

MINIMUM DE L'ENVELOPPE DES TRAJECTOIRES

DANS DEUX STRUCTURES, PROPOSEES POUR UN ANNEAU DE STOCKAGE.

1. Introduction.

Un certain nombre de dispositifs devant pouvoir être disposés dans la chambre, il nous intéresse de connaître le minimum de l'enveloppe des trajectoires, ainsi que l'endroit où celui-ci a lieu. Nous nous proposons de faire cette étude pour la structure dite non-symétrique (Réf.: P 50-119-1) étudiée dans (1, 2 et 3), ainsi que pour les deux versions  $N_B = 8$  et 12 de la structure dite simplifiée qui en a été déduite (4).

Nous nous plaçons dans l'approximation des lentilles minces et nous utilisons les notations employées dans les références citées précédemment.

Les valeurs numériques des paramètres sont tirées de (2), c'est-à-dire du projet auquel se rapporte le plan (Réf.: P 50-119-1), pour la structure complète et de (4), paragraphe 2.3.1, pour la structure simplifiée.

2. Principe Théorique.

Les particules atteignant l'enveloppe des trajectoires sont caractérisées par une constante  $W$  de l'invariant de Courant-Snyder telle que (cf. réf. 5):

$$W = a^2 / \beta_{\max}$$

où  $a$  est l'ouverture (maximum maximum de l'amplitude) et  $\beta(s)$  un coefficient de la matrice de transfert de maille de Twiss  $M(s)$  d'origine  $s$ , défini par  $\beta(s) = M_{12}(s) / \sin 2\mu$ , l'argument  $2\mu$  étant le changement de phase de l'oscillation betatron par supermaille.

Le minimum de l'enveloppe des trajectoires étant donné par:

$$y_{\max \min} = \sqrt{\beta_{\min} W}$$

il vient:

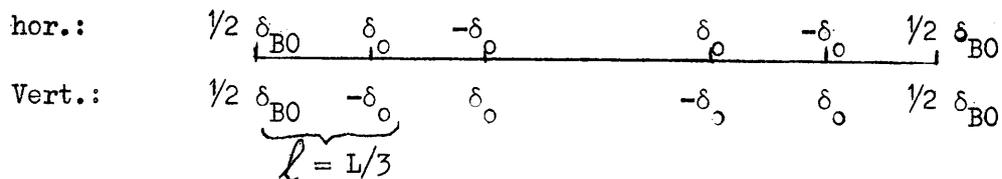
$$\frac{y_{\max \min}}{a} = \sqrt{\beta_{\min}/\beta_{\max}} = \sqrt{|M_{12}|_{\min}/|M_{12}|_{\max}}$$

Ce minimum est situé dans la section d'abscisse  $s$  où  $|M_{12}(s)|$  est minimum.

L'expression de  $|M_{12}|_{\max}$  a déjà été établie antérieurement dans (2) pour la structure complète et dans (4) pour la structure simplifiée.

### 3. Structure Complète (cf. réf. 2, paragraphe 3).

C'est la structure suivante:

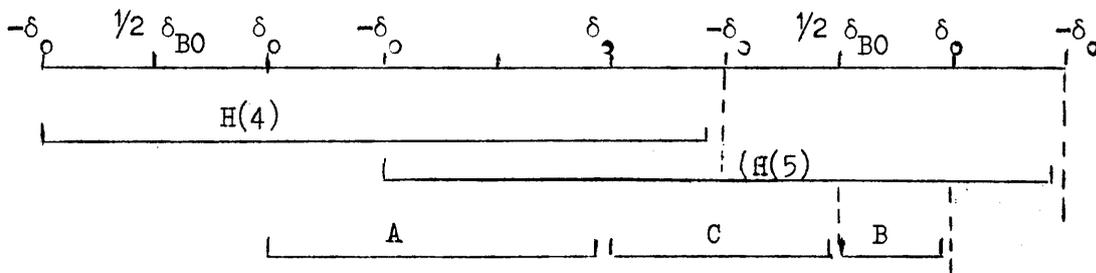


Nous la désignons par le symbole I.

#### 3.1. Expression de $|M_{12}|_{\min}$

##### 3.1.1. Mouvement horizontal.

Le minimum de l'amplitude betatron ne pouvant avoir lieu que dans un élément défocalisateur pour le mouvement considéré, nous allons considérer les mailles H(4) et H(5) qui, dans l'hypothèse où  $\delta_0 > 0$  <sup>\*)</sup>, ont de tels éléments comme origine:



\*) Voir réf. (2), page 2, pour les commentaires sur cette hypothèse.

$$H(4) = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta_0 & 1 \end{bmatrix} A B \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(5) = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta_0 & 1 \end{bmatrix} B C \begin{bmatrix} 1 & 2\ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta_0 & 1 \end{bmatrix}$$

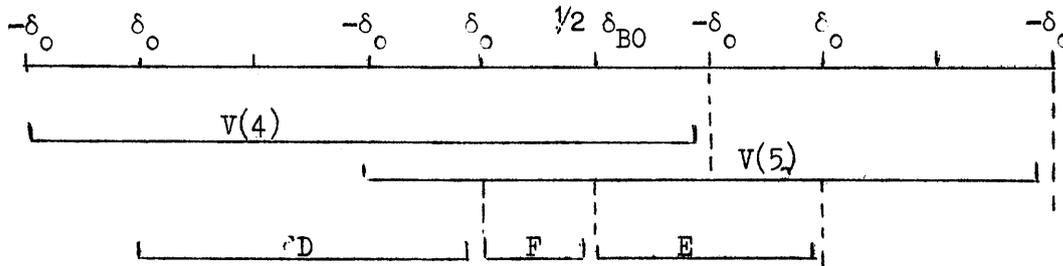
où les expressions des matrices A , B et C sont données dans (2), paragraphe 3.1. Il vient:

$$H_{12}(4) = \ell \left[ 2 (3 - 2 d_0) (1 - d_0^2) - \frac{1}{2} d_{BO} (5 - 2 d_0 - 4 d_0^2 + 2 d_0^3) \right]$$

$$H_{12}(5) = \ell \left[ 2 (3 - 2 d_0) (1 - d_0^2) - \frac{1}{2} d_{BO} (8 - 6 d_0 - 3 d_0^2 + 2 d_0^3) \right]$$

### 3.1.2. Mouvement vertical.

Comme nous avons fait pour le mouvement horizontal, nous considérons maintenant les mailles V(4) et V(5) représentées ci-contre:



$$V(4) = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \delta_{BO} & 1 \end{bmatrix} F D \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V(5) = \begin{bmatrix} 1 & 2\ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta_0 & 1 \end{bmatrix} E F \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta_0 & 1 \end{bmatrix}$$

où les expressions des matrices E , F et D sont données dans (2), paragraphe 3.2. Il vient .

$$V_{12}(4) = H_{12}(4)$$

$$V_{12}(5) = H_{12}(5)$$

que nous allons respectivement désigner par  $M_{12}(4)$  et  $M_{12}(5)$ .

Il en résulte que le minimum de l'enveloppe des trajectoires est le même tant horizontalement que verticalement; cependant il ne se situe pas à la même abscisse de la maille.

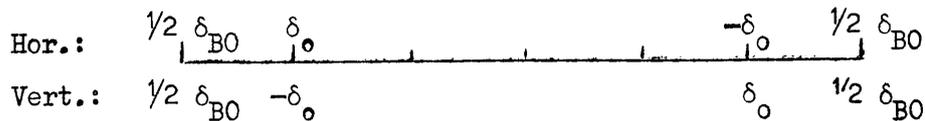
### 3.2. Calculs numériques et conclusion.

La représentation graphique de  $M_{12}$  montre (Fig. 1) que:  $|M_{12}|_{\min} = M_{12}(5)$ , autrement dit, les noeuds de l'enveloppe des trajectoires se trouvent dans les lentilles défocalisatrices, pour le mouvement considéré, voisines de la section droite.

Nous représentons graphiquement le rapport  $y_{\max} \min / a$  en fonction du nombre d'onde  $Q$  (Fig. 3). Il est le même pour le mouvement horizontal que pour le mouvement vertical.

### 4. Structure simplifiée (Cf. réf. 4)

C'est la structure suivante:



#### 4.1. Expression de $|M_{12}|_{\min}$

##### 4.1.1. Mouvement horizontal.

Le minimum de l'amplitude bétatron ne peut avoir lieu que dans l'unique élément défocalisateur pour le mouvement considéré qui existe, ce qui nous conduit à considérer la maille qui a cet élément comme origine et dont la matrice de transfert s'écrit:

$$H(3) = B(d_0) C A(d_0)$$

l'expression des matrices  $A(d_0)$ ,  $B(d_0)$  et  $C$  étant donnée dans (4), paragraphe 2.1. Il vient:

$$\Pi_{12}(3) = \ell \left[ 2(3 - 4 d_0) - \frac{1}{2} a_{B0} (5 - 4 d_0) \right]$$

#### 4.1.2. Mouvement vertical.

Comme pour le mouvement horizontal, considérons la maille dont l'origine est l'unique élément défocalisateur pour le mouvement considéré. La matrice de transfert s'écrit:

$$V(z) = C A (-d_0) B (-d_0)$$

Il vient:

$$V_{12}(z) = H_{12}(z)$$

Il en résulte que le minimum de l'enveloppe des trajectoires est le même tant horizontalement que verticalement; cependant il ne se situe pas à la même abscisse de la maille.

#### 4.2. Calculs numériques et conclusion.

Les noeuds de l'enveloppe des trajectoires se situent dans les lentilles défocalisatrices pour le mouvement considéré.

A titre indicatif nous donnons les courbes de  $\left| M_{12} \right|_{\max} = H_{12}(z) = V_{12}(z)$ . (Fig. 2).

Nous représentons graphiquement le rapport  $y_{\max} / a$  en fonction du nombre d'onde  $Q$  pour les deux versions  $N_B = 8$  et  $12$  de la structure considérée. (Fig. 3). Il est le même pour les deux directions de mouvement.

#### 5. Conclusion.

Un précédent papier (4) tend à montrer, que du point de vue de l'admittance et du déplacement de l'orbite d'équilibre, la version  $N_B = 12$  de la structure simplifiée est plus intéressante que la structure complète, tandis que la version  $N_B = 8$  de la structure simplifiée, malgré un  $Q = f(\delta_0)$  plus avantageux, l'est moins.

Les résultats de l'étude du minimum de l'enveloppe des trajectoires ne viennent altérer cette situation guère que pour ce qui concerne la version  $N_B = 8$  de la structure simplifiée. Cependant il ne faut pas oublier que la caractéristique en jeu a une importance somme toute moindre.

R.A. Beck.

Références.

1. K. Johnsen: PS/Int. AR/60-6: Storage Ring Systems for 100 MeV electrons.
2. R.A. Beck: PS/Int. AR/60-21: Stabilité Betatronique et Admittance de deux Structures Proposées pour un Anneau de Stockage.
3. R.A. Beck: PS/Int. AR/60-26: Déplacement de l'Orbite d'Equilibre dans une Structure Proposée pour un Anneau de Stockage.
4. R.A. Beck: PS/Int. AR/60-27: Stabilité, Admittance et Orbite d'Equilibre Déplacée d'une Version Simplifiée d'une Structure proposée pour un Anneau de Stockage.
5. R.A. Beck et A. Nackach: Note CEA No. 301; Théorie du AGS d'après Courant et Snyder.

Distribution: (ouverte)

Accelerator Research Group  
Parameter Committee Members  
J.B. Adams (2 copies)  
P.S. Library.

/kt

16.9.1960.

FIG 1

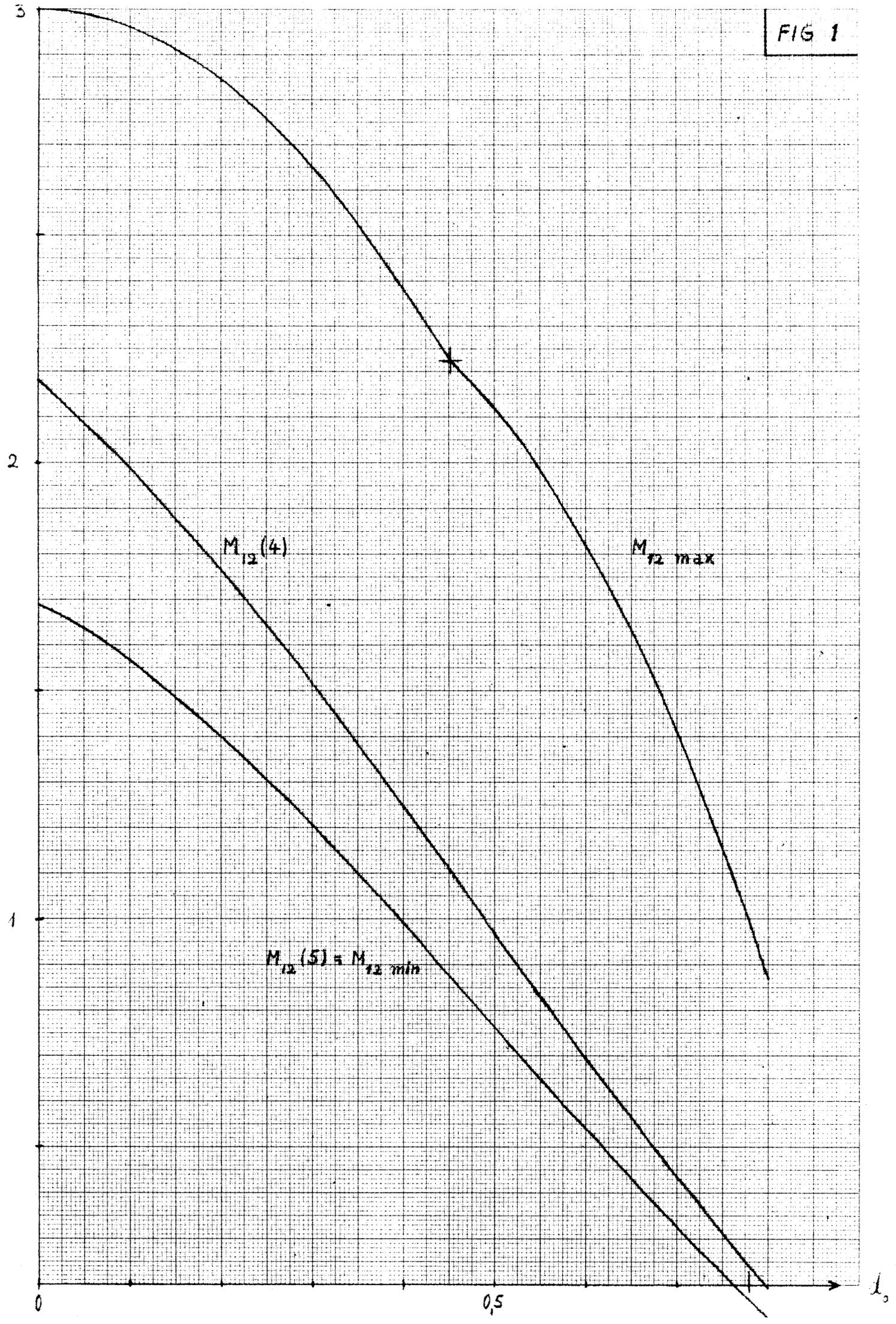


FIG 2

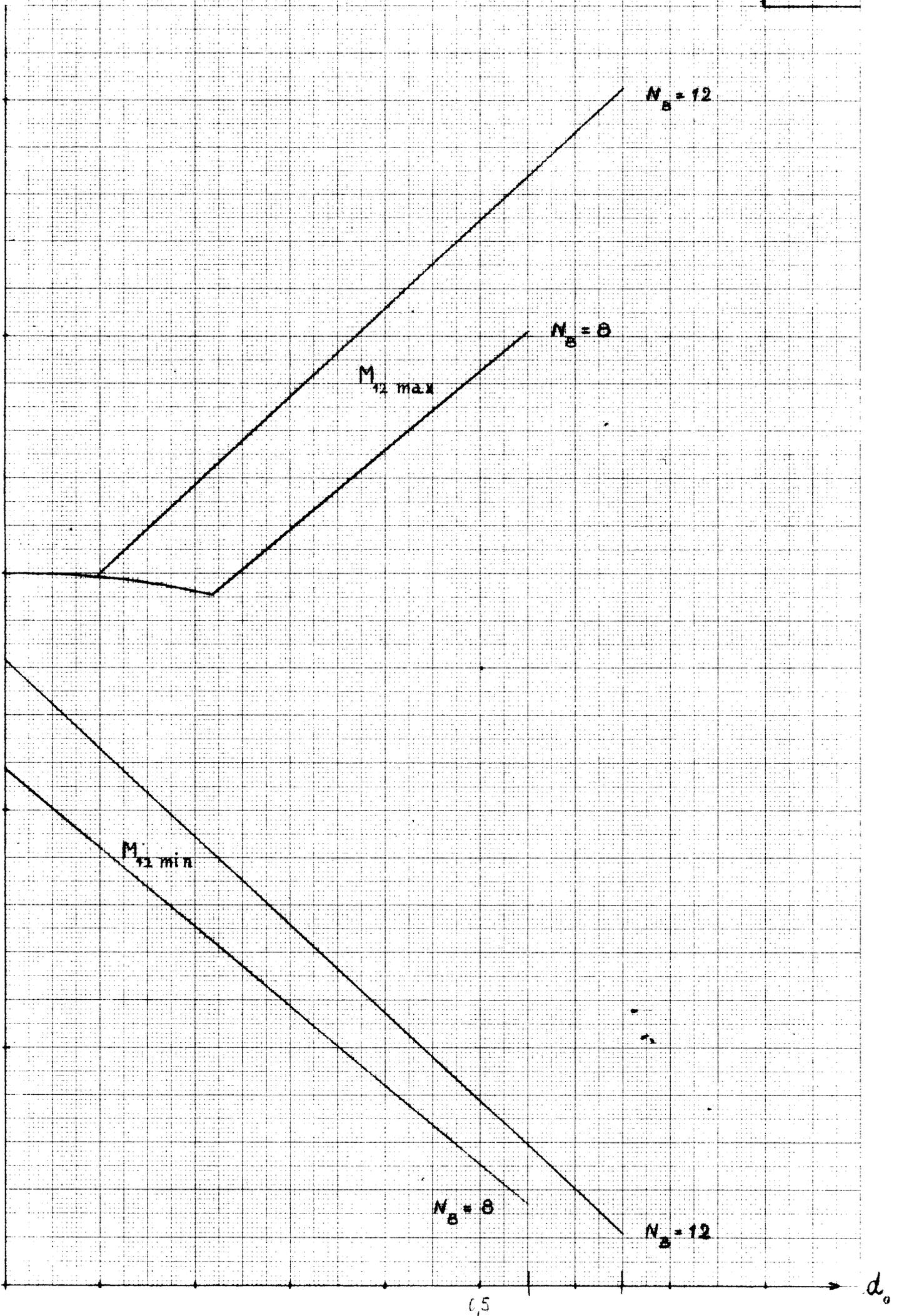


FIG 3

$y_{\max \min} / \alpha$

