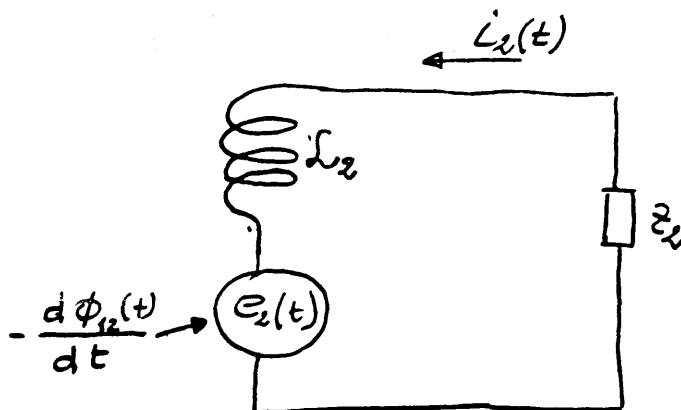


fig. 1.6

Il circule alors un courant $i_2(t)$. Pour calculer

ce courant il est commode de passer en notation symbolique qui fait intervenir la pulsation complexe p .

soit :

$E_2(p)$ la transformée de Laplace de $e_2(t)$

$I_1(p)$ la transformée de Laplace de $i_1(t)$

On aura ainsi la transformée de la relation (29):

$$E_2(p) = -K L_1 \frac{N_2}{N_1} \cdot p \cdot I_1(p) \quad (30)$$

En exprimant par $Z_2(p)$ et $L_2(p)$ le fait que l'impédance de charge et l'inductance sont dépendantes de la fréquence, on obtient

$$I_2(p) = \frac{E_2(p)}{p \cdot L_2(p) + Z_2(p)} \quad (31)$$

soit avec la relation (30)

$$I_2(p) = - \frac{K \cdot L_1(p) \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot p \cdot I_1(p)}{p L_2(p) + Z_2(p)}$$

$$I_2(p) = - \frac{K \frac{L_1(p)}{L_2(p)} \cdot \frac{N_2}{N_1}}{1 + \frac{Z_2(p)}{p L_2(p)}} I_1(p) \quad (32)$$

$$\text{or } \frac{L_1(p)}{L_2(p)} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (33)$$

En effet, c'est la réluctance R qui est fonction de la fréquence (effet des courants de Foucault) et on a

ainsi à partir des relations (6) et (8) :

$$L_1(p) = \frac{N_1^2}{R(p)} \quad (34)$$

$$L_2(p) = \frac{N_2^2}{R(p)} \quad (35)$$

d'où la relation (33). En portant (33) dans la relation (32), on obtient :

$$I_2(p) = -K \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Z_2(p)}{p \cdot L_2(p)}} I_1(p)$$

soit :

$$I_2(p) = -K \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{p \cdot \frac{L_2(p)}{Z_2(p)}}{1 + p \cdot \frac{L_2(p)}{Z_2(p)}} \cdot I_1(p) \quad (36)$$

Dans le cas du transformateur de mesure :

$$N_1 = 1$$

$K \neq 1$ (le circuit magnétique est unitaire)

On peut considérer $Z_2(p)$ comme une résistance pure R_2 (en première approximation)

Par ailleurs :

$$\frac{L_2(p)}{Z_2(p)} = \frac{L_2(p)}{R_2} = T(p)$$

$T(p)$ est la constante de temps du circuit secondaire.

En considérant la relations (35), on obtient

$$T(p) = \frac{(N_e)^2}{R(p) \cdot R_2} \quad (37)$$

La fonction de transfert $G(p)$ du transformateur est:

$$G(p) = \frac{I_2(p)}{I_1(p)} = - \frac{1}{N_2} \cdot \frac{p \cdot T(p)}{1 + p \cdot T(p)} \quad (38)$$

Avec $p = j\omega$ on obtient pour module de la transmittance en régime harmonique :

$$\overline{G(\omega)} = - \frac{1}{N_2} \cdot \frac{\omega \cdot T(\omega)}{\sqrt{1 + [\omega \cdot T(\omega)]^2}} \quad (39)$$

L'utilisation d'une telle transmittance pour la mesure, n'est possible que dans la zone de fréquence où $\overline{G(\omega)}$ n'est plus dépendant de la fréquence c'est à dire :

$$\overline{G(\omega)} = - \frac{1}{N_2} \text{ lorsque } \omega \cdot T(\omega) \gg 1 \quad (40)$$

La pulsation de coupure ω_c est alors la va-leur limite inférieure :

$$\omega_c \cdot T(\omega_c) = 1 \quad (41)$$

donnant l'atténuation

$$\frac{\overline{G(\omega = \infty)}}{\overline{G(\omega_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ c'est à dire } -3\text{dB.}$$

On peut constater une particularité importante de la fonction de transfert.

la "constante" de temps n'en est en fait pas une puisqu'elle est dépendante de la fréquence via la valeur de la réactance comme l'exprime la relation (37).

L'aspect de la bande passante exprimée par la relation (40) doit être considéré avec l'évolution du paramètre :

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \omega \cdot T(\omega) \\ &= 2\pi f \cdot \mu(f) \cdot \mu_0 \frac{S}{\ell} \cdot (N_2)^2 \times \frac{1}{R_2} \quad (42) \end{aligned}$$

où $\mu(f)$ est la valeur de la perméabilité relative à la fréquence f .

Pour qu'on puisse avoir une bande passante au sens de la relation (40), il faut qu'à partir d'une

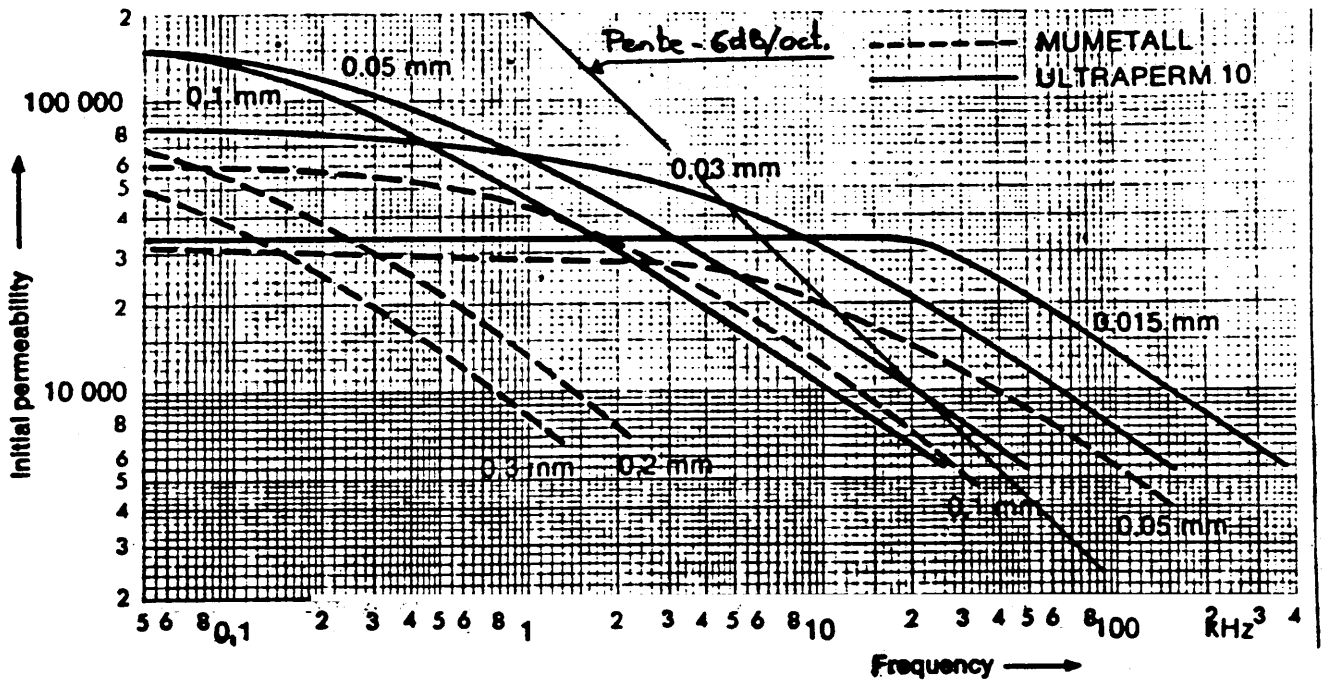
valeur f_c définissant la constante de temps voulue, le paramètre $\omega T(\omega)$ ne cesse d'augmenter lorsque f croît.

Or f gagne 6 dB/oct. Il faut donc que $\mu(f)$ décroisse avec nettement moins que 6 dB/octave.

Par ailleurs, pour une constante de temps donnée, les dimensions du tore $\frac{S}{l}$ et le nombre de spires N_s pourront être d'autant plus petits que la perméabilité μ est grande. Si on regarde la figure 1.7 donnant l'évolution de la perméabilité en fonction de la fréquence pour différentes qualités et épaisseurs du matériau magnétique (documentation de Vacuumschmelze) on voit qu'un bon compromis de grande perméabilité initiale et de petite décroissance avec la fréquence est réalisé par l'ULTRAPERM 10 en épaisseur de 0,03 mm. C'est le matériau que nous utilisons pour réaliser les tores.

Dans ces conditions on peut considérer que la constante de temps de la réponse indicielle est celle qu'on peut calculer à la fréquence de coupure f_c .

Frequency/permeability curves



Frequency dependence of the permeability of toroidal strip-wound cores

fig. 1.7

on a ainsi la constante de temps T_i de la réponse inductive qui est :

$$\boxed{T_i = \frac{(L_s)_f}{R_L}} \quad \text{or} \quad \boxed{f_c = \frac{1}{2\pi T_i}} \quad (43)$$

où

$$\boxed{(L_s)_f = \mu(f_c) \cdot \mu_0 \cdot \frac{S}{l} \cdot (N_s)^2} \quad (44)$$

1.2.7. Formulation pour la synthèse

Il s'agit du calcul des dimensions du tore connaissant le nombre de spires secondaires, la résistance de charge et la constante T_i voulue. On obtient à partir des formulations (43) et (44):

$$\boxed{\frac{S}{l} = T_i \frac{R_e}{\mu(f_c) \cdot \mu_0 \cdot (N_2)^2}} \quad (45)$$

On calcule $f_c = \frac{1}{2\pi T_i}$.

À partir de la courbe de perméabilité de la figure 1.7 on obtient $\mu(f_c)$.

Compte tenu d'hypothèse faite sur la forme du tore (voir remarque à page 4), on obtient toutes les dimensions à partir de la valeur de $\frac{S}{l}$.

1.2.8 Formulation pour l'analyse

Il s'agit de calculer la valeur de T_i connaissant les dimensions du tore, le nombre de spires secondaires et la résistance de charge.

Nous allons reprendre les formulations (43) et (44) sous une forme qui explicite la valeur du produit $f_c \cdot \mu(f_c)$.

On obtient

$$1 = 2\pi f_c \cdot \mu(f_c) \times \frac{S}{\ell} \times (N_2)^2 \times \frac{1}{R_2}$$

d'où

$$\boxed{\mu(f_c) \cdot f_c = \frac{\ell \cdot R_2}{2\pi \mu_0 \cdot S \cdot (N_2)^2}} \quad (46)$$

Le second terme de cette égalité est complètement défini par la connaissance du tore, du nombre de spires secondaires et la résistance de charge. On peut donc calculer la valeur de $\mu(f_c) \cdot f_c = P(f_c)$

A partir de cette valeur $P(f_c)$ et de la courbe $\mu(f)$ donnée à la figure 1.7, par une stratégie que nous exposerons plus loin, il est possible d'obtenir les valeurs de $\mu(f_c)$ et f_c séparément et d'avoir finalement :

$$\boxed{T_c = \frac{1}{2\pi \cdot f_c}} \quad (47)$$

et $\boxed{(L_2)_{f_c} = T_c \times R_2} \quad (48)$

1.2.9 Connaissance algorithmique de $\mu(f)$

Nous avons vu que tant pour les calculs de

synthèse que d'analyse, il est nécessaire d'utiliser la courbe réelle $\mu(f)$ correspondant au matériau magnétique utilisé. Pour réaliser ces calculs automatiquement par programme, il est nécessaire de représenter la courbe $\mu(f)$ par un algorithme permettant son calcul, soit $g(f)$ cet algorithme.

La façon de faire la plus simple est de représenter $\mu(f)$ par un algorithme à une entrée c'est à dire où f seul est considéré comme variable indépendante;



Pour réaliser l'algorithme, la courbe de perméabilité $\mu(f)$ a été approximée par une suite de segments de droite comme cela est représenté sur la figure 1.8.

L'algorithme est alors le suivant:

$$\mu_f = g(f) = 10^{\left(\log \mu(f_1) - \frac{\log \left(\frac{\mu(f_1)}{\mu(f_2)} \right)}{\log \frac{f_2}{f_1}} \times \log \frac{f}{f_1} \right)} \quad (49)$$

avec (les fréquences étant exprimées en Herz),

$$\text{pour } 100 \leq f \leq 10^3$$

$$f_1 = 100 \quad , \quad f_2 = 10^3$$

$$\mu(f_1) = 8 \cdot 10^4 \quad , \quad \mu(f_2) = 62 \cdot 10^3$$

pour $10^3 < f \leq 3 \cdot 10^3$

$$f_1 = 10^3 \quad f_2 = 3 \cdot 10^3$$
$$\mu(f_1) = 62 \cdot 10^3 \quad \mu(f_2) = 50 \cdot 10^3$$

pour $3 \cdot 10^3 < f \leq 10^4$

$$f_1 = 3 \cdot 10^3 \quad f_2 = 10^4$$
$$\mu(f_1) = 50 \cdot 10^3 \quad \mu(f_2) = 30 \cdot 10^3$$

pour $10^4 < f \leq 10^5$

$$f_1 = 10^4 \quad f_2 = 10^5$$
$$\mu(f_1) = 30 \cdot 10^3 \quad \mu(f_2) = 7 \cdot 10^3$$

pour $f > 10^5$

$$f_1 = 10^5 \quad f_2 = 10^6$$
$$\mu(f_1) = 7 \cdot 10^3 \quad \mu(f_2) = 1,4 \cdot 10^3$$

pour $f < 100$, $\mu(f) = 8 \cdot 10^4$

- Les valeurs $\mu(f)$ ainsi obtenues sont considérées comme les valeurs nominales de $\mu(f)$ soit $\mu(f)_{\text{nom}}$.
- Les valeurs minimums de $\mu(f)$ sont calculées par :

$$\mu(f)_{\text{min}} = 0,75 \mu(f)_{\text{nom}}$$

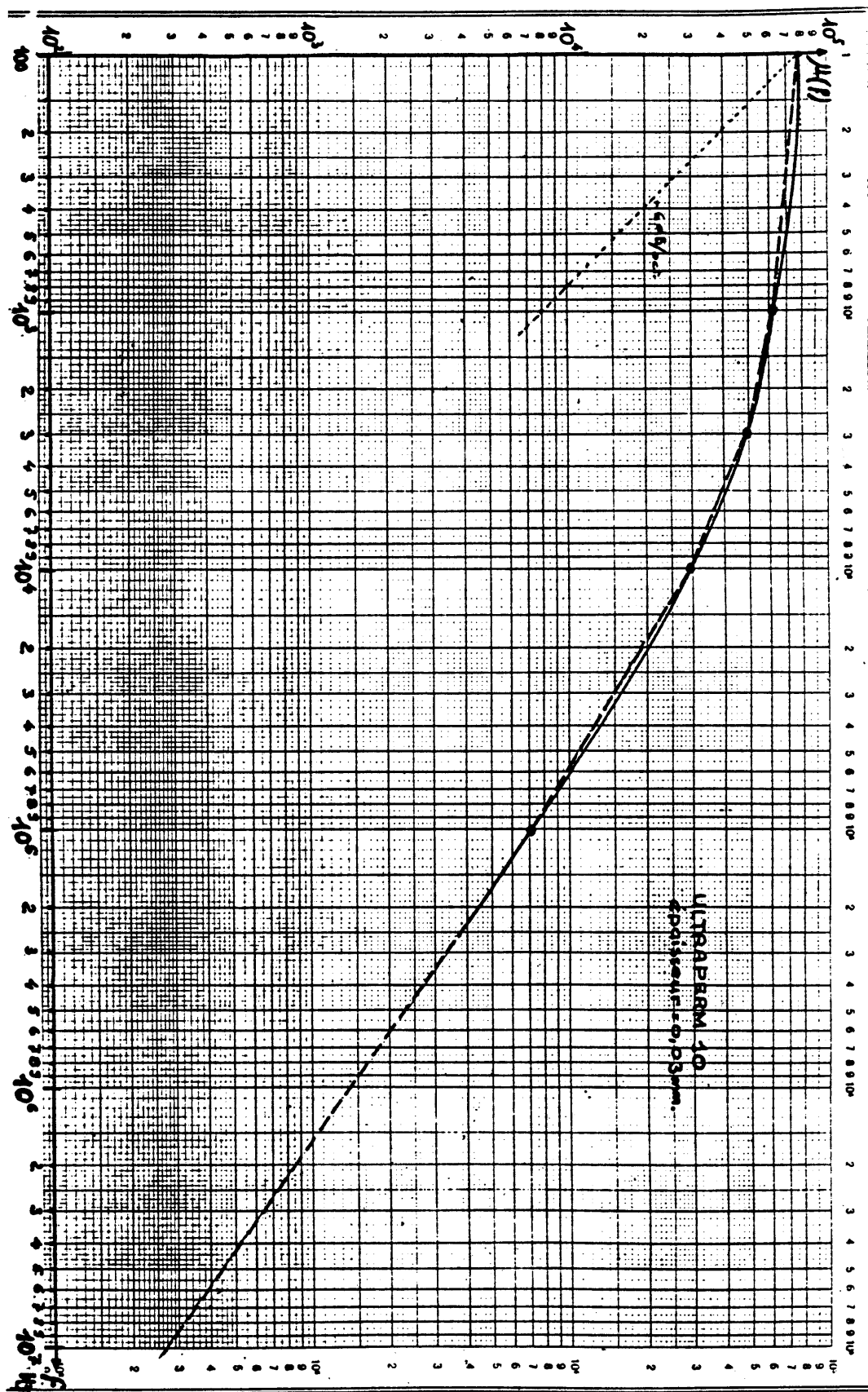


Fig. 1.8.

1.2.10 La réponse indicielle idéale

Nous reprenons la relation (38) en faisant $T(P) = T_i$

$$I_2(P) = - \frac{1}{N_2} \frac{P T_i}{1 + P T_i} I_1(P)$$

Aux bornes de $Z_2(P) = R_2$ on obtient

$$U_2(P) = - \frac{R_2}{N_2} \frac{P T_i}{1 + P T_i} \times I_1(P)$$

Si on considère la réponse indicielle, on a :

$$I_1(P) = \frac{I_1}{P}$$

D'où

$$U_2(P) = - \frac{R_2 \times I_1}{N_2} \times \frac{1}{P + \frac{1}{T_i}} \quad (50)$$

D'où :

$$u_2(t) = - \frac{R_2 I_1}{N_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_i}} \quad (51)$$

Pour $t \ll \frac{T_i}{100}$

$$u_2(t) \approx - \frac{R_2 I_1}{N_2} = U_2 \quad (52)$$

avec une erreur relative

$$\frac{d u_2(t)}{u_2(t)} \leq \frac{1}{100}$$

La sensibilité du Transformateur est alors définie par :

$$\boxed{\Delta^{mv/mA} = \left| \frac{U_2}{I_1} \right| = \frac{R_2}{N_2}} \quad (53)$$

1.2.11 Influence de l'enroulement de calibration

A la figure 1.9 est représenté le transformateur avec les N_2 spires de mesure chargées par R_2 et on a ajouté N_c spires de calibration chargées par R_c

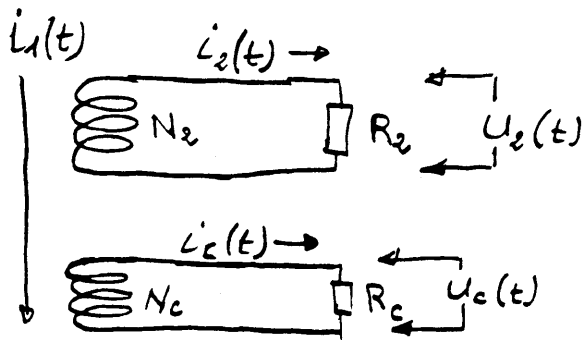


fig. 1.9

Un tel schéma traduit ce qui se passe lorsque circule le courant primaire $I_1(t)$ et qu'on n'injecte à ce moment là aucun signal de calibration.

$$\Phi_p(t) = \frac{I_1(t)}{R_p} \quad (N_1 = 1)$$

$$\Phi_{12}(t) = \frac{I_2(t) \times N_2}{R_p}$$

$$\Phi_{1c}(t) = \frac{I_c(t) \times N_c}{R_p}$$

Le flux étant conservatif:

$$i_1(t) = i_2(t) \cdot N_2 + i_c(t) \cdot N_c \quad (54)$$

Par ailleurs:

$$u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) \quad (55)$$

$$u_c(t) = R_c \cdot i_c(t) \quad (56)$$

et

$$u_2(t) = - \frac{d\phi_{12}(t)}{dt} = - L_1 N_2 \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$u_c(t) = - \frac{d\phi_{1c}}{dt} = - L_1 N_c \frac{di_1(t)}{dt}$$

d'où

$$\frac{u_2(t)}{u_c(t)} = \frac{N_2}{N_1} \quad (57)$$

Avec la relation (54) on obtient:

$$i_2(t) = \frac{i_1(t) - N_c \cdot i_c(t)}{N_2}$$

d'où

$$u_2(t) = R_2 i_2(t) = R_2 \frac{i_1(t) - N_c \cdot i_c(t)}{N_2}$$

soit

$$u_2(t) = \frac{i_1(t) \cdot R_2}{N_2} \left[1 - N_c \frac{i_c(t)}{i_1(t)} \right] \quad (58)$$

Entre les relations (54) et (55) on obtient:

$$i_1(t) = i_c(t) \cdot N_c + \frac{u_2(t) \cdot N_2}{R_2}$$

et avec la relation (57), on a donc:

$$i_1(t) = i_c(t) \cdot N_c + \frac{U_c(t)}{N_c \cdot R_2} \cdot (N_2)^2$$

$$i_1(t) = i_c(t) \cdot N_c + \frac{R_c \cdot i_c(t)}{N_c R_2} \cdot (N_2)^2$$

$$i_1(t) = i_c(t) \cdot N_c \times \left[1 + \frac{R_c}{R_2} \cdot \left(\frac{N_2}{N_c} \right)^2 \right]$$

d'où

$$\frac{N_c \cdot i_c(t)}{i_1(t)} = \frac{1}{1 + \frac{R_c}{R_2} \cdot \left(\frac{N_2}{N_c} \right)^2}$$

En portant cette valeur dans la relation (58) on obtient:

$$u_2(t) = i_1(t) \times \frac{R_2}{N_2} \cdot \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{R_c}{R_2} \cdot \left(\frac{N_2}{N_c} \right)^2} \right] \quad (59)$$

On remarque que si on pose

$$\frac{u_2(t)}{R_2 \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{R_c}{R_2} \cdot \left(\frac{N_2}{N_c} \right)^2} \right]} = i_2'(t) = \frac{u_2(t)}{R_2'}$$

on obtient avec la relation (59)

$$i_2'(t) \times N_2 = i_1(t) \quad (60)$$

$$\phi_1 = \frac{i_1(t)}{R} = \phi_{12} = \frac{i_2'(t) \cdot N_2}{R}$$

Le flux étant conservatif tout se passe comme si,

l'enroulement de calibration étant enlevé, la résistance R_2 est remplacée par :

$$R'_2 = R_2 \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{R_c}{R_2} \cdot \left(\frac{N_2}{N_c} \right)^2} \right] \quad (61)$$

D'où à la figure 1.10, le schéma équivalent au transformateur avec enroulement de calibration.

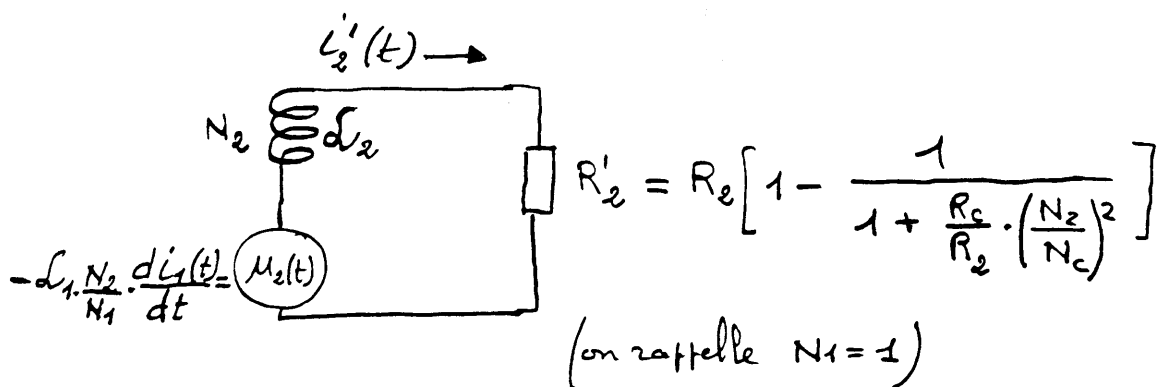


fig. 1.10

Le calcul de l'équation de transfert qui a été fait au paragraphe 1.2.6 peut être appliqué au schéma équivalent de la figure 1.10. Il suffit de remplacer R_2 par R'_2 .

$$I'_2(p) = - \frac{1}{N_2} \times \frac{p \frac{L_2}{R'_2}}{1 + p \frac{L_2}{R'_2}} \cdot I_1(p) \quad (62)$$

et

$$U_2(p) = - \frac{R'_2}{N_2} \times \frac{p \cdot \frac{L_2}{R'_2}}{1 + p \cdot \frac{L_2}{R'_2}} \cdot I_1(p) \quad (62)$$

La bande passante est limitée par la fréquence de coupure:

$$f_c = \frac{1}{2\pi \frac{L_2}{R'_2}} \quad (63)$$

Dans la bande passante la sensibilité du transformateur est alors:

$$S'_{mV/MA} = \frac{R'_2}{N_2} = \frac{R_2}{N_2} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{R_c}{R_2} \cdot \left(\frac{N_2}{N_c}\right)^2} \right] \quad (64)$$

Conséquences pratiques :

L'enroulement de calibration a pour effet :

- de diminuer la sensibilité du transformateur,
- d'augmenter la constante de temps $T' = \frac{L_2}{R'_2}$

d'autant plus que le facteur :

$$\frac{R_c}{R_2} \cdot \left(\frac{N_2}{N_c}\right)^2 \text{ est petit}$$

Pour $\frac{R_c}{R_2} \times \left(\frac{N_2}{N_c}\right)^2 = 1$ $R'_2 = \frac{R_2}{2}$ et ainsi :

- la constante de temps $T' = \frac{L_2}{R'_2}$ est doublée
- la sensibilité est divisée par deux.

Le produit de la constante de temps $T' = \frac{L_2}{R'_2}$ par la sensibilité $\frac{R'_2}{N_2}$ est constant :

$$\boxed{T' \times \delta' = \frac{L_2}{N_2}} \quad (65)$$

Pour diminuer l'influence de l'enroulement de calibration, N_2 et R_2 étant fixés, il faut augmenter R_c et diminuer N_c .

On peut pour les besoins pratiques mesurer l'influence de l'enroulement de calibration par le facteur :

$$\boxed{\gamma = \frac{R_2 - R'_2}{R_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_c}{R_2} \times \left(\frac{N_2}{N_c}\right)^2}} \quad (66)$$

produisant les effets :

$$\boxed{\frac{\Delta \delta}{\delta} = \frac{\delta - \delta'}{\delta} = \gamma} \quad (67)$$

et

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T} = \frac{T - T'}{T} = -\frac{\gamma}{1 - \gamma}} \quad (68)$$

soit $\boxed{T' = \frac{1}{1 - \gamma} \times T} \quad (69)$

Il est important de calculer la valeur minimum de R_c , compte tenu des valeurs de R_e, N_e et de la variation relative $\delta_{\max} = \left(\frac{ds}{s}\right)_{\max}$ de la sensibilité qu'on veut accepter. On a avec la relation (66)

$$\delta_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{(R_c)_{\min} \times \left(\frac{N_e}{N_c}\right)^2}{R_e}}$$

d'où

$$\boxed{(R_c)_{\min} = \frac{1 - \delta_{\max}}{\delta_{\max}} \times \left(\frac{N_c}{N_e}\right)^2 \times R_e} \quad (70)$$

2. ALGORITHMES ET ORGANISATION DES CALCULS PRATIQUES

La procédure de calcul et les algorithmes utilisés sont établis en vue d'un cheminement rendant possible une double démarche :

- Une démarche réalisant la synthèse c'est à dire conduisant aux dimensions du tore, les conditions d'utilisation étant données;
- une démarche réalisant l'analyse c'est à dire conduisant aux caractéristiques d'utilisation, les dimensions du tore et le contexte d'utilisation étant donnés.

Pour chacune de ces deux démarches, le cheminement comporte deux parties :

- une partie "questionnaire" en tête permettant la prise des données. La partie questionnaire comporte occasionnellement des réponses intermédiaires qui selon les cas :
 - explicite la valeur demandée sous une autre forme intéressante,
 - ou
 - permet de guider le choix de l'utilisateur compte tenu des choix déjà faits;
- une partie "résultats" donnant, selon la démarche choisie (synthèse ou analyse), les résultats complets des calculs.

Toutes les questions et réponses sont exprimées en clair, c'est à dire accompagnées de leurs significations et des unités utilisées.

Le programme TORCA (TOR CAlculatION) a été construit sur un calculateur hp 41C avec imprimante et cassette digitale. Il peut évidemment être construit pour n'importe quel ordinateur PC avec

sans doute plus de facilité compte tenu des mémoires disponibles.

Remarque : une partie du cheminement est commun aux deux démarches. On peut envisager donc de structurer le programme de façon à imbriquer les cheminements des démarches "analyse" et "synthèse" (c'est ce que nous avons fait pour gagner de la place en mémoire). On peut envisager aussi de programmer séparément les deux démarches comme deux cheminements indépendants. C'est sans doute la solution la plus simple si on dispose d'un ordinateur plus gros que le hp41c.

En ce qui concerne la description des cheminements nous avons, dans ce qui va suivre fait, comme si les deux démarches étaient complètement indépendantes.

2.1 Détails des cheminements

Le cheminement de la démarche "synthèse" est représenté aux pages 34 et 35

Le cheminement de la démarche "analyse" est représenté aux pages 36 et 37

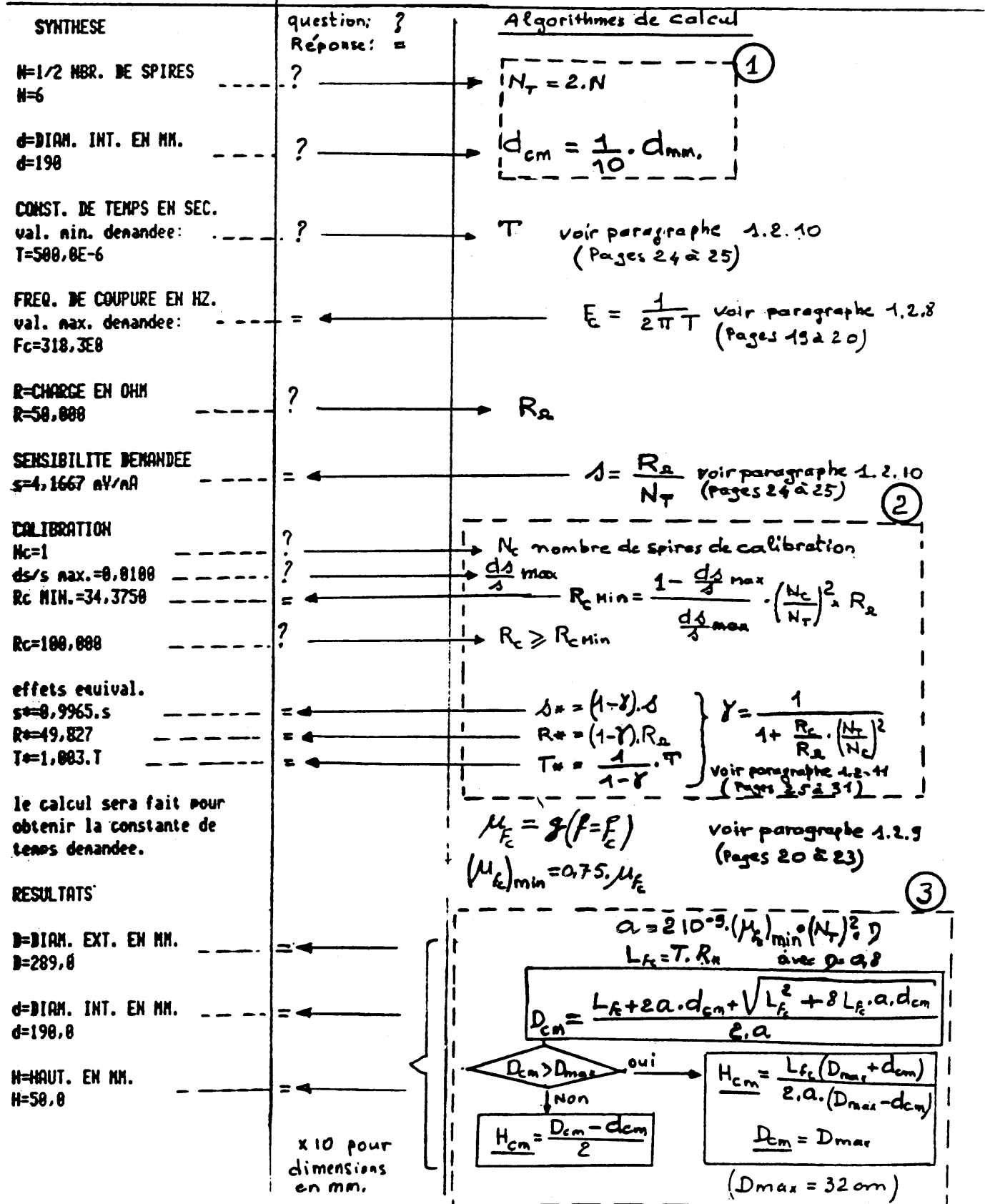
Outre les renvois au chapitre 1 (Théorie de base) qui sont notés, on trouvera des parties encadrées en pointillés dont les repères renvoient aux compléments qui suivent. On remarquera que seul le repère 3 est complètement spécifique à la synthèse.

Démarche "synthèse"

TORE MAGNET.
TRANSFO DE MESURE

ULTRAPERM 10
QUALITE U-030
TRAIT. FIX 022/1
EPAIS. DE BANDE=0.03 MM.

choix du matériel magnétique
voir paragraphe 1.2.6 (Pages 14 à 18)



$\eta = 0.8$ voir paragraphe 1.2.1
(pages 3 à 5)

SECTION MAGN. EN CM²
S=19,88

$$S_{cm^2} = \frac{D_{cm} - d_{cm}}{2} \cdot H_{cm} \cdot \eta$$

LONG. MAGN. EN CM.
l=75,24

$$l_{cm} = \frac{D_{cm} + d_{cm}}{2} \cdot \pi \quad (4)$$

INDUCT. TOT. EN HENRY
valeur à 1 khz.

$$L_{1kHz} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot \mu_{1kHz} \cdot \frac{S_{cm^2}}{l_{cm}} \cdot (N_T)^2$$

minima:
L=22,14E-3
nominale:
L=29,52E-3

$$(L_{1kHz})_{min} = 0,75 L_{1kHz}$$

$$(L_{1kHz})_{nom.} = L_{1kHz}$$

CONST. DE TEMPTS EN SEC.
reponse indicielle

$$\mu_E \cdot f_c = \frac{R_x \cdot l_{cm}}{8\pi^2 \cdot 10^{-9} \cdot (N_T)^2 \cdot S_{cm^2}}$$

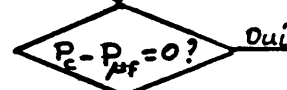
minima:
T=585,0E-6
nominale:
T=673,3E-6

$$\mu_E \cdot f_c \rightarrow P$$

$$10^3 B_3 \rightarrow F$$

$$(\mu_{1kHz})_{min} = 0,75 \mu_{1kHz} \rightarrow MU$$

$$(F \cdot MU) \rightarrow P_{MF}$$



FREQ. DE COUPURE EN HZ.

maxima:
F_c=315,2E8
nominale:
F_c=236,4E8

INDUCT. TOT. A F=F_c
valeur en henry

minima:
L=25,16E-3
nominale:
L=33,55E-3

PERMEABILITE REL.
valeur pour f=f_c

minima:
 $\mu = 52.848,8$
nominale:
 $\mu = 70.453,3$

$$T_{min} = \frac{1}{2\pi(F)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mu_E)_{min} = (MU) \\ (\mu_E)_{nom.} = \frac{(MU)}{0,75} \end{array} \right.$$

$$T_{nom.} = T_{min} \cdot \frac{1}{0,75}$$

$$F_{c\ max} = (F)$$

$$F_{c\ nom.} = 0,75 \cdot (F)$$

$$(L_{f_c})_{min} = T_{min} \cdot R_x$$

$$(L_{f_c})_{nom.} = T_{nom.} \cdot R_x$$

VOLUME MAGN. EN CM³
V=1.489,77

POIDS EN KG.
P=12,961

ENCOMBREMENT TOTAL EN MM
DIAM. EXT.=298,0
DIAM. INT.=182,5
HAUTEUR=57,5

$$V_{cm^3} = S_{cm^2} \cdot l_{cm}$$

$$P_{kg} = V_{cm^3} \cdot 10^{-3} \cdot 8,7 \quad (6)$$

DIAM. EXT. = $D + \delta_1 + 2e$
 DIAM. INT. = $d - \delta_2 - 2e$
 HAUTEUR = $H + \delta_3 + 2e$
 voir document.
 VACUMSCHELZE

SENSIBILITE DU TRANSFO
s= 4,1522 nV/nA

$$s = \frac{R_x}{N_T} \quad \eta \text{ densite' de l'ultraperm.}$$

Démarche "Analyse"

TORE MAGNET.
TRANSFO DE MESURE

ULTRAPERM 10
QUALITE U-030
TRAIT. FIX 022/1
EPAIS. DE BANDE=0.03 MM.

choix du matériel magnétique
voir paragraphe 1.2.6 (Pages 11 à 18)

ANALYSE	question: ?	Algorithmes de calcul
dinensions en m.	Réponse: =	
DIAM. EXT.=289.0	? →	D
DIAM. INT.=190.0	? →	d
HAUT.=50.0	? →	H
N=1/2 NBR. DE SPIRES N=6	? →	$N_T = 2N$ 1
R=CHARGE EN OHM R=50.000	? →	R_s
SENSIBILITE DEMANDEE s=4.1667 nV/nA	= ←	$\delta = \frac{R_s}{Z_T}$ voir paragraphe 1.2.10 (Pages 24 à 25) 2
CALIBRATION Nc=1	? →	N_c R_c voir paragraphe 1.2.11 (Pages 25 à 31) $\delta = \frac{1}{1 + \frac{R_c}{R_s} \cdot \left(\frac{N_T}{N_c}\right)^2}$
Rc=100.000	? →	
effets equival. s*=0.9965.s	= ←	$\left. \begin{aligned} \delta^* &= (1-\delta) \cdot \delta \\ R^* &= (1-\delta) \cdot R_s \\ T^* &= \frac{1}{1-\delta} \cdot T \end{aligned} \right\}$
R*=49.827	= ←	
T*=1.003.T	= ←	

suite page suivante

RESULTATS

SECTION MAGN. EN CM²
S=19.80

LONG. MAGN. EN CM.
l=75.24

INDUCT. TOT. EN HENRY
valeur à 1 khz.
minim:
L=22.14E-3
nominale:
L=29.52E-3

CONST. DE TEMPTS EN SEC.
reponse indicielle
minim:
T=585.8E-6
nominale:
T=673.3E-6

FREQ. DE COUPURE EN HZ.
maxim:
Fc=315.2E8
nominale:
Fc=236.4E8

INDUCT. TOT. A F=Fc
valeur en henry
minim:
L=25.16E-3
nominale:
L=33.55E-3

PERMEABILITE REL.
valeur pour f=fc
minim:
μ=52.848.8
nominale:
μ=78.453.3

VOLUME MAGN. EN CM³
V=1.489.77

POIDS EN KG.
P=12.961

ENCOMBREMENT TOTAL EN MM
DIAM. EXT.=298.0
DIAM. INT.=182.5
HAUTEUR=57.5

SENSIBILITE DU TRANSFO
s= 4.1522 nV/nA

η=0.8 voir paragraphe 1.2.1
(pages 3 à 5)

$$S_{cm^2} = \frac{D_{cm} - d_{cm}}{2} \cdot H_{cm} \cdot \eta$$

$$l_{cm} = \frac{D_{cm} + d_{cm}}{2} \cdot \pi$$

$$L_{1kHz} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot \mu_{1kHz} \cdot \frac{S_{cm^2}}{l_{cm}} \cdot (N_T)^2$$

$$(L_{1kHz})_{min} = 0.75 L_{1kHz}$$

$$(L_{1kHz})_{nom.} = L_{1kHz}$$

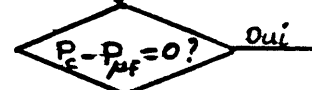
$$\mu_E \cdot f_c = \frac{R_n \cdot l_{cm}}{8\pi^2 \cdot 10^{-9} \cdot (N_T)^2 \cdot S_{cm^2}}$$

$$\mu_E \cdot f_c \rightarrow E$$

$$10^3 H_z \rightarrow F$$

$$(\mu_{1kHz})_{min} = 0.75 \mu_{1kHz} \rightarrow MU$$

$$(F \cdot MU) \rightarrow P_{\mu f}$$



$$(F \cdot \frac{E}{P_{\mu f}}) \rightarrow F$$

$$(\mu_{f/min}) = 0.75 \cdot g(f=F) \rightarrow MU$$

$$T_{min.} = \frac{1}{2\pi(F)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mu_E)_{min} = (MU) \\ (\mu_E)_{nom.} = \frac{(MU)}{0.75} \end{array} \right.$$

$$T_{nom.} = T_{min.} \cdot \frac{1}{0.75}$$

$$F_c \max = (F)$$

$$F_c \text{ nom.} = 0.75(F)$$

$$(L_f)_{min} = T_{min.} \cdot R_n$$

$$(L_f)_{nom.} = T_{nom.} \cdot R_n$$

$$V_{cm^3} = S_{cm^2} \cdot l_{cm}$$

$$P_{kg} = V_{cm^3} \cdot 10^{-9} \cdot 8,7^y$$

$$DIAM. EXT. = D + \delta_1 + 2e$$

$$DIAM. INT. = d - \delta_2 - 2e$$

$$HAUTEUR = H + \delta_3 + 2e$$

$$\delta = \frac{R_n}{N_T}$$

y densité de l'ultraperm.

4

5

6

2.2 Compléments sur les cheminements

2.2.1. Repère ① : concerne l'enroulement secondaire

- Le nombre total de spires secondaires est prévu comme étant pair; ceci de façon à pouvoir obtenir un signal en mode différentiel (fig. 2.1)

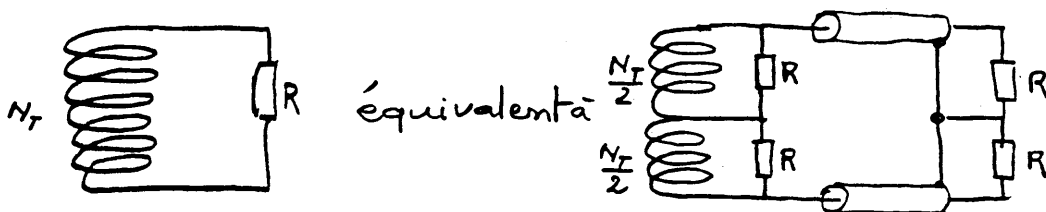


Fig. 2.1

- Dans la démarche "synthèse" l'utilisateur fixe le diamètre intérieur du tore. Cette dimension étant dépendante de celle de la chambre à vide est considérée comme une donnée.

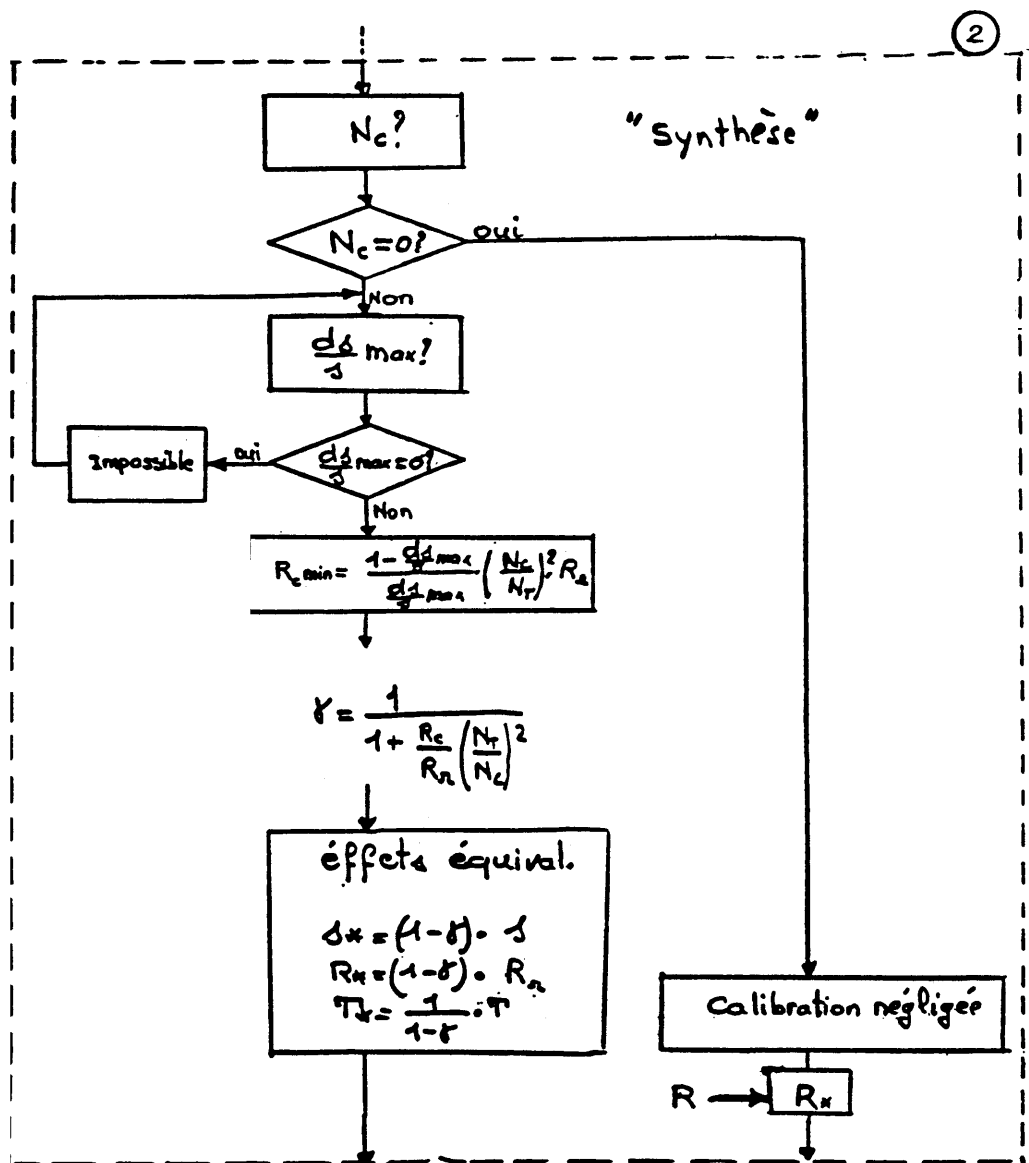
2.2.2. Repère ② : concerne l'enroulement de calibration et son effet.

A la fois dans les démarches "synthèse" et "Analyse", le programme laisse la possibilité de négliger les effets de l'enroulement de calibration en faisant $N_c = 0$.

Par contre dans la démarche "synthèse" uniquement : si on a fait $N_c \neq 0$ et qu'on demande une erreur relative $\frac{d_s}{s}$ max nulle, le programme répond "impossible" et pose la question " $\frac{d_s}{s}$ max?". La valeur de la résistance R étant fixée, il est en effet théoriquement

impossible dans ce cas d'avoir une valeur $\frac{d\delta}{\delta} = 0$.
 A la figure 2.2 on trouvera l'organigramme complet
 du repère 2 pour la "synthèse".

A la figure 2.3 on trouvera l'organigramme du repère 2
 pour l'analyse.



le calcul sera fait pour
 obtenir la constante de
 temps demandée.

RESULTATS
 ⋮

} signifie que les calculs sont faits à
 partir de la constante de temps T
 demandée et de la valeur R_x trou-
 duisant l'effet équivalent de l'en-
 roulement de calibration et de sa char-
 ge R_c .

fig. 2.2

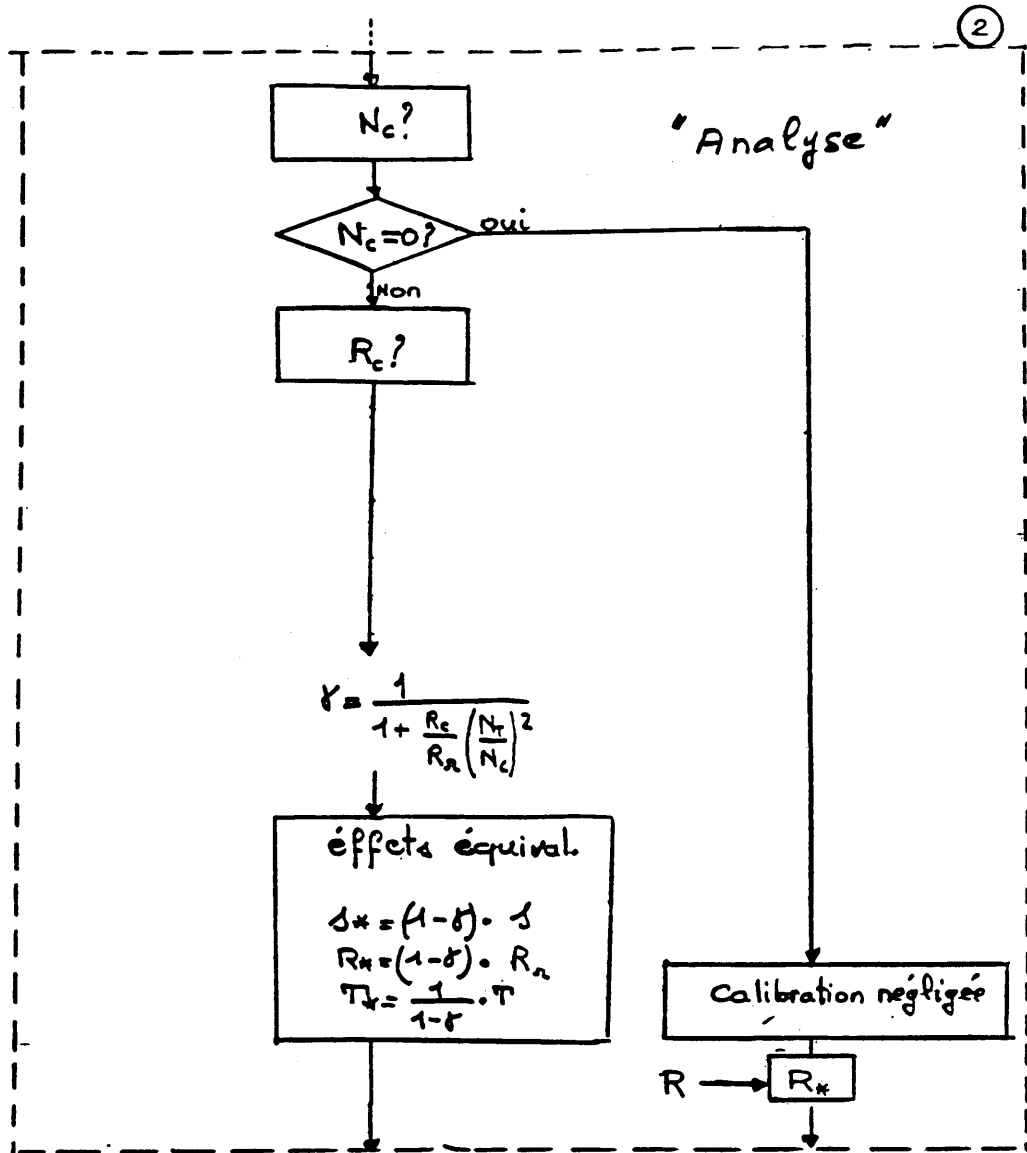


Fig. 2.3

On remarque facilement que pour ce qui concerne le repère δ , les cheminements de la "synthèse" et de "l'analyse" peuvent être facilement imbriqués.

2.2.3. Repère ③ : concerne le calcul des dimensions du tore :

L'expression de l'inductance secondaire est

$$L_f = \mu_f \cdot \mu_0 \cdot \frac{S}{l} \cdot (N_T)^2 \quad \text{voir relation (44).}$$

où

L_f = valeur de l'inductance en Henry à la fréquence f ,

μ_f = perméabilité relative à la fréquence f ,

μ_0 = perméabilité absolue $= 4\pi \cdot 10^{-7}$ en $\frac{\text{Tesla} \cdot \text{mètre}}{\text{Ampère}}$,

S = section magnétique du tore en mètre carré,

l = longueur magnétique du tore en mètre,

N_T = nombre total de spires secondaires.

On aura donc en exprimant S et l en cm^2 et cm :

$$L_f \underset{\text{Henry}}{=} \mu_f \times 4\pi 10^{-7} \times \frac{S_{\text{cm}^2} \times 10^{-4}}{l_{\text{cm}} \times 10^{-2}} \times (N_T)^2$$

$$L_f \underset{\text{Henry}}{=} 4\pi \cdot 10^{-9} \times \mu_f \times \frac{S_{\text{cm}^2} \times (N_T)^2}{l_{\text{cm}}}$$

o. si on prend $\mu_f = \mu_{f_c} = g (f = f_c)$

$$\boxed{L_{f_c} = 4\pi 10^{-9} \mu_{f_c} \times \frac{S_{\text{cm}^2} \times (N_T)^2}{l_{\text{cm}}}} \quad (71)$$

La section magnétique est

$$S_{\text{cm}^2} = H_{\text{cm}} \times \frac{D_{\text{cm}} - d_{\text{cm}}}{2} \cdot \eta \quad \text{voir relation (13)}$$

La longueur magnétique est :

$$l_{cm} = \pi \times \frac{D_{cm} + d_{cm}}{2} \quad \text{voir relation (14)}$$

Si on suppose la section carré (voir remarques page 4)

$$H_{cm} = \frac{D_{cm} - d_{cm}}{2}$$

d'où

$$\frac{S_{cm^2}}{l_{cm}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \eta \frac{(D_{cm} - d_{cm})^2}{D_{cm} + d_{cm}} \quad (72)$$

En portant cette valeur (72) dans la relation (71) on obtient:

$$L_{fc} = 4\pi \cdot 10^{-9} \times \mu_{fc} \times \eta \times (N_T)^2 \times \frac{1}{2\pi} \frac{(D_{cm} - d_{cm})^2}{D_{cm} + d_{cm}}$$

soit :

$$L_{fc} = 2 \cdot 10^{-9} \cdot \eta \cdot \mu_{fc} \times (N_T)^2 \times \frac{(D_{cm} - d_{cm})^2}{D_{cm} + d_{cm}} \quad (73)$$

La valeur de L_{fc} correspondant à la constante de temps T demandée doit être :

$$\boxed{L_{fc} = T \cdot R^*} \quad (74)$$

Pour que le calcul des dimensions qui sera fait à partir de la relation (73) corresponde au cas le plus défavorable on prend

$$\boxed{(\mu_{fc})_{min} = 0,75 \mu_{fc}} \quad (75)$$

$$\text{avec } \mu_{fc} = g(f = f_c)$$

d'où

$$T \cdot R_{*} = L_{f_c} = \underbrace{2 \cdot 10^{-9} \cdot D \cdot (\mu_{f_c})_{\min} \cdot (N_T)^2}_a \cdot \frac{(D_{cm} - d_{cm})^2}{D_{cm} + d_{cm}}$$

En désignant par "a" la valeur complètement calculable ;

$$a = 2 \cdot 10^{-9} \cdot D \cdot (\mu_{f_c})_{\min} \cdot (N_T)^2$$

on obtient

$$L_{f_c} = a \cdot \frac{(D_{cm} - d_{cm})^2}{D_{cm} + d_{cm}}$$

d'où

$$L_{f_c} (D_{cm} + d_{cm}) = a (D_{cm})^2 + a (d_{cm})^2 - 2a D_{cm} \cdot d_{cm}$$

d'où encore

$$a (D_{cm})^2 - (2a d_{cm} + L_{f_c}) \cdot D_{cm} + [a (d_{cm})^2 - L_{f_c} \cdot d_{cm}] = 0$$

En considérant D_{cm} comme inconnue, on obtient :

$$D_{cm} = \frac{2a d_{cm} + L_{f_c} \pm \sqrt{(2a d_{cm} + L_{f_c})^2 - 4a(a d_{cm}^2 - L_{f_c} \cdot d_{cm})}}{2a}$$

En développant et simplifiant l'expression sous la racine,

on obtient :

$$D_{cm} = \frac{L_{f_c} + 2a d_{cm} \pm \sqrt{L_{f_c}^2 + 8L_{f_c} \cdot a \cdot d_{cm}}}{2a} \quad (76)$$

Des deux solutions données par la relation (76), seule la solution donnant

$$D_{cm} - d_{cm} > 0$$

convient.

Or de la relation (76) on tire :

$$D_{cm} - d_{cm} = \frac{L_{fc} \pm \sqrt{L_{fc}^2 + 8L_{fc} \cdot a \cdot d_{cm}}}{2a}$$

D'une façon évidente seule la solution :

$$D_{cm} - d_{cm} = \frac{L_{fc} + \sqrt{L_{fc}^2 + 8L_{fc} \cdot a \cdot d_{cm}}}{2a} > \phi$$

est la bonne d'où l'algorithme de calcul de D_{cm} :

$$D_{cm} = \frac{L_{fc} + 2a \cdot d_{cm} + \sqrt{L_{fc}^2 + 8L_{fc} \cdot a \cdot d_{cm}}}{2a} \quad (77)$$

On obtient alors la valeur de H_{cm} par la relation :

$$H_{cm} = \frac{D_{cm} - d_{cm}}{2} \quad (78)$$

Si la valeur de D_{cm} trouvée en (77) est telle que

$$D_{cm} > D_{max}$$

D_{max} étant une limite donnée par le fournisseur de tore, on

obtiendra les dimensions en prenant :

$$D_{cm} = D_{max}$$

et en calculant la valeur de H_{cm} en reprenant

les expressions de S et l sous la forme :

$$S_{cm} = H_{cm} \times \frac{D_{max} - d_{cm}}{2}$$

$$l_{cm} = \pi \frac{D_{max} + d_{cm}}{2}$$

d'où

$$L_{fc} = 4\pi 10^{-9} \cdot (\mu_{fc})_{min} \times (N_T)^2 \times D \cdot \frac{D_{max} - d_{cm}}{D_{max} + d_{cm}} \times \frac{H_{cm}}{\pi}$$

$$L_{fc} = \underbrace{4 \cdot 10^{-9} D \cdot (\mu_{fc})_{min} \times (N_T)^2}_{2.a} \cdot \frac{D_{max} - d_{cm}}{D_{max} + d_{cm}} \times H_{cm}$$

d'où encore :

$$T \times R_{*} = L_{fc} = 2.a \frac{D_{max} - d_{cm}}{D_{max} + d_{cm}} \cdot H_{cm}$$

et finalement :

$$\boxed{H_{cm} = \frac{L_{fc} (D_{max} + d_{cm})}{2.a (D_{max} - d_{cm})} \quad (79)}$$

Toutes les valeurs des dimensions sont arrondies au millimètre entier.

2.2.4. Repère (4) : concerne le calcul de l'inductance à 1 kHz

Le calcul des dimensions fait au repère 3, considère comme valeur de l'inductance la valeur donnée par

la relation (74) dans le cas de la synthèse et correspond à la fréquence de coupure. Compte tenu qu'en outre :

- dans le cas de la synthèse les valeurs obtenues par le calcul pour D_{em} et H_{em} sont pour la pratique arrondies au millimètre entier,
- dans le cas de l'analyse seules les dimensions sont connues, la constante de temps étant à calculer,

il apparaît nécessaire et plus exact, dans les deux cas de calculer l'inductance à 1 kHz à partir des dimensions du tore, du nombre de spire et de la valeur de la perméabilité relative à 1 kHz.

2.2.5 Repère ⑤: concerne la constante de temps de la réponse
indicielle, la fréquence de coupure et la valeur
de la perméabilité relative pour $f = f_c$.

Dans les deux démarches "synthèse" ou "analyse" les cheminements qui précèdent nous ont conduit à connaître toutes les dimensions du tore ainsi que les valeurs de son contexte d'utilisation (R, R_c, N_c, N_T)

- Nous ne connaissons ni la valeur de f_c ni la valeur de μ_{fc} .

- par contre nous avons la valeur du produit $P(f_c) = \mu_{f_c} \cdot f_c$ qui est complètement calculable. Il est donné par la relation (46) qui devant compte tenu des unités utilisées et de l'algorithme $g(f_c)$ donnant la perméabilité μ_{f_c} :

$$P(f_c) = g(f_c) \cdot f_c = \frac{\ell_{cm} \cdot R_{\alpha}}{8 \pi^2 \cdot 10^{-9} \cdot S_{cm^2} \cdot (N_T)^2} \quad (80)$$

Le problème se pose ainsi au niveau d'une fonction

$$P(f) = g(f) \cdot f$$

dont la seule variable indépendante (donc accessible) est la valeur de la fréquence. La valeur de la fonction $P(f)$ ne peut être calculée qu'en deux étapes. Si on prend $f = f_i$, on calcule

$$1- \mu_{f_i} = g(f_i)$$

$$2- P(f_i) = g(f_i) \cdot f_i$$

- On connaît complètement une valeur

$$P(f_1) = P(1 \text{ kHz}) \text{ avec } f_1 = 10^3 \text{ Hz et } \mu_{1 \text{ kHz}} = g(f_1)$$

Il faut donc trouver une stratégie connaissant $f_1, g(f_1), P(f_1)$ et $P(f_c)$ permettant de calculer des valeurs successives f_2, f_3, \dots telles que les fon-

tions $P(f_2), P(f_3) \dots$ qui en résultent convergent vers la valeur $P(f_c)$. La fréquence f_x donnant alors la valeur $P(f_x)$ telle que $P(f_c) - P(f_x) = 0$ sera la valeur cherchée f_c . On obtiendra en même temps la valeur $g(f_x) = g(f_c) = \mu_{f_c}$.

Etablissement de la stratégie :

Remarques préliminaires :

La fonction $P(f_x) = g(f_x) \cdot f_x = \mu_{f_x} \cdot f_x$ a la caractéristique d'être dans la bande passante, une fonction toujours croissante (voir paragraphe 1.2.6). Donc si on considère une fréquence $\alpha \cdot f_x$:

$P(\alpha \cdot f_x) > P(f_x)$ si $\alpha > 1$
$P(\alpha \cdot f_x) < P(f_x)$ si $\alpha < 1$

(81)

Par ailleurs la fonction $g(f_x)$ est toujours décroissante, donc

$P(\alpha \cdot f_x) > P(f_x)$ entraîne $g(\alpha \cdot f_x) < g(f_x)$
$P(\alpha \cdot f_x) < P(f_x)$ entraîne $g(\alpha \cdot f_x) > g(f_x)$

(82)

Stratégie :

Considérons au départ les valeurs connues :

$P(f_1), f_1$ et $g(f_1)$ avec $f_1 = 10^3 \text{ Hz}$.

et la valeur globale $P(f_c)$ donnée par la relation (80)

A départ de la valeur $P(f_1)$, l'erreur est

$$\Delta P_1 = P(f_1) - P(f_c) \quad (83)$$

soit encore

$$P(f_1) \left[1 - \frac{\Delta P_1}{P(f_1)} \right] = P(f_c)$$

$$g(f_1) \cdot \left[f_1 \cdot \frac{P(f_1) - \Delta P_1}{P(f_1)} \right] = P(f_c)$$

soit finalement

$$g(f_1) \cdot (\alpha_1 \cdot f_1) = P(f_c)$$

$$\text{avec } \alpha_1 = \frac{P(f_1) - \Delta P_1}{P(f_1)} = \frac{P(f_c)}{P(f_1)} \quad (84)$$

Considérons maintenant la fréquence f_2 telle que :

$$\boxed{f_2 = \alpha_1 \cdot f_1 = \frac{P(f_c)}{P(f_1)} \cdot f_1} \quad (85)$$

Avec cette fréquence f_2 on obtiendra une valeur

$$P(f_2) = g(f_2) \cdot f_2$$

donnant une erreur :

$$\Delta P_2 = P(f_2) - P(f_c)$$

$$\Delta P_2 = P(\alpha_1 \cdot f_1) - P(f_c) \quad (86)$$

Considérons la fréquence f_2

$$f_2 = \alpha_1 \cdot f_1 = f_1 \cdot \frac{P(f_c)}{P(f_1)} = \frac{g(f_c)}{g(f_1)} \cdot f_c \quad (87)$$

Au départ deux cas peuvent se présenter :

1^{er} cas : $P(f_1) > P(f_c)$ entraînant $\alpha_1 < 1$ (relation (84))

Dans ce cas d'après les relations (81) et (82)

$$P(f_2) = P(\alpha_1 \cdot f_1) \text{ est } < P(f_1)$$

et

$$g(f_1) < g(f_c)$$

d'où avec la relation (87)

$$f_2 > f_c$$

$$\text{et } P(f_2) > P(f_c).$$

On aura donc toujours :

$$P(f_c) < P(f_2) < P(f_1) \quad (88)$$

c'est à dire l'erreur

$$[\Delta P_2 = P(f_2) - P(f_c)] \text{ est } < [\Delta P_1 = P(f_1) - P(f_c)]$$

si maintenant à partir de la valeur $P(f_2)$ comme valeur de départ on applique la même stratégie, on trouve :

$$g(f_2) \cdot \alpha_2 \cdot f_2 = P(f_c)$$

$$\text{avec } \alpha_2 = \frac{P(f_c)}{P(f_2)}$$

étant donné la relation (88), on a encore $\alpha_2 < 1$

En prenant la fréquence

$$f_3 = \alpha_2 \cdot f_2 = \frac{P(f_c)}{P(f_2)} \cdot f_2$$

on obtiendra une valeur $P(f_3)$ telle que:

$$P(f_0) < P(f_3) < P(f_2) < P(f_1)$$

et l'erreur

$$\Delta P_3 < \Delta P_2 < \Delta P_1$$

Les valeurs successives $P(f_n)$ calculées avec cette stratégie convergent bien vers la valeur $P(f_0)$.

2^{ème} cas: $P(f_1) < P(f_0)$ entraînant $\alpha_1 > 1$ (relation (84))

Dans ce cas d'après les relations (81) et (82):

$$P(f_2) = P(\alpha_1 \cdot f_1) \text{ est } > P(f_1)$$

et $g(f_1) > g(f_2)$

d'où avec la relation (87)

$$f_2 < f_0$$

et donc

$$P(f_2) < P(f_0)$$

On aura donc toujours

$$P(f_1) < P(f_2) < P(f_0) \quad (89)$$

c'est à dire l'erreur

$$|\Delta P_2| = |P(f_2) - P(f_0)| < |\Delta P_1| = |P(f_1) - P(f_0)|$$

si maintenant à partir de la valeur $P(f_2)$ comme valeur de départ, on applique la même stratégie,

on trouve

$$g(f_2) \cdot \alpha_2 \cdot f_2 = P(f_c)$$

$$\text{avec } \alpha_2 = \frac{P(f_c)}{P(f_2)}$$

Etant donné la relation (89) on a encore $\alpha_2 > 1$.

En prenant la fréquence

$$f_3 = \alpha_2 \cdot f_2 = \frac{P(f_c)}{P(f_2)} \cdot f_2.$$

On obtendra une valeur $P(f_3)$ telle que

$$P(f_1) < P(f_2) < P(f_3) < P(f_c)$$

c'est à dire l'erreur

$$|\Delta P_3| < |\Delta P_2| < |\Delta P_1|$$

Les valeurs successives $P(f_n)$ calculées avec cette stratégie convergent bien dans ce cas aussi vers la valeur $P(f_c)$.

L'organigramme dessiné dans le repère 5, traduit exactement la stratégie qui veut d'être exposée.

2.2.6 Repère ⑥ : concerne l'encombrement total

2.4.2.3 Protective boxes

The most reliable way to protect toroidal strip-wound cores against all likely mechanical stresses is to insert them in protective boxes of either plastic or aluminium.

Protective boxes are made by VAC or supplied by the customer, as desired.

Table 6 gives guidance on sizes, based on the nominal dimensions of the toroidal core.

The outer dimensions of our standard cores in protective boxes can be seen in Table 10.

The list below gives the materials in which the boxes are supplied.

Fix 030-033 (Plastic boxes)

We use:

Phenolic moulding materials

(to DIN 7708, Part 2)

for samples and small batches;

polyamide (nylon) moulding compounds, reinforced with glass fibre (to DIN 16773) for larger batches.

The maximum temperature for these materials is 125 °C. For temperatures above 125 °C, e.g. up to 140 °C, special plastics can be used.

Fix 030-033 (Aluminium protective boxes)

For even higher temperature applications aluminium boxes with a lid of glass fabric and silicone resin (to DIN 7735) and a thermal stability of up to 180 °C are chiefly used.

With both plastic and aluminium boxes the following embedding procedures are possible:

Fix-020 and Fix-030: Toroidal cores inserted with addition of silicone grease.

Fix-021 and Fix-031: Toroidal cores inserted without additional agents.

Fix-022 and Fix-032: Toroidal cores cast in silicone rubber.

Fix-023 and Fix-033: Toroidal cores inserted with foam rubber rings.

The method of manufacture of the boxes and their provision by us or by our customers is indicated by an additional digit after the fixing code:

Fix.../1: Machined boxes supplied by VAC

Fix.../2: Injection-moulded or extruded boxes, supplied by VAC.

Fix.../3: Boxes suitable for vacuum casting, supplied by VAC.

Fix.../4: Boxes supplied by customer.

Examples:

Fix-020/1 Cores inserted in machined plastic boxes supplied by VAC with addition of silicone grease.

Fix-032/4 Cores cast with silicone rubber in aluminium boxes supplied by customer.

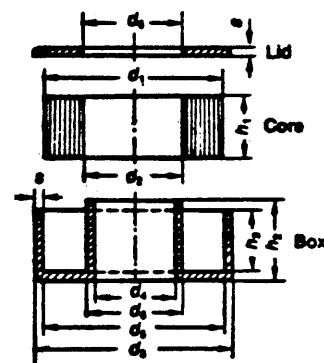
Note:

With the exception of fixings Fix-020/3, Fix-030-3, Fix-022 and Fix-032, the box lids are removable.

Table 6 Dimensioning of protective boxes (dimensions in mm)

Outer diameter of toroidal core (mm) D	Box sizes			Fix-020... Plastic s (mm)	Fix-030... Aluminium s (mm)
	d_1 (mm) $D + \delta_1$	d_2 (mm) $d_1 - \delta_2$	h_2 (mm) $H + \delta_3$	e	e
10- 25	$d_1 + 1.0$	$d_2 - 0.8$	$h_2 + 0.6$	0.8	-
≤ 50	$d_1 + 1.5$	$d_2 - 0.8$	$h_2 + 0.8$	1.0	0.8
≤ 80	$d_1 + 1.7$	$d_2 - 1.0$	$h_2 + 1.0$	1.2	1.0
≤ 100	$d_1 + 2.0$	$d_2 - 1.5$	$h_2 + 1.2$	1.5	1.0
≤ 160	$d_1 + 2.5$	$d_2 - 1.8$	$h_2 + 1.7$	1.8	1.0
≤ 200	$d_1 + 3.0$	$d_2 - 2.0$	$h_2 + 1.8$	2.5	1.0
≤ 320	$d_1 + 4.0$	$d_2 - 2.5$	$h_2 + 2.5$	2.5	2.0
≤ 500	$d_1 + 5.0$	$d_2 - 3.0$	$h_2 + 3.0$	-	2.0

Explanation: $d_3 = d_1 + 2s$; $d_4 = d_2 - 2s$; $h_2 = h_1 + 2s$



3 - VERIFICATION EXPERIMENTALE

Nous avons appliqué le programme TORCA pour l'analyse de deux transformateurs non encore installés (MTRP et mesure des H⁻). Etant donné que nous avons utilisé l'enroulement de calibration comme primaire nous avons fait $N_c = 0$, c'est-à-dire négligé les effets de l'enroulement de calibration. Les résultats des analyses et mesures faites sont aux pages 54 et 55.

ANALYSE TRANFO MTR ∅∅

**TORE MAGNET.
TRANSFO DE MESURE**

ULTRAPERM 10
QUALITE U-030
TRAIT. FIX 022/1
EPAIS. DE BANDE=0.03 MM.

ANALYSE
diagnostics en mA.

DIAM. EXT.=138,0

DIAM. INT.=92,0

HAUT.=17,5

N=1/2 NBR. DE SPIRES
N=10

R=CHARGE EN OHM
R=50,000

SENSIBILITE DEMANDEE
s=2,5000 mV/mA

CALIBRATION
negligee

RESULTATS

SECTION MAGN. EN CM²
S=3,22

LONG. MAGN. EN CM.
l=36,13

INDUCT. TOT. EN HENRY
valeur a 1 khz.

minima:
L=20,83E-3
nominale:
L=27,78E-3

CONST. DE TEMPS EN SEC.
reponse indicielle

minima:
T=469,7E-6
nominale:
T=626,2E-6

FREQ. DE COUPURE EN HZ.

maxima:
Fc=338,9E0
nominale:
Fc=254,2E0

INDUCT. TOT. A F=Fc
valeur en henry

minima:
L=23,48E-3
nominale:
L=31,31E-3

μ=PERMEABILITE REL.
valeur pour f=fc

minima:
μ=52418,0
nominale:
μ=69890,7

VOLUME MAGN. EN CM³
V=116,33

POIDS EN KG.
P=1,012

ENCOMBREMENT TOTAL EN MM

DIAM. EXT.=144,1
DIAM. INT.=86,6
HAUTEUR=22,8

SENSIBILITE DU TRANSFO
s= 2,5000 mV/mA

valeur mesurée au pont
de mesure avec f=1kHz

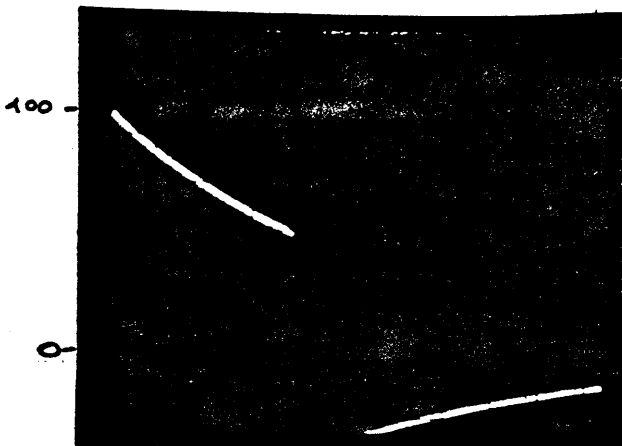
} L = 24,9 mH

Mesuré à partir de la
réponse indicielle

} T = 555,4 μsec

Mesuré à partir de
la réponse indicielle

} L = R.T = 27,7 mH



Réponse indicielle

$$T = \frac{T_{50\%}}{\ln 2} = \frac{385 \cdot 10^{-6}}{0,693} = 555,4 \cdot 10^{-6}$$

Scope: 100 μs/div

ANALYSE TRANSFO POUR LES H⁻

**TORE MAGNET.
TRANSFO DE MESURE**

ULTRAPERM 10
QUALITE U-030
TRAIT. FIX 022/1
EPAIS. DE BANDE=0.03 MM.

ANALYSE
dimensions en mm.

DIAM. EXT.=265,0

DIAM. INT.=195,0

HAUT.=28,0

N=1/2 NBR. DE SPIRES
N=10

R=CHARGE EN OHM
R=50,000

SENSIBILITE DEMANDEE
s=2,5000 mV/mA

CALIBRATION
negligee

RESULTATS

SECTION MAGN. EN CM²
S=7,84

LONG. MAGN. EN CM.
l=72,26

INDUCT. TOT. EN HENRY
valeur a 1 khz.

minima:
L=25,36E-3
nominale:
L=33,81E-3

CONST. DE TEMPTS EN SEC.
reponse indicielle

minima:
T=585,9E-6
nominale:
T=781,2E-6

FREQ. DE COUPURE EN HZ.

maxima:
Fc=271,6E0
nominale:
Fc=203,7E0

INDUCT. TOT. A F=Fc
valeur en henry

minima:
L=29,30E-3
nominale:
L=39,06E-3

μ=PERMEABILITE REL.

valeur pour f=fc
minima:
μ=53717,0
nominale:
μ=71622,7

VOLUME MAGN. EN CM³
V=566,49

POIDS EN KG.
P=4,928

ENCOMBREMENT TOTAL EN MM
DIAM. EXT.=274,0
DIAM. INT.=187,5
HAUTEUR=35,5

SENSIBILITE DU TRANSFO
s= 2,5000 mV/mA

valeur mesurée au pont
de mesure avec f=1 kHz:

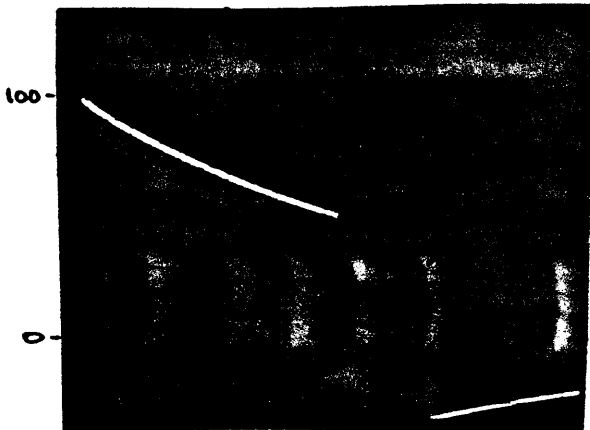
} L = 32,9 mH

Mesuré à partir de la
réponse indicielle:

} T = 766,9 μsec.

Mesuré à partir de
la réponse indicielle:

} L = R.T = 38,4 mH



Réponse indicielle

$$T = \frac{T_{60\%}}{\ln 2} = \frac{533 \cdot 10^{-6}}{0,693}$$

$$= 768,9 \cdot 10^{-6}$$

Scope: 100μs/div

On peut constater avec la vérification expérimentale, que les valeurs données par le calcul du programme correspondent aux valeurs mesurées.

4 - REMARQUE COMPLÉMENTAIRE

L'un des points importants lorsqu'on calcule un transformateur est la constante de temps de la réponse indicielle de façon à laisser passer sans déformation un signal rectangulaire de durée égale à celle des "bunches". On calculera par exemple $T \geq 100 \cdot T_{\text{bunch}}$ pour que l'effet "dérivateur" du transfo soit négligeable.

La remarque que je veux faire concerne les effets dérivateurs (couplage capacitif entre étages de l'électronique par exemple) qu'on serait amené à introduire en cascade. La réponse indicielle résultante peut être très fortement dégradée. Pour marquer l'importance de ce phénomène disons que si le signal donné par un transformateur de constante de temps T , est transmis par un couplage capacitif de même constante de temps ($RC = T$), la constante de temps résultante se trouve diminuée de plus de moitié.

En effet si on considère deux transmittances "passe-bas" du premier ordre

$$G_1(p) = \frac{PT_1}{1+PT_1}$$

$$G_2(p) = \frac{PT_2}{1+PT_2}$$

Mises en cascade la transmittance résultante est

$$G_R(p) = \frac{P^2 T_1 T_2}{(1+PT_1)(1+PT_2)}$$

La réponse indicielle $I_i(p)$ à un échelon $\frac{I}{p}$ est donc

$$I_i(p) = I \frac{P T_1 T_2}{(1+PT_1)(1+PT_2)}$$

soit dans l'espace temporel:

$$i_i(t) = I \frac{\frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}$$

soit encore:

$$i_i(t) = I \frac{e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}}{1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

si $T_1 = T_2 = T$ la réponse est:

$$i_i(t) = I e^{-\frac{t}{T}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

A la figure 4 est représenté la réponse indicielle pour différentes valeurs de T_2 relativement à T_1 .

Pour chacune de ces réponses on a reperé le temps τ correspondant à 50% de l'amplitude initiale en faisant référence a la valeur $\tau = \tau_0$ lorsque $T_2 = \infty$.

On obtient :

$$T_2 = \infty$$

$$\tau = \tau_0$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2}$$

$$\tau = 0,31 \tau_0$$

$$T_2 = T_1$$

$$\tau = 0,43 \tau_0$$

$$T_2 = 2.T_1$$

$$\tau = 0,63 \tau_0$$

$$T_2 = 5.T_1$$

$$\tau = 0,81 \tau_0$$

$$T_2 = 10.T_1$$

$$\tau = 0,90 \tau_0$$

$$T_2 = 20.T_1$$

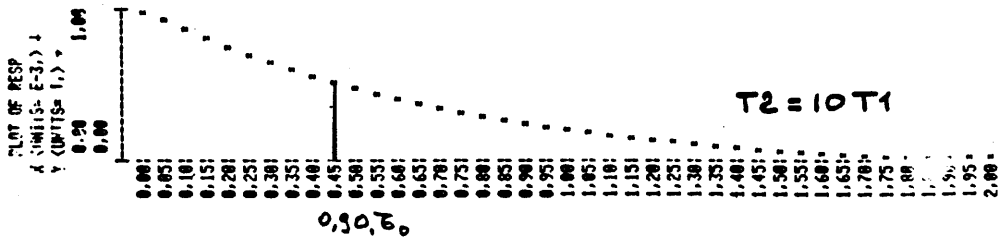
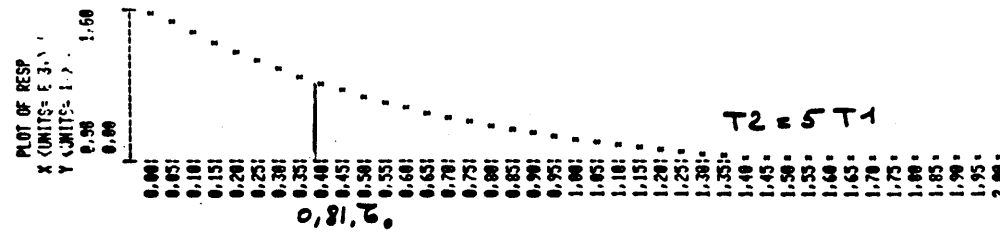
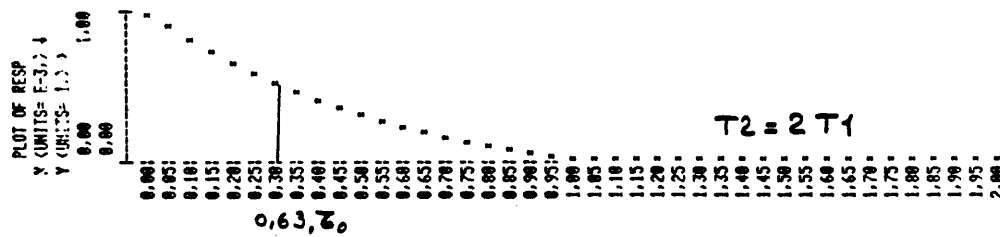
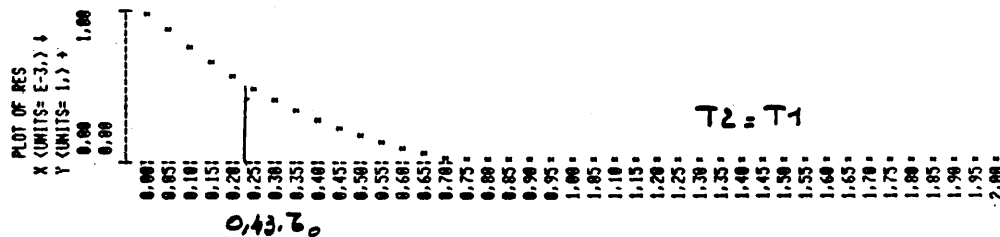
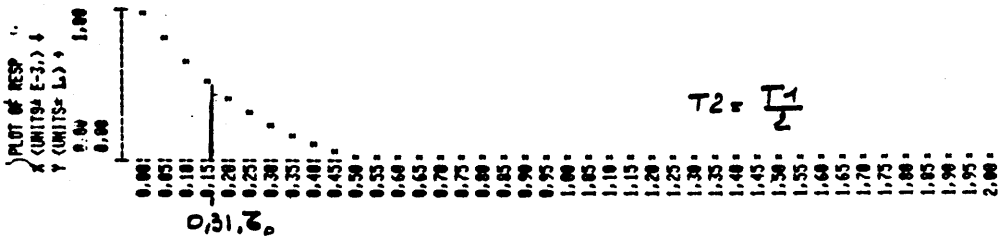
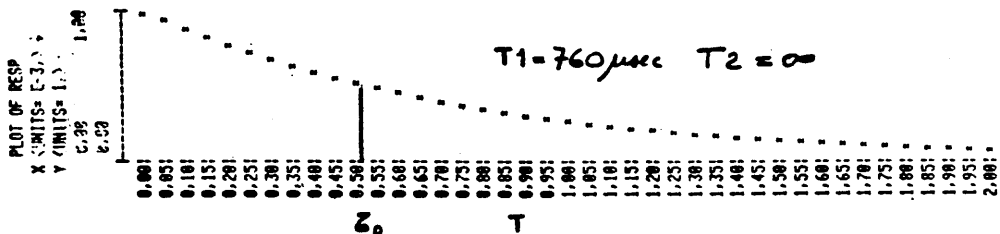
$$\tau = 0,98 \tau_0$$

5. BIBLIOGRAPHIE ET RAPPORT

Toroidal strip-wound cores VAC Publication 1983

Etude des Transformateurs de mesure par S. Battisti
CERN/MPS/CO 69-15

Fig. 4



Distribution

Groupe LEAR

D. ALLEN
E. ASSEO
E. BAECKERUD
S. BAIRD
J. BENGTSSON
M. CHANEL
J. CHEVALLIER
R. GALIANA
R. GIANNINI
F. IAZZOURENE
P. LEFEVRE
F. LENARDON
R. LEY
A. MACCAFERRI
D. MANGLUNKI
E. MARTENSSON
J.L. MARY
C. MAZELINE
D. MOEHL
G. MOLINARI
J.C. PERRIER
T. PETERSSON
P. SMITH
N. TOKUDA
G. TRANQUILLE
H. VESTERGAARD

Distribution (du résumé)

Personnel scientifique de la Division PS
/ed