

P. Jernain

PS/Int. AR/60-21

12 Août 1960.

STABILITE BETATRONIQUE ET ADMITTANCE DE DEUX STRUCTURES

PROPOSEES POUR UN ANNEAU DE STOCKAGE.

1. Introduction.

Nous nous proposons d'étudier la stabilité betatronique et l'admittance de deux anneaux de stockage, dont la structure a été proposé par K. Johnsen ⁽¹⁾.

Nous nous plaçons dans l'approximation des lentilles minces. Aussi ne faut-il pas perdre de vue, que les résultats seront plus pessimistes que la réalité, puisque dans cette approximation, les trajectoires sont des lignes brisées, alors que les trajectoires réelles ont une forme plus amortie.

Nous utiliserons les notations employées dans (1).

2. Principe Théorique.

Dans le cas de la stabilité, le maximum de l'amplitude de l'oscillation betatronique a lieu dans la section d'abscisse s_0 , où le coefficient $\beta(s)$ de la matrice de transfert de maille de Twiss d'origine s est maximum ⁽²⁾. Ce coefficient β s'exprime en fonction des coefficients $M_{ij}(s)$ de la matrice de transfert de maille M d'origine s comme suit:

$$\beta(s) = |M_{12}(s)| \left[1 - (1/2 \operatorname{tr} M)^2 \right]^{-1/2}$$

dans le cas de la stabilité.

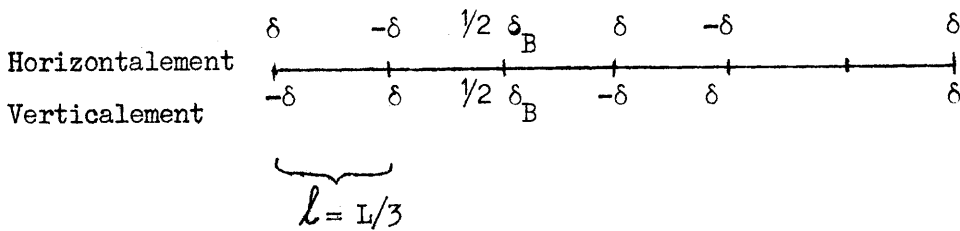
Or dans la suite nous nous plaçons dans l'approximation des lentilles minces, ce qui signifie que dans cette approximation les trajectoires sont formées d'une succession de segments de droites se raccordant aux points où se trouvent ces lentilles. L'amplitude betatronique maxima ne pouvant avoir lieu que dans un élément focalisant, il suffit de calculer M_{12} en ces points isolés. On en déduit β_{\max} ; d'où la valeur de l'admittance:

$$A = a^2 / \beta_{\max}$$

où a est l'ouverture. (Nous définissons l'admittance A par l'aire, dans l'espace des phases, de l'ellipse d'admittance divisée par π , définition qui est en usage au CERN).

3. Structure non-symétrique.

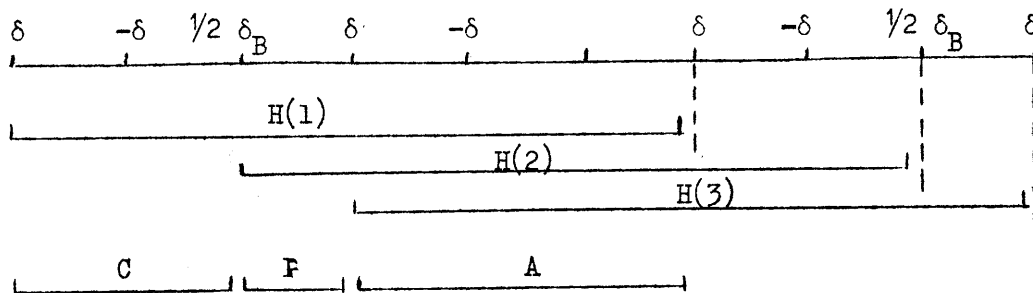
C'est la structure suivante (cf. réf. 1, fig. 3):



Remarquons qu'il est quelque peu arbitraire de parler de structure horizontale et verticale, puisqu'il suffit de changer la polarité des lentilles pour les permuter. C'est une simple commodité de langage.

3.1. Mouvement horizontal

En supposant que $\delta > 0$ (remplacer δ par $-\delta$ revient à échanger le rôle du mouvement horizontal et vertical) le maximum de l'amplitude bêta-tron ne peut avoir lieu qu'à l'origine d'une des mailles $H(1)$, $H(2)$ ou $H(3)$ représentées ci-contre:



ce qui nous conduit à considérer les matrices de transfert suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d - 2d^2 & l(3 + 2d) \\ -d^2/l & 1 + d \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 \delta_B & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1/2 d_B & l \\ -1/2 d_B/l & 1 \end{bmatrix}$$

$$C(d) = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d - d^2 & l(2 + d) \\ -d^2/l & 1 + d \end{bmatrix}$$

avec $l = L/3$, $d = l\delta$ et $d_B = l\delta_B$.

D'où les matrices de transfert de maille: $H(1) = A B C$; $H(2) = C A B$ et $H(3) = B C A$. Il vient d'une part:

$$H_{12}(1) = l \left[2(3 + 2d)(1 - d^2) - 1/2 d_B (2 + d)(4 + d - 2d^2) \right]$$

$$H_{12}(2) = 2l(1 - d^2)(3 - d^2)$$

$$H_{12}(3) = l \left[2(3 + 2d)(1 - d^2) - 1/2 d_B (5 + 2d - 4d^2 - 2d^3) \right]$$

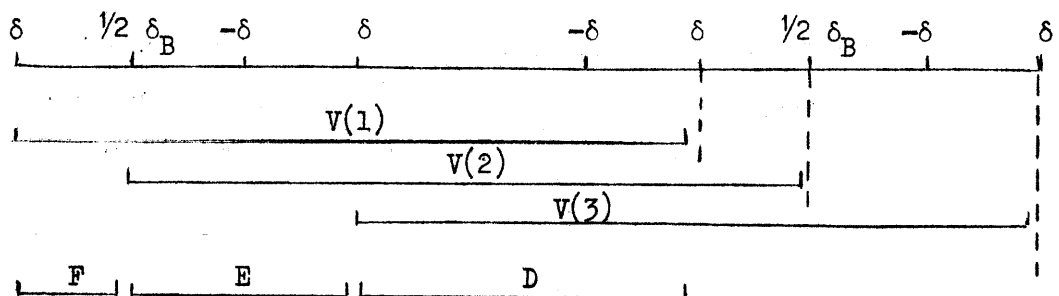
et d'autre part:

$$1/2 \text{tr} H = (1 - 4d^2 + 2d^4) - 1/2 d_B (3 - 4d^2 + d^4)$$

expression qui, rappelons le, ne dépend pas de l'origine de la maille.

3.2. Mouvement vertical.

Les mailles entrant en ligne de compte sont représentées schématiquement ci-contre:



ce qui conduit à former les matrices de transfert suivantes:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2\ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\delta + 2\delta^2 & \ell(3 + 2\delta) \\ -2\delta^2/\ell & 1 + 2\delta \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma/2 \delta_B & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + d) - \gamma/2 \delta_B (2 + d) & \ell(2 + d) \\ [d - \gamma/2 \delta_B (1 + d)]/\ell & 1 + d \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d & \ell \\ -d/\ell & 1 \end{bmatrix}$$

D'où les matrices de transfert de maille considérées: $V(1) = D E F$; $V(2) = F D E$
et $V(3) = E F D$. Nous constatons que:

$$\text{tr } V = \text{tr } H$$

et que:

$$V_{12} (1) = H_{12} (3)$$

$$V_{12} (2) = H_{12} (2)$$

$$V_{12} (3) = H_{12} (1)$$

3.3. Etude numérique.

Les valeurs des paramètres que nous prendrons sont tirés du projet auquel se rapporte le plan de réf. P50-119-1. Ce sont: $d_B = 0,655$ (sauf exception);
 $\ell = L/3 = 0,5$ mètres et $N = 16$.

3.3.1. Condition de stabilité.

En nous limitant à l'intervalle $0 < d < 1,8$ (d est une quantité essentiellement positive) et au cas où $d_B = 0,655$, le calcul numérique de la trace montre (fig. 1) que l'oscillation horizontale et verticale (car $\text{tr } H = \text{tr } V$) est stable pour $0 < d \lesssim 0,78$ et $1 < d \lesssim 1,38$.

La trace étant une fonction du paramètre d , il est intéressant de connaître la courbe donnant le nombre d'onde Q en fonction de d (fig. 2). Pour cela nous utilisons la relation:

$$\frac{1}{2} \text{tr} = \cos 2 \mu = \cos \frac{4 \pi}{N} Q$$

où 2μ est le changement de phase sur une supermaille de longueur $2 L$, mais N le nombre de pseudo-mailles de longueur moitié L (définitions et notations cf. réf. 1).

3.3.2. Admittance.

Nous intéressent désormais à l'intervalle (zône de stabilité) $0 < d \lesssim 0,78$, la représentation graphique de H_{12} et V_{12} (fig. 3), montre que le maximum de l'amplitude betatron est situé comme suit:

Mouvement horizontal:	$0 < d \lesssim 0,45$	à l'origine de la maille 2
	$0,45 \lesssim d \lesssim 0,78$	" " " " " 3
Mouvement vertical:	$0 < d \lesssim 0,45$	" " " " " 2
	$0,45 \lesssim d \lesssim 0,78$	" " " " " 1

D'où $H_{12 \text{ max}}$ et $V_{12 \text{ max}}$ en fonction de d . Il convient d'ailleurs de remarquer que $H_{12 \text{ max}} = V_{12 \text{ max}}$ et nous posons $H_{12 \text{ max}} = V_{12 \text{ max}} = b$. Comme d'autre part nous avons également $\text{tr} H = \text{tr} V$, il en résulte que l'admittance est la même pour le mouvement horizontal et vertical. Nous intéressent plutôt à la quantité A/a^2 qu'à l'admittance A elle-même, nous avons, en posant $\text{tr} H = \text{tr} V = t$:

$$A/a^2 = \left[1 - (t/2)^2 \right]^{1/2} / b$$

fonction que nous représentons graphiquement dans le cas où $l = 0,5$ mètres et $N = 16$ (fig. 8).

Dans l'intervalle considéré, le maximum a lieu pour $d \simeq 0,45$ soit $Q \simeq 2,72$, point qui correspond à l'intersection de $H(2)$ avec $H(3)$.

Il est intéressant de comparer A à l'acceptance A_0 d'une structure donnant une oscillation betatronique sinusoïdale de même longueur d'onde:

$$x = a \sin \frac{2 \pi}{NL/Q} s$$

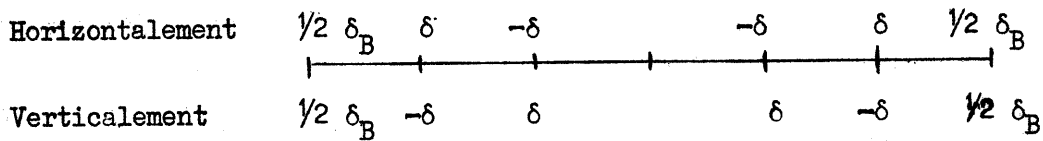
Il vient:

$$A_0 = \frac{2 \pi Q}{N L} a^2$$

Nous représentons la courbe donnant A/A_0 en fonction de Q dans le cas où $l = 0,5$ mètres et $N = 16$ (fig. 9).

4. Structure Symétrique.

C'est la structure suivante:

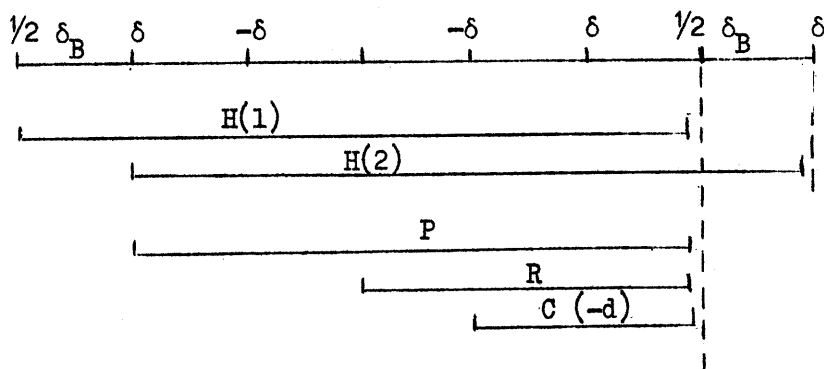


Pour les calculs numériques, nous choisirons exclusivement: $d_B = 0,655$,
 $l = 0,5$ mètres et $N = 16$.

4.1. Mouvement horizontal.

4.1.1. Matrice de transfert de maille.

Le maximum de l'amplitude de l'oscillation betatron horizontale ne peut avoir lieu qu'à l'origine d'une des deux mailles H(1) ou H(2) représentées schématiquement ci-contre:



ce qui nous conduit à considérer les matrices de transfert suivantes:

$$R(d) = C(-d) \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + d - d^2 & \ell(3 - d^2) \\ -d^2/\ell & 1 - d - d^2 \end{bmatrix}$$

$$P = R(d) C(d) = \begin{bmatrix} 1 - 6d^2 + 2d^4 & \ell(5 + 6d - 2d^2 - 2d^3) \\ -2d^2(1 - d - d^2)/\ell & 1 - 4d^2 - 2d^3 \end{bmatrix}$$

D'où les matrices de transfert de maille considérées:

$$H(1) = P \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 \delta_B & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(2) = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 \delta_B & 1 \end{bmatrix} P$$

Il vient d'une part:

$$H_{12}(1) = 2 \ell(3 - d^2)(1 + d - d^2)$$

$$H_{12}(2) = \ell \left[2(3 + 3d - 3d^2 - 2d^3) - 1/2 \delta_B (5 + 6d - 2d^2 - 2d^3) \right]$$

et d'autre part:

$$1/2 \operatorname{tr} H = (1 - 6d^2 + 2d^4) - 1/2 \delta_B (3 - d^2)(1 + d - d^2)$$

4.1.2. Condition de stabilité.

En nous limitant à l'intervalle $0 < d < 1,8$, le calcul numérique de la trace montre (fig. 4) que l'oscillation betatronique horizontale est stable pour $0 < d \lesssim 0,385$ et $1,62 \lesssim d \lesssim 1,735$.

Comme dans le paragraphe 3.3.1. nous donnons Q en fonction de d (fig. 5)

4.1.3. Admittance.

Dans l'intervalle (zone de stabilité) $0 < d \lesssim 0,385$, nous avons $H_2(1) \gg H_2(2) > 0$, ce qui signifie que le maximum de l'amplitude betatronique horizontale est toujours situé à l'origine de la maille $H(1)$. (Fig. 6)

Nous avons donc :

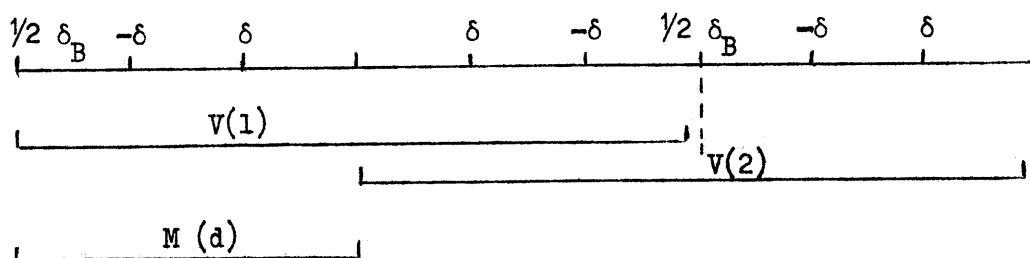
$$A/a^2 = \left[1 - (\frac{1}{2} \text{tr } H)^2 \right]^{1/2} / H_{12} \quad (1)$$

dont nous donnons la courbe représentative (Fig. 8), ainsi que celle du rapport A/A_0 (fig. 9), pour $l = 0,5$ mètres et $N = 16$, comme au paragraphe 3.3.2.

4.2. Mouvement vertical.

4.2.1. Matrice de transfert de maille.

Le maximum de l'amplitude de l'oscillation verticale ne peut se situer qu'à l'origine d'une des deux mailles $V(1)$ ou $V(2)$ représentées ci-contre :



Les matrices de transfert de maille considérées s'écrivent :

$$V(1) = M(-d) M(d) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \delta_B & 1 \end{bmatrix}$$

$$V(2) = M(d) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \delta_B & 1 \end{bmatrix} M(-d)$$

Il vient d'une part :

$$V_{12} (1) = 2 l (3 - d^2) (1 - d - d^2)$$

$$V_{12} (2) = l \left[2 (3 - d^2) (1 + d - d^2) - \frac{1}{2} d_B (3 - d^2)^2 \right]$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{2} \text{tr } V = (1 - 6 d^2 + 2 d^4) - \frac{1}{2} d_B (3 - d^2) (1 - d - d^2)$$

4.2.2. Condition de stabilité.

Constatant que $\text{tr } V = \text{tr } H$, la condition de stabilité pour le mouvement vertical est la même que pour le mouvement horizontal (fig. 4). Il en est de même de la courbe donnant Q en fonction de d (fig. 5).

4.2.3. Admittance.

Dans l'intervalle (zône de stabilité) $0 < d \lesssim 0,385$, la représentation graphique de V_{12} (fig. 7) montre que le maximum de l'amplitude betatronique verticale est situé comme suit:

$0 < d \lesssim 0,24$ à l'origine de la maille 1
 $0,24 < d \lesssim 0,385$ " " " " " 2

D'où $V_{12 \text{ max}}$, ce qui nous permet de calculer

$$A/a^2 = \left[1 - (\frac{1}{2} \text{tr } V)^2 \right]^{1/2} / V_{12 \text{ max}}$$

dont nous donnons la courbe représentative (fig. 8), ainsi que celle de A/A_0 (fig. 9), pour $L = 0,5$ mètres et $N = 16$, comme précédemment.

Dans l'intervalle considéré le maximum a lieu pour $d \simeq 0,24$ soit $Q \simeq 2,63$, point qui correspond à l'intersection de $V_{12}(1)$ avec $V_{12}(2)$.

R.A. Beck

Références:

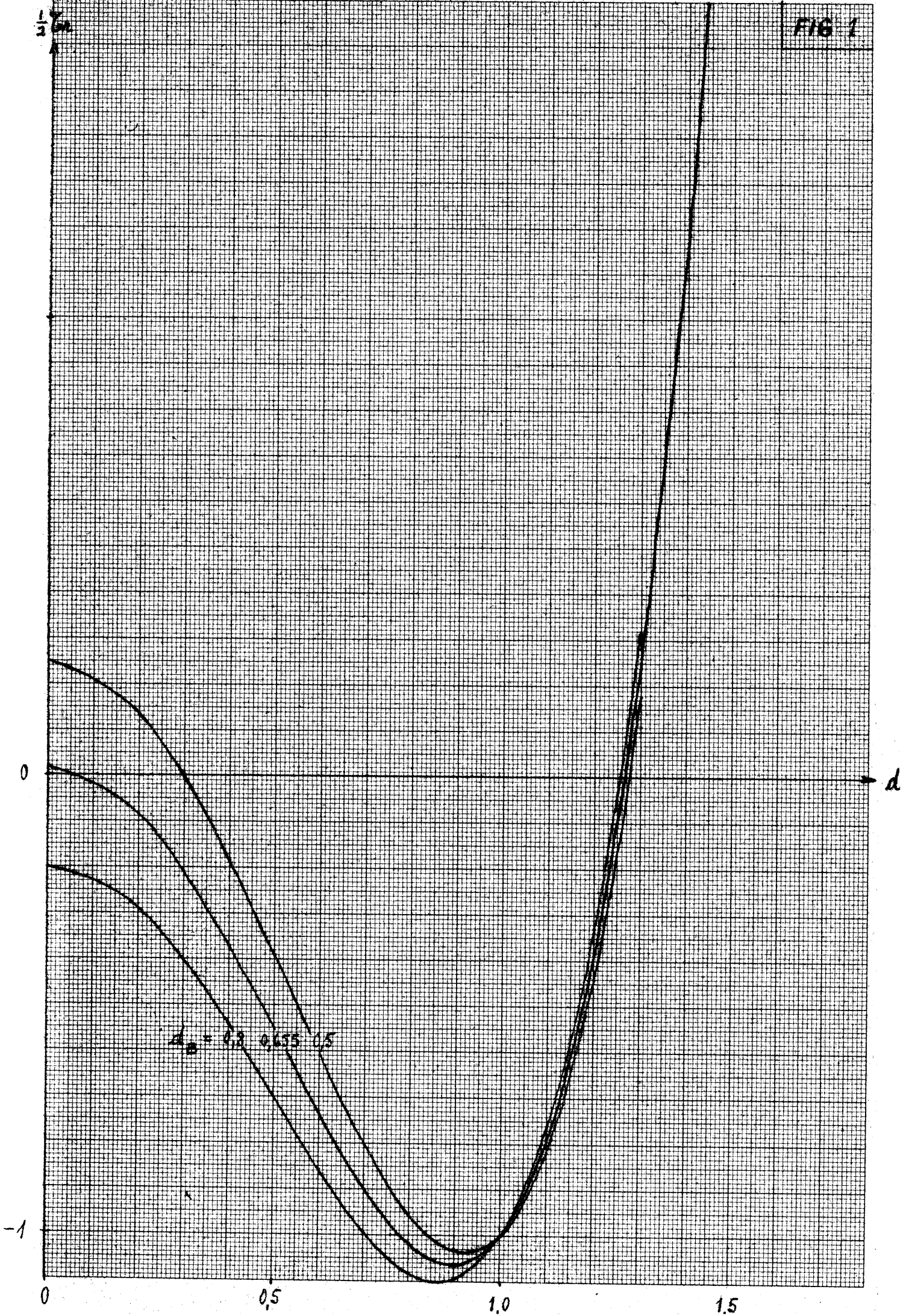
1. K. Johnsen: PS/Int. AR/60-6 (6th May 1960): Storage ring systems for 100 MeV electrons.
2. R.A. Beck et A. Nackach: Note CEA No. 301: Théorie du AGS d'après Courant et Snyder.

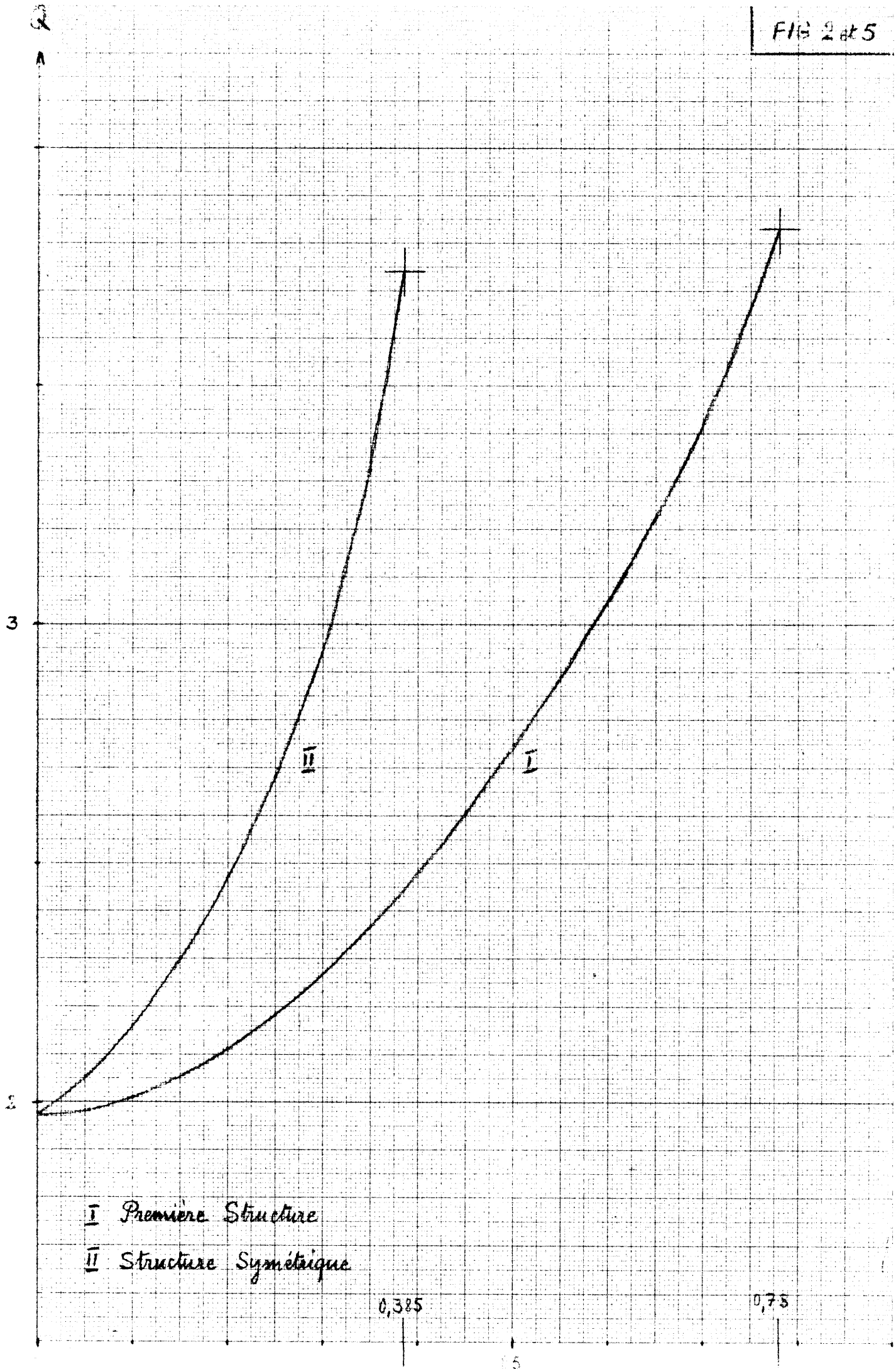
Distribution: (ouverte)

A.R. Group Members
Parameter Committee Members
P.S. Library.

/kt

FIG 1





I Premiere Structure

II Structure Symétrique

0,385

0,75

d

$M_{121}/22$

FIG. 3

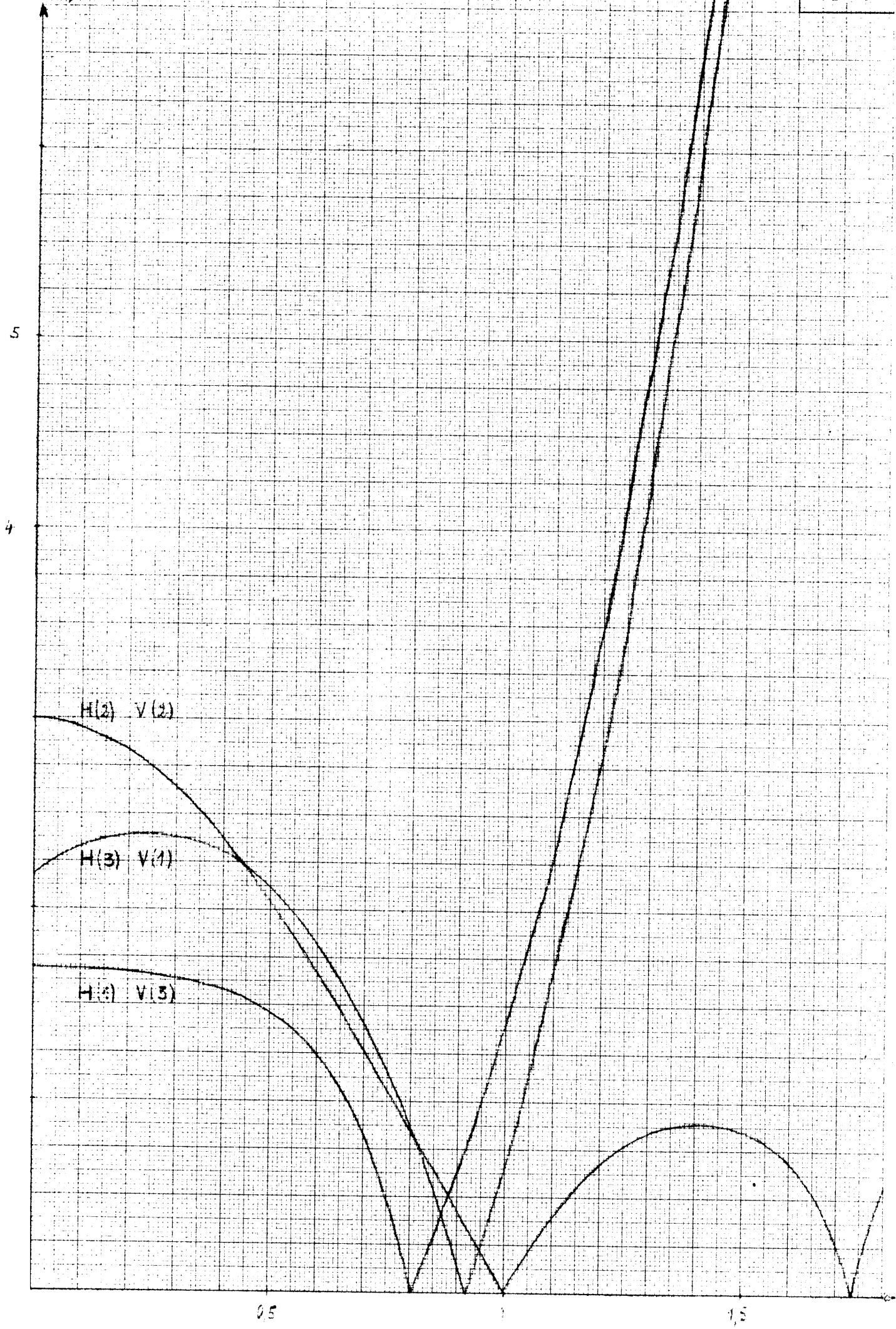
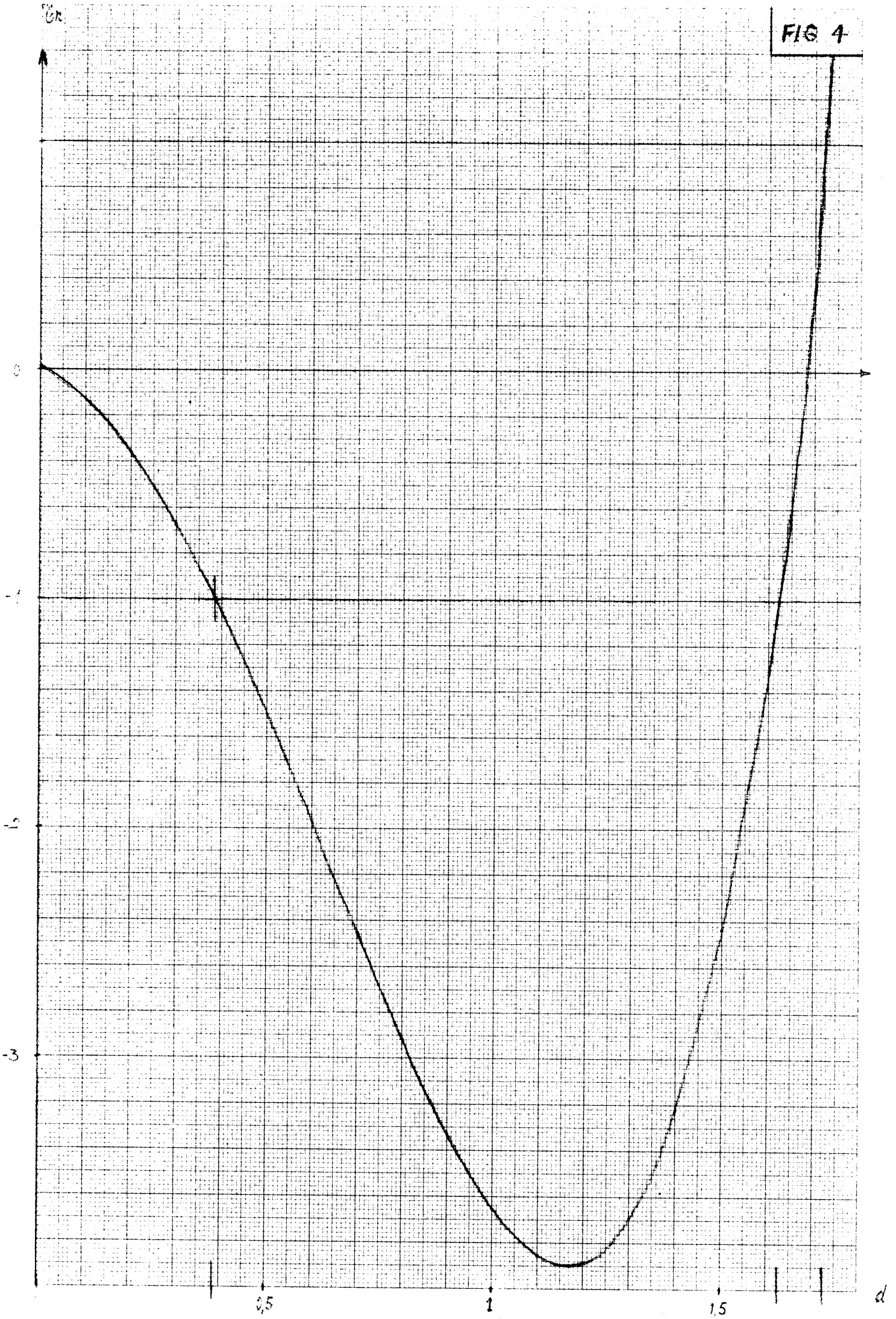


FIG 4



$H_{12}/22$

FIG 6

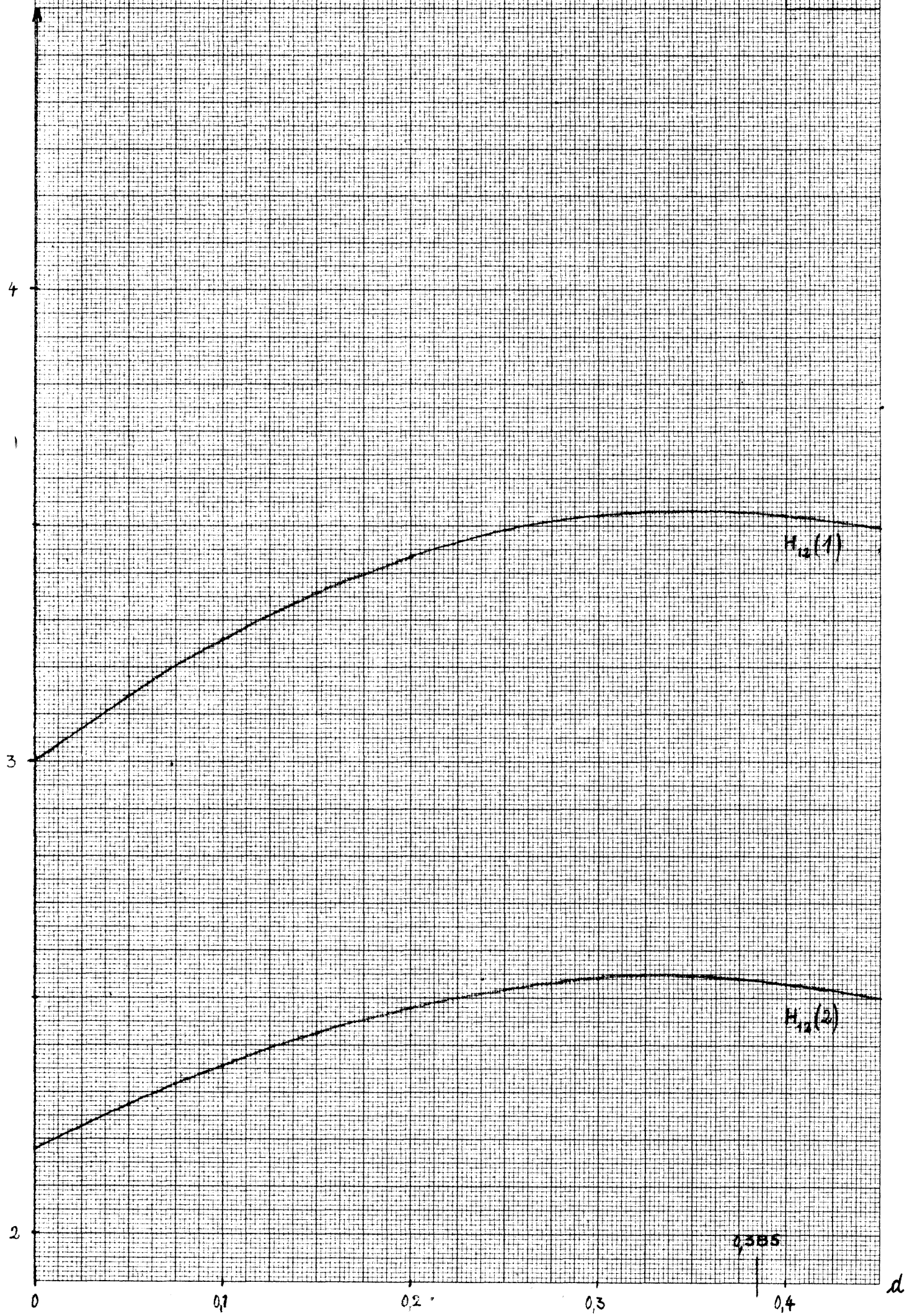


FIG 7

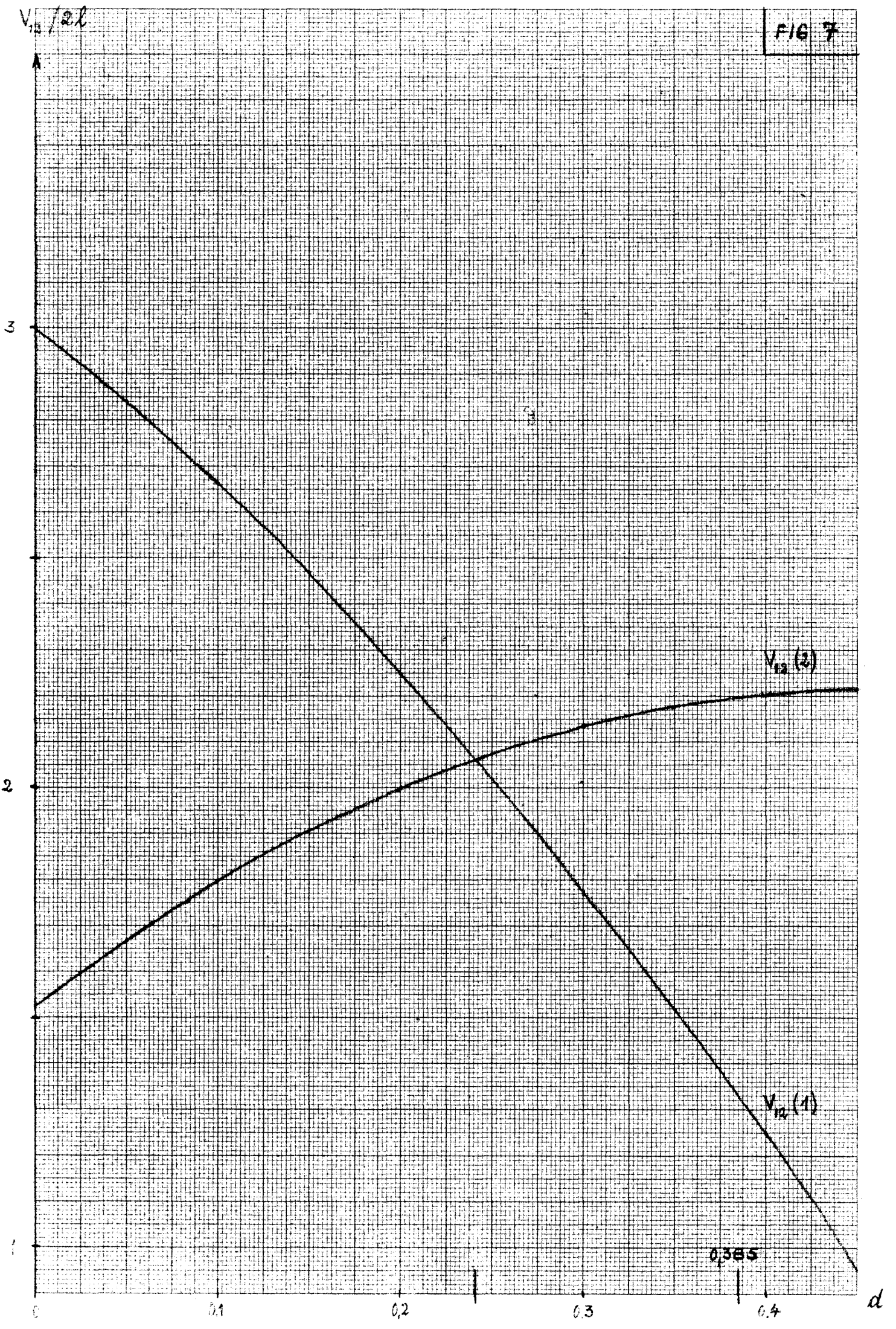


FIG 8

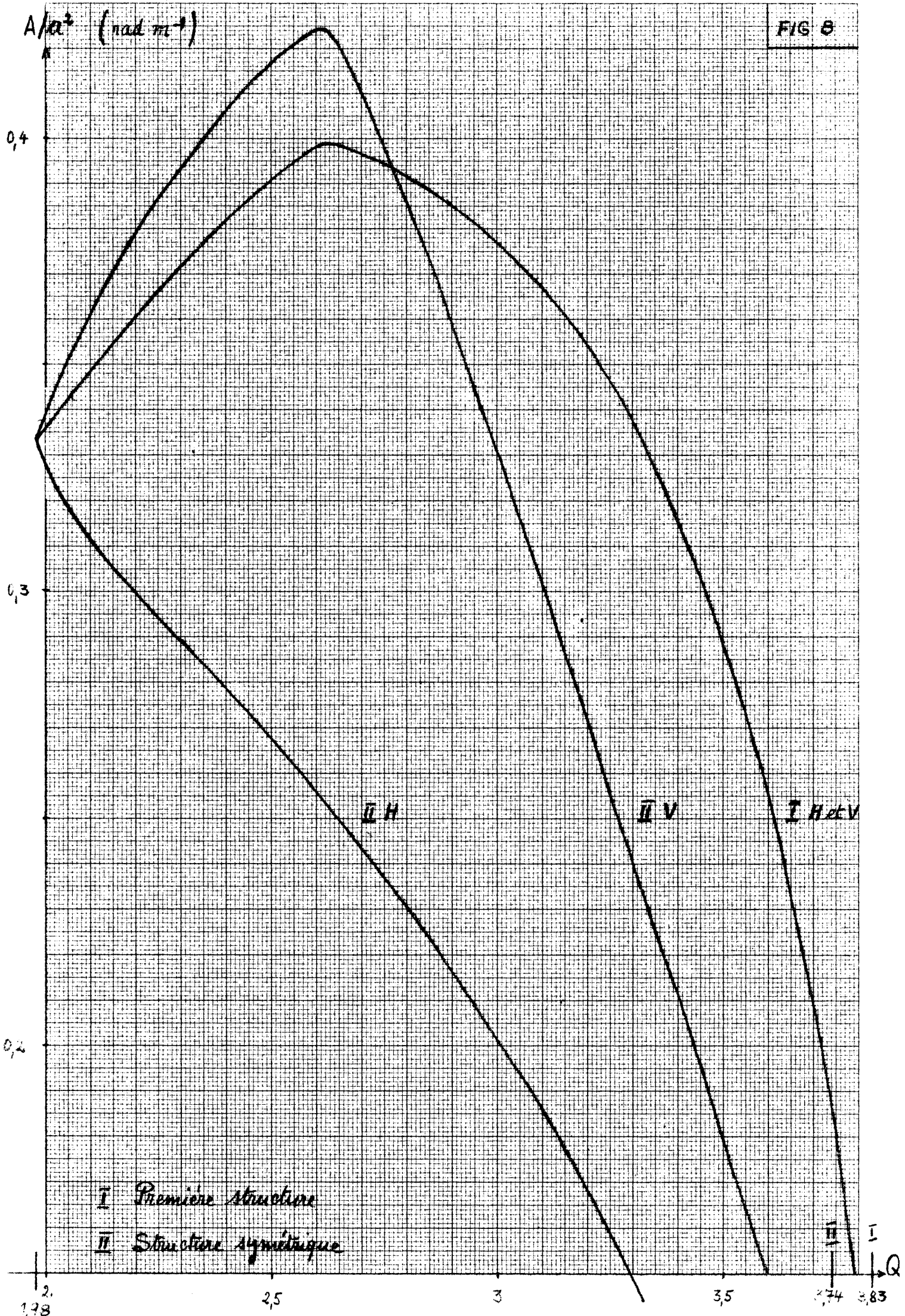
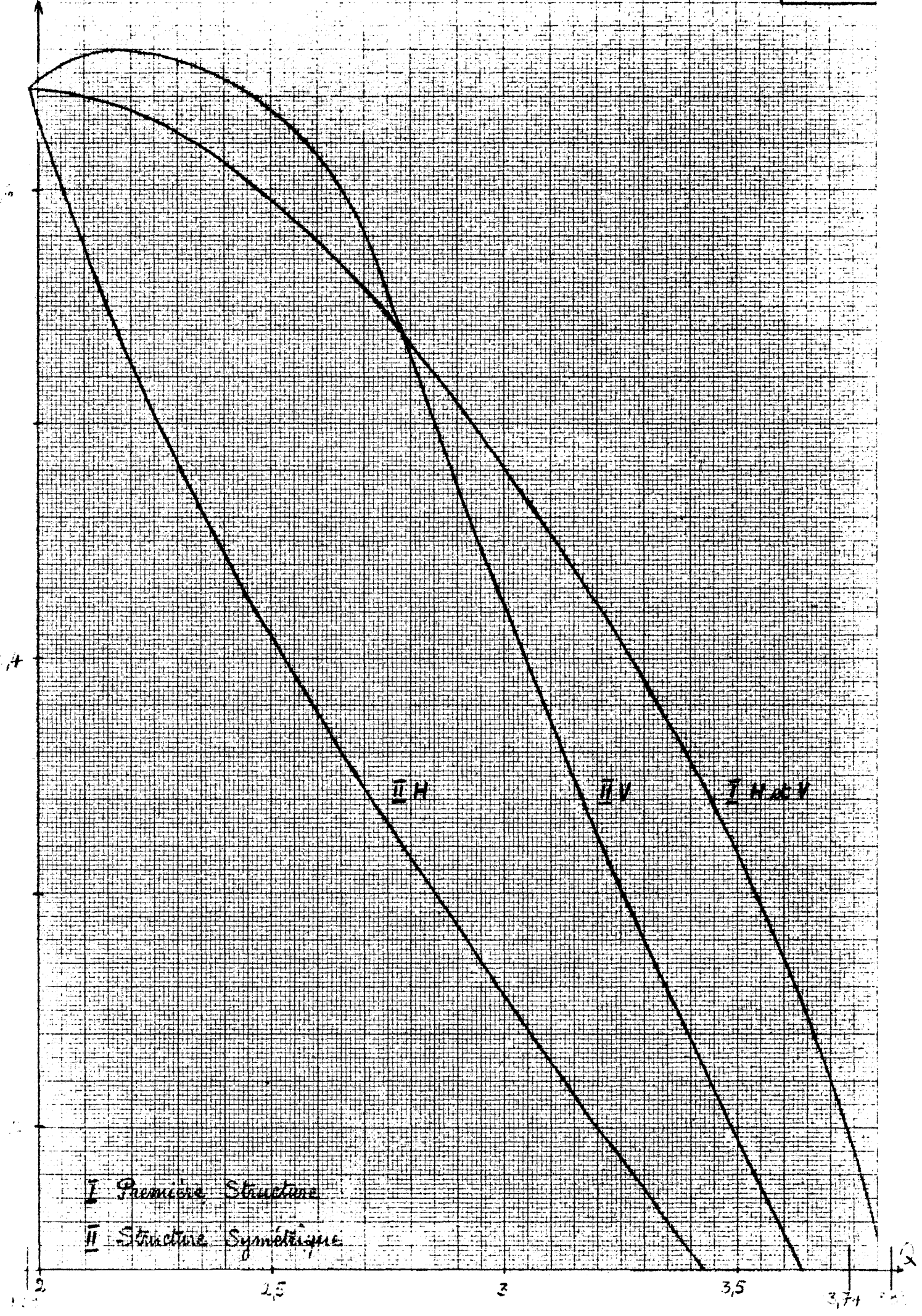


FIG 9

A/A_0



I Première Structure

II Structure Symétrique

III

IV

I, II, III, IV

2

2.5

3

3.5

3.74

x