

DEPLACEMENT DE L'ORBITE D'EQUILIBRE DANS UNE STRUCTURE

PROPOSEE POUR UN ANNEAU DE STOCKAGE.

1. Introduction.

Faisant suite au rapport PS/Int. AR/60-21: "Stabilité betatronique et admittance de deux structures proposées pour un anneau de stockage", nous nous attachons à présent plus particulièrement à la structure dite non-symétrique, dont la courbe d'admittance (réf. 2, fig. 8) est plus intéressante que celles de la structure dite symétrique. Nous nous proposons d'en étudier le déplacement radial de l'orbite d'équilibre correspondant à un écart de quantité de mouvement  $\Delta p$  de la valeur idéale  $p_0$ .

Nous nous plaçons dans l'approximation des lentilles minces et nous utilisons les notations employées dans (1) et (2).

Pour les calculs numériques nous prenons les valeurs tirées du projet auquel se rapporte le plan de réf. P 50-119-1, valeurs que nous avons déjà utilisées dans (2).

2. Condition d'Orbite Fermée de la Trajectoire d'une Particule de Quantité de Mouvement  $p = p_0 + \Delta p$ .

Considérons la matrice de transfert de maille  $T(s_1)$  d'origine  $s_1$  (sortie du prisme) du mouvement horizontal d'une particule de quantité de mouvement  $p = p_0 + \Delta p$ , différente de celle  $p_0$  relative à l'orbite d'équilibre idéale.

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_2' \end{bmatrix} = T(s_1) \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1' \end{bmatrix}$$

L'angle  $X_2'^{\#}$  que fait l'orbite émergent du prisme No. 2 avec la nouvelle direction est (cf. fig.1):

$$X_2'^{\#} = X_2' + \gamma - \frac{p_0}{p} \gamma = X_2' + \frac{2\pi}{N_B} \frac{\Delta p}{p} \quad (*)$$

---

<sup>#</sup> $N_B = N/2$  est le nombre de prismes c.à-d. de super-mailles.

relation qui suppose que les angles sont petits, ce qui en pratique est le cas, sauf au voisinage des limites de la zone de stabilité.

La condition d'orbite fermée s'obtient en faisant:

$$X_1 = X_2 \quad \text{et} \quad X_1' = X_2' \quad \#$$

Elle s'écrit:

$$X_1 = \frac{2\pi}{N_B} \frac{T_{12}(s_1)}{2 - \text{tr } T} \frac{\Delta p}{p} \quad (2.1)$$

$$X_1' = \frac{2\pi}{N_B} \frac{1 - T_{11}(s_1)}{2 - \text{tr } T} \frac{\Delta p}{p} \quad (2.2)$$

qui, précisons le, sont les conditions initiales à la sortie des prismes.

Or la matrice de transfert  $T(s_1)$  telle que  $u_1 = u_2 = u$  s'écrit:

$$T(s_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 \delta_B & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C \cdot A \begin{bmatrix} 1 & u + \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

l'expression des matrices A et C étant donnée formellement dans (1), mais  $\delta$  et  $\delta_B$  étant définis par:

$$\delta = \frac{p_0}{p} \delta_0 \quad \text{et} \quad \delta_B = \frac{p_0}{p} \delta_{B_0}$$

où  $\delta_0$  et  $\delta_{B_0}$  se rapportent à une particule ayant la quantité de mouvement idéale  $p_0$

Il vient:

$$\begin{aligned} T_{11} &= (1 - 2d - 4d^2 + 2d^3 + 2d^4) - 2\varepsilon d^2 (1 - d^2) \\ T_{12} &= 2\ell \left[ (1 - d^2)(3 - d^2) + \varepsilon(1 - 4d^2 + 2d^4) - \varepsilon^2 d^2(1 - d^2) \right] \\ T_{21} &= \frac{1}{\ell} \left[ -2d^2(1 - d^2) - \frac{1}{2} d_B (1 - 2d - 4d^2 + 2d^3 + 2d^4) + \varepsilon d_B d^2 \right] \\ T_{22} &= (1 + 2d - 4d^2 - 2d^3 + 2d^4) - d_B (1 - d^2)(3 - d^2) \\ &\quad - \varepsilon \left[ 2d^2(1 - d^2) + d_B (1 - 4d^2 + 2d^4) \right] + \varepsilon^2 d_B d^2 (1 - d^2) \end{aligned}$$

avec:  $\varepsilon = u/\ell$  ;  $d = \delta$  et  $d_B = \ell \delta_B$

### 3. Calculs approchés.

Utilisant dans la suite les expressions de  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  et de  $\text{tr } T$  qui sont de la forme:

$$\begin{aligned} T_{11} &= g_0 + \varepsilon g_1 \\ T_{12} &= 2 \ell (h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2) \\ \text{tr } T &= t_0 + \varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2 \end{aligned}$$

nous nous proposons de les simplifier. Nous intéressant à  $1 - T_{11}$  et à  $2 - \text{tr } T$  plutôt qu'à  $T_{11}$  et  $\text{tr } T$ , les courbes (fig. 2, 3 et 4) montrent que dans l'intervalle  $0 < d < 0,8$  nous avons:

$$\begin{aligned} |1 - g_0| &> |g_1| \\ |h_0| &> |h_1| \text{ et } |h_2| \\ |2 - t_0| &> |t_1| \text{ et } |t_2| \end{aligned}$$

Or en pratique  $\varepsilon = u/\ell = (X_1/\ell) \text{tg}(\pi/N_B) \lesssim 1 \text{ o/o}$ . (Par exemple pour  $X_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $\ell = 50 \text{ cm}$  et  $N_B = 8$ , nous avons  $\varepsilon = 0,83 \text{ o/o}$ ). Nous pouvons donc avec une bonne approximation (erreur relative inférieure à  $\varepsilon$ ) utiliser les expressions:

$$\begin{aligned} T_{11} &\simeq g_0 && (3.1) \\ T_{12} &\simeq 2 \ell h_0 && (3.1) \\ \text{tr } T &\simeq t_0 \end{aligned}$$

Mais d'autre part  $p/p_0 \simeq 1$ . Nous allons noter dans cette approximation :

$$\begin{aligned} T_{11} &\simeq g_{00} = (1 - 2 d_0 - 4 d_0^2 + 2 d_0^3 + 2 d_0^4) - 2 \varepsilon d_0^2 (1 - d_0^2) \\ T_{12} &\simeq 2 \ell h_{00} = 2 \ell (1 - d_0^2) (3 - d_0^2) && (3.2) \\ \text{tr } T &\simeq t_{00} = 2 (1 - 4 d_0^2 + 2 d_0^4) - d_B (1 - d_0^2) (3 - d_0^2) \end{aligned}$$

Ces deux dernières expressions ont déjà été étudiées dans (2).

#### 4. Déplacement Radial de l'Orbite d'Equilibre dans les Prismes.

D'après (2.1) et compte tenu de la relation:

$$\ell/R = \pi/3 N_B \quad (\#)$$

l'écart radial réduit  $(X/R)_B$  dans les prismes s'écrit:

$$\left(\frac{X}{R}\right)_B = \alpha_B \frac{\Delta p}{p} \quad (4.1)$$

avec

$$\alpha_B = \frac{2 \pi^2}{3 N_B^2} \frac{T_{12}(s_1)/\ell}{2 - \text{tr } T} \quad (4.2)$$

soit dans l'approximation  $\varepsilon \ll 1$  et  $p/p_0 \simeq 1$  :

$$\alpha_{B0} = \frac{4 \pi^2}{3 N_B^2} \frac{h_{00}}{2 - t_{00}} \quad (4.3)$$

dont nous donnons la représentation graphique (fig. 5) dans le cas où  $N_B = 8$ .

#### 5. Déplacement Radial de l'Orbite d'Equilibre dans les Lentilles -

##### Déplacement Radial Maximum.

Dans l'approximation des lentilles minces, une trajectoire est entièrement connue en déterminant l'écart radial dans les éléments magnétiques. Nous nous proposons de suivre ainsi l'écart radial de l'orbite d'équilibre à travers une maille, en partant avec les conditions initiales (2.1 et 2). Pour cela considérons les matrices de transfert suivantes:

---

(#) Soit  $C$  la longueur de l'orbite fermée (numériquement:  $C = 24$  mètres)  
Le rayon physique est:  $R = C/2\pi$  (numériquement:  $R \simeq 3,82$  mètres)  
Et  $\ell = L/3 = C/6 N_B$ .

$$\begin{bmatrix} X_{F1} \\ X'_{F1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u + \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ X'_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{D1} \\ X'_{D1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{F1} \\ X'_{F1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{F2} \\ X'_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2\ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D1} \\ X'_{D1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{D2} \\ X'_{D2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{F2} \\ X'_{F2} \end{bmatrix}$$

En posant:  $(X_i/R) = (X/R)_i = \alpha_i (\Delta p/p)$

et:  $X'_i = \alpha'_i (\Delta p/p)$

il vient:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{F1} \\ \alpha'_{F1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\pi/3 N_B)(1 + \epsilon) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_B \\ \alpha'_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{D1} \\ \alpha'_{D1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d & \pi/3 N_B \\ -d/(\pi/3 N_B) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{F1} \\ \alpha'_{F1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{F2} \\ \alpha'_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2d & 2(\pi/3 N_B) \\ d/(\pi/3 N_B) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{D1} \\ \alpha'_{D1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{D2} \\ \alpha'_{D2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d & \pi/3 N_B \\ -d/(\pi/3 N_B) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{F2} \\ \alpha'_{F2} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Le déplacement radial maximum de l'orbite d'équilibre est donné par:

$$\left(\frac{X}{R}\right)_{\max} = \alpha_{\max} \frac{\Delta p}{p} \tag{5.2}$$

où  $\alpha_{\max}$  est la valeur maxima des  $\alpha_i$ .

Les courbes représentatives des  $\alpha_i$  dans l'approximation où  $\varepsilon \ll 1$  et  $p/p_0 \simeq 1$ , pour  $N_B = 8$  (fig. 5) montrent que l'écart maximum de l'orbite fermée a lieu dans la lentille F2.

Rappelons ici que le maximum de l'amplitude betatronique est situé dans:

$$\begin{aligned} B & \text{ pour } 0 < d_0 \lesssim 0,45 \\ F1 & \text{ pour } 0,45 \lesssim d_0 \lesssim 0,78 \end{aligned}$$

### 6. Facteur de Compaction.

La connaissance des  $\alpha_i$  permet en principe de déterminer exactement l'expression du facteur de compaction. Cependant la formule approchée que nous allons établir, tout en étant notablement plus simple est, comme nous verrons, d'une précision largement suffisante dans la pratique.

Soit  $C$  la longueur de l'orbite fermée idéale. Si l'orbite fermée déplacée était une droite, nous aurions:

$$\Delta C/C = u/L$$

Si l'orbite fermée déplacée était par contre une ligne brisée<sup>(\*)</sup> effectuant entre chaque élément magnétique (longueur  $\ell$ ) une différence d'excursion radiale égale à  $X_{\max}$ , nous aurions:

$$\Delta C/C = (1 + k_{\max}) u/L$$

avec:

$$1 + k_{\max} = 1/\cos \text{Arc tg}(X_{\max}/\ell) = \sqrt{1 + (X_{\max}/\ell)^2} \quad (6.1)$$

Puisque en pratique  $X_{\max}/\ell \ll 1$ , il vient en développant au premier ordre et compte tenu de (5.2)

$$k_{\max} \simeq \frac{1}{2} (X_{\max}/\ell)^2 = \frac{1}{2} \left[ (3\pi/N_B) \alpha_{\max} \frac{\Delta p}{p} \right]^2 \quad (6.2)$$

<sup>\*</sup>) Dans l'approximation des lentilles minces, les trajectoires sont des lignes brisées, dont les points anguleux coïncident avec les points où se trouvent les éléments magnétiques.

Considérons maintenant le rapport  $u/L$ . D'après (4.1) nous avons :

$$\frac{u}{L} = \frac{X_1 \operatorname{tg}(\pi/N_B)}{L} = \frac{\operatorname{tg}(\pi/N_B)}{\pi/N_B} \alpha_B \frac{\Delta p}{p}$$

D'où l'expression du facteur de compaction  $\alpha = (\Delta c/c)/(\Delta p/p)$  :

$$\alpha = (1+k) \alpha_B \frac{\operatorname{tg}(\pi/N_B)}{\pi/N_B} \quad (6.3)$$

avec  $0 \leq k \leq k_{\max}$

En pratique  $k \simeq 0$ . En effet plaçons nous pour simplifier dans l'approximation  $\varepsilon \ll 1$ ,  $p/p_0 \simeq 1$  et considérons la courbe représentative de  $\alpha_{\max, 0}$  (fig.5) Puisque  $\alpha_{\max, 0} \simeq 0,318$ , il vient pour  $N_B = 8$  :

$$k_{\max} \simeq 3 (\Delta p/p)^2$$

relation qui montre que pour  $\Delta p/p = 6$  o/o par exemple nous avons  $k_{\max} \simeq 1$  o/o.

Nous donnons la représentation graphique de  $\alpha_0$  (= valeur de  $\alpha$  dans l'approximation  $\varepsilon \ll 1$ ,  $p/p_0 \simeq 1$ ) dans le cas où  $N_B = 8$ , en prenant  $k = 0$  (fig. 6).

## 7. Conclusion.

Un point de fonctionnement intéressant semble être  $d_0 = 0,5$  soit  $Q = 2,75$ , voisin de  $d_0 \simeq 0,44$  (soit  $Q \simeq 2,6$ ) où l'admittance est maxima. En effet en  $d_0 = 0,5$ ,  $A/a^2 \simeq 0,396 \operatorname{rad} m^{-1}$ , qui n'est que de 1,5 o/o inférieur à la valeur maxima. En ce point nous avons pour le déplacement radial maximum de l'orbite d'équilibre  $\alpha_{\max, 0} \simeq 0,215$ , tandis que la valeur du facteur de compaction est  $\alpha_0 \simeq 0,144$ .

Rappelons que les calculs ne sont pas valables au voisinage des bornes de la zone de stabilité  $0 \leq d_0 \leq 0,78$ .

Je remercie Mr. K. Johnsen pour les discussions et critiques concernant des questions traitées dans ce rapport.

R.A. Beck.

Références.

1. K. Johnsen: PS/Int. AR/60-6 (6th May 1960). Storage Ring Systems for 100 MeV Electrons.
2. R.A. Beck: PS/Int. AR/60-21 (12 août 1960). Stabilité Betatronique et Admittance de Deux Structures Proposées pour un Anneau de Stockage <sup>■)</sup>

---

■) Errata: Signalons trois erreurs dans (2)

Page 2; 1ère figure: Remplacer  $\delta$  en bas à droite par  $-\delta$

page 6; 2ème figure: Remplacer R par  $R(d)$ .

page 8; Remplacer  $M(d)$  et  $M(-d)$  respectivement par  $R(d)$  et  $R(-d)$ ,  
lesquels se rapportent à la seconde figure de la page 6.



APPENDICE

Le calcul numérique des  $\alpha_i$  pour déterminer  $\alpha_{\max}$  étant quelque peu fastidieux, nous nous proposons de chercher une formule simple donnant une borne supérieure  $\alpha_M$  de  $\alpha_{\max}$ .

Considérons l'expression de l'invariant de Courant-Snyder <sup>\*)</sup>:

$$\left[ T_{12} X'^2 + (T_{11} - T_{22}) X'X - T_{21} X^2 \right] / \sin 2\mu = W$$

Les particules dont les conditions initiales (dans la section d'abscisse  $s = s_1$ ) vérifient les relations (2.1 et 2) sont caractérisées par une constante  $W_1$  telle que:

$$W_1 = (2\pi/N_B)^2 \frac{T_{12}(s_1)}{(2 - \text{tr } T) \sin 2\mu} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2$$

Le maximum maximum de l'écart  $X_{\max \max}$  a lieu à l'abscisse  $s_0$  où le coefficient  $\beta(s)$  de la matrice de transfert de raille de Twiss d'origine  $s$  est maximum.

$$X_{\max \max} = \sqrt{\beta_{\max} W_1} = \sqrt{|T_{12}|_{\max} |W_1| \sin 2\mu}$$

Cependant l'écart radial maximum résultant des conditions (2.1 et 2) est plus petit ou au plus égal à  $X_{\max \max}$ . D'où une borne supérieure:

$$(X/R)_{\max} \leq \alpha_M (\Delta p/p)$$

avec

$$\alpha_M = \frac{4\pi^2}{3N_B^2} \sqrt{\frac{|T_{12}|_{\max} |T_{12}(s_1)| / 4 \ell^2}{[1 - (\frac{1}{2} \text{tr } T)^2] [2 - \text{tr } T]}}$$

---

<sup>\*)</sup> Cf.: R.A. Beck et A. Nackach: Note CEA No. 301: Théorie du AGS d'après Courant et Snyder.

où  $\left| T_{12} \right|_{\max}$  a déjà été étudié dans (2), dans l'approximation où  $\epsilon \ll 1$  et  $p/p_0 \simeq 1$ .

Remarquons que l'approximation  $\epsilon \ll 1$  devient rapidement mauvaise au voisinage de la borne supérieure à cause du facteur  $1 + \frac{1}{2} \text{tr } T$ .

Distribution: (ouverte)

Accelerator Research Group  
Parameter Committee Members  
P.S. Library.

/kt

FIG 1

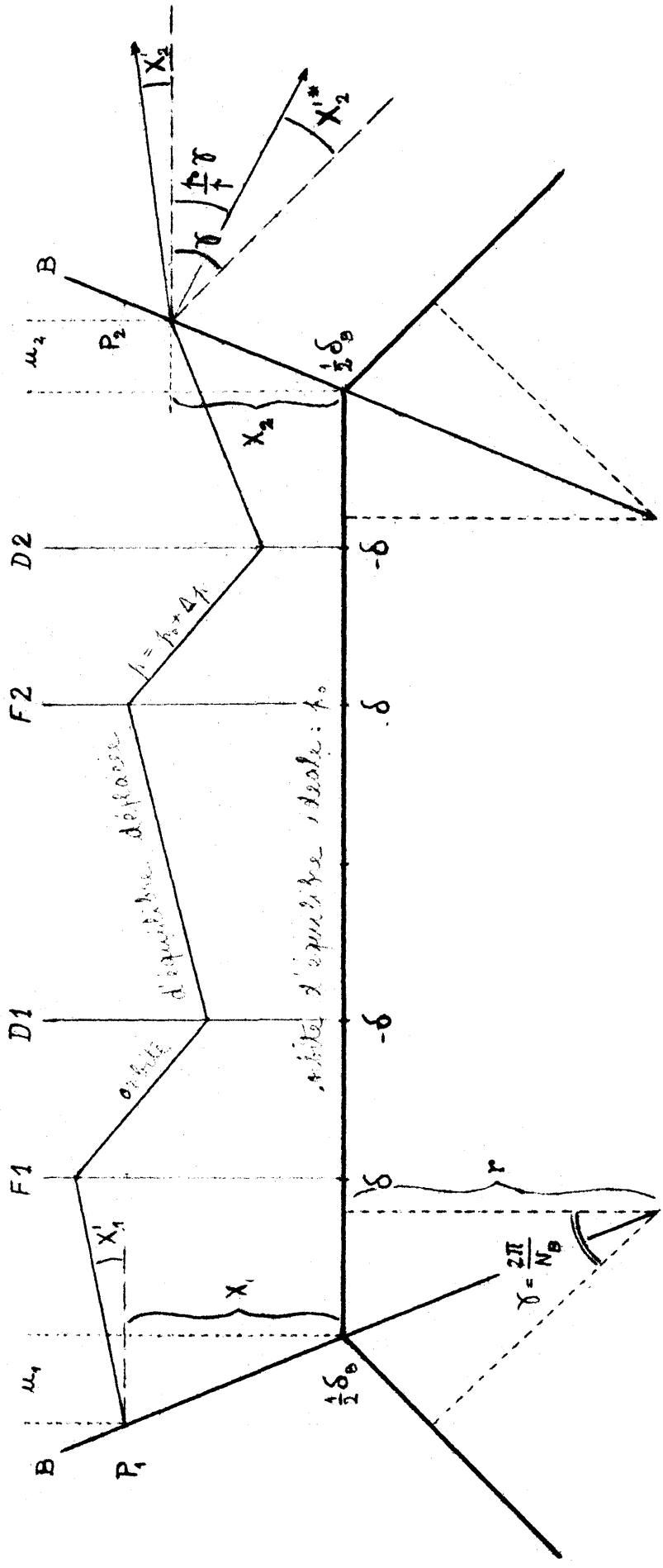


FIG 3

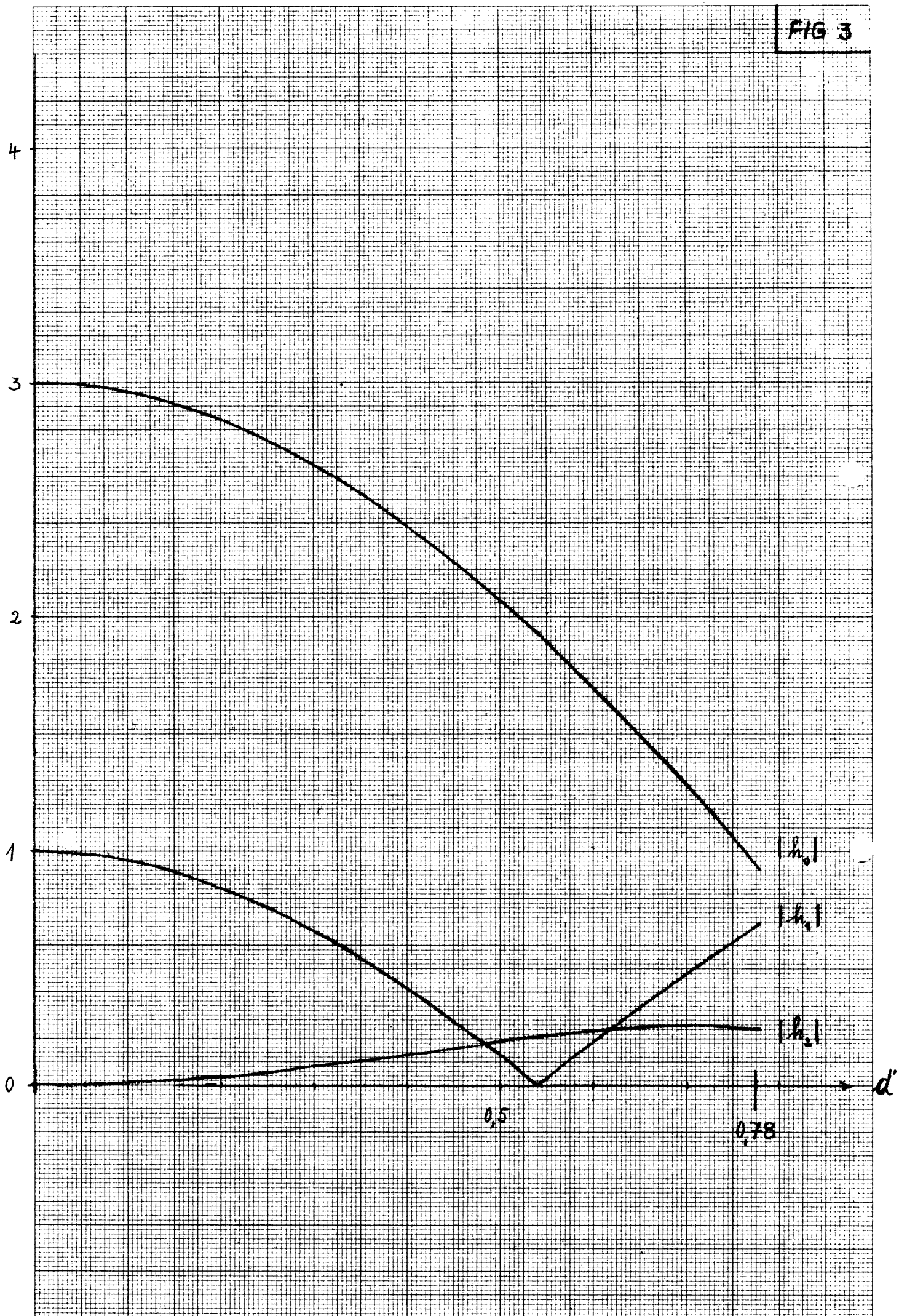


FIG 4

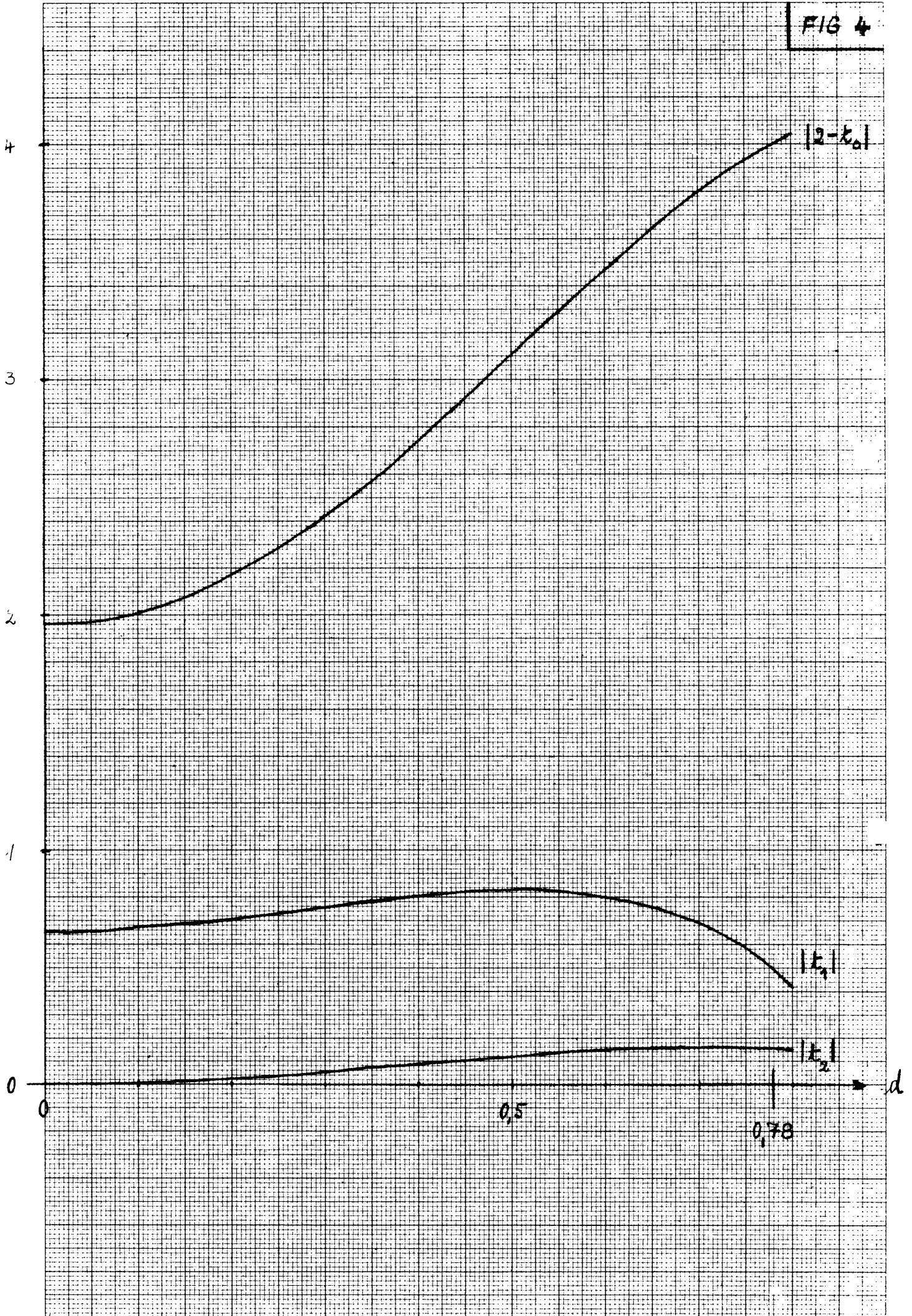


FIG 6

