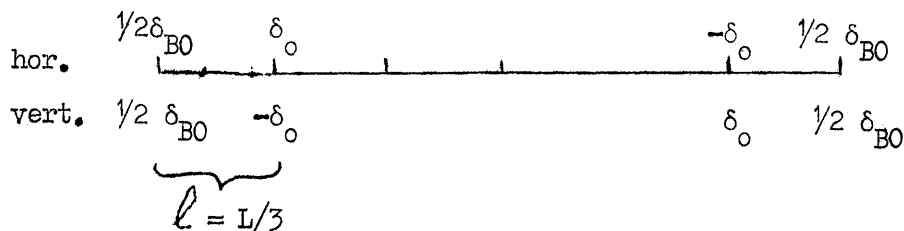


STABILITÉ BETATRONIQUE, ADMITTANCE ET ORBITE D'EQUILIBRE DEPLACÉE

D'UNE VERSION SIMPLIFIÉE D'UNE STRUCTURE PROPOSÉE POUR UN ANNEAU DE STOCKAGE.

1. Introduction.

Nous nous proposons d'examiner les problèmes de la stabilité betatronique, de l'admittance et du déplacement de l'orbite fermée, d'un anneau de stockage, dont la structure, proposée par K. Johnsen, est une version simplifiée de la structure dite non symétrique (Réf.: P 50-119-1), étudiée antérieurement dans (1, 2 et 3). C'est la structure suivante:



avec les notations utilisées dans les références précédentes et que nous continuerons à employer dans ce papier.

Nous nous plaçons dans l'approximation des lentilles minces.

2. Stabilité Betatronique et Admittance.

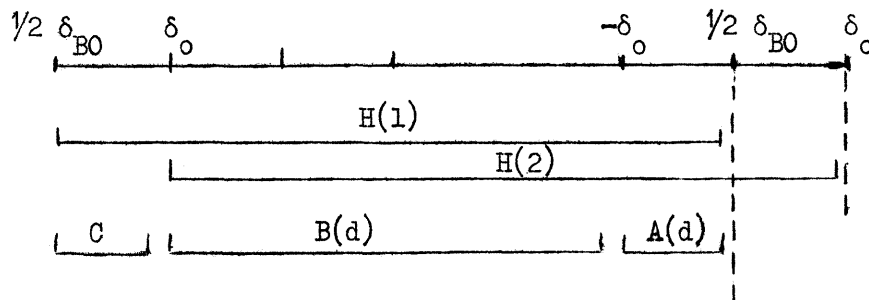
Pour le calcul de l'admittance, nous utiliserons la théorie que nous avons exposée dans (2) et sur laquelle nous ne reviendrons pas en détail dans ce papier.

2.1. Mouvement horizontal ^{*})

En supposant que $\delta_0 > 0$ (on échange le rôle du mouvement horizontal et vertical en remplaçant δ_0 par $-\delta_0$) le maximum de l'amplitude betatronique ne peut

^{*}) Il est quelque peu arbitraire de parler de structure horizontale et verticale, puisqu'il suffit de changer la polarité des lentilles pour les permuter.

avoir lieu qu'à l'origine de la maille H(1) ou H(2), représentées schématiquement ci-contre:



Nous sommes conduits à considérer les matrices de transfert suivantes:

$$A(d_o) = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta_o & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(d_o) = \begin{bmatrix} 1 & 4\ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta_o & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 \delta_{BO} & 1 \end{bmatrix}$$

D'où les matrices de maille: $H(1) = A(d_o) B(d_o) C$ et $H(2) = CA(d_o) B(d_o)$.

Il vient:

$$H_{12}(1) = 2\ell(3 - 2d_o^2)$$

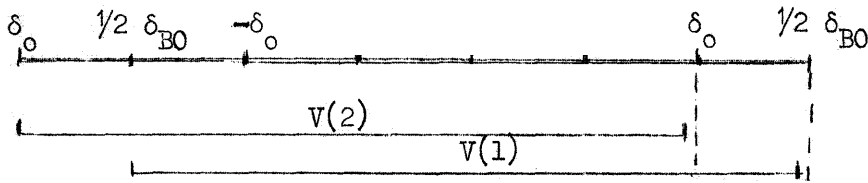
$$H_{12}(2) = 2\ell \left[(3 + 4d_o) - 1/4 d_{BO}(5 + 4d_o) \right]$$

et

$$\text{tr } H = 2(1 - 4d_o^2) - d_{BO}(3 - 2d_o^2)$$

2.2. Mouvement vertical

Le maximum de l'amplitude bétatron ne peut être situé qu'à l'origine de la maille $V(1) = A(-d_o) B(-d_o) C$ ou $V(2) = B(-d_o) C A(-d_o)$:



Il vient: $V_{12}(1) = H_{12}(1)$; $V_{12}(2) = H_{12}(2)$ et $\text{tr } V = \text{tr } H$, expressions que nous allons respectivement désigner par: $M_{12}(1)$; $M_{12}(2)$ et $\text{tr } M$.

2.3. Etude numérique.

2.3.1. Généralités.

Nous allons considérer deux versions de cette structure, ne différant que par le nombre N_B de prismes, la longueur totale de l'orbite d'équilibre idéale étant la même: $C = 24$ mètres.

	1ère version	2ème version
- Nombre de prismes: N_B *)	8	12
- Longueur de la supermaille: $2L = C/N_B$	3 mètres	2 mètres
- Convergence (= inverse de la distance focale): $\delta_{BO} = \gamma/r_o = 2\pi/N_B r_o$ (où $\gamma = 2\pi/N_B$ est l'ouverture du prisme et $r_o = 0,6$ mètres, le rayon de courbure magnétique.)	$1,309 \text{ m}^{-1}$	$0,87a7. \text{ m}^{-1}$
- $d_{BO} = l \delta_{BO} = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{N_B^2} \frac{R}{r_o}$ (où $l = L/3$ et $R = C/2\pi$ est le rayon physique équivalent).	0,655	0,291

Les valeurs de $C = 24$ mètres et de $r_o = 0,6$ mètres sont tirées du projet auquel se rapporte le plan de réf. P 50-119-1, dont la présente structure a été déduite en supprimant deux lentilles par supermaille.

*) Nous conservons la notion quelque peu abusive de maille et de supermaille, utilisée dans (1, 2 et 3) pour faciliter la comparaison avec d'autres structures étudiées antérieurement.

$$N = 2 N_B$$

2.3.2. Condition de stabilité.

En nous limitant à l'intervalle $0 < d_0 < 1,8$ (rappelons que d_0 est une quantité essentiellement positive) le graphique (fig. 1) montre que l'oscillation betatron horizontale et verticale est stable dans l'intervalle:

$$0 < d_0 \lesssim 0,55 \quad \text{pour la version } N_B = 8$$

$$0 < d_0 \lesssim 0,65 \quad \text{pour la version } N_B = 12.$$

La relation: $\frac{1}{2} \text{tr } M = \cos 2\mu = \cos (4\pi Q/N)$, conduit à la courbe donnant le nombre d'onde Q en fonction de d_0 (fig. 2). D'où celle de Q en fonction de δ_0 (fig. 2 bis).

2.3.3. Admittance ^{*})

La représentation graphique de $M_{12}/2\ell$ (fig. 3) montre que le maximum de l'amplitude betatron est située comme suit:

Version $N_B = 8$: $0 < d_0 \lesssim 0,215$ dans les prismes, tant horizontalement que verticalement.

$0,215 \lesssim d_0 \lesssim 0,55$ à l'origine de la maille H(2), respectivement V(2).

Version $N_B = 12$: $0 < d_0 \lesssim 0,095$ dans les prismes, tant horizontalement que verticalement

$0,095 \lesssim d_0 \lesssim 0,65$ à l'origine de la maille H(2), respectivement V(2).

Aux limites $d_0 \simeq 0,215$ et $0,095$ correspondent respectivement $Q \simeq 2,17$ et $1,93$:

Puisque $H_{12 \text{ max}} = V_{12 \text{ max}}$, que nous désignons par $M_{12 \text{ max}}$, l'admittance est la même horizontalement et verticalement. Mais nous intéressent plutôt à la quantité $A/a^2 = 1/\beta_{\text{max}}$ qu'à l'admittance A elle-même, a désignant l'ouverture, il vient:

$$A/a^2 = \left[1 - (\frac{1}{2} \text{tr } M)^2 \right]^{1/2} / M_{12 \text{ max}}$$

dont nous donnons la représentation graphique en fonction de Q (fig. 4).

L'approximation des lentilles minces conduisant à des trajectoires en forme de lignes brisées, il est intéressant de comparer l'admittance A , à celle A_0 d'une structure donnant une oscillation betatron sinusoïdale de même longueur d'onde NL/Q :

^{*}) Sur la définition de l'admittance, voir réf. (2) paragraphe 2.

$$A_0 = \frac{2 \pi Q}{N L} a^2$$

A cet effet nous donnons la courbe de A/A_0 en fonction de Q (fig. 5).

3. Déplacement de l'Orbite d'Equilibre.

Nous utiliserons la théorie exposée dans (3), sur laquelle nous ne reviendrons pas en détail dans ce papier.

3.1. Condition d'orbite fermée. (Cf. fig. 6)

Les conditions d'orbite fermée ^{*)} de la trajectoire d'une particule de quantité de mouvement $p = p_0 + \Delta p$ différente de celle p_0 relative à l'orbite d'équilibre idéale, s'écrivent d'après les relations (2/1 et 2) que nous avons démontré dans (3):

$$X_1 = \frac{2\pi}{N_B} \frac{T_{12}(s_1)}{2 - \text{tr } T} \frac{\Delta p}{p}$$

$$X_1' = \frac{2\pi}{N_B} \frac{1 - T_{11}(s_1)}{2 - \text{tr } T} \frac{\Delta p}{p}$$

qui sont les conditions initiales (du mouvement horizontal) à la sortie du prisme, tandis que la matrice $T(s_1)$ est la matrice de maille d'origine s_1 (sortie du prisme) du mouvement horizontal d'une particule de quantité de mouvement $p = p_0 + \Delta p$; elle s'écrit

$$T(s_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma/2 \delta_B & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A(d) B(d) \begin{bmatrix} 1 & u + \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

les expressions de $A(d)$ et de $B(d)$ étant données dans le paragraphe 2.1.

Il vient:

$$T_{11} = (1 - 4d - 4d^2) - 4\epsilon d^2$$

$$T_{12} = 2\ell \left[(3 - 2d^2) + \epsilon (1 - 4d^2) - 2\epsilon^2 d^2 \right]$$

$$T_{21} = \gamma\ell \left[-4d^2 - \gamma/2 d_B (1 - 4d - 4d^2) + 2\epsilon d_B d^2 \right]$$

*) Rappelons que les conditions d'orbite fermée sont des relations approchées, valables sauf au voisinage des limites de stabilité.

$$T_{22} = (1 + 4d - 4d^2) - d_B (3 - 2d^2) - \varepsilon \left[4d^2 + d_B (1 - 4d^2) \right] + 2 \varepsilon^2 d_B d^2$$

3.2. Calculs approchés.

Nous nous proposons de simplifier les expressions de T_{11} , T_{12} et de $\text{tr } T$, que nous utiliserons dans la suite. Elles sont de la forme suivante:

$$T_{11} = g_0 + \varepsilon g_1$$

$$T_{12} = 2 (h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2)$$

$$\text{tr } T = t_0 + \varepsilon t_1 + \varepsilon t_2$$

Mais nous intéressent à $1 - T_{11}$ et à $2 - \text{tr } T$ plutôt qu'à T_{11} et $\text{tr } T$, nous constatons que dans l'intervalle $0 < d < 0,65$ nous avons (fig. 7, 8 et 9):

$$1 - g_0 > g_1$$

$$|h_0| > |h_1| \quad \text{et} \quad |h_2|$$

$$2 - t_0 > t_1 > t_2 \quad (\text{pour } N_B = 8 \text{ et } 12)$$

Or en pratique $\varepsilon = u/\ell = (\lambda_1/\ell) \text{tg}(\pi/N_B) \lesssim 1$ o/o de sorte qu'avec une bonne approximation (erreur relative inférieure à ε) nous pourrions utiliser les expressions:

$$T_{11} \simeq g_0$$

$$T_{12} \simeq 2 \ell h_0$$

$$\text{tr } T \simeq t_0$$

Dans l'approximation où $p/p_0 \simeq 1$, nous allons noter:

$$T_{11} \simeq g_{00} = 1 - 4 d_0 - 4 d_0^2$$

$$T_{12} \simeq 2 \ell h_{00} = 2 \ell (3 - 2 d_0^2)$$

$$\text{tr } T \simeq t_{00} = 2 (1 - 4 d_0^2) - d_{B0} (3 - 2 d_0^2)$$

Ces deux dernières expressions ont déjà été étudiées dans le paragraphe 2.

3.3. Déplacement horizontal de l'orbite d'équilibre dans les prismes.

D'après les relations (4/1 et 2) que nous avons démontré dans (3) l'ecart radial réduit dans les prismes est:

$$\left(\frac{X}{R}\right)_B = \alpha_B \frac{\Delta p}{p}$$

avec:

$$\alpha_B = \frac{4 \pi^2}{3 N_B^2} \frac{T_{12}(s_1)/2 \ell}{2 - \text{tr } T}$$

fonction que nous représentons graphiquement dans l'approximation où $\varepsilon \ll 1$ et $p/p_0 \simeq 1$ (fig. 10).

3.4. Déplacement radial de l'orbite d'équilibre dans les lentilles et déplacement radial maximum.

Nous nous proposons de suivre l'écart radial de l'orbite d'équilibre à travers la maille en partant avec les conditions initiales dites conditions d'orbite fermée. Considérons pour cela les matrices de transfert partielles suivantes:

$$\begin{bmatrix} X_F \\ X'_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u + \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ X'_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_D \\ X'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4\ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_F \\ X'_F \end{bmatrix}$$

En posant: $(X_i/R) = (X/R)_i = \alpha_i (\Delta p/p)$

$$X'_i = \alpha'_i (\Delta p/p)$$

il vient:

$$\begin{bmatrix} \alpha_F \\ \alpha'_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (\pi/3N_B)(1 + \varepsilon) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_B \\ \alpha'_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_D \\ \alpha'_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 4d & 4(\pi/3N_B) \\ -d/((\pi/3N_B)) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_F \\ \alpha'_F \end{bmatrix}$$

car $l/R = \pi/3 N_B$.

Le déplacement radial maximum de l'orbite d'équilibre est donné par:

$$\left(\frac{X}{R}\right)_{\max} = \alpha_{\max} \frac{\Delta p}{p}$$

où α_{\max} est le maximum des α_i , dont nous donnons la représentation graphique dans l'approximation où $\varepsilon \ll 1$ et $p/p_0 \simeq 1$ (notation: $\alpha_{i,0}$) en fonction du paramètre d_0 . Nous constatons que $\alpha_{\max, N_B} = \alpha_{F,0, N_B}$ pour $N_B = 8$ et 12 . Nous donnons la courbe représentative de α_{\max, N_B} en fonction de Q (fig. 11)

3.5. Facteur de compaction.

D'après les relations (6/2 et 3) que nous avons donné dans (3), le facteur de compaction $\alpha = (\Delta C/C)/(\Delta p/p)$ s'écrit:

$$\alpha = (1 + k) \alpha_B \frac{\text{tg}(\pi/N_B)}{\pi/N_B}$$

avec: $0 \ll k \ll k_{\max}$

où:

$$k_{\max} \simeq 1/2 \left[(3 N_B/\pi) \alpha_{\max} \frac{\Delta p}{p} \right]^2$$

En pratique $k \simeq 0$. En effet plaçons nous pour simplifier dans l'approximation $\varepsilon \ll 1$, $p/p_0 \simeq 1$, où nous avons: $\alpha_{\max, N_B} \simeq 0,32$. Il vient le facteur majorant:

$$k_{\max} \simeq 3 (\Delta p/p)^2 \quad \text{pour } N_B = 8$$

$$k_{\max} \simeq 6,65 (\Delta p/p)^2 \quad \text{pour } N_B = 12$$

Nous donnons la courbe représentative de α dans l'approximation $\epsilon \ll 1$, $p/p_0 \approx 1$ (notation α_0) en fonction de Q en prenant $k = 0$.

4. Remarque.

Pour faciliter au lecteur la comparaison des caractéristiques de cette structure dite simplifiée avec celles de la structure dont elle est déduite (2 et 3), nous reproduisons les principales courbes se rapportant à cette dernière aux côtés de celles relatives à la présente étude. Nous les désignons par le symbole I.

5. Conclusion.

En comparant la version $N_B = 8$ de la structure dite simplifiée à celle dont elle est déduite, on constate que la suppression de deux lentilles quadrupolaires par maille se solde, pour ce qui est des principales caractéristiques étudiées dans ce papier, par une nette diminution de l'admittance et par une augmentation non moins appréciable du déplacement de l'orbite d'équilibre, pour un nombre d'onde Q donné. Cependant il ne faut pas oublier que pour réaliser un Q donné, cette version de la structure simplifiée nécessite une convergence δ_0 plus petite que ne l'exige la structure complète.

Par contre la version $N_B = 12$ de la structure simplifiée, bien qu'elle ait $1/4$ de lentilles quadrupolaires de moins que la structure complète, a une admittance du même ordre de grandeur et un déplacement d'orbite d'équilibre moins grand, pour un Q donné, tout en ayant pratiquement le même $Q = f(\delta_0)$.

R.A. Beck.

Références.

1. K. Johnsen: PS/Int. AR/60-6 (6th May 1960): Storage Ring Systems for 100 MeV Electrons.
2. R.A. Beck: PS/Int. AR/60-21 (12 Août 1960): Stabilité Betatronique et Admittance de deux Structures Proposées pour un Anneau de Stockage.
3. R.A. Beck: PS/Int. AR/60-26 (7 Sept. 1960): Déplacement de l'Orbite d'Equilibre dans une Structure proposée pour un Anneau de Stockage.

Distribution: (ouverte)

Accelerator Research Group
P.S. Parameter Committee Members
J.B. Adams (2 copies)
P.S. Library.

/kt

FIG 1

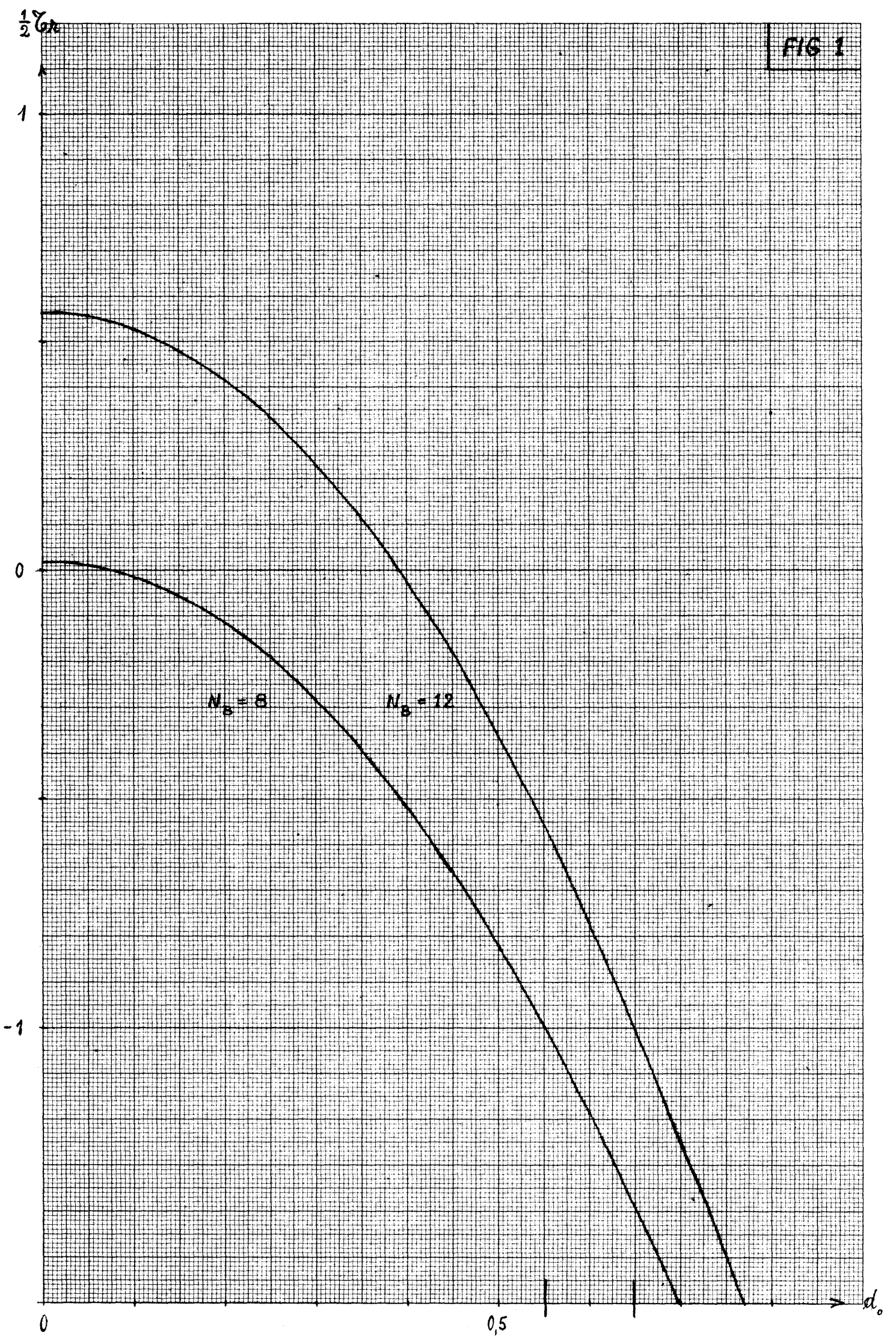


FIG 3

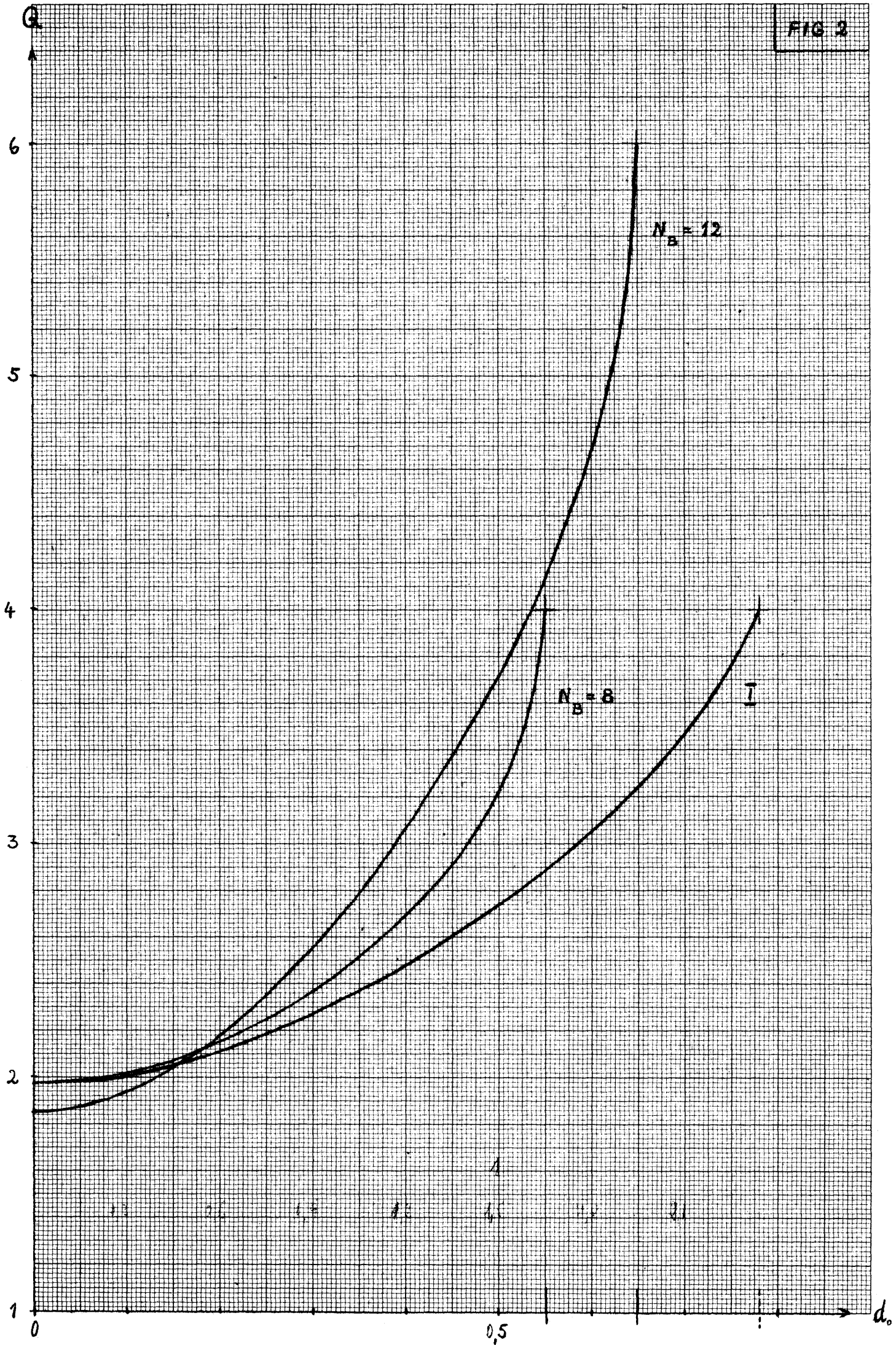


FIG 2 bis

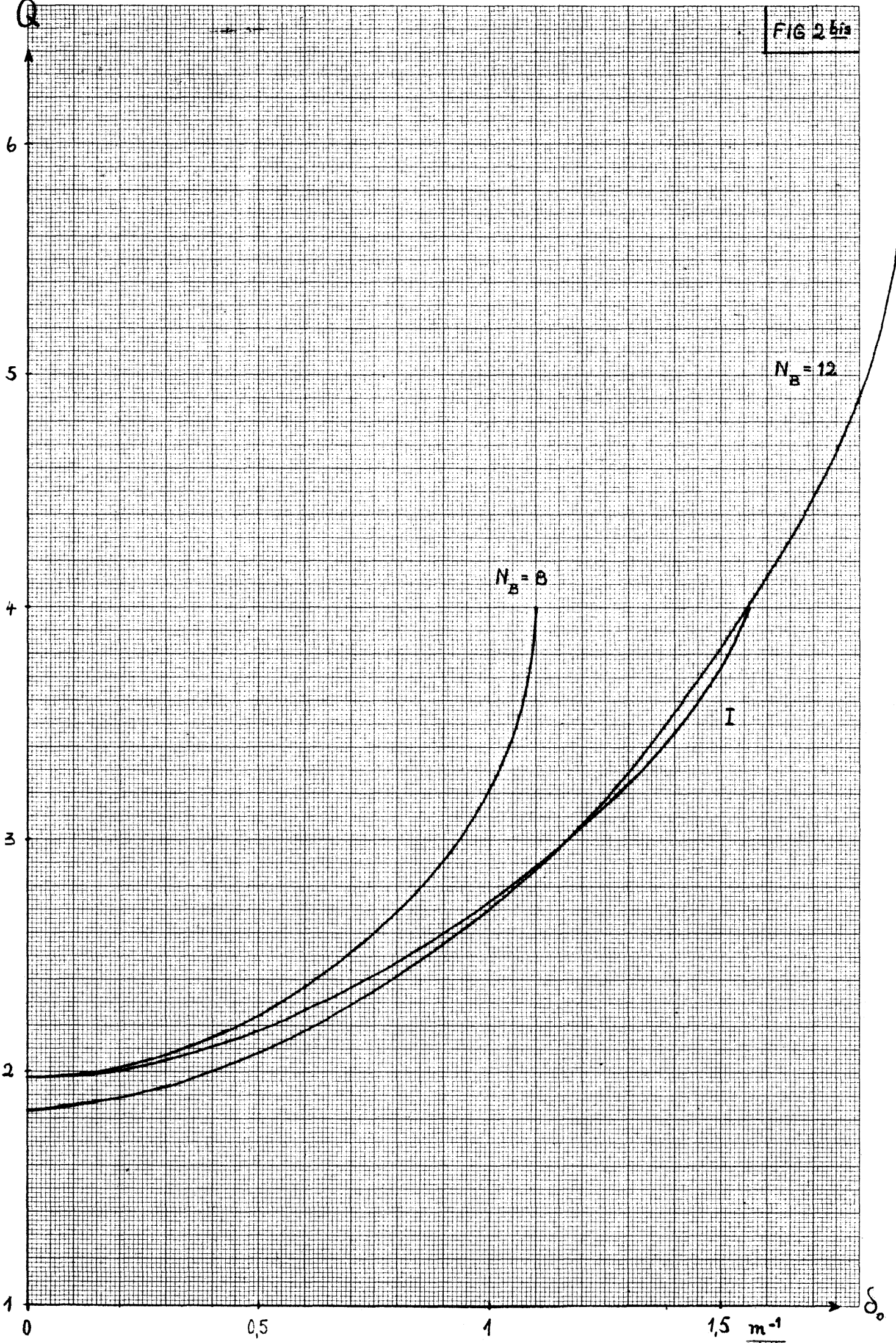


FIG 3

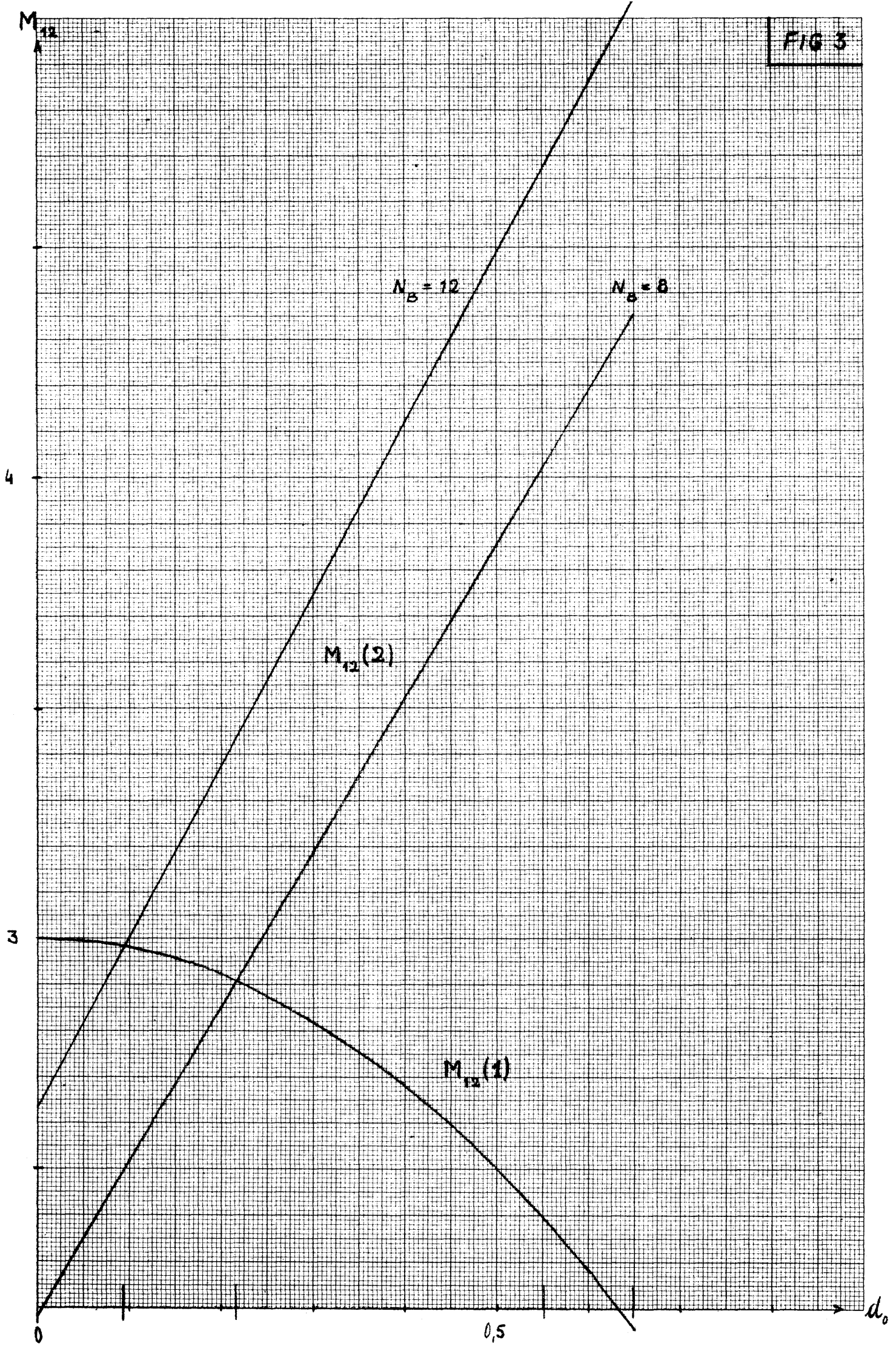
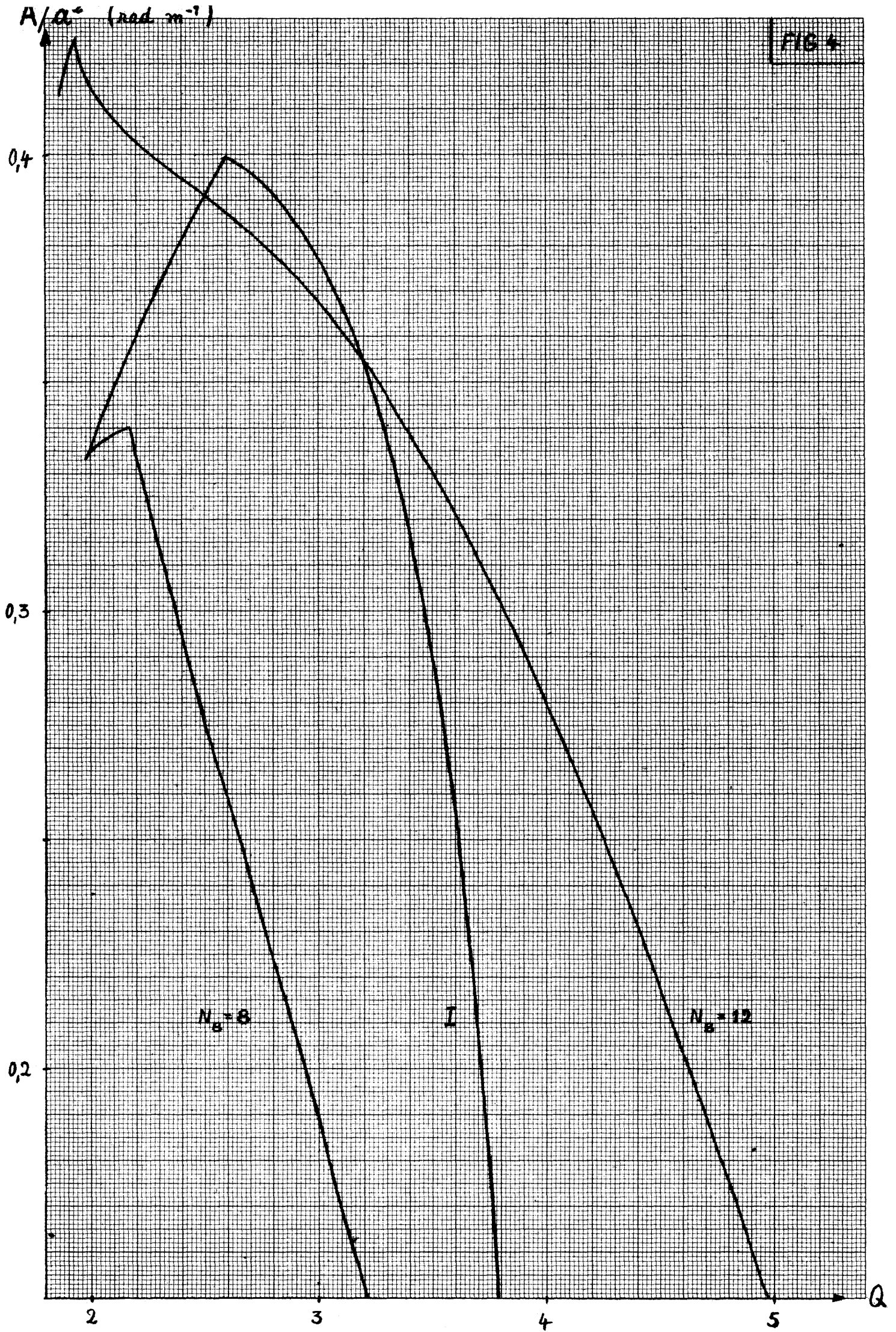
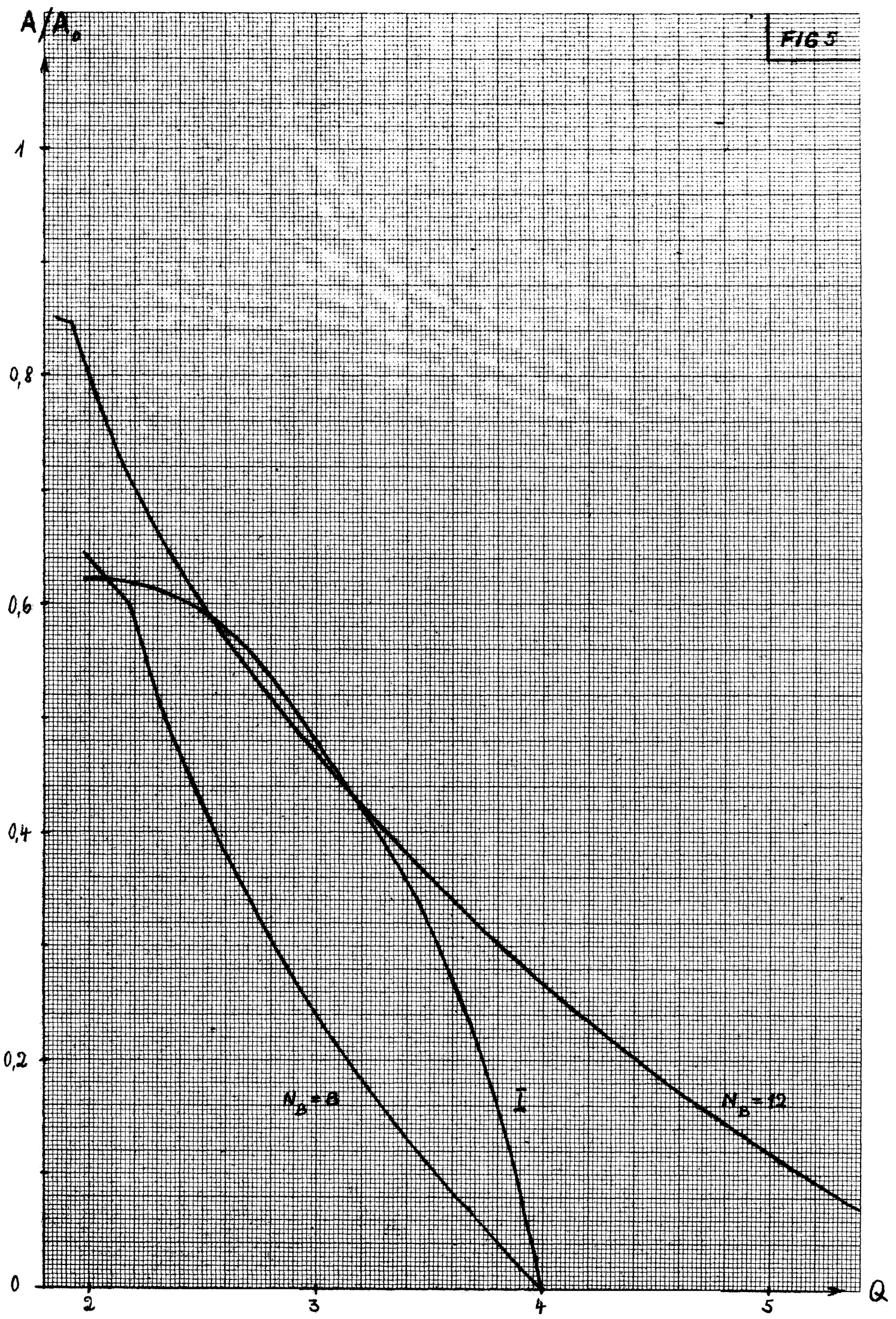


FIG 4





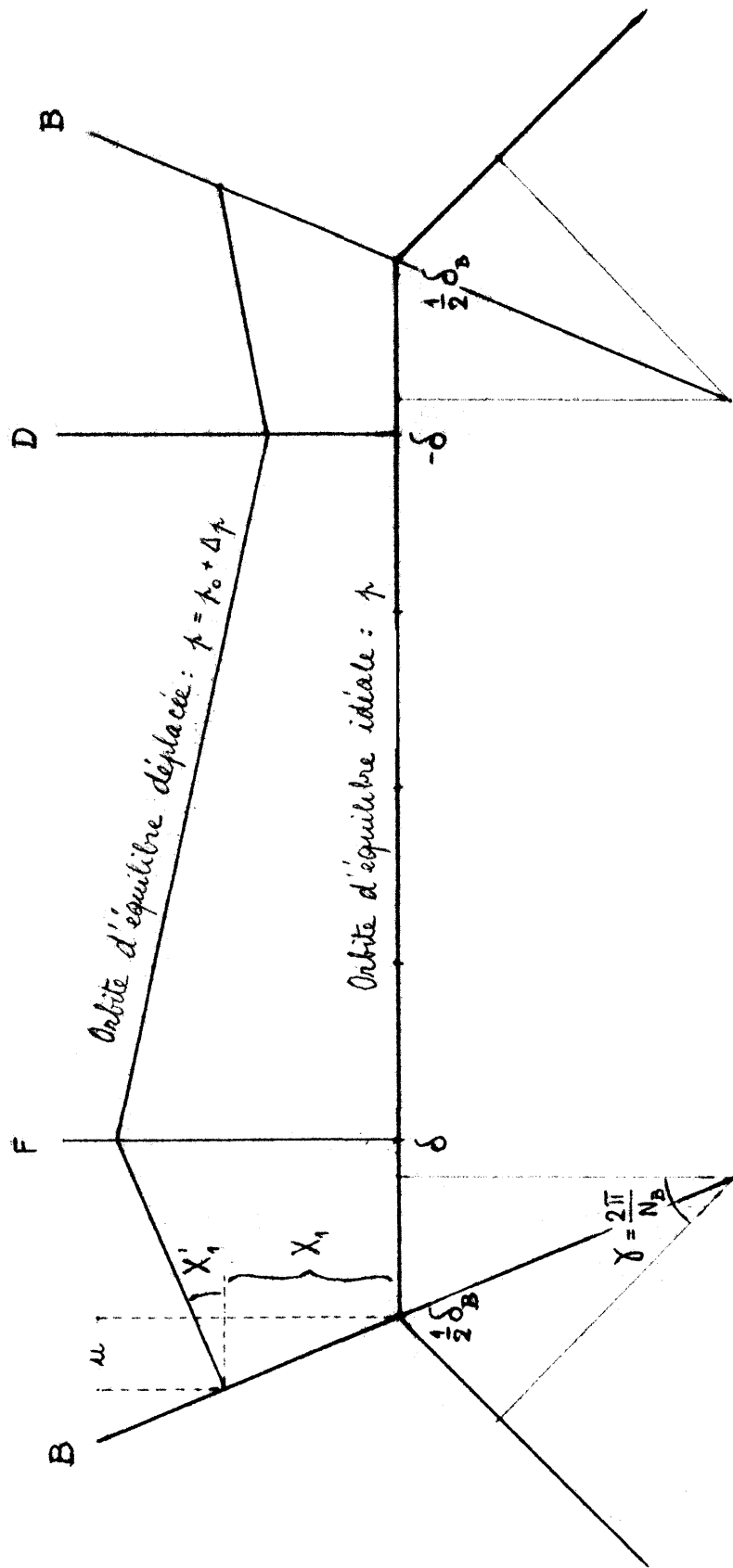


FIG 7

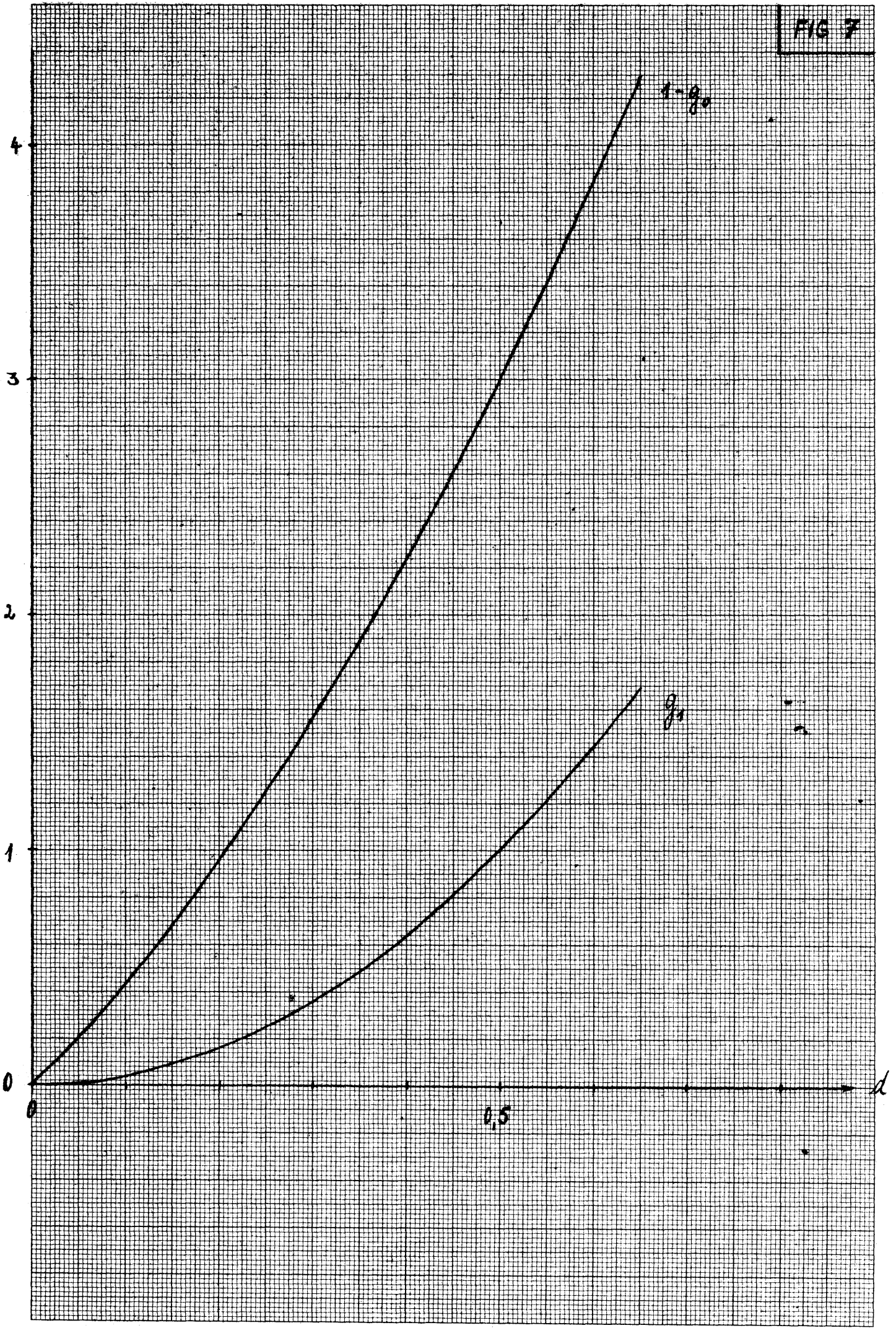


FIG 8

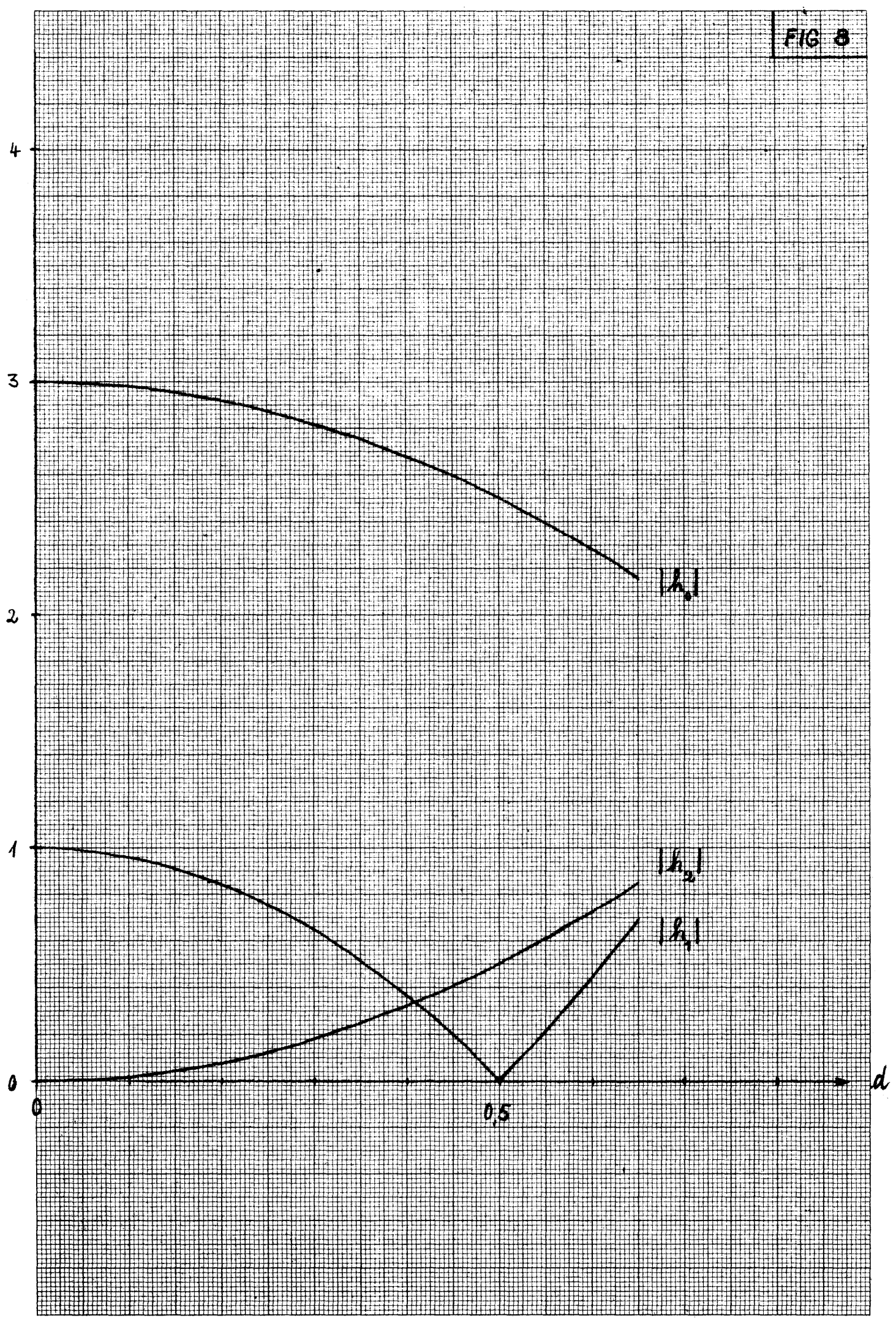


FIG 9

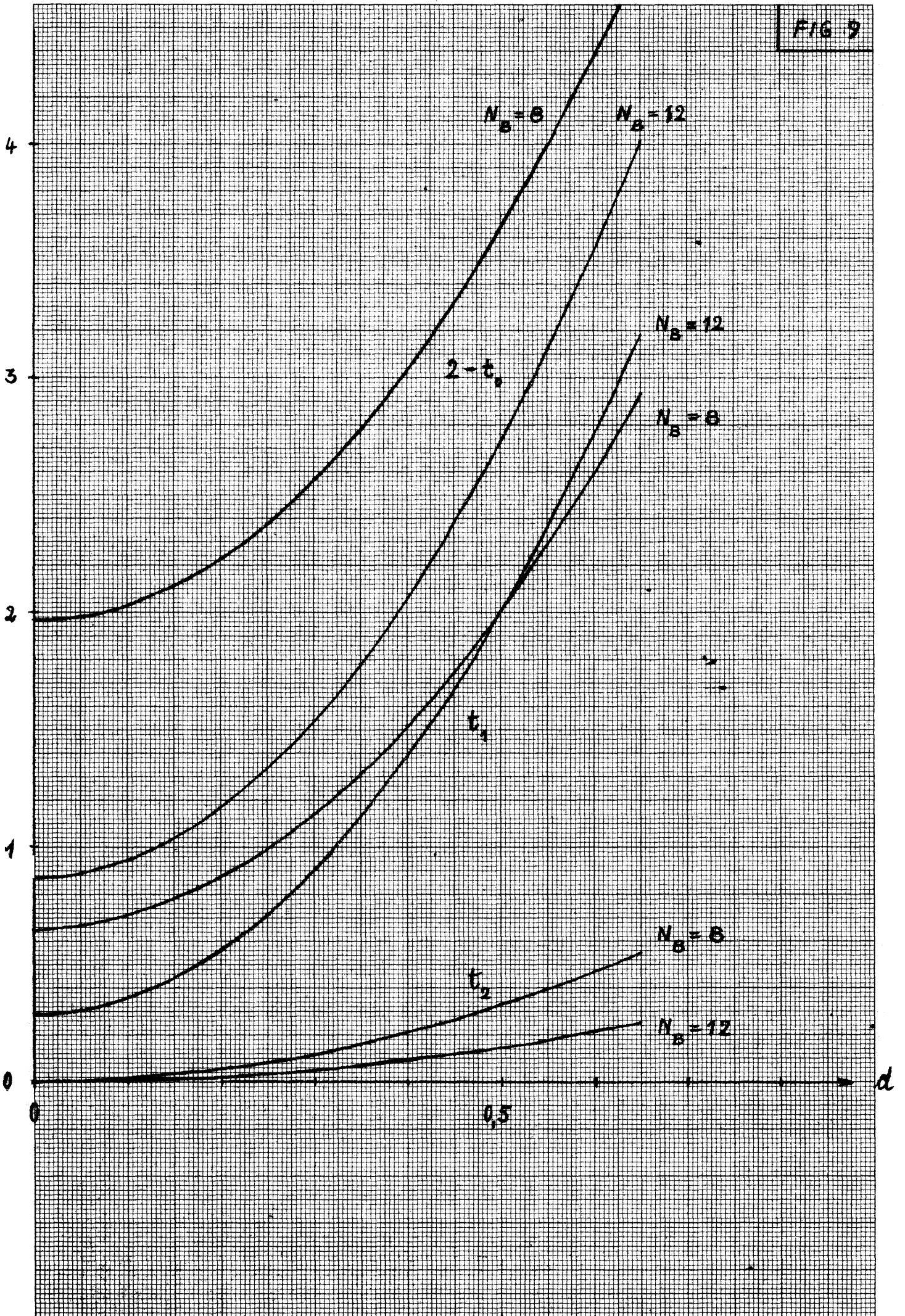


FIG 10

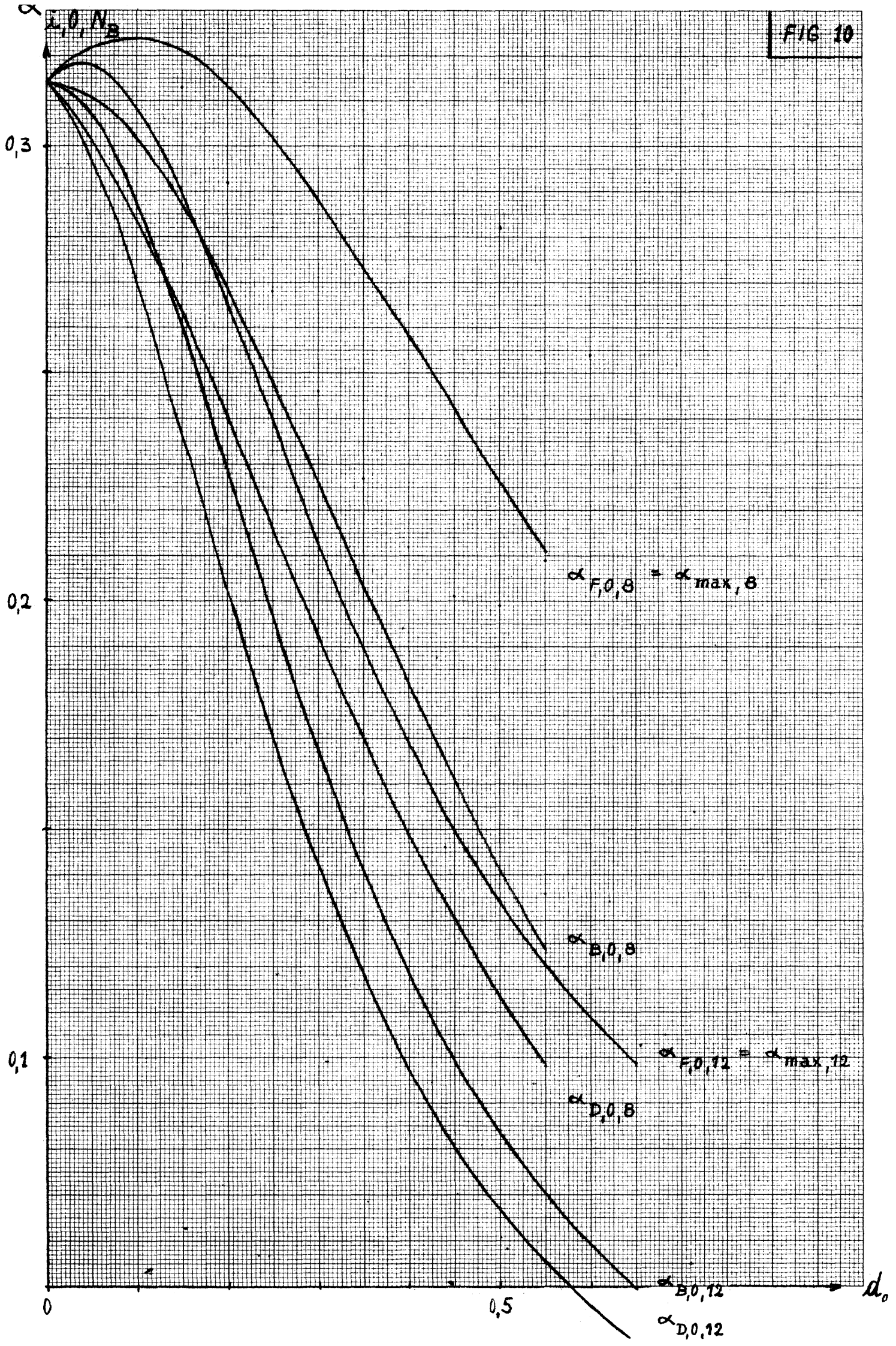


FIG 11

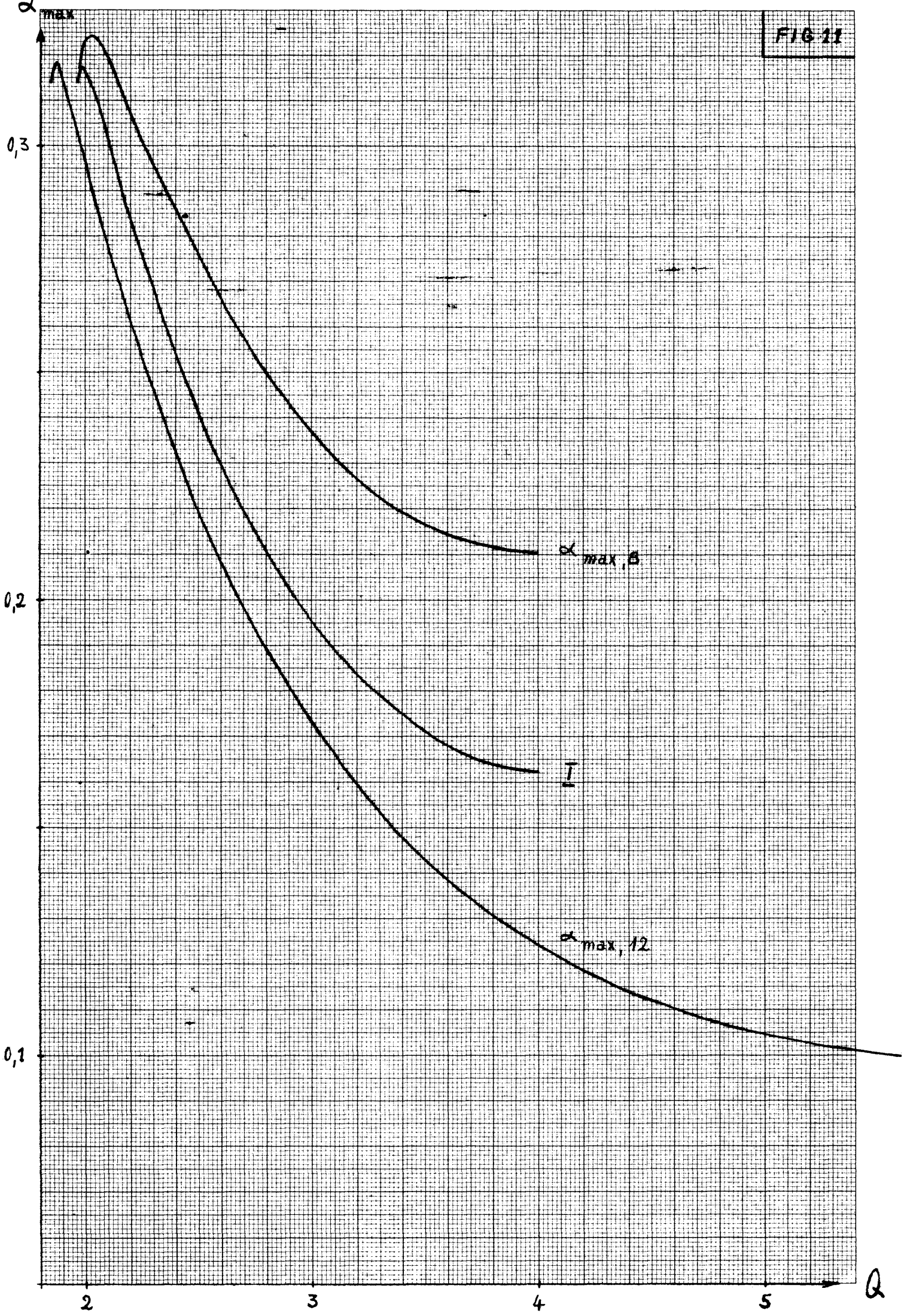


FIG 12

