PS/LEA/Note 86-14
24.11.1986

POSSIBILITE DE MESURE PRECISE DE LA PHASE DES OSCILLATIONS BETATRONIQUES A PARTIR D'UNE TRANSFORMEE DE FOURIER EN INTRODUISANT UN ALGORITHME DE MODULATION D'AMPLITUDE

Edgar ASSEO

Sommaire

1. INTRODUCTION ET RAPPELS

Ce travail a été motivé par des études sur les origines des perturbations dans LEAR[1] pour lesquelles la connaissance de la phase des oscillations bétatroniques était nécessaire.

Nous avions déjà, dans le rapport CERN-PS 85-9, développé une méthode d'obtention de la phase à partir des résultats donnés par une transformation de Fourier.

Nous verrons dans le courant de cette introduction les avantages de la méthode proposée ici.

Les brefs rappels nécessaires qui vont suivre se réfèrent au rapport cité et au contenu d'un rapport jaune en cours de préparation.

1.1 Rappel des causes d'erreurs

Une DFT (ou FFT) faite avec N échantillons $y(n.\Delta T)$ relevés à la fréquence $1/\Delta T$ sur un signal temporel $y(t)$, ne peut mettre en évidence d'une façon juste que les composantes de fréquences multiples de $\frac{1}{N.\Delta T}$. On peut dire que pour le spectre calculé par cette DFT, l'unité de mesure de la fréquence est $\frac{1}{N.\Delta T}$. On mesurera donc correctement une composante de fréquence

1) Travaux et MD de J. BENGTSSON et M. CHANEL.

$\frac{k}{N \cdot \Delta T}$ pour laquelle k est un entier c'est à dire dont la fréquence est une valeur rationnelle de l'unité de mesure.

Lorsque la réalité du signal temporel $y(n.\Delta T)$ n'entre pas dans ce cadre restrictif, le spectre obtenu par une DFT représente une image déformée de la réalité. Chacune des composantes de fréquence non rationnelle de l'unité de mesure, est distribuée sur toutes les raies de valeurs entières produites par la DFT. Cette distribution s'opère via le spectre propre à la fenêtre d'observation (la projectrice) qui se trouve attachée à chacune des composantes vraies de fréquence non rationnelle.

Si on considère une composante vraie de fréquence non rationnelle particulière (en supposant $\Delta T = 1$) :

$$q'_H = \frac{k'_H}{N} \qquad (k' \text{ n'est pas un entier})$$

et qu'on regarde la raie de fréquence rationnelle $\frac{k_0}{N}$ la plus proche, on y verra une représentation de la composante vraie dont en particulier la phase est entachée de deux types d'erreur :

a) une erreur dûe au fait que la composante lue sur la raie $\frac{k_0}{N}$ résulte de la distribution sur cette raie de la composante vraie de fréquence $\frac{k'_H}{N}$ (celle dont on veut mesurer la phase) la plus proche. Cette erreur sera dite d'irrationnalité principale (irrationnalité de la fréquence de la composante qu'on mesure). Cette erreur correspond à la phase de la projectrice lue en $\frac{k_0}{N}$ et ne dépend que de l'écart $(k'_H - k_0)$. On l'écrira

$$[d\,\phi]_1 = \phi_{proj.}\,(k'_H - k_0) \qquad (1)$$

La valeur de ce type d'erreur peut être très importante (valeur comprise entre 0 et $\pm\frac{\pi}{2}$). Elle présente cependant la particularité importante de s'annuler lorsque $k'_H - k = 0$:

$[d\phi]_1 = 0$ si $k'_H - k = 0$

$[d\phi]_1$ est d'autant plus petit que $(k' - k_0)$ est petit c'est à dire qu'on s'approche d'une condition de rationnalité pour la composante qu'on mesure.

b) Toutes les composantes vraies autres que celle qu'on mesure (couplage, bruit, spectre image) et dont les fréquences ne sont, pour la majeure partie d'entre elles, pas rationnelles de l'unité de mesure $\frac{1}{N}$, sont distribuées par la DFT et ramènent en particulier sur la raie $\frac{k_0}{N}$ une erreur $[d\phi]_2$. Cette erreur sera dite erreur des irrationnalités secondaires.

Cette erreur $[d\phi]_2$ peut être minimiser par le choix d'une stratégie (fenêtre sinus, choix du nombre N d'échantillons).

L'erreur total en phase, donnée par la DFT, peut donc être exprimée par :

$$[d\,\phi]_{total} = \underbrace{\phi_{Prog}(k'_H - k_0)}_{} + \underbrace{[d\,\phi]_2}_{} \qquad (2)$$

avec $\phi_{Prog}(k'_H - k_0) \gg [d\,\phi]_2$

L'erreur $\phi_{Prog}(k'_H - k_0)$ est connue analytiquement. L'expression en est simple dans le cas d'une oscillation monochromatique mais elle devient plus complexe lorsqu'il y a amortissement. Elle dépend en particulier du facteur δ de l'amortissement qui est inconnu à priori. Le moyen d'obtenir l'erreur minimum est alors de chercher à être dans la condition $k'_H - k_0 = 0$ ou en tout cas le plus petit possible.

Pour ce faire il apparait qu'il faut, idéalement, mesurer la fréquence "vraie" et obtenir une mesure :

$$(q'_H)_m = \frac{k'_H}{N}$$

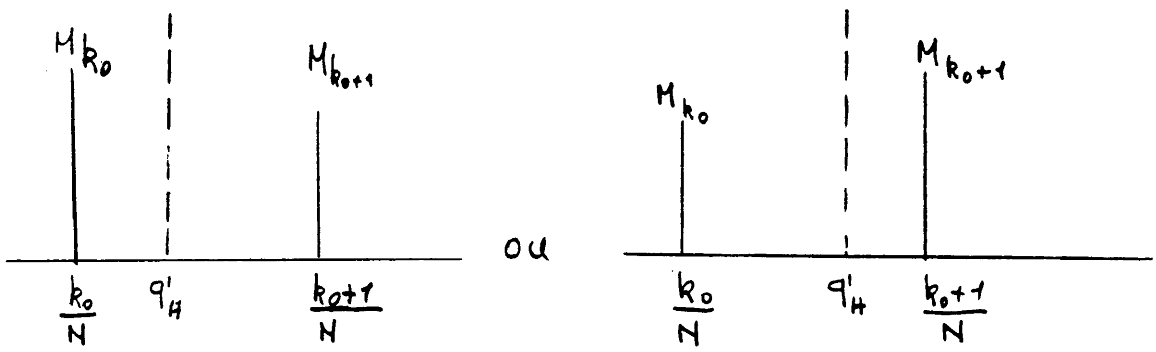
et chercher à faire une DFT de N1 échantillons telle que

$$(q'_H) = \frac{k_0}{N1} \quad \text{avec} \quad k_0 = K'_H$$

1.2 Rappel sur la mesure de la fréquence "vraie".

La méthode de l'interpolation analytique permet, en utilisant une stratégie simple, de mesurer la fréquence "vraie" à partir des modules des raies données par une DFT de N échantillons et qui appartiennent au lobe principale de la projectrice attachée à la composante qu'on mesure.

Soit donc M_{k_0} et M_{k_0+1} les modules des raies situées de part et d'autre de la fréquence "vraie" q'_H :



avec la fenêtre rectangulaire :

$$(q'_H)_m = \frac{1}{N}\left[k_0 + \frac{M_{k_0+1}}{M_{k_0+1} + M_{k_0}}\right]$$

avec la fenêtre sinus :

$$(q'_H)_m = \frac{1}{N}\left[k_0 + \frac{2 . M_{k_0+1}}{M_{k_0+1} + M_{k_0}} - \frac{1}{2}\right] \quad (3)$$

La méthode utilisant la fenêtre sinus permet d'obtenir une précision plus grande. On aura donc :

$$\left.\begin{aligned} (q'_H)_m &= q'_H + d(q'_H) \\ (k'_H)_m &= N.q'_H + N.d(q'_H) \end{aligned}\right\}$$

avec en general

$$\left[d(q'_H)\right]_{max} < \pm \frac{1}{40.N} \qquad (5)$$

1.3. Rappel sur la mesure de la phase

La méthode utilisée consistait, à partir de la valeur mesurée $(q'_H)_m$, d'obtenir, avec un algorithme de conversion « décimal → fraction », une valeur rationnelle $\frac{K_0}{N1}$ permettant l'approximation de $(q'_H)_m$. Cette approximation introduisait une erreur ε dont la valeur ne pouvait en principe être réduite que si on ne mettait pas de conditions limitatives au choix de $N1$:

$$(q'_H)_m = \frac{K_0}{N1} + \varepsilon$$

On ajoutait ainsi l'erreur ε à l'erreur $d(q'_H)$ de l'interpolation analytique. La méthode proposée ici évite complètement cet inconvénient.

2. PRINCIPE DE LA METHODE

L'idée que nous avons utilisée est la suivante.

Une oscillation vraie de fréquence q'_H et de phase Φ_q modulée en amplitude par une oscillation de fréquence f_m et de phase zéro, correspond à une réalité comportant deux oscillations:

- l'une de fréquence $q'_H + f_m$ et de phase ϕ_q,
- l'autre de fréquence $q'_H - f_m$ et de phase ϕ_q.

La modulation d'amplitude donne ainsi la possibilité de transposer la réalité d'une fréquence q'_H en la réalité d'une somme de deux fréquences modifiées (par le choix de f_m) avec conservation de la phase ϕ_q.

En choisissant correctement la fréquence de modulation f_m, on peut faire en sorte que l'une des deux fréquences transposées soit rationnelle dans une représentation spectrale donnée par une DFT de N1 échantillons. On a ainsi les possibilités:

$$q'_H + (f_m)_1 = \frac{K_0}{N1} \qquad \left(\text{dans ce cas } \frac{K_0}{N1} > q'_H\right) \tag{6}$$

soit $$\boxed{(f_m)_1 = \frac{K_0}{N1} - q'_H} \tag{7}$$

ou $$q'_H - (f_m)_2 = \frac{K_0}{N1} \qquad \left(\text{dans ce cas } \frac{K_0}{N1} < q'_H\right) \tag{8}$$

soit $$\boxed{(f_m)_2 = q'_H - \frac{K_0}{N1}} \tag{9}$$

Appliquons cette méthode à la mesure d'une oscillation "vraie":

$$y(n) = e^{-\frac{n}{\delta}} \cdot M_q \cos(2\pi q'_H \cdot n + \phi_{q_H})$$

δ = coefficient d'amortissement

q'_H = fréquence bétatronique vraie $= \frac{k'_H}{N}$

ϕ_{q_H} = phase vraie

M_q = Module de l'oscillation pour $n = 0$

La méthode de l'interpolation analytique permet la mesure exprimée par les relations (4) Si il y a un couplage on obtient aussi la mesure de :

$$(q'_V)_m = q'_V + d(q'_V)$$

L'application de la méthode de modulation d'amplitude ne peut se faire qu'à partir des mesures $(q'_H)_m$ ou $(q'_V)_m$.

Dans ce qui suit nous allons supposer que nous voulons mesurer l'oscillation horizontale H.

2.1 Calcul avec la modulation $(f_m)_1$

La fréquence de modulation sera

$$(f_m)_1 = \frac{K_0}{N1} - (q'_H)_m$$

d'où avec la relation (4)

$$(f_m)_1 = \frac{K_0}{N1} - q'_H - d(q'_H) \qquad (10)$$

Considérons les échantillons $y(n)$ et appliquons la modulation d'amplitude calculée par la relation (10). On obtient :

$$y_1(n) = e^{-\frac{n}{\delta}} M_q \underbrace{\cos(2\pi q'_H n + \phi_q)}_{\frac{A+B}{2}} \times \cos\Big[\underbrace{2\pi\Big(\frac{K_0}{N1} - q'_H - d(q'_H)\Big)n}_{\frac{A-B}{2}}\Big]$$

On calcule :

$$A = 2\pi\left[\frac{K_0}{N1} - d(q'_H)\right]n + \phi_q \qquad (11)$$

$$B = 2\pi\left[2q'_H - \frac{K_0}{N1} + d(q'_H)\right]n + \phi_q \qquad (12)$$

d'où

$$y_1(n) = \frac{e^{-\frac{n}{\delta}} \cdot M_q}{2}\left[\cos A + \cos B\right] \qquad (13)$$

Seule la composante transposée A a une fréquence proche de la valeur rationnelle $\frac{K_0}{N1}$. L'irrationalité résiduelle est caractérisée par

$$\frac{K'_H}{N1} - \frac{K_0}{N1} = \underbrace{\frac{K_0}{N1} - d(q'_H)}_{\frac{K'_H}{N1}} - \frac{K_0}{N1} = -\,d(q'_H)$$

d'où

$$\boxed{K'_H - K_0 = -\,N1 \cdot d(q'_H)} \qquad (14)$$

si on admet l'erreur $d(q'_H)$ donnée par la relation (5), on obtient

$$\left| K'_H - K_0 \right| \leqslant N1 \times \frac{1}{40.N} \qquad (15)$$

nombre d'échantillons utilisées pour la DFT pour la mesure de la fréquence vraie

nombre d'échantillons de la DFT à appliquer sur le signal modulé en amplitude pour obtenir la phase sur la raie $K_0/N1$.

La DFT qu'on doit faire sur le signal modulé $y_1(n)$ (la modulation se fait par software) pour obtenir la phase à la raie de fréquence $\frac{K_0}{N1}$, introduit elle-même les deux types d'erreurs que nous avons signalées dans le paragraphe I.

L'erreur d'irrationalité principale est très fortement diminuée :

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } N1 \leqslant N \\ \left[d\Phi \right]_1 \leq \Phi_{\text{Proj.}} \left(K'_H - K_0 \cong \frac{N1}{40.N} \right) \end{array}\right\} \qquad (16)$$

L'erreur $[d\Phi]_2$ due aux irrationalités secondaires, ici encore, peut être minimisée par le choix de $N1$, l'utilisation d'une fenêtre sin [on multiplie les échantillons $y_1(n)$ modulés en amplitude par $\sin\left(\frac{\pi}{N1}.n\right)$] et par le choix de K_0.

3- ETABLISSEMENT DES ALGORITHMES DE MODULATION.

Le spectre vrai correspondant à deux oscillations q'_H et q'_V (on suppose $q'_H > q'_V$ et si c'est le contraire il suffit d'intervertir les indices H et V) est représenté sur la fig 1. En 1a quand il n'y a pas d'amortissement, en 1b lorsqu'il y de l'amortissement.

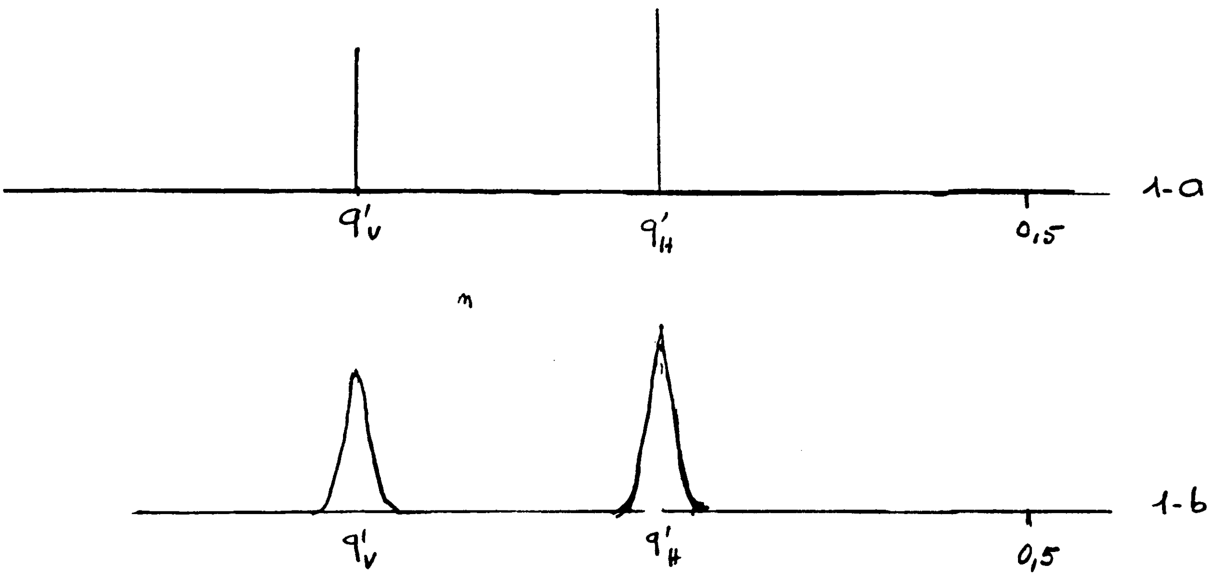


fig. 1

si on applique une modulation d'amplitude de fréquence f_m, le spectre vraie devient celui de la figure 2. En 2-a quand il n'y a pas d'amortissement, en 2-b lorsqu'il y a de l'amortissement. Sur la figure 2 est rappelé en pointillés le spectre vrai avant la modulation d'amplitude. C'est donc le spectre vrai en trait plein de la figure 2 qui est à considérer pour la DFT de N échantillons.

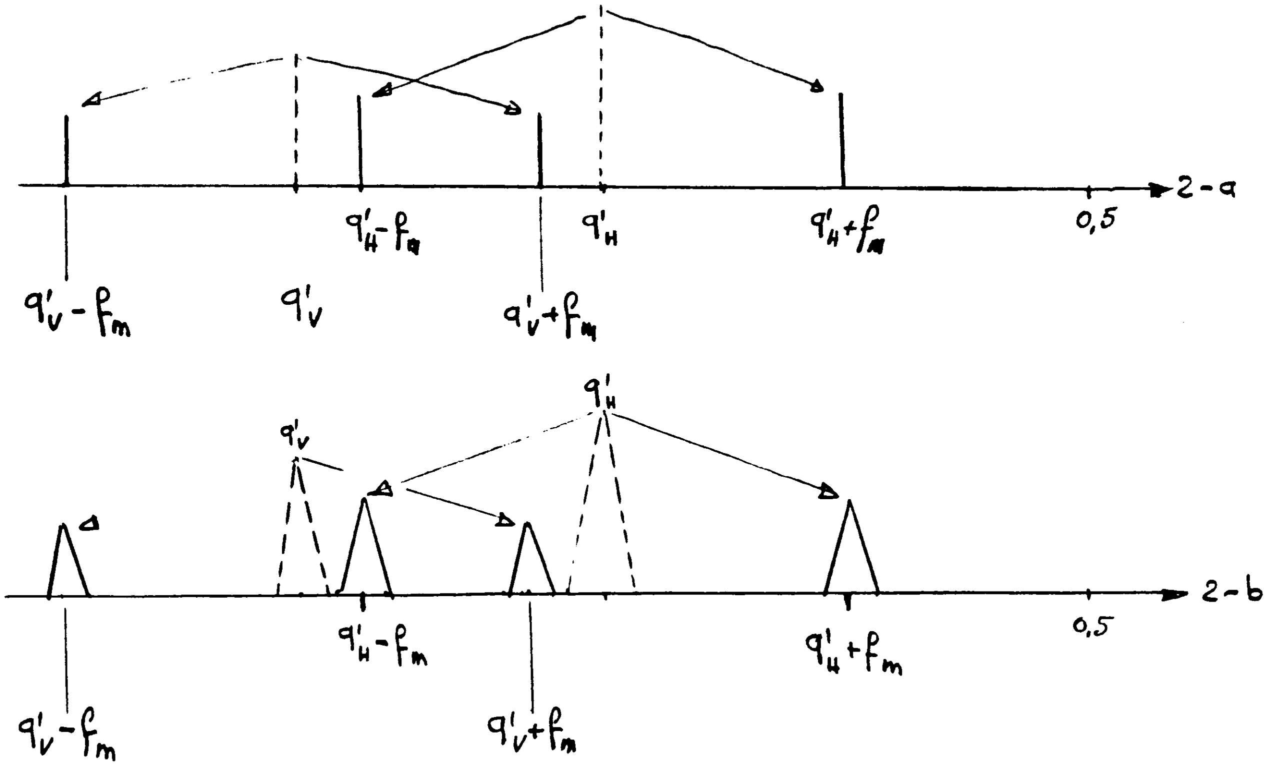


fig. 2

Considération 1 : choix de la fenêtre sinus.

La relation (15) nous montre que l'irrationnalité résiduelle sera d'autant plus petite que N1 est petit. Pour la recherche de la phase, la modulation d'amplitude conduit à ne rendre rationnelle que l'une des fréquences latérales. Il faut donc réduire le plus possible la distribution des autres composantes. Comme nous cherchons en même temps à avoir N1 le plus petit possible, il est préférable d'opérer la DFT de N1 échantillons avec une fenêtre sinus dont la transformée a des lobes secondaires fortement atténués.

Considération 2 : quelle composante latérale faut-il rendre rationnelle ?

Nous avons intérêt à mesurer la phase sur la raie la plus éloignée de toutes les autres. Ainsi :

- si on mesure la phase de q_H, on cherchera à rendre rationnelle la fréquence $q'_H + f_m$, c'est à dire on fera :

$$q'_H + f_m = \frac{K_0}{N_1} \quad \text{et} \quad f_m = \frac{K_0}{N_1} - q'_H \quad \text{et donc} \quad \frac{K_0}{N_1} > q'_H \qquad (17)$$

- si on mesure la phase de q_V, on cherchera à rendre rationnelle la fréquence $q'_V - f_m$, c'est à dire on fera :

$$q'_V - f_m = \frac{K_0}{N_1} \quad \text{et} \quad f_m = q'_V - \frac{K_0}{N_1} \quad \text{et donc} \quad \frac{K_0}{N_1} < q'_V \qquad (18)$$

Mesure de la phase Φ_{q_H} :

La conclusion (17) nous montre qu'il faut rendre rationnelle la fréquence $q'_H + f_m$.

La fréquence la plus proche de $q'_H + f_m$ dépend de la limite maximum qu'on se fixe pour f_m.

En effet si $q'_H - f_m > q'_V + f_m$ (ce n'est pas le cas de la figure 2) on obtient $q'_H - q'_V > 2 f_m$ et

$$f_m < \frac{q'_H - q'_V}{2} \qquad (19)$$

dans ce cas c'est la fréquence $q'_H - f_m$ qui est la plus proche de $q'_H + f_m$. Mais on voit avec la relation (19) que si $q'_H - q'_V$ est petit (de l'ordre de 0,04 dans LEAR), on aura très peu de latitude de choix pour f_m.

Si au contraire on impose la condition :

$$q'_V + f_m > q'_H - f_m \qquad \text{(cas de la figure 2)}$$

la fréquence la plus proche de $q'_H + f_m$ est la fréquence $q'_V + f_m$. Dans ce cas on doit avoir

$$2 f_m > q'_H - q'_V$$

soit $$\boxed{f_m > \frac{q'_H - q'_V}{2}} \qquad (20)$$

Cette fois ci $\frac{q'_H - q'_V}{2}$ est la <u>valeur minimum de</u> f_m, ce qui est beaucoup plus confortable pour faire un choix.

On prendra donc :

$$\boxed{\text{valeur minimum de } f_m = (f_m)_{min} = \frac{(q'_H - q'_V)_{max}}{2}} \qquad (21)$$

La valeur maximum de $f_m = (f_m)_{max}$ peut être calculée avec le raisonnement qui suit.

Pour diminuer les erreurs dues aux irrationnalités secondaires et en particulier dûes à la distribution du spectre image de la fréquence $q'_H + f_m$, il faut que la distance en nombre de lobes secondaires de la projectrice $\frac{\sigma}{N1}$, soit suffisante entre $q'_H + f_m$ et son image $1 - (q'_H + f_m)$. En effet $q'_H + f_m$ étant la fréquence la plus grande, sa propre image sera la fréquence du spectre image qui lui sera la plus proche. On doit donc avoir

$$1 - (q'_H + f_m) - (q'_H + f_m) \geqslant \frac{\sigma}{N1}$$

ce qui donne :

$$f_m \leqslant 0{,}5 - q'_H - \frac{\sigma}{2.N1}$$

Nous fixerons $\sigma = 10$ (ce qui donne une attenuation de 52 dB entre le lobe principal et le dixième lobe secondaire).

On obtient ainsi :

$$f_m \leqslant 0{,}5 - q'_H - \frac{10}{2N1}$$

et

$$\boxed{(f_m)_{max} = 0{,}5 - q'_H - \frac{10}{2N1}} \qquad (22)$$

En amont de la raie $q'_H + f_m$, la fréquence la plus proche est $q'_V + f_m$. On devra ainsi avoir :

$$q'_H + f_m - (q'_V + f_m) \geqslant \frac{\sigma}{N1}$$

d'où en prenant aussi $\sigma = 10$

$$(q'_H - q'_V)_{min} \geqslant \frac{10}{N1}$$

soit $$N1 \geqslant \frac{10}{(q'_H - q'_V)_{min}}$$

d'où

$$\boxed{N1\ min = \frac{10}{(q'_H - q'_V)_{min}}} \qquad (23)$$

On choisiera N1 comme

N1 = la plus petite valeur entière $\geqslant \frac{10}{(q_H - q_V)_{min}}$, si on fait une DFT

N1 = la plus petite puissance entière de 2 $\geqslant \frac{10}{(q_H - q_V)_{min}}$, si on fait une FFT

Remarque : seul le calcul de la transformée pour la raie $\frac{K_0}{N1}$ étant nécessaire pour obtenir la phase, le calcul d'une DFT est en général plus rapide que le calcul obligatoire de toutes les raies avec l'algorithme FFT.

Calcul de K_0 et f_m pour obtenir Φ_{q_H} :

On choisit d'abord la valeur approximative de f_m :

$$(f_m)_\sim = \frac{(f_m)_{min} + (f_m)_{max}}{2} \qquad (24)$$

A partir de la relation (17) on sait que :

$$f_m = \frac{K_0}{N1} - q'_H$$

On aura donc :

$$\boxed{K_0 = \text{inter} \left\langle N1 \left[(f_m)_\sim + q'_H \right] \right\rangle} \qquad (25)$$

avec inter $\langle x \rangle$ = partie entière de x.

On obtient alors la valeur exacte de f_m :

$$\boxed{f_m = \frac{K_0}{N1} - q'_H .} \qquad (26)$$

Mesure de la phase Φ_{q_V} :

Nous allons suivre une démarche similaire à celle qui a été faite pour la mesure Φ_{q_H}.

La conclusion exprimée par la relation (18) montre qu'il faut rendre rationnelle la fréquence $q'_V - f_m$

Avec le même raisonnement que celui fait on conclut qu'il faut imposer

$$q'_V + f_m > q'_H - f_m$$

de façon à ce qu'en amont la fréquence la plus proche de $q'_V - f_m$ soit la fréquence $q'_H - f_m$ (comme sur la figure 2).

On doit donc imposer :

$$f_m > \frac{q'_H - q'_V}{2}$$

soit

$$\boxed{(f_m)_{min} = \frac{(q'_H - q'_V)_{max}}{2}} \qquad (27)$$

La distance de $q'_V - f_m$ à la fréquence la plus proche en amont doit aussi correspondre au minimum à $\frac{\sigma}{N1}$. Soit

$$q'_H - f_m - (q'_V - f_m) \geqslant \frac{\sigma}{N1}$$

d'où

$$N1 \geqslant \frac{\sigma}{q'_H - q'_V}$$

soit

$$\boxed{(N1)_{min} = \frac{\sigma}{(q'_H - q'_V)_{min.}}} \qquad (28)$$

En aval de la fréquence $q'_v - f_m$, il faut que la composante continue (fréquence zéro) soit aussi à une distance $\frac{\sigma}{N1}$ d'où :

$$q'_v - f_m \geqslant \frac{\sigma}{N1}$$

soit

$$f_m \leqslant q'_v - \frac{\sigma}{N1}$$

d'où

$$\boxed{(f_m)_{max} = q'_v - \frac{\sigma}{N1}} \qquad (29)$$

On calcule alors de la même façon, la valeur approximative de f_m

$$(f_m)_{\sim} = \frac{(f_m)_{min} + (f_m)_{max}}{2}$$

Avec la relation (18) on écrit :

$$\boxed{K_o = int. < N1 \cdot \left[(q'_v - (f_m)_{\sim} \right] >} \qquad (30)$$

et ainsi on obtient la valeur exacte de f_m :

$$\boxed{f_m = q'_v - \frac{K_o}{N1}} \qquad (31)$$

4. RECAPITULATIF DE LA METHODE

1 - Hypothèse : $q'_H > q'_V$

(dans le cas contraire inverser les indices H et V)

2 - Les ordres de grandeur de $(q'_H - q_V)_{max}$ et $(q'_H - q_V)_{min}$ sont supposés connus.

Si on mesure $(q'_H)_m$ et $(q'_V)_m$ on obtient directement $(q'_H - q'_V)$.

Si non, on prend des valeurs limites connues. Par exemple pour LEAR

$$|q'_H - q'_V|_{max} \approx 0{,}06 \quad \text{et} \quad (q'_H - q'_V)_{min} \approx 0{,}04$$

3 - On choisit N1 :

N1 = la plus petite valeur entière $\geq \dfrac{10}{(q'_H - q'_V)_{min}}$, si on fait une DFT

N1 = la plus petite puissance entière de 2 $\geq \dfrac{10}{(q'_H - q'_V)_{min}}$, si on fait une FFT.

Note : le calcul de la transformée de Fourier pour la raie $\frac{K_0}{N1}$ étant seul nécessaire, le calcul d'une DFT est plus rapide qu'avec une FFT. D'autre part cela permet en général d'avoir la valeur N1 la plus petite.

4 - On mesure avec la méthode d'interpolation analytique (avec FFT, fenêtre sin.) les fréquences :

$$(q'_H)_m \quad \text{et} \quad (q'_V)_m$$

(on les obtient en général avec une erreur $< \pm \frac{1}{40N}$)

5 - On calcule :

$$(f_m)_{min} = \frac{(q'_H - q'_V)_{max}}{2}$$

6. On calcule :

pour la mesure de ϕ_{qH} :

$$(f_m)_{max} = 0,5 - (q'_H)_m - \frac{10}{2N1}$$

pour la mesure de ϕ_{qV} :

$$(f_m)_{max} = (q'_V)_m - \frac{10}{N1}$$

7. On calcule :

$$(f_m)_N = \frac{(f_m)_{max} + (f_m)_{min}}{2}$$

8. On calcule :

pour la mesure de ϕ_{qH} :

$$K_0 = \text{inter}\langle N1.\left[(f_m)_N + (q'_H)_m\right]\rangle$$

$$f_m = \frac{K_0}{N1} - (q'_H)_m$$

pour la mesure de ϕ_{qV} :

$$K_0 = \text{inter}\langle N1.\left[(q'_V)_m - (f_m)_N\right]\rangle$$

$$f_m = (q'_V)_m - \frac{K_0}{N1}$$

9. Les échantillons $y(n)$ de la mesure sont modifiés de la façon suivante :

$$y_1(n) = y(n) \times \underbrace{\cos(2\pi f_m . n)}_{\text{modulation d'amplitude}} . \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{N1} n\right)}_{\text{fenêtre sinus}}$$

10. On pratique une DFT (ou FFT) avec N1 échantillons $y_1(n)$.

On obtient directement la phase "vraie" à la raie $\frac{K_0}{N1}$.

5 - RESULTATS

Les résultats qui suivent ont été obtenus en simulation avec des conditions relativement sévères de bruit, d'amortissement et de couplages.

Les résultats sont figurées aux pages 22 à 27. Les résultats de chacune des mesures sont encadrés.

6 - CONCLUSION

L'utilisation de la modulation d'amplitude pour déplacer les fréquences d'un spectre vrai donné a été utilisé avec profit pour obtenir les mesures de phase.

Le principe a des applications plus générales : il sera aussi utilisé pour les mesures des module et coefficient d'amortissement.

SIMULATION 1 (mesure q_H et q_V)

1 - Mesure de $(q'_H)_m$ et $(q'_V)_m$

Valeurs simulées

```
qh=  3.074219E-01
phaseh=  1.350000E+00
amplitudeh=  1.000000E+01
damph=  5.120000E+02
qv=  2.670312E-01
phasev=  5.000000E-01
amplitudev=  5.000000E+00
dampv=  5.120000E+02

amplitude du bruit=  2.000000E+00
nombre d echantillons:      512
fenetre sinus
```

q_H $\delta = 512$

couplage q_V 50 %

bruit 20 %

#	reelle	imag.	phase	module	
0	0.0724300753	0.0000000000	0.0000000000	0.0724300753	
1	-0.0611410285	-0.1130610847	-2.0665323036	0.1285341754	
134	-0.0609595458	-0.0690948061	-2.2937231128	0.0921420559	
135	-0.1725175802	0.0819252173	2.6982419054	0.1909818229	
136	-0.9018753253	0.6585614228	2.5108757152	1.1167283689	
137	1.7207228388	-0.4374104983	-0.2489291838	1.7754478399	← q_V
138	-0.2568039617	-0.1522703931	-2.6063774713	0.2985540945	
139	-0.0887199385	0.0166867053	2.9556816378	0.0902755427	
140	-0.0723014977	-0.0470896320	-2.5643073301	0.0862840658	
141	0.0195945753	-0.0665978788	-1.2846486477	0.0694206370	
142	0.0345767430	0.0116479848	0.3249332178	0.0364859796	
143	-0.0676097920	0.0872501056	2.2300416620	0.1103796399	
144	0.0511425754	-0.0601836074	-0.8664324141	0.0789786656	
145	-0.0657514341	-0.0707621203	-2.3195062813	0.0965946622	
146	0.0082219976	0.0138318209	1.0344852410	0.0160910072	
147	0.0144548433	-0.0070930858	-0.4561852209	0.0161013777	
148	0.0016272880	0.0224330325	1.4983833470	0.0224919766	
149	-0.0984735661	-0.0360132510	-2.7909870837	0.1048522649	
150	0.0913916624	0.0399342417	0.4119547254	0.0997355484	
151	-0.0558999406	-0.0246065983	-2.7269265557	0.0610760840	
152	0.0019873354	-0.0464115987	-1.5280026671	0.0464541278	
153	0.1181752841	-0.0832943229	-0.6139649591	0.1445798810	
154	-0.1196531051	0.0064565711	3.0876841875	0.1198271792	
155	-0.0005335874	-0.1369380670	-1.5746928670	0.1369391066	
156	-0.0493522049	-0.2669814907	-1.7535855027	0.2715046160	
157	-2.6651586150	2.0958683641	2.4752024506	3.3905360406	← q_H
158	2.6123761133	-0.9519005116	-0.3494286161	2.7803998888	
159	0.1722613184	-0.2623282704	-0.9897512193	0.3138312974	
160	0.0065124764	-0.0626578623	-1.4672310957	0.0629953971	

Résultats FFT

```
Peak#1 seen at index=     157
AMPLITUDE: 3.390536E+00
  q= 3.066406E-01
1-q= 6.933594E-01

Erreur relative sur q: -2.541296E-01%
Erreur absolue sur q:   -7.812500E-04
PHASE: 2.475202E+00
ERREUR SUR PHASE: 1.125202E+00
Peak#2 seen at index=     137
AMPLITUDE: 1.775448E+00
  q= 2.675781E-01
1-q= 7.324219E-01
```

q_H

Erreur q_H = -7,8125 10^{-4}

Erreur phase : 1,1252 rad
: 64,46 deg.

couplage q_V

Interpolation analytique

```
  q interpole pour DFT = 3.074241E-01
1-q interpole pour DFT = 6.925759E-01
Erreur relative sur q:  7.162981E-04%
Erreur absolue sur q:  2.202057E-06
  q interpole pour DFT = 2.670464E-01
1-q interpole pour DFT = 7.329536E-01
```

$(q'_H)_m$

$d(q'_H)$

$(q'_H)_m = 0,30742077$

Erreur q_H = 2,202057 10^{-6}

$\approx \frac{1}{887.N}$

$(q'_V)_m = 0,267046404$

Erreur q_V = 1,5155 10^{-5}

SIMULATION 1 (suite)

2 - Modulation d'amplitude et mesure de ϕ_{q_H}

• choix de N1 : $N1 \geq \frac{10}{0,04} = 250$ $\quad N1 = 256$ } valable pour q_H et q_V

• $(f_M)_{min} = \frac{0,06}{2} = 0,03$

• $(f_m)_{max} = 0,5 - (q'_H)_m - \frac{10}{2\,N1} = 0,173044673$

• $(f_m)_v = \frac{(f_m)_{min} + (f_m)_{max}}{2} = 0,101522337$

• $K_o = \text{inter} < N1\left[(f_m)_v + (q'_H)_m\right] > = 104$

• $f_m = \frac{K_o}{N1} - (q'_H)_m = 0,098825923$

```
nbre d echantillons:      256
ıetre sinus
›litude modulation
fmod= 9.882592E-02
```

#	reelle	imag.	phase	module
0	0.1397519032	0.0000000000	0.0000000000	0.1397519032
1	-0.0961591553	0.0164096570	2.9725698397	0.0975492696
103	-0.3223993212	-0.7619045544	-1.9710983067	0.8273088131
$K_o \rightarrow$ 104	0.5849403813	2.4887213604	1.3399497680	2.5565385308 $\leftarrow q'_H + f_m$
105	-0.0166791730	-0.9011497548	-1.5893029830	0.9013040971

$$\boxed{\phi_{q_H} = 1,339949768 \text{ rad}, \text{ Erreur sur } \phi_{q_H} = -0,0100 \text{ rad} = -0,576 \text{ degré}.}$$

3 - Modulation d'amplitude et mesure de ϕ_{q_V}

• $(f_M)_{max} = (q'_V)_m - \frac{10}{N1} = 0,227983904$

• $(f_m)_v = \frac{(f_m)_{min} + (f_m)_{max}}{2} = 0,12899152$

• $K_o = \text{inter} < N1.\left[(q'_V)_m - (f_m)_v\right] > = 35$

• $f_m = (q'_V)_m - \frac{K_o}{N1} = 0,130327654$

```
nombre d echantillons:      256
fenetre sinus
amplitude modulation
fmod= 1.303277E-01
```

#	reelle	imag.	phase	module
0	0.0392160083	0.0000000000	0.0000000000	0.0392160083
34	-0.5028130759	-0.1482369672	-2.8548992635	0.5242091069
$K_o \rightarrow$ 35	1.1029581841	0.6240718723	0.5149052027	1.2672736317 $\leftarrow q'_V - f_m$
36	-0.3137449536	-0.2907020767	-2.3942982821	0.4277190589

$$\boxed{\phi_{q_V} = 0,5149052027 \text{ rad}, \text{ Erreur sur } \phi_{q_V} = 0,0149 \text{ rad} = 0,854 \text{ degré}}$$

SIMULATION 2 (mesure q_H et q_V)

1. Mesure de $(q'_H)_m$ et $(q'_V)_m$

valeurs simulées

```
qh=  3.074219E-01
phaseh=  1.350000E+00
amplitudeh=  1.000000E+01
damph=  5.120000E+02
```

q_H $\delta = 512$

```
qv=  2.670312E-01
phasev=  5.000000E-01
amplitudev=  5.000000E+00
dampv=  5.120000E+02
```

couplage q_V, 50 %

```
amplitude du bruit=  5.000000E+00
nombre d echantillons:     512
fenetre sinus
```

bruit 50%

#	reelle	imag.	phase	module	
0	0.1811481677	0.0000000000	0.0000000000	0.1811481677	
1	-0.1527795821	-0.2826517730	-2.0663338720	0.3212998996	
134	-0.0694078077	-0.1704301320	-1.9575377236	0.1840213946	
135	-0.2142593144	0.1909797445	2.4135779324	0.2870197147	
136	-0.8091063571	0.6025671021	2.5014718321	1.0088311106	
137	1.6634345030	-0.2891358733	-0.1720991520	1.6883761130	← q_V
138	-0.2595956519	-0.2074377545	-2.4674127952	0.3322955379	
139	-0.1066850675	0.0769372309	2.5168046551	0.1315334220	
140	-0.1257967850	-0.1020091559	-2.4602380145	0.1619589423	
141	0.0810739776	-0.1565516297	-1.0929521864	0.1762991850	
142	0.1074210944	0.0368732437	0.3306567829	0.1135734460	
143	-0.1542810135	0.2250602311	2.1717310402	0.2728639565	
144	0.1387435172	-0.1436491193	-0.8027679818	0.1997118751	
145	-0.1560501711	-0.1697646190	-2.3141265509	0.2305898562	
146	0.0270908082	0.0424401678	1.0026691707	0.0503495753	
147	0.0413599828	-0.0087363253	-0.2081666198	0.0422725863	
148	0.0082925963	0.0667377007	1.4471734131	0.0672509319	
149	-0.2427430632	-0.0769841741	-2.8344838063	0.2546581194	
150	0.2312929496	0.1164023885	0.4662587567	0.2589323166	
151	-0.1374296142	-0.0395742891	-2.8612176166	0.1430140665	
152	0.0069634200	-0.0853618358	-1.4894012258	0.0856453865	
153	0.2974801167	-0.1620871924	-0.4988940309	0.3387723097	
154	-0.2957559641	0.0937779291	2.8345418590	0.3102674496	
155	0.0100434744	-0.1839880910	-1.5162628174	0.1842620119	
156	-0.0312734311	-0.1720466507	-1.7506060633	0.1748658844	
157	-2.6216669602	2.1164874486	2.4624126870	3.3693703819	← q_H
158	2.5728118563	-0.9814883050	-0.3644437126	2.7536666721	
159	0.3221253994	-0.2973385115	-0.7454060483	0.4383776492	
160	-0.0098920998	-0.0251308976	-1.9457932481	0.0270076962	

Résultats FFT

```
Peak#1 seen at index=    157
AMPLITUDE: 3.369370E+00
  q= 3.066406E-01
1-q= 6.933594E-01

Erreur relative sur q: -2.541296E-01%
Erreur absolue sur q:  -7.812500E-04
PHASE: 2.462413E+00
ERREUR SUR PHASE: 1.112413E+00
```

q_H { Erreur $q_H = -7,8125\ 10^{-4}$; Erreur phase $= 1,1124$ rad

```
Peak#2 seen at index=    137
AMPLITUDE: 1.688376E+00
  q= 2.675781E-01
1-q= 7.324219E-01
```

couplage q_V

```
  q interpole pour DFT = 3.074208E-01
1-q interpole pour DFT = 6.925792E-01
Erreur relative sur q: -3.527832E-04%
Erreur absolue sur q: -1.084533E-06
  q interpole pour DFT = 2.670936E-01
1-q interpole pour DFT = 7.329064E-01
```

Interpolation analytique :

$(q'_H)_m = 0,30742079$

Erreur $q_H = -1,085\ 10^{-6}$

$= -\dfrac{1}{1800.N}$

$(q'_V)_m = 0,26709364$

Erreur $q_V = 6,239\ 10^{-5}$

SIMULATION 2 (suite)

2- Modulation d'amplitude et mesure de ϕ_{q_H}

- choix de $N1 \geqslant \frac{10}{0{,}04} = 250 \quad N1 = 256$ } valable pour q_H et q_V
- $(f_m)_{min} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$ }
- $(f_m)_{max} = 0{,}5 - (q'_H)_m - \frac{10}{2 \cdot N1} = 0{,}17304796$
- $(f_m)_{\sim} = \frac{(f_m)_{min} + (f_m)_{max}}{2} = 0{,}10152398$
- $K_0 = \text{inter} < N1 \cdot [(f_m)_{\sim} + (q'_H)_m] > = 104$
- $f_m = \frac{K_0}{N1} - (q'_H)_m = 0{,}09882921$

nombre d echantillons: 256
fenetre sinus
amplitude modulation
fmod= 9.882921E-02

#	reelle	imag.	phase	module	
0	0.3500779501	0.0000000000	0.0000000000	0.3500779501	
1	-0.2399664630	0.0412013588	2.9715542858	0.2434778334	
103	-0.2708794334	-0.7587674563	-1.9136929234	0.8056697339	
$K_0 \rightarrow$ 104	0.6340613323	2.5743636466	1.3293046607	2.6512981647	$\leftarrow q'_H + f_m$
105	-0.0230350284	-0.9958042042	-1.5939242880	0.9960705927	

$\phi_{q_H} = 1{,}3293046607$ rad, Erreur sur $\phi_{q_H} = -0{,}0207$ rad.
$= -1{,}1857$ degré.

3- Modulation d'amplitude et mesure de ϕ_{q_V}

- $(f_m)_{max} = (q'_V)_m - \frac{10}{N1} = 0{,}22803114$
- $(f_m)_{\sim} = \frac{(f_m)_{min} + (f_m)_{max}}{2} = 0{,}12901557$
- $K_0 = \text{inter} < N1 \cdot [(q'_V)_m - (f_m)_{\sim}] > = 35$
- $f_m = (q'_V)_m - \frac{K_0}{N1} = 0{,}13037489$

nombre d echantillons: 256
fenetre sinus
amplitude modulation
fmod= 1.303749E-01

#	reelle	imag.	phase	module	
0	0.0926921486	0.0000000000	0.0000000000	0.0926921486	
34	-0.6528288643	-0.1834896835	-2.8675933294	0.6781253498	
$K_0 \rightarrow$ 35	1.1218268714	0.6489814472	0.5244637181	1.2960217777	$\leftarrow q'_V - f_m$
36	-0.3059877018	-0.3025025242	-2.3619220095	0.4302746225	

$\phi_{q_V} = 0{,}5244637181$ rad, Erreur sur $\phi_{q_V} = 0{,}02446$ rad
$= 1{,}4016$ degré

SIMULATION 3 (mesure de q_H et q_V)

1- Mesure de $(q'_H)_m$ et $(q'_V)_m$

valeurs simulées

qh= 3.074219E-01
phaseh= 1.350000E+00
amplitudeh= 1.000000E+01
damph= 2.560000E+02

$\Big\}$ q_H $\quad \delta = 256$

qv= 2.670312E-01
phasev= 5.000000E-01
amplitudev= 5.000000E+00
dampv= 2.560000E+02

$\Big\}$ couplage q_v 50%

amplitude du bruit= 2.000000E+00 bruit 20%
nombre d echantillons: 512
fenetre sinus

#	reelle	imag.	phase	module	
0	0.0724182933	0.0000000000	0.0000000000	0.0724182933	
1	-0.0611528115	-0.1130613297	-2.0666120298	0.1285399962	
134	-0.0593850720	-0.0754613472	-2.2375354027	0.0960260469	
135	-0.1664134694	0.0759188394	2.7135897358	0.1829128562	
136	-0.4637736021	0.5674621246	2.2559834536	0.7328705321	
137	1.1347497710	-0.1579582762	-0.1383121920	1.1456909967	← q_v
138	-0.1560290608	-0.2444020829	-2.1389816746	0.2899611111	
139	-0.0736743772	-0.0090282877	-3.0196574729	0.0742254931	
140	-0.0672735249	-0.0585708215	-2.4252390690	0.0891979164	
141	0.0217691294	-0.0731611635	-1.2815884351	0.0763311918	
142	0.0355428117	0.0072914878	0.2023393026	0.0362830161	
143	-0.0673029179	0.0840372491	2.2460675765	0.1076658813	
144	0.0510088448	-0.0627583015	-0.8883096722	0.0808733989	
145	-0.0662386241	-0.0729772081	-2.3078283772	0.0985557113	
146	0.0074010755	0.0118002657	1.0106196634	0.0139291848	
147	0.0132727976	-0.0090704945	-0.5994909745	0.0160761011	
148	0.0000098519	0.0203966208	1.5703133126	0.0203966232	
149	-0.1006634114	-0.0382276920	-2.7786575054	0.1076776617	
150	0.0883902184	0.0373935831	0.4002187925	0.0959745319	
151	-0.0601424307	-0.0276848034	-2.7101892866	0.0662084610	
152	-0.0043257053	-0.0503621362	-1.6564780491	0.0505475666	
153	0.1079913476	-0.0886911125	-0.6875824179	0.1397434958	
154	-0.1383838838	-0.0013842314	-3.1315901504	0.1383908068	
155	-0.0441652283	-0.1480437653	-1.8607161630	0.1544911772	
156	-0.2192424040	-0.2479367267	-2.2948511648	0.3309680531	
157	-1.5660946425	1.5780523790	2.3523913350	2.2232637586	← q_H
158	1.8127819727	-0.3064447158	-0.1674634373	1.8385012495	
159	0.1857140018	-0.3030324686	-1.0209805088	0.3554129535	
160	0.0013511970	-0.0819347099	-1.5543066783	0.0819458505	

Résultats FFT

Peak#1 seen at index= 157
AMPLITUDE: 2.223264E+00
q= 3.066406E-01
1-q= 6.933594E-01

Erreur relative sur q: -2.541296E-01%
Erreur absolue sur q: -7.812500E-04
PHASE: 2.352391E+00
ERREUR SUR PHASE: 1.002391E+00
Peak#2 seen at index= 137
AMPLITUDE: 1.145691E+00
q= 2.675781E-01
1-q= 7.324219E-01

$\Big\}$ q_H $\left\{ \begin{array}{l} \text{Erreur } q_H = -7,8125\ 10^{-4} \\ \text{Erreur phase} = 1,002391 \text{ rad} \end{array} \right.$

q interpole pour DFT = 3.074322E-01
1-q interpole pour DFT = 6.925678E-01
Erreur relative sur q: 3.349486E-03%
Erreur absolue sur q: 1.029705E-05
q interpole pour DFT = 2.670308E-01
1-q interpole pour DFT = 7.329692E-01

Interpolation analytique

$$(q'_H)_m = 0,307432172$$

$$\text{Erreur } q_H = 1,029705\ 10^{-5} = \frac{1}{190 . N}$$

$$(q'_V)_m = 0,267030769$$

$$\text{Erreur } q_V = -4,81\ 10^{-7}$$

SIMULATION 3 (suite)

2. Modulation d'amplitude et mesure de ϕ_{q_H}

- choix de $N1 \geq \frac{10}{0{,}04} = 250$ $\quad N1 = 256$ } valable pour q_H et q_V
- $(f_m)_{min} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$
- $(f_m)_{max} = 0{,}5 - (q'_H)_m - \frac{10}{2N1} = 0{,}17303657 8$
- $(f_m)_{\sim} = \frac{(f_m)_{min} + (f_m)_{max}}{2} = 0{,}101518289$
- $k_0 = \text{inter} < N1 . [(f_m)_{\sim} + (q'_H)_m] > = 104$
- $f_m = \frac{K_0}{N1} - (q'_H)_m = 0{,}098817828$

nombre d echantillons: 256
fenetre sinus
amplitude modulation
fmod= 9.881783E-02

	#	reelle	imag.	phase	module	
	0	0.1395300683	0.0000000000	0.0000000000	0.1395300683	
	1	-0.0961094203	0.0162584345	2.9740133011	0.0974749064	
	103	-0.3823707622	-0.5530280857	-2.1757358692	0.6723447504	
$K_0 \rightarrow$	104	0.4814976743	1.9813108124	1.3323980160	2.0389783093	$\leftarrow q'_H + f_m$
	105	0.1198649015	-0.7342531117	-1.4089763500	0.7439725980	

$$\boxed{\phi_{q_H} = 1{,}332398016 \text{ rad.} \quad \text{Erreur sur } \phi_{q_H} = -0{,}01760 \text{ rad} = -1{,}0085 \text{ degré}}$$

3. Modulation d'amplitude et mesure de ϕ_{q_V}

- $(f_m)_{max} = (q'_V)_m - \frac{10}{N1} = 0{,}227968269$
- $(f_m)_{\sim} = \frac{(f_m)_{min} + (f_m)_{max}}{2} = 0{,}128984135$
- $K_0 = \text{inter} < N1 . [(q'_V)_m - (f_m)_{\sim}] > = 35$
- $f_m = (q'_V)_m - \frac{K_0}{N1} = 0{,}130312019$.

nombre d echantillons: 256
fenetre sinus
amplitude modulation
fmod= 1.303120E-01

	#	reelle	imag.	phase	module	
	0	0.0399681909	0.0000000000	0.0000000000	0.0399681909	
	1	-0.0378634617	-0.0246422824	-2.5646414912	0.0451761421	
	34	-0.4391229020	-0.0611126111	-3.0033111244	0.4433550206	
$K_0 \rightarrow$	35	0.8685308739	0.5126430202	0.5332132787	1.0085379244	$\leftarrow q'_V - f_m$
	36	-0.2069224623	-0.2950582366	-2.1823899727	0.3603835018	

$$\boxed{\phi_{q_V} = 0{,}5332132787 \text{ rad.} \quad \text{Erreur sur } \phi_{q_V} = 0{,}03321 \text{ rad,} = 1{,}9029 \text{ degré}}$$

Distribution

Groupe LEAR

D. ALLEN
E. ASSEO
E. BAECKERUD
S. BAIRD
J. BENGTSSON
M. CHANEL
J. CHEVALLIER
R. GALIANA
R. GIANNINI
F. IAZZOURENE
P. LEFEVRE
F. LENARDON
R. LEY
D. MANGLUNKI
E. MARTENSSON
J.L. MARY
C. MAZELINE
D. MOEHL
G. MOLINARI
J.C. PERRIER
T. PETTERSSON
P. SMITH
N. TOKUDA
G. TRANQUILLE
H. VESTERGAARD

Distribution (du résumé)

Personnel scientifique du PS (PS/1 list)
" " SPS
" " LEP