

**EUROPEAN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH
ORGANISATION EUROPEENNE POUR LA RECHERCHE NUCLEAIRE**

CERN - PS DIVISION

PS/ PA/ Note 95-26

Petit Formulaire de cinématique et de dynamique relativistes

D. Manglunki

Geneva, Switzerland
1 November 1995

Petit formulaire de cinématique et de dynamique relativistes D.Manglunki

1. Introduction

La présence nouvelle dans nos machines de particules de charge et de masse différentes de celles du proton bouleversent des habitudes, et il n'est pas toujours facile de s'y retrouver entre les différentes grandeurs et unités employées. Le but de cette note est de permettre aux personnes impliquées dans les opérations avec ions (opérateurs, spécialistes en instrumentation, ...) de calculer rapidement les grandeurs dont elles ont l'habitude avec les protons.

2. Notations

c	célérité de la lumière dans le vide
$m_0(x)$	masse au repos de la particule x
$E_0(x)$	énergie au repos de la particule x
K	énergie cinétique
K/A	énergie cinétique par unité de masse atomique
$E=E_0+K$	énergie totale
p	quantité de mouvement totale
p/A	quantité de mouvement par unité de masse atomique
$\beta=v/c$	vitesse réduite
$\gamma=E/E_0$	facteur relativiste
Q	charge
B	champ d'induction magnétique

3. Unités

On utilise: le GeV (milliard d'électron-Volt) comme unité pour l'énergie, et le GeV/c pour la quantité de mouvement.

Pour la masse on utilise soit le GeV/c^2 : la masse au repos du proton $m_0(p)=0.92826 \text{ GeV}/c^2$, soit l'*unité de masse atomique* (amu), dont la définition est "le douzième de la masse de l'atome de carbone": $m_0(p)=1.007 \text{ amu}$

L'unité de charge est la charge de l'électron, changée de signe: e . La charge du proton vaut e . Lorsqu'un ion est "épluché" Z fois (on lui a retiré Z électrons), sa charge vaut Ze . Par exemple la charge de l'ion Pb^{53+} est $53e$.

On donne parfois pour les ions l'énergie cinétique (resp. la quantité de mouvement) en GeV/u (resp. $(\text{GeV}/c)/u$, généralement noté $\text{GeV}/c/u$), c'est à dire en GeV par unité de masse atomique (resp. GeV/c par unité de masse atomique). Il suffit alors de multiplier par la masse exprimée en amu, pour retrouver l'unité habituelle.

On a également l'habitude au PS d'utiliser, par abus de langage, le GeV comme unité de quantité de mouvement. Il faut savoir que par exemple pour le transfert vers le SPS, on accélère les protons à la quantité de mouvement de $14 \text{ GeV}/c$, et non à l'énergie cinétique de 14 GeV . Cet abus de langage n'est pratiqué au PS qu'au-delà de l'énergie cinétique de 1.4 GeV (énergie cinétique des protons à l'injection du PS lors du test LHC de décembre 1993).

Enfin, lorsqu'on parle d'énergie, sans préciser, il s'agit en général d'énergie cinétique et non d'énergie totale.

4. Relations de base:

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Passage du facteur relativiste à la vitesse réduite et vice versa

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$E = E_0 + K = \gamma \cdot E_0 = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$$

relation entre masse en mouvement et masse au repos

$$m = \gamma \cdot m_0$$

$$p = m \cdot v = \beta \cdot \gamma \cdot m_0 \cdot c$$

Quantité de mouvement

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

Passage de l'énergie à la quantité de mouvement et vice versa

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{K^2 + 2KE_0}$$

5. Paramètres de la machine:

- La fréquence de révolution dans une machine circulaire est donnée par la vitesse v de la particule, divisée par la longueur \mathcal{C} de la machine:

$$f_{\text{rev}} = v/\mathcal{C}$$

ou encore:

$$f_{\text{rev}} = \beta c/\mathcal{C}$$

- Relation champ-quantité de mouvement:

$$p = Q B \rho$$

où ρ est le rayon de courbure, imposé par la géométrie de la machine. La quantité de mouvement p est donc proportionnelle au champ dans les synchrotrons, et on utilise en général cette grandeur plutôt que l'énergie. La quantité $B \rho$, exprimée en Tesla-mètre, est appelée "rigidité magnétique". Pour les ions, une unité commode est la "quantité de mouvement équivalente proton". C'est la quantité de mouvement qu'aurait un proton de même rigidité magnétique (c'est-à-dire qui verrait le même champ dans la même machine). On passe de l'une à l'autre en multipliant par Z_2/Z_1 . Pour le proton, $Z_1=1$, pour le Pb^{53+} , $Z_2=53$. A noter que la relation " $p = Q B \rho$ " peut s'écrire: $p = 0.3 Q B \rho$ si l'on prend soin d'exprimer p en GeV/c, B en Tesla, et ρ en mètres.

- Quantité de mouvement réduite p/A : si deux particules ont la même rigidité magnétique, leurs quantités de mouvement réduites p/A , (exprimées en GeV/c/u)

seront liées par la relation: $p_1/A_1 = Z_1/A_1 \times A_2/Z_2 \times p_2/A_2$

6.Exemples:

a.calcul des paramètres à l'injection

Masse du proton = 1.007 amu = 0.93826 GeV/c²

Masse de l'ion de plomb = 207.95 amu = 0.93826 × 207.95 / 1.007 = 193.76 GeV/c²

Rayon de courbure du PS: ρ=70 m

A l'injection dans le PS, les protons ont une énergie cinétique de 1GeV. Leur quantité de mouvement est donc:

$$p = \frac{\sqrt{K^2 + 2KE_0}}{c} = \sqrt{1^2 + 2 \times 0.938} = 1.696 \text{ GeV} / c$$

(En divisant par 1.007, on obtient cette grandeur en amu, soit p/A=1.684GeV/c/u.)

Cette quantité de mouvement correspond à un champ magnétique:

$$B = \frac{p}{0.3 \times Q \times \rho} = \frac{1.696}{0.3 \times 70} = 0.08076 \text{ T} = 807.6 \text{ Gauss}$$

Pour avoir la même rigidité magnétique (même réglage de la ligne de transfert, des éléments d'injection, du champ principal...), un ion de plomb Pb⁵³⁺ doit avoir une quantité de mouvement 53 fois plus élevée, soit 89.89GeV/c. On exprime en général cette grandeur par unité de masse atomique, soit en divisant par A=207.95:

$$p/A = 0.432 \text{ GeV/c/u.}$$

p = 89.9 GeV/c correspond à une énergie cinétique de:

$$K = E - E_0 = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - E_0 = \sqrt{193.76^2 + 89.89^2} - 193.76 = 19.836 \text{ GeV}$$

Soit en divisant par A=207.95:

$$K/A = 95.4 \text{ GeV/u}$$

A l'énergie d'injection, le facteur relativiste pour les protons est:

$$\gamma = \frac{E_0 + K}{E_0} = \frac{1.938}{0.938} = 2.066$$

et la vitesse réduite:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2.066^2}} = 0.875$$

On en déduit la fréquence de révolution:

$$f_{\text{rev}} = \beta c / \rho = 0.875 \times 3 \times 10^8 / 628 = 418 \text{ kHz}$$

Pour les ions de plomb, à l'injection,

$$\gamma = \frac{E_0 + K}{E_0} = \frac{19.836 + 193.76}{193.76} = 1.102$$

et

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1.102^2}} = 0.421 ,$$

ce qui donne pour la fréquence de révolution:

$$f_{\text{rev}} = \beta c / \rho = 0.420 \times 3 \times 10^8 / 628 = 201 \text{ kHz}$$

b.Energie de transition: Pour la machine PS, la transition survient lorsque:

$$\gamma = \gamma_t = 6.08$$

Si pour les protons cela correspond a une énergie cinétique de

$$K = (\gamma - 1)E_0 = 4.8 \text{ GeV},$$

pour les ions Pb^{53+} la transition se passe à:

$$K = 4.8 \times 207.95 / 1.007 = 983 \text{ GeV}$$

ce qui correspond à une quantité de mouvement:

$$p = \frac{\sqrt{K^2 + 2KE_0}}{c} = \sqrt{983^2 + 2 \times 983 \times 193.76} = 1160.7 \text{ GeV} / c$$

soit à un champ magnétique:

$$B = \frac{p}{0.3 \times Q \times \rho} = \frac{1160.7}{0.3 \times 53 \times 70} = 1.04 \text{ T} = 10400 \text{ Gauss}$$

c.Relation entre les fréquences de révolution des ions et des protons à même champ:

On a toujours: $\frac{p}{q} = B\rho$, soit:

$$B\rho = \frac{A_i}{Z_i} m_0 c \beta_i \gamma_i = \frac{A_p}{Z_p} m_0 c \beta_p \gamma_p$$

En exprimant γ en fonction de β , on obtient, tous calculs faits:

$$\beta_1 = \frac{\beta_2 k}{\sqrt{1 - \beta_2^2 (1 - k^2)}}, \text{ avec } k = (A/Z)_2 / (A/Z)_1$$

En exprimant β en fonction de la fréquence de révolution, on a:

$$f_1 = \frac{f_2 k}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi R f_2}{c}\right)^2 (1 - k^2)}}$$

Pour les protons, $A/Z = 1.007$

Pour le Pb^{53+} , $A/Z = 3.923$

Pour le Pb^{82+} , $A/Z = 2.535$

Références:

[1] C.Bovet et al.

A selection of formulae and data useful for the design of A.G. synchrotrons
CERN/MPS-SI/Int. DL/70/4 23 April, 1970

[2] D.Warner (editor)

CERN heavy-ion facility design report
CERN 93-01 28 April 1993

Remerciements...

...à J.Belleman, J.Gonzalez, D.Gueugnon et E.Schulte pour leur lecture attentive.

Distribution

G. Azzoni
J. Belleman
M. Benedikt
J. Boillot
R. Cappi
J.C. Cendre
D. Dumollard
J.M. Elyn
J. Gonzalez
D. Gueugnon
G.H. Hemelsoet
R. Hoh
O. Jensen
M. Martini
A. Nicoud
J.M. Nonglaton
J. Ottaviani
E. Ovale
K. Priestnall
J.P. Riunaud
M. Ruelle
E. Schulte
R. Steerenberg
B. Vandorpe
V. Vicente
M. Zanolli