

# **Dynamique des particules légères Source de rayonnement synchrotronique**

Louis RINOLFI

DEA  
Instrumentation et Mesures  
Université Joseph Fourier  
Grenoble 1990.

## RAYONNEMENT SYNCHROTRONIQUE

### Chapitre I CHAMPS ET POTENTIELS D'UNE CHARGE EN MOUVEMENT

- 1-Introduction
- 2-Quelques aspects qualitatifs
- 3-Equations des potentiels
  - 3.1 Cas général
  - 3.2 Champ électrique constant
- 4-Potentiels retardés
- 5-Potentiels de Lienard et Wiechert
  - 5.1 Relation entre  $dt$  et  $dt'$
  - 5.2 Expressions des distributions  $\rho$  et  $\vec{j}$
  - 5.3 Potentiels de Lienard-Wiechert
- 6-Champs d'un électron en mouvement

### Chapitre II PUISSANCE RAYONNEE

- 1-Notion de puissance rayonnée
- 2-Expression du vecteur de Poynting
- 3-Distribution angulaire de la puissance instantanée
- 4-Cas d'une particule quelconque dans un champ magnétique
- 5-Cas d'une particule non relativiste

### Chapitre III RADIATION EMISE PAR UNE CHARGE EN MOUVEMENT

- 1-Puissance rayonnée totale
  - 1.1 Formules générales
  - 1.2 Cas d'un électron dans un champ magnétique constant
  - 1.3 Cas d'un électron dans un linac
  - 1.4 Cas de N électrons
- 2-Energie rayonnée
- 3-Transformée de Fourier du champ  $\vec{E}$
- 4-Répartition spectrale du rayonnement
  - 4.1 Formulation générale
  - 4.2 Angle d'émission de la lumière
  - 4.3 Fréquence du spectre de la radiation synchrotronique
- 5- Emission quantique du rayonnement
  - 5.1 Paramètres de base
  - 5.2 Mouvement sur une orbite circulaire

### Chapitre IV AMORTISSEMENT RADIATIF DES OSCILLATIONS

- 1-Introduction
- 2-Oscillations en énergie
  - 2.1 Equation en énergie
  - 2.2 Temps d'amortissement
- 3-Oscillations transversales
  - 3.1 Oscillations bétatron verticales
  - 3.2 Oscillations bétatron horizontales
- 4-Nombre de partition

CHAMPS ET POTENTIEL D'UNE CHARGE  
EN MOUVEMENT

Remarques générales.

Toutes les équations encadrées ont été vérifiées et peuvent être considérées comme rigoureusement exactes.

Les unités employées sont celles du système MKSA sauf lorsqu'elles sont explicitement indiquées autour des formules encadrées.

Les chiffres [ ] renvoient aux références en fin de texte.

I- Introduction

Toutes les particules chargées émettent un rayonnement électromagnétique lorsqu'elles sont accélérées.

Ce rayonnement est d'autant plus intense que les particules sont légères et que l'accélération est perpendiculaire à la vitesse.

Ce rayonnement a été considéré comme parasite, depuis qu'il a été observé pour la première fois dans un synchrotron à électrons, jusqu'aux années 1975. Il est, aujourd'hui, source de développements importants dans la Physique.

Plusieurs machines construites à travers le monde sont dédiées à l'utilisation de ce rayonnement.

La principale différence entre leptons (particules légères telles que  $e^-$  ou  $e^+$ ) et hadrons (particules plus lourdes telles que  $p$  ou  $\bar{p}$ ) est la perte d'énergie par radiation synchrotrique.

Comme nous le verrons par la suite, ce phénomène est négligeable pour les hadrons, mais pas du tout pour les leptons, pour autant que l'on reste dans un domaine d'énergie n'excédant pas la centaine de GeV.

Les conséquences sur la dynamique des particules chargées sont:

- 1) Les oscillations transversales ou longitudinales sont amorties ou antiamorties.
- 2) La quantification de l'énergie émise génère une sorte d'excitation stochastique dans le faisceau, ce qui conduit à un phénomène de diffusion.
- 3) Les dimensions du faisceau, à l'équilibre, dépendent des deux processus précédents.

Compte-tenu des remarques précédentes, nous considérerons par la suite seulement le cas des électrons.

Afin de simplifier les calculs de dynamique de faisceau, nous supposerons les hypothèses suivantes vérifiées, ce qui n'enlève rien à la généralité des notions développées:

- a) machine à fonctions séparées pour le guidage et la focalisation.
- b) rayon de courbure constant.
- c) orbite d'équilibre décrite dans un plan.

## II- Quelques aspects qualitatifs.

### II-1 Repères

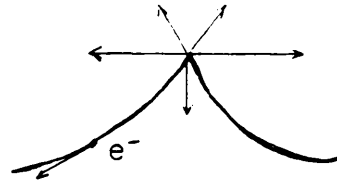
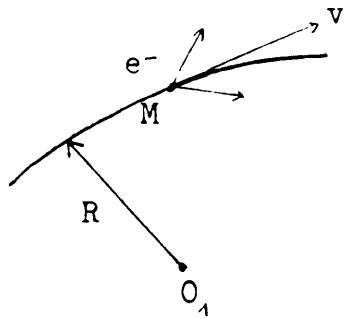
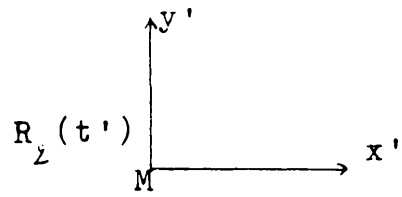
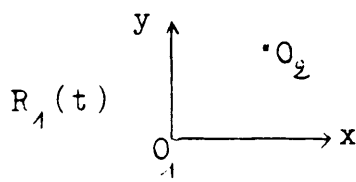


Fig. 1

Un repère  $R_1$  est lié au laboratoire et un observateur mesurera les champs électromagnétiques au temps  $t$ .

Un repère  $R_2$  est lié à la particule et les champs créés seront mesurés en fonction de  $t'$ .

### II-2 Principes de calcul

Afin de caractériser un flux d'énergie de rayonnement en un point, on utilise le vecteur de Poynting défini ainsi:

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (1)$$

où  $\vec{E}$  est le champ électrique et  $\vec{H}$  le champ magnétique au point de mesure. C'est une densité de puissance rayonnante qui s'exprime en  $[W.m^{-2}]$ .

Remarque ;  $\vec{E}$  est un vecteur polaire représentant une grandeur physique dont la symétrie est celle d'un cône. C'est un tenseur d'ordre 1. Il s'écrit avec une flèche droite au-dessus.

$\vec{H}$  est un vecteur axial représentant une grandeur physique dont la symétrie est celle d'un cylindre en rotation autour de son axe. C'est un tenseur anti-symétrique de rang 2. Il est surmonté d'une flèche arrondie.

Toutefois par la suite tous les vecteurs seront représentés par une flèche droite par souci de simplification.

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont mesurés dans le repère du laboratoire  $R_1$  et sont donc fonction de  $t$ . La source est une particule chargée en mouvement dans  $R_1$ . Il est plus aisé de calculer les champs produits par cette source dans le repère  $R_2$ , qui est fixe par rapport à la particule mais qui évolue en fonction de  $t'$ .

Plusieurs étapes sont nécessaires pour calculer les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  mesurés au temps  $t$  au point d'observation  $O_2$  et produits au temps  $t'$  au point source  $M$ .

Etape 1- On écrit que les champs dérivent de potentiels scalaire  $\varphi$  et vecteur  $\vec{A}$ .  
Pour obtenir une univocité de ces potentiels, on introduit la condition de jauge de Lorentz. On aboutit à deux équations aux dérivées partielles qui caractérisent ces potentiels.

Etape 2- On cherche des intégrales particulières comme expressions de  $\varphi(x, y, z, t)$  et  $\vec{A}(x, y, z, t)$ . Les termes sous les intégrales sont fonction de  $(x', y', z', t')$ . Ces solutions particulières sont appelées "potentiels retardés".

Etape 3- On calcule ces intégrales pour un électron animé d'un mouvement arbitraire. On obtient alors les "potentiels de Lienard et Wiechert".

Etape 4- On dérive ces potentiels conformément aux relations qui ont permis de les définir pour obtenir les champs électrique et magnétique.

### III- Equations des potentiels

#### III-1 Cas général

Les équations de Maxwell, dans un espace vide de matière, s'écrivent:

$$c^2 \nabla \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5)$$

où l'opérateur nabla:

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Avec la notation classique, nous avons:

$$c^2 \vec{rot} \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)$$

$$\vec{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (9)$$

On définit un potentiel scalaire  $\varphi$  et un potentiel vecteur  $\vec{A}$  par:

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (10)$$

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (11)$$

Ces définitions satisfont les équations de Maxwell (8) et (9). Vérifions-le en portant (10) dans (9)

$$\text{div } \vec{B} = \text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$$

car la divergence d'un rotationnel est toujours nulle quel que soit  $\vec{A}$  (voir Annexe 1 A1-7)

De même portons (11) dans (8)

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi - \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})$$

car le rotationnel d'un gradient est toujours nul quel que soit  $\varphi$ . (A1-8)

D'après (10), on a

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

qui est l'équation de Maxwell (8).

Lorsque  $\vec{A}$  et  $\varphi$  sont donnés,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont déterminés univoquement, d'après (10) et (11). Toutefois l'Annexe 1 [IV] montre que des potentiels différents peuvent correspondre à un seul et même champ.

Cette non-univocité des potentiels permet toujours de les choisir de telle sorte qu'ils respectent une condition arbitraire supplémentaire. C'est la condition de jauge de Lorentz, qui permet de définir les équations des potentiels.



$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

Portons (10) et (11) dans (6)

$$c^2 \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{A}) = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} (-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

Appliquons l'analyse vectorielle (A1-9)

$$c^2 (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}) - c^2 \Delta \vec{A} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} - \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Factorisons les  $\operatorname{grad}$

$$\operatorname{grad} (c^2 \operatorname{div} \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = c^2 \Delta \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}$$

D'après (12), il reste:

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \frac{1}{c^2} \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}} \quad (13)$$

Portons (11) dans (7)

$$\operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Sachant que  $(\operatorname{div} \operatorname{grad})\varphi = \Delta \varphi$

$$-\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Appliquons (12)

$$-\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Finalement

$$\boxed{\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (14)$$

A partir des définitions (10) et (11) et sous la condition de jauge de Lorentz (12), nous avons établi les deux équations (13) et (14) aux dérivées partielles dont des intégrales particulières donneront une expression des potentiels  $\vec{A}$  et  $\varphi$ . C'est l'étape 1.

### III-2 Champ électrique constant.

Pour un champ électrique constant, les équations de Maxwell se réduisent à:

$$\begin{aligned} c^2 \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} \\ \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} &= 0 \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

L'équation (11) se réduit à

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad (16)$$

Portons (16) dans (15):

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17)$$

On retrouve l'équation de Poisson.

Dans le vide, c'est-à-dire  $\rho = 0$ , le potentiel scalaire  $\varphi$  satisfait l'équation de Laplace

$$\Delta \varphi = 0$$

Déterminons le champ créé par une charge ponctuelle. Par raison de symétrie,  $\vec{E}$  est dirigé en chaque point selon le rayon vecteur issu du point où se trouve la charge  $q$ .

L'application du théorème de Gauss à une sphère de rayon  $r$  autour de la charge  $q$  donne:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{n} \quad (18)$$

C'est la loi de Coulomb. Le potentiel de ce champ est alors:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_0 \quad (19)$$

Si nous avons plusieurs charges, le champ créé sera égal à la somme des champs créés séparément par chaque charge (principe de superposition).

$$\varphi = k_1 \sum_n \frac{q}{r_n} \quad \text{où } k_1 = \text{constante}$$

Si on introduit la densité de charge  $\rho$  telle que  $dq = \rho dV$ , cette expression devient:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV \quad (20)$$

où  $r$  est la distance de l'élément de volume  $dV$  au point d'observation du champ.

Pour une charge ponctuelle (Théorie des distributions):

$$\rho = q \delta(\vec{x} - \vec{R}) \quad (21)$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac et  $\vec{R}$  est la position où se trouve la charge ponctuelle.

Supposons cette charge placée à l'origine, ( $\vec{R} = 0$ ) et portons (21) dans (17):

$$\Delta\varphi + \frac{q \delta(\vec{x})}{\epsilon_0} = 0$$

On vérifie que (19) convient comme solution.

#### IV- Potentiels retardés.

A partir des équations aux dérivées partielles (13) et (14), nous allons chercher des solutions en  $\varphi$  et en  $\vec{A}$  qui satisfassent ces deux équations.

Ce sont des équations linéaires avec second membre. Un théorème de Mathématiques nous montre qu'une solution possible est donnée par la somme de la solution de ces équations, sans second membre, et d'une intégrale particulière avec second membre. On développe le calcul de cette intégrale particulière en annexe 2.

L'expression obtenue:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int_{\text{Volume}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \rho(\vec{x}', t') dV'$$

$\vec{x}$  représente les composantes spatiales  
x, y, z dans le repère  $R_1$

$\vec{x}'$  représente les composantes spatiales  
x', y', z' dans le repère  $R_2$

$$dV' = dx' dy' dz'$$

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

$$t' = t - \frac{r}{c}$$

Si on appelle  $\varphi_0$  la solution de (14) sans second membre, la solution générale a la forme:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{r} \rho(\vec{x}', t') dV' + \varphi_0 \quad (22)$$

Pour l'équation (13), on démontrerait de la même manière que

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{V'} \frac{1}{r} \vec{j}(\vec{x}', t') dV' + A_0 \quad (23)$$

Les expressions (22) et (23) (sans  $\varphi_0$  et  $A_0$ ) sont appelées potentiels retardés.

C'est l'étape 2.

### Remarques

- 1) Dans le cas de charges immobiles, où  $\rho$  ne dépend pas du temps, l'équation (22) se réduit à l'équation (20) pour le potentiel d'un champ électrostatique.
- 2) L'équation (23), appliquée à un mouvement où les particules restent localisées dans une région finie (caractère stationnaire), se réduit à la formule du potentiel vecteur d'un champ magnétique constant.
- 3) On détermine  $\varphi_0$  et  $A_0$  de sorte que les conditions du problème soient satisfaites.

### V- Potentiels de Lienard-Wiechert.

Considérons une charge ponctuelle animée d'un mouvement arbitraire.

Dans ce cas, les expressions sous les signes d'intégration de (22) et (23) ne sont différentes de zéro qu'en des points isolés. On peut aussi dire qu'à chaque instant elles sont différentes de zéro seulement en un point de l'espace.

Dans ces conditions les équations (22) et (23) peuvent être caractérisées avec la distribution de Dirac.

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z', t')}{r(x', y', z', t')} \delta\left(t' - \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) dx' dy' dz' dt' \quad (24)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \iiint \frac{\vec{j}(x', y', z', t')}{r(x', y', z', t')} \delta\left(t' - \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) dx' dy' dz' dt' \quad (25)$$

avant d'expliciter ces intégrations, nous devons préciser certaines relations.

La distance entre la particule M et le point d'observation  $O_2$  est  $\vec{r}$  selon la figure 2 ci-après.

$\vec{R}$  étant la distance entre l'origine des coordonnées et la particule.

V-1 Relation entre dt et dt'

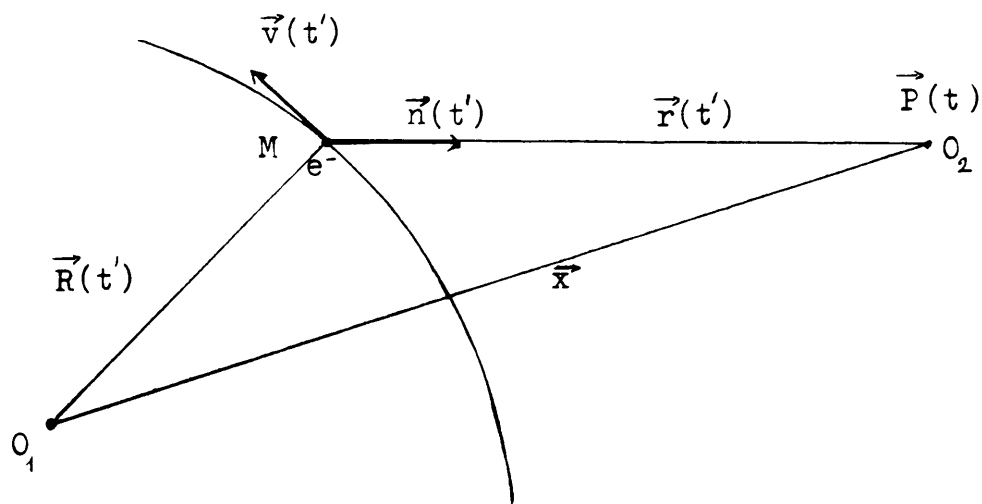


fig. 2

Soit une charge se déplaçant sur la trajectoire  $\vec{R}$  et produisant un champ électromagnétique  $\vec{P}$  mesuré au temps  $t$  par un observateur situé au point  $O_2$ . Compte-tenu de la distance  $\vec{r}$  entre la charge au point M et l'observateur au point  $O_2$ , l'onde  $\vec{P}(t)$  a été émise au temps

$$t' = t - \frac{r(t')}{c} \quad (26)$$

On doit donc connaître la position  $\vec{R}(t')$  et la vitesse  $\vec{v}(t')$  au temps  $t'$ .

Posons

$$\vec{v}(t') = \frac{d\vec{R}(t')}{dt'}$$

$$\vec{\beta}(t') = \frac{\vec{v}(t')}{c}$$

$$\vec{n}(t') = \frac{\vec{r}(t')}{r}$$

Suivant la figure 2, nous avons l'équation vectorielle

$$\vec{x} = \vec{R}(t') + \vec{r}(t') \quad (27)$$

qui est vérifiée quel que soit  $t'$  et dans laquelle  $\vec{x}$  est indépendant de  $t'$ .

Par dérivation, nous pouvons écrire

$$0 = \frac{d\vec{R}}{dt'} + \frac{d\vec{r}}{dt'}$$

ou encore 
$$\frac{d\vec{r}(t')}{dt'} = -\vec{v}(t')$$

Multiplions par  $\vec{r}$

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} = -\vec{r} \cdot \vec{v}(t')$$

Evaluons le terme de gauche

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt'} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{r}^2)}{dt'} = \frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{dt'} = r \cdot \frac{dr}{dt'}$$

On a donc la relation

$$r \frac{dr(t')}{dt'} = -\vec{r} \cdot \vec{v}$$

$\frac{dr(t')}{dt'} = -\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{v} = -\vec{n} \cdot \vec{v} = -\vec{n} \cdot \vec{\beta} c$	(28)
---	------

Différentions (26)

$$dt' = dt - \frac{1}{c} dr(t')$$

Tenant compte de (28)

$$dt' = dt - \frac{1}{c} \left[ - \vec{n} \cdot \vec{v} \right] dt'$$

$$\boxed{dt = (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) dt'} \quad (29)$$

### V-2 Expressions des distributions $\rho$ et $\vec{j}$ .

On a vu en (21) que pour une charge ponctuelle placée à  $\vec{R}$  de l'origine (Fig.2), la densité de charge  $\rho$  est donnée par la distribution:

$$\rho = e \delta(\vec{x} - \vec{R}(t'))$$

De même, la densité de courant  $\vec{j}$  est donnée par:

$$\vec{j} = e \vec{\beta} c \delta(\vec{x} - \vec{R}(t'))$$

### V-3 Potentiels de Lienard-Wiechert.

En portant les diverses relations établies ci-dessus, dans (24) et (25), nous obtenons:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{e \delta(\vec{x} - \vec{R})}{r} \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) dx'^3 dt'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \iiint \frac{e \vec{\beta} \delta(\vec{x} - \vec{R})}{r} \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) dx'^3 dt'$$

Après intégration (Annexe 3), nous obtenons:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{t'} \quad (30)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{t'} \quad (31)$$

C'est l'étape 3.



Remarques:

1) L'indice  $t'$  signifie que l'expression entre crochets doit être évaluée au temps retardé

$$t' = t - \frac{r(t')}{c}$$

2) Pour un mouvement non relativiste  $(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \rightarrow 1$  et on retrouve les résultats classiques déjà vu.

3) Les expressions (30) et (31) sont des formulations particulières des potentiels retardés pour charges ponctuelles.

VI- Champs d'un électron en mouvement.

En portant les expressions des potentiels retardés de Lienard- Wiechert (30) et (31) dans les équations (10) et (11), on pourra obtenir les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  au point d'observation.

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{r} \times \vec{t} \left[ \frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{t'} \quad (32)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \vec{\text{grad}}_t \left[ \frac{1}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{t'} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{t'} \quad (33)$$

Les expressions cherchées au point  $O_2$  sont fonctions de  $\vec{x}(x, y, z)$  et de  $t$ .

Un électron de trajectoire  $R(t')$  observé à un instant  $t$  fixe émet une onde à un temps  $t'$  antérieur, qui dépend du point d'observation  $\vec{x}$ . Il faut donc établir les relations qui permettent d'évaluer les expressions entre crochets, calculées à  $t'$  et les ramener au temps  $t$  du point d'observation.

Ceci est développé en Annexe 4.

On obtient les résultats suivants:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2 \gamma^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 rc} \frac{\vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \vec{\beta}]}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \quad (34)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n} \wedge (\vec{n} - \vec{\beta})}{r^2 \gamma^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 rc} \frac{\vec{n} \wedge \{ \vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \vec{\beta}] \}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \quad (35)$$

C'est l'étape 4.

#### Commentaires.

- 1) En comparant (34) et (35) on trouve une importante relation:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{n} \wedge \vec{E}) \quad (36)$$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est perpendiculaire au champ électrique  $\vec{E}$ , ainsi qu'à la direction  $\vec{n}$  qui part de la particule M au point d'observation  $O_2$  (Fig.2).

- 2) Pour  $\vec{\beta} = \vec{\beta} = 0$ , on retrouve la loi de Coulomb (18).

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{n}$$

- 3) Les radiations synchrotroniques sont observées à grandes distances. Par conséquent le premier terme en  $1/r^2$  de (34) pourra être négligé. Dans ce cas,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à  $\vec{n}$ .

Les équations (34) et (35) deviennent:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 rc} \frac{\vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \vec{\beta}]}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \quad (38)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \frac{\vec{n} \wedge \{ \vec{n} \wedge (\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \vec{\beta} \}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \quad (39)$$

Par la suite, nous considérerons ces  
composantes de champ, proportionnelles à  
l'accélération  $\vec{\beta}$ .

Cette approximation sera d'autant plus  
vraie que les particules auront une grande éner-  
gie, car le premier terme de (34) et (35) varie  
comme  $\gamma^{-2}$ .

## PUISSANCE RAYONNEE

### I- Notion de puissance rayonnée.

La puissance perdue par une particule chargée, en mouvement, est rayonnée dans tout l'espace.

Le vecteur de Poynting représente un vecteur radiant. Il caractérise la quantité d'énergie rayonnée par le champ électromagnétique par unité de temps et traversant l'unité de surface.

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (40)$$

Dimensions: 
$$\left[ \frac{V}{m} \right] \cdot \left[ \frac{A}{m} \right] = \left[ \frac{W}{m^2} \right] = \left[ \frac{J}{m^2 \cdot s} \right]$$

$$|\vec{P}| = \frac{dW}{dS dt} = \text{flux d'énergie par unité de surface et par unité de temps}$$

- Si l'on intègre le vecteur de Poynting par rapport au temps, on obtient un flux d'énergie par unité de surface ou par unité d'angle solide:

$$dS = r^2 d\Omega \quad (41)$$

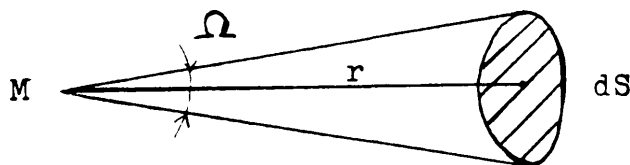


Fig. 3

- Si l'on intègre le vecteur de Poynting par rapport à la surface  $dS$ , on obtient un flux d'énergie par unité de temps ou une puissance rayonnée au travers d'une surface donnée.
- Le vecteur de Poynting représente aussi le produit d'une densité d'énergie (spatiale) par une vitesse.

$$p = \frac{dW}{dS dt} = \frac{dW}{dV} \frac{dL}{dt} = \frac{dW}{dV} \cdot v \quad (42)$$

## II- Expression du vecteur de Poynting.

L'expression (1) peut s'écrire:

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

En tenant compte de (36):

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \wedge \left\{ \vec{n} \wedge \vec{E} \right\}$$

Appliquons alors la formule (A1-4)

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \vec{n} (\vec{E})^2 - \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{n}) \right\}$$

Plaçons-nous dans les conditions de mesures physiques où  $r$  est très grand,  $\vec{E}$  est perpendiculaire à  $\vec{n}$ :

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{n}$$

Le vecteur de Poynting est dirigé selon  $\vec{n}$  et son module :

$$\boxed{P = \frac{dW}{dS dt} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2} \quad (43)$$

D'après (A1-6)

$$\boxed{P = \epsilon_0 c E^2} \quad (44)$$

III- Distribution angulaire de la puissance instantanée.

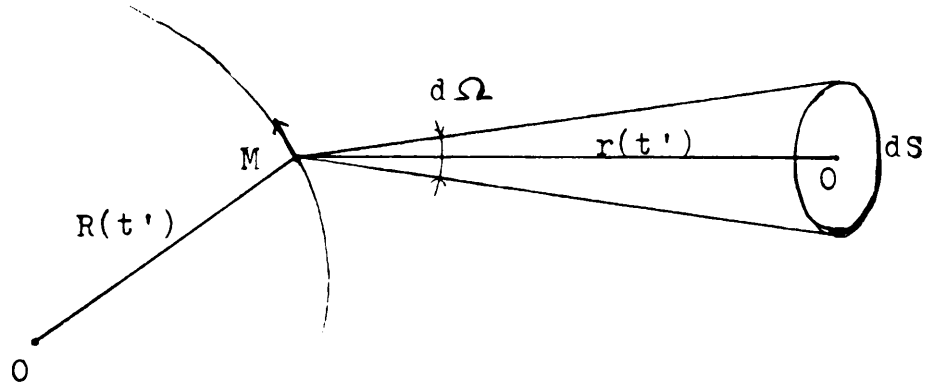


Fig. 4

On se propose de calculer  $\frac{dP_0}{d\Omega}$  qui est la puissance instantanée par unité d'angle solide dans le référentiel  $R_2(t')$ .

D'après (41) et (42)

$$P = \frac{dW}{dS dt} = \frac{dW}{r^2 d\Omega dt} = \frac{1}{r^2} \frac{dW}{d\Omega dt} \frac{dt'}{dt}$$

Posons

$$dP_0 = \frac{dW}{dt'}$$

$$P = \frac{dP_0}{d\Omega} \frac{1}{r^2} \frac{dt'}{dt} = \frac{dP_0}{d\Omega} \frac{1}{r^2} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} = \epsilon_0 c E^2$$

Remplaçons  $E^2$  par son expression (38)

$$\boxed{\frac{dP_0}{d\Omega} = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \frac{\{\vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}}]\}^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^5}} \quad (45)$$

IV- Cas d'une particule quelconque dans un champ magnétique.

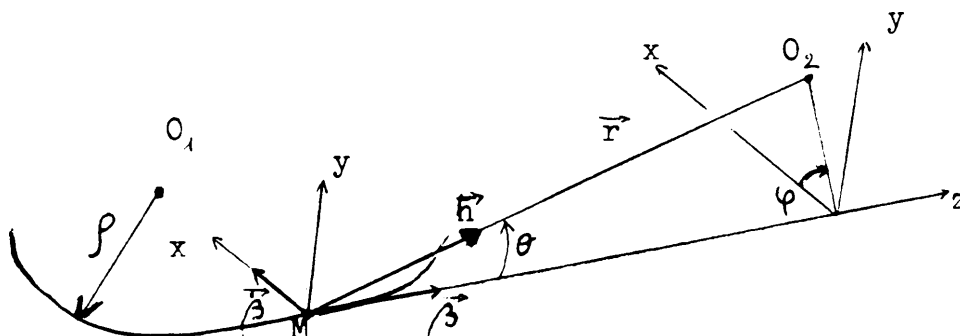


Fig. 5

Dans le référentiel  $R_2(t')$  lié au point M (la particule chargée), les composantes des 3 vecteurs s'expriment par:

$$\vec{\beta} (0, 0, \beta) \quad \vec{\beta} \left( \frac{\beta^2 c}{\rho}, 0, 0 \right)$$

$$\vec{n} (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

Portons ces valeurs dans l'expression (45).  
(voir exercice 2)

$$\frac{dP_o}{d\Omega} = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_o c} \frac{\beta^2}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \left[ 1 - \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta \cos\theta)^2} \sin^2\theta \cos^2\varphi \right] \quad (46)$$

Introduisons  $r_o$  (A1-1) et la valeur de  $\dot{\beta}$

$$\frac{dP_o}{d\Omega} = \frac{r_o m_o c^3}{4\pi \rho^2} \frac{\beta^4}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \left[ 1 - \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta \cos\theta)^2} \sin^2\theta \cos^2\varphi \right] \quad (47)$$

V- Cas d'une particule non relativiste

$|\vec{\beta}| \ll 1$  donc négligeable mais  $\dot{\vec{\beta}}$  est quelconque.

Calculons le numérateur de l'expression (45)

$$\begin{aligned} \vec{n} \wedge \{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}} \} &\simeq \vec{n} \{ \vec{n} \wedge \dot{\vec{\beta}} \} \\ &= \vec{n} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} (\vec{n}^2) \\ &= \vec{n} \dot{\beta} \cos \Psi - \dot{\vec{\beta}} \end{aligned}$$

avec  $\Psi$  angle entre  $\vec{n}$  et  $\dot{\vec{\beta}}$ ,

$|\vec{n}| = 1$  car vecteur unitaire

Posons  $\dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta} \vec{m}$

$$\begin{aligned} \left[ \vec{n} \dot{\beta} \cos \Psi - \dot{\vec{\beta}} \right]^2 &= \left[ \dot{\beta} (\vec{n} \cos \Psi - \vec{m}) \right]^2 \\ &= \dot{\beta}^2 (\vec{n} \cos \Psi - \vec{m})^2 \\ &= \dot{\beta}^2 (\vec{n}^2 \cos^2 \Psi - 2 \vec{n} \cdot \vec{m} \cos \Psi + \vec{m}^2) \end{aligned}$$

avec  $|\vec{n}|^2 = |\vec{m}|^2 = 1$   
 $\vec{n} \cdot \vec{m} = \cos \Psi$

$$= \dot{\beta}^2 (1 - \cos^2 \Psi) = \dot{\beta}^2 \sin^2 \Psi$$

Dénominateur de l'expression (45)

$$1 - \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \simeq 1 \quad \text{car } |\dot{\vec{\beta}}| \ll 1$$

$$\boxed{\frac{dP_o}{d\Omega} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \left( \frac{e \dot{\beta}}{4\pi} \sin \Psi \right)^2} \quad (48)$$



# RADIATION EMISE PAR UNE

## CHARGE EN MOUVEMENT

### I- Puissance rayonnée totale.

#### I-1 Formules générales

On calcule la puissance rayonnée dans tout l'espace, après avoir montré qu'elle est indépendante du référentiel dans lequel on la mesure.

Considérons les référentiels  $R_1$  et  $R_2$  tels qu'ils sont définis sur la figure 1.

On note  $(\beta)_{R_1}$  la vitesse de l'électron mesurée dans le référentiel  $R_1$ .

On montre [1] que:

$$\begin{array}{l} \text{énergie} \\ (W)_{R_1} \end{array} = \frac{(W)_{R_2}}{\sqrt{1 - (\beta)_{R_1}^2}} \quad (49)$$

$$\begin{array}{l} \text{temps} \\ (dt)_{R_1} \end{array} = \frac{(dt)_{R_2}}{\sqrt{1 - (\beta)_{R_1}^2}} \quad (50)$$

Puissance rayonnée par l'électron:

$$(P_c)_{R_1} = \left( \frac{dW}{dt} \right)_{R_1} = \left( \frac{dW}{dt} \right)_{R_2} = (P_o)_{R_2} \quad (51)$$

La 1<sup>ère</sup> et la 3<sup>ème</sup> égalité sont obtenues par définition.

La 2<sup>ème</sup> égalité provient des équations (49) et (50).

Cette puissance est indépendante du référentiel.

Calcul de la puissance rayonnée  $(P_o)_{R_2}$ .

$$P_o = \iint_{4\pi} \frac{dP}{d\Omega} d\Omega \quad (52)$$

Dans  $R_2$  on a un électron non relativiste. Portons donc l'expression (48) dans (52).

$$P_o = \iint \frac{1}{\epsilon_o c} \left( \frac{e\dot{\beta}}{4\pi} \right)^2 \sin^2 \Psi d\Omega \quad (53)$$

L'angle solide  $d\Omega$  peut s'exprimer par:

$$d\Omega = \sin \Psi d\Psi d\varphi \quad (54)$$

On suppose les angles indépendants.

Tout l'espace est décrit si  $\varphi$  varie de 0 à  $2\pi$  et  $\Psi$  de 0 à  $\pi$ .

$$d\Omega = 2\pi \sin \Psi d\Psi$$

L'équation (53) devient:

$$\begin{aligned} P_o &= \frac{e^2 2\pi}{\epsilon_o c 16\pi^2} \int_0^\pi \dot{\beta}^2 \sin^3 \Psi d\Psi \\ &= \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{8\pi \epsilon_o c} \left[ -\cos \Psi + \frac{1}{3} \cos^3 \Psi \right]_0^\pi \end{aligned}$$

$$(P_o)_{R_2} = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_o c} (\dot{\beta})_{R_2}^2$$

C'est l'expression de la puissance totale émise dans  $R_2$ .

D'après (51), on peut écrire:

$$(P_c)_{R_1} = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_o c} (\dot{\beta})_{R_2}^2 \quad (55)$$

On exprime maintenant, l'accélération  $(\dot{\beta})_{R_2}$  dans le repère de mesure  $R_1$ .

Pour cela, (en exercice) on montre que:

$$(\dot{\beta})_{R_2}^2 = \gamma^6 (\dot{\beta}_{\parallel})_{R_1}^2 + \gamma^4 (\dot{\beta}_{\perp})_{R_1}^2$$

où  $\dot{\beta}_{\parallel}$  est la composante de l'accélération parallèle à la vitesse et  $\dot{\beta}_{\perp}$  est la composante perpendiculaire à la vitesse de l'électron.

Dans (55) remplaçons  $(\dot{\beta})_{R_2}^2$  par son expression trouvée ci-dessus.

$$P_c = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} (\gamma^6 \dot{\beta}_{\parallel}^2 + \gamma^4 \dot{\beta}_{\perp}^2) \quad (56)$$

Cette équation représente la puissance rayonnée par un électron accéléré, de vitesse arbitraire et mesurée en  $O_2$ .

Ce résultat fut donné par Lienard vers 1898.

D'autres formulations peuvent être faites:

a) En introduisant le rayon classique  $r_0$  (A1-1)

$$P_c = \frac{2}{3} r_0 \frac{E_0}{c} (\gamma^6 \dot{\beta}_{\parallel}^2 + \gamma^4 \dot{\beta}_{\perp}^2) \quad (57)$$

b) En introduisant le rayon de courbure et  $\dot{\gamma}$ .

- Différentions  $\gamma$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{2} (1 - \beta^2)^{-3/2} (-2\beta\dot{\beta})$$

$$= \beta\dot{\beta} (1 - \beta^2)^{-3/2}$$

$$= \beta\dot{\beta} \gamma^3$$

L'accélération parallèle:

$$\dot{\beta}_{\parallel} = \beta^{-1} \gamma^{-3} \dot{\gamma}$$

- L'accélération perpendiculaire est liée au rayon de courbure  $\rho$  par:

$$\dot{\beta}_{\perp} = \frac{\beta^2 c}{\rho}$$

L'équation (57) devient:

$$P_o = \frac{2}{3} r_o \frac{E_o}{c} \left( \beta^{-2} \dot{\gamma}^2 + \frac{\beta^4 c^2 \dot{\gamma}^4}{\rho^2} \right) \quad (58)$$

c) En introduisant la quantité de mouvement.

Différentions la relation fondamentale:

$$p^2 c^2 = E^2 - E_o^2$$

Compte-tenu des paramètres relativistes:

$$\dot{p}_{//} = \frac{1}{\beta c} \dot{E} = \frac{1}{\beta c} E_o \dot{\gamma} \quad (59)$$

De même en différentiant  $p = m v$

$$\dot{p}_{\perp} = m_o \dot{\gamma} v_{\perp} = m_o \dot{\gamma} c \dot{\beta}_{\perp}$$

d'où:

$$P_o = \frac{2}{3} \frac{r_o E_o}{c} \left( \frac{\beta^{-2} \dot{\gamma}^2 c^2}{E_o^2} \dot{p}_{//}^2 + \frac{\dot{\gamma}^4}{(m_o \dot{\gamma} c)^2} \dot{p}_{\perp}^2 \right)$$

$$P_o = \frac{2}{3} \frac{r_o c}{E_o} \left( \dot{p}_{//}^2 + \dot{\gamma}^2 \dot{p}_{\perp}^2 \right) \quad (60)$$

Une même force accélératrice  $\dot{p}$  dans chacune des directions, produit une émission radiative d'une puissance  $\dot{\gamma}^2$  fois plus grande, si cette force est appliquée perpendiculairement à la vitesse de la particule.

d) En introduisant un quadrivecteur.

(A1-3) permet d'écrire la parenthèse de (60) sous la forme:

$$\dot{p}_{//}^2 + \dot{\gamma}^2 \dot{p}_{\perp}^2 = (\dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}^2 \beta^2) \dot{p}_{//}^2 + \dot{\gamma}^2 \dot{p}_{\perp}^2$$

$$\dot{p}_{//}^2 + \gamma^2 \dot{p}_{\perp}^2 = \gamma^2 (\dot{p}_{//}^2 - \beta^2 \dot{p}_{//}^2 + \dot{p}_{\perp}^2)$$

À l'aide de (59) on obtient:

$$= \gamma^2 (\dot{\vec{p}}^2 - \frac{1}{c^2} \dot{E}^2)$$

Soit  $\tau$  le temps propre à l'électron:

$$\dot{p}_{//}^2 + \gamma^2 \dot{p}_{\perp}^2 = \left( \frac{dp}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{d\tau} \right)^2$$

Nous obtenons là le carré d'un quadrivecteur invariant de la théorie relativiste.

$$P_0 = \frac{2}{3} \frac{r_0 c}{E_0} \left[ \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (61)$$

### I-2 Cas d'un électron dans un champ magnétique constant.

Il se déplace à une vitesse constante  $v_0$  sur un cercle de rayon  $\rho$ .  $\dot{\gamma} = 0$

L'équation (58) se simplifie:

$$P_0 = \frac{2}{3} r_0 c E_0 \beta^4 \frac{\gamma^4}{\rho^2} \quad (62)$$

#### Remarques:

a) L'équation (47) a été établie dans les conditions ci-dessus.

Ainsi si nous utilisons (47) et (54) dans l'équation (52), avec le domaine de variations des angles, après intégration, nous obtenons bien l'équation (62).

On le montrera dans l'exercice 3.

b) On peut remplacer  $\rho$  par son expression:

$$\rho = \frac{p}{e B} = \frac{m_0 \gamma \beta c}{e B}$$

d'où

$$P_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2 r_0 c}{m_0} \beta^2 \gamma^2 B^2 \quad (63)$$

### I-3 Cas d'un électron dans un linac.

L'accélération est parallèle à la vitesse et le rayon de courbure de la trajectoire  $\rho \rightarrow \infty$ . L'équation (58) s'écrit:

$$P_0 = \frac{2}{3} \frac{r_0}{c} \frac{\dot{E}^2}{\beta^2 E_0} \quad (64)$$

Pour donner une idée physique de cette perte, par rayonnement, due à l'accélération parallèle à la vitesse, écrivons le rapport:

$$\frac{P_0}{|\dot{E}|} = \frac{2}{3} \frac{r_0}{c \beta^2} \frac{|\dot{E}|}{E_0}$$

$$|\dot{E}| = \frac{dE}{dt} \quad \text{et } ds = \beta c dt$$

$$\frac{P_0}{|\dot{E}|} = \frac{2}{3} \frac{1}{\beta} \frac{r_0}{E_0} \left| \frac{dE}{ds} \right|$$

Pour avoir des pertes notables, il faut  $\left| \frac{dE}{ds} \right| \gg \frac{E_0}{r_0}$ . C'est-à-dire que la variation d'énergie de la particule doit être supérieure au rapport  $\frac{E_0}{r_0}$  qui représente une

variation d'énergie d'une particule au repos sur un parcours de l'ordre du rayon classique.

Nos champs accélérateurs actuels ne nous permettent pas de réaliser ces conditions.

#### I-4 Cas de N électrons.

Les expressions  $P_0$  trouvées précédemment s'appliquent à un seul électron.

Pour N électrons dans une machine, la charge s'exprime par:

$$N e = I t = I \frac{1}{v} = I \frac{2 \pi f}{\beta c} \quad (65)$$

Puissance totale rayonnée par N électrons:

$$P_N = N P_0 \quad (66)$$

L'expression (62) devient:

$$P_N = \frac{4 \pi r_0 E_0}{3 e f} \beta^3 \gamma^4 I \quad (67)$$

## II- Energie rayonnée

L'énergie rayonnée par une particule chargée, sur une longueur L, est obtenue par intégration de (51).

$$W_o = \int_0^{\tau} P_o dt$$

$$\boxed{W_o = \int_0^L \frac{P_o}{\beta c} ds} \quad (68)$$

Si L est la longueur de la circonférence  $W_o$  correspond à l'énergie perdue par tour et par électron.

$$(W_o)_{\text{tour}} = \oint_C \frac{P_o}{\beta c} ds$$

Dans le cas d'un champ magnétique constant, l'expression de  $P_o$  est donnée par (62).

$$(W_o)_{\text{tour}} = \frac{2}{3} r_o E_o \beta^3 \gamma^4 \oint_C \frac{ds}{\rho^2}$$

Si l'orbite est isomagnétique ( $\rho = \text{cte}$ ):

$$(W_o)_{\text{tour}} = \frac{2}{3} r_o E_o \beta^3 \gamma^4 \left[ \frac{2\pi \rho}{\rho^2} \right]$$

$$\boxed{(W_o)_{\text{tour}} = \frac{4\pi}{3} r_o E_o \beta^3 \frac{\gamma^4}{\rho}} \quad (69)$$

Pour un électron ultra-relativiste, l'expression de  $W_o$  devient:

$$(eV) \left( (W_o)_{\text{tour}} = 88 \cdot 10^3 \frac{E^4}{\rho} \right) (GeV) \quad (70)$$

(m)



### III- Transformée de Fourier du champ $\vec{E}$ .

Nous avons vu que l'équation (38) nous donne l'expression du champ électrique  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  à grande distance, dans le domaine temporel.

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n} \wedge \{(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}}\}}{r (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_t,$$

Le signal reçu en  $O_2$  pourra être analysé dans le domaine fréquentiel.

Pour cela, nous prendrons la transformée de Fourier de  $\vec{E}(t)$ :

$$\mathcal{F}\{\vec{E}(t)\} = \vec{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (71)$$

A l'aide de la relation (29), on parvient à:

$$\vec{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{e}{4\pi \sqrt{2\pi} \epsilon_0 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{n} \wedge \{(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}}\}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} \exp(-i\omega[t' + \frac{r}{c}]) dt' \quad (72)$$

Expression de la transformée de Fourier inverse de (71)

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\mathcal{E}}(\omega) \exp(+i\omega t) d\omega \quad (73)$$

#### IV- Répartition spectrale du rayonnement

##### IV-1 Formulation générale.

Le champ électromagnétique provenant de l'électron accéléré relativiste se situe à l'intérieur d'un cône axé sur le vecteur vitesse.

Si le mouvement est circulaire, ce cône balaie l'espace à la manière d'un faisceau de phare (Fig 6).

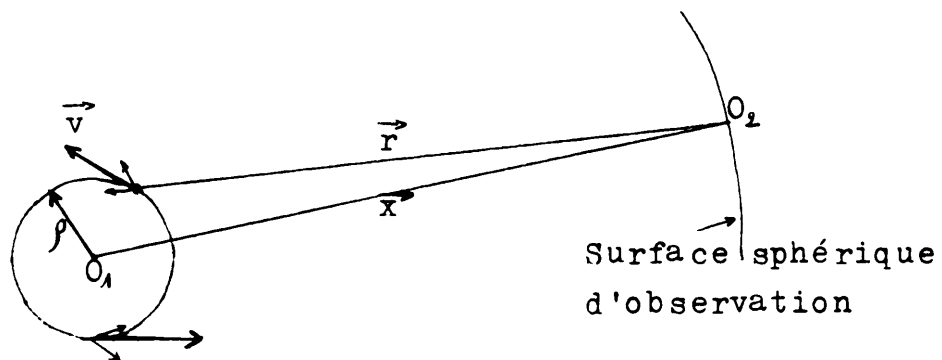


Fig. 6

L'observateur  $O_2$  reçoit d'une manière brève le faisceau de lumière. On obtient son spectre de fréquences par une analyse de Fourier du vecteur  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ .

Dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier au point  $\vec{x}$  de  $\vec{E}(t)$  est donnée par (71).

On s'intéresse à la répartition spectrale de l'énergie et de la puissance rayonnées.

Nous avons vu que la puissance incidente au point  $\vec{x}$ , par unité de surface, s'exprime par le vecteur de Poynting (44).

$$P = \epsilon_0 c E^2$$

L'énergie incidente au point  $\vec{x}$  par élément d'angle solide  $d\Omega$  lors du passage de l'électron (d'après (43)):

$$dW = P d\Omega dt = P r^2 d\Omega dt$$

$$\frac{dW}{d\Omega} = P r^2 dt \quad (74)$$

Intégrons la partie droite de l'égalité:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_0 c E^2 r^2 dt = \epsilon_0 c r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} E^2 dt$$

La distance  $r$  peut être considérée constante pendant la durée du balayage.

$$= \frac{\epsilon_0 c r^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{C}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$$

La deuxième intégrale provient de la transformée de Fourier inverse (73).

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \epsilon_0 c r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{C}(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{+i\omega t} dt \\ &= \epsilon_0 c r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{C}(\omega) \vec{C}(-\omega) d\omega \\ &= \epsilon_0 c r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{C}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Avec un champ  $\vec{E}$  réel:  $\vec{C}(\omega) = \vec{C}(-\omega)$

En revenant aux éléments différentiels, (74) s'écrit:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \epsilon_0 c r^2 |\vec{C}(\omega)|^2$$

$$\text{d'après (71)} \quad = \frac{\epsilon_0 c r^2}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

Portons l'expression (38) dans l'équation précédente:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{r_0 E_0}{8\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{n} \wedge \{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}} \}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (75)$$

C'est la composante spectrale de l'énergie par unité d'angle solide, déposée au point  $\vec{x}$  par le passage du pinceau lumineux émis par l'électron.

#### IV-2 Angle d'émission de lumière.

Dans le cas d'une particule quelconque évoluant dans un champ magnétique, nous avons établi l'équation (46).

Dans le domaine ultra-relativiste, l'émission des radiations synchrotroniques est essentiellement dirigée vers l'avant ( $\theta \ll 1$ ).

L'angle moyen quadratique  $\sqrt{\overline{\theta^2}}$  sous lequel l'énergie lumineuse est émise, satisfait à:

$$\gamma^2 \overline{\theta^2} \approx 1$$

d'où

$$\sigma_{\text{rms}} = \frac{1}{\gamma} \quad (76)$$

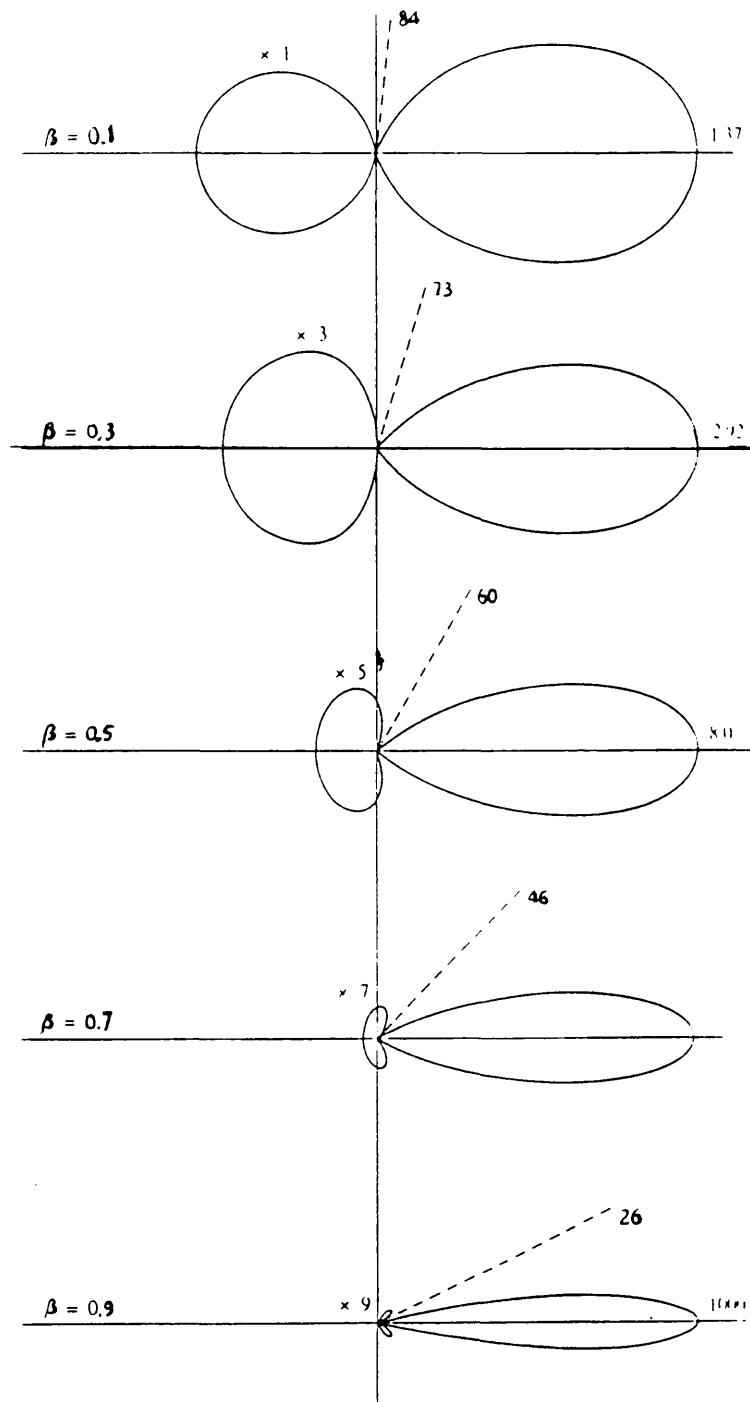


Fig 7

IV-3 Fréquence du spectre de la radiation synchrotronique.

Considérons la figure 8 ci-dessous.

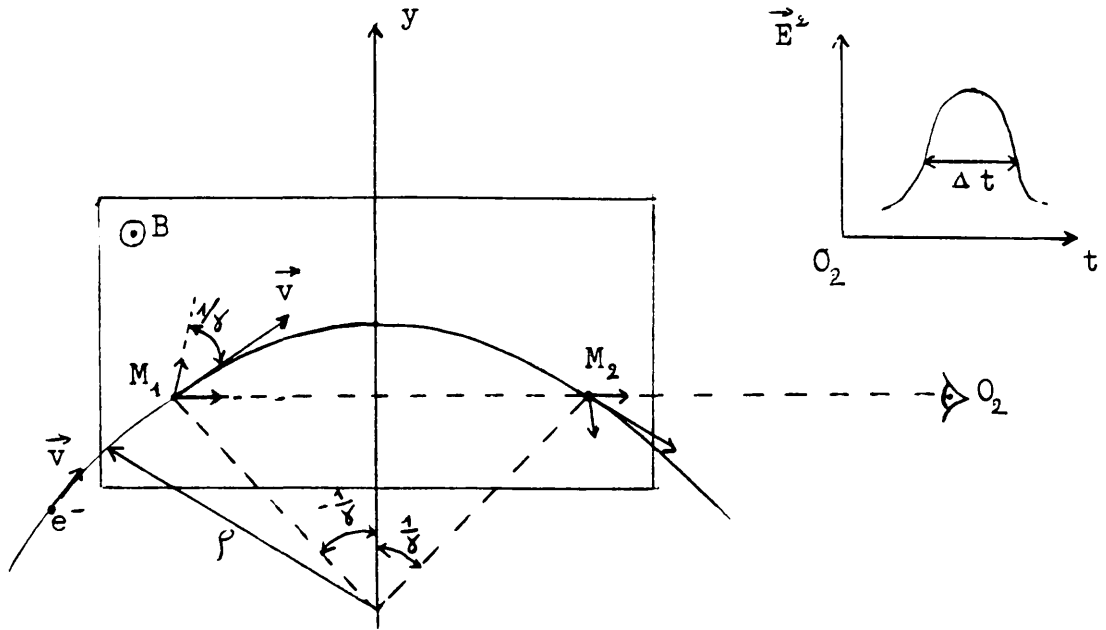


Fig. 8

L'observateur  $O_2$  devra se placer dans le plan de la trajectoire de l'électron afin d'effectuer une mesure physique sensible.

Cherchons à estimer la longueur de l'impulsion électromagnétique mesurée en  $O_2$ .

L'observation est limitée par le petit angle d'ouverture  $\Theta_{rms}$ ,  $O_2$  "voit" l'électron à partir de l'angle  $-\frac{1}{\gamma}$  par rapport à l'axe  $y$  jusqu'à l'angle  $+\frac{1}{\gamma}$ .

La longueur de l'impulsion lumineuse est la différence, en temps, entre l'électron et le photon pour aller de  $M_1$  à  $M_2$ .

$$\Delta t = t_e - t_\nu = \frac{2\rho}{\beta c \gamma} - \frac{2\rho \sin(1/\gamma)}{c}$$

$$\Delta t \approx \frac{2\rho}{\beta \gamma c} \left( 1 - \beta + \frac{\beta}{6\gamma^2} \right)$$

$$\approx \frac{2\rho}{\beta \gamma c} \left( \frac{1}{\gamma^2} \right) + \frac{2\rho}{6\gamma^3 c} \approx \frac{4\rho}{3\gamma^3 c}$$

Le spectre de fréquence s'étend jusqu'à

$$\omega = \frac{2\pi}{4t} = \frac{3\pi}{2} \frac{c \gamma^3}{\rho} \quad (77)$$

Définition de la fréquence critique:

$$\boxed{\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c \gamma^3}{\rho}} \quad (78)$$

En utilisant la relation:  $p = e B \rho$

on en déduit: 
$$\rho = \frac{m_0 c \beta \gamma}{e B}$$

Définition d'une longueur d'onde:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Longueur d'onde critique:

$$\lambda_c = \frac{4\pi}{3} \frac{E_0^3}{e c B E^2}$$

Après le calcul de la constante numérique, nous aboutissons à une importante relation pour les électrons relativistes.

$$\boxed{\lambda_c = \frac{18,64}{B E^2}} \quad (79)$$

$\underbrace{\quad}_{(\text{Å})} \quad \underbrace{\quad}_{(\text{T})} \quad \underbrace{\quad}_{(\text{GeV})}$

#### Commentaires.

1) Un électron se déplaçant à la vitesse  $\beta c$  sur une orbite circulaire de rayon  $\rho$  a un mouvement périodique de période  $\frac{2\pi\rho}{\beta c}$ .

On s'attend donc à ce que les radiations émises aient un spectre composé de lignes aux fréquences

$$\omega_n = n \omega_0$$

$$\text{où } \omega_0 = \frac{\beta c}{\rho} = 2 \pi f_0 \quad (80)$$

est la fréquence de révolution.

Cependant ce spectre de lignes ne pourra être observé que dans des cas très spéciaux.

En effet les radiations synchrotroniques émises sont quantifiées et introduisent du "bruit" sur l'énergie, aussi bien que sur  $\omega_0$ .

Dans la pratique, le bruit quantique élargit les lignes jusqu'à devenir un spectre continu.

2) Le calcul de l'équation (75) conduit à:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{r_0 E_0}{8 \pi^2 c} \left( \frac{\omega \rho}{c} \right)^2 \left( \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{\gamma^2} \right)^2 \left[ K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \quad (81)$$

$$\text{où } \xi = \frac{\omega}{2 \omega_c} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{3/2} \quad \text{est l'argument}$$

des fonctions de Bessel modifiées K

$\theta$  est l'angle d'observation par rapport à la vitesse (Fig. 5)

$\omega_c$  est la fréquence critique définie en (78).

(81) exprime l'énergie reçue par  $O_2$  par unité d'angle solide et par unité d'intervalle de fréquence durant un seul passage d'un seul électron.

$$K \simeq \frac{e^{-\xi}}{\xi} \quad \text{pour } \xi \gg 1$$

Par conséquent, la radiation synchrotronique sera confinée dans un angle  $\theta$  de plus en plus petit lorsque  $\omega$  ira en croissant (Fig. 9).



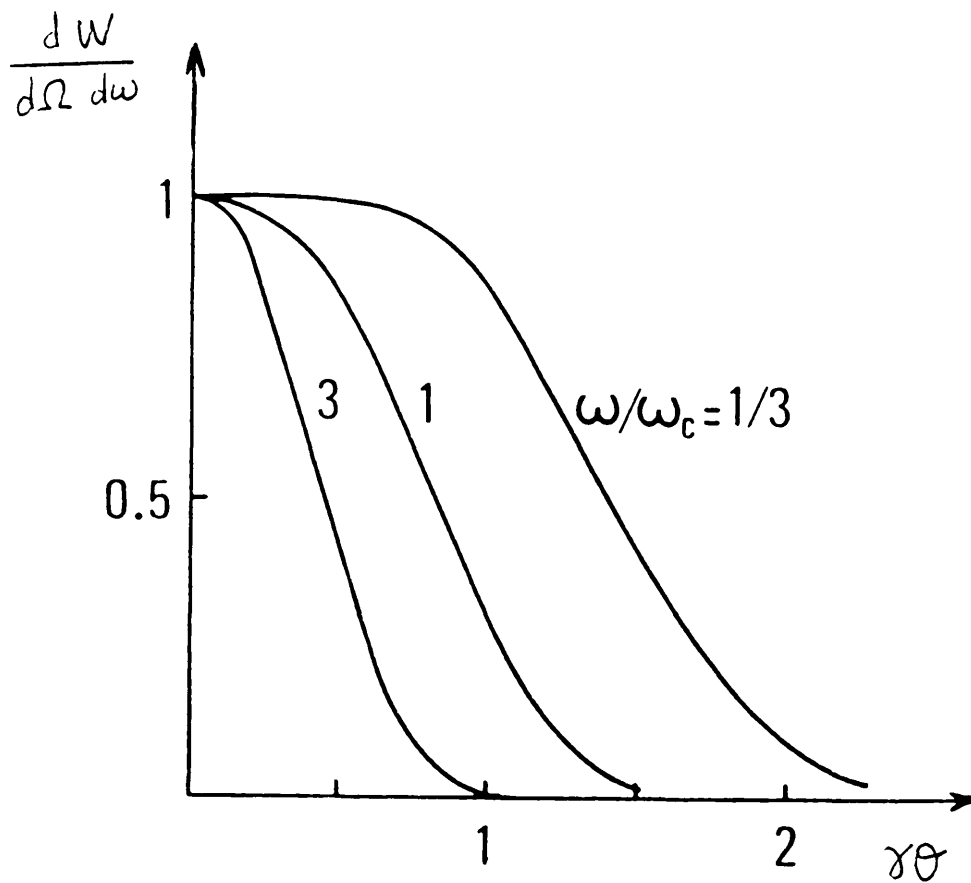


Fig. 9 - Energie perçue par l'observateur par unité d'angle solide et par unité d'intervalle de fréquence, et pour chaque passage de la particule, en unités arbitraires, en fonction de l'angle  $\gamma\theta$ .

## V- Emission quantique du rayonnement

### V-1 Paramètres de base.

Le rayonnement électromagnétique émis est équivalent à une émission de quanta d'énergie.

$$u = \hbar \omega \quad (82)$$

$$\text{où } \hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,58 \cdot 10^{-16} \text{ eVs}$$

Les références [2] [3] [4] traitent abondamment ce sujet.

Nous en donnerons ici un bref aperçu.

On introduit une énergie critique  $u_c$  telle que

$$u_c = \hbar \omega_c \quad (83)$$

Si  $\frac{dP_o}{d\omega}$  est la puissance émise dans l'intervalle

de fréquence  $d\omega$  :

$$P_o = \int \frac{dP_o}{d\omega} d\omega$$

On montre que le taux d'émission quantique à toutes les énergies est:

$$\dot{N} = \frac{15 \sqrt{3}}{8} \frac{P_o}{u_c} \quad (84)$$

L'énergie quantique moyenne:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{\dot{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} u \dot{n}(u) du = \frac{8}{15 \sqrt{3}} u_c = 0,308 u_c$$

où  $\dot{n}(u)$  est le nombre de quanta émis par unité de temps.

L'énergie quantique quadratique moyenne:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{\dot{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \dot{n}(u) du = \frac{11}{27} u_c^2 \quad (85)$$

Une quantité intéressante pour la dynamique des particules, en présence de rayonnement, est le produit du taux d'émission quantique par la moyenne quadratique de l'énergie  $\dot{N} \langle u^2 \rangle$ .

$$\dot{N} \langle u^2 \rangle = \frac{55}{24 \sqrt{3}} u_c P_o \quad (86)$$

#### V-2 Mouvement sur une orbite circulaire.

L'expression de  $P_o$  a été établie en (62).

D'après (78), on peut écrire:

$$u_c = \frac{3}{2} \frac{\hbar c}{\rho} \gamma^3 \quad (87)$$

Le taux moyen d'émission quantique:

$$\dot{N} = \frac{5 \sqrt{3}}{6} \frac{r_o \beta^4}{\hbar} \frac{E}{\rho} \quad (88)$$

Il ne dépend que de l'énergie du faisceau.

Le produit de la cadence d'émission des quanta de lumière par la moyenne quadratique de l'énergie:

$$\dot{N} \langle u^2 \rangle = \frac{55}{24 \sqrt{3}} \frac{r_o E_o c^2 \hbar}{\rho^3} \gamma^7 \quad [\text{eV} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (89)$$

Il est proportionnel à la puissance 7 de l'énergie.

AMORTISSEMENT RADIATIF  
DES OSCILLATIONS

I- Introduction

Le rayonnement synchrotronique est important pour la dynamique des particules chargées légères.

Dans le cas d'électrons en mouvement dans un accélérateur ou un accumulateur, nous avons un  $\gamma$  très grand, et les dipôles fournissent une accélération perpendiculaire à la vitesse.

Dans un champ magnétique constant, les électrons spiralent jusque sur les parois de la chambre à vide. Quel que soit le type de machine, il faut donc des cavités RF pour compenser les pertes par rayonnement synchrotronique.

Dans un accumulateur (énergie fixe), le gain d'énergie par tour doit compenser exactement la perte par rayonnement.

Dans un accélérateur (énergie variable), le gain d'énergie par tour doit être supérieur à  $(W_0)_{\text{tour}}$ .

## II- Oscillations en énergie.

### II-1 Equation en énergie

Nous avons vu, dans le cours "accélération RF", que la particule synchrone est celle qui, à chaque tour, arrive avec la même phase  $\phi_s$  dans la cavité RF.

Elle reçoit un gain d'énergie:

$$(\Delta E)_{\text{tour}} = e \hat{V}_{\text{RF}} \sin \phi_s = e V(t_s) \quad (90)$$

où  $\phi_s = \omega_{\text{RF}} t + \varphi_s$

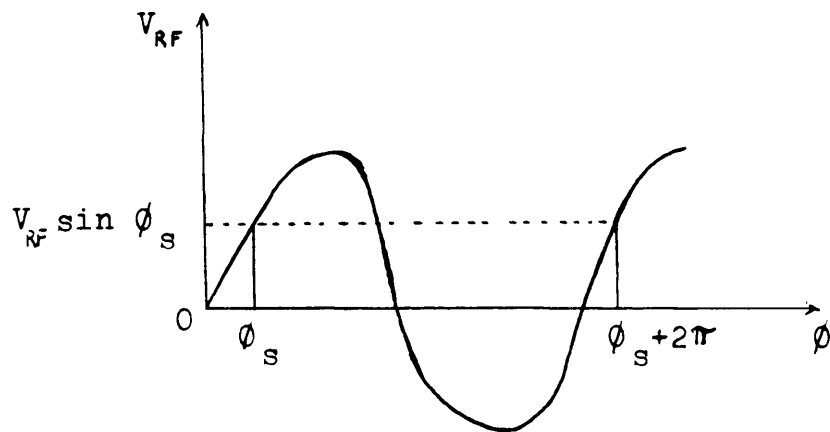


Fig. 10

La perte d'énergie par tour est donnée par (69)

$$(W_o)_{\text{tour}} = \frac{2\pi}{3} r_o E_o \beta^3 \gamma^4 \oint_C \frac{ds}{\rho^2} \quad (91)$$

L'intégrale est prise sur l'orbite fermée ayant  $\rho$  pour rayon de courbure local.

En général  $(W_o)_{\text{tour}} \ll E$  (énergie de la particule)

On pourrait négliger l'effet sur un tour mais on ne peut pas négliger les effets cumulatifs sur plusieurs centaines, voire milliers de tours.

En prenant  $\beta = 1$ , l'équation (69) devient:

$$(W_o)_{\text{tour}} = \frac{4\pi}{3} r_o E_o \frac{\gamma^4}{\rho} \quad (92)$$

Cette perte en énergie doit être compensée par le gain exprimé par (90).

Considérons une particule qui s'écarte d'une énergie  $\varepsilon$  par rapport à l'énergie de la particule synchrone.

$$\varepsilon = E - E_s$$

Rappel (cs Acc. RF) :

$$\eta = \frac{\Delta f / f_{\text{rev}}}{\Delta p / p} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_t^2} = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p \quad (93)$$

Si  $T$  est la période de révolution:

$$\frac{\Delta f}{f_{\text{rev}}} = - \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\varepsilon}{E_s}$$

Portons cette valeur dans (93):

$$\Delta T = \left( \alpha_p - \frac{1}{\gamma^2} \right) T \frac{\varepsilon}{E_s}$$

Avec les électrons

$$\frac{1}{\gamma^2} \ll \alpha_p$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha_p \frac{\varepsilon}{E_s} \quad (94)$$

Après la traversée de la cavité, le gain d'énergie par tour est:

$$\frac{(\Delta e)_{\text{tour}}}{T} = \frac{W(E)_{\text{tour}} - (\Delta E)_{\text{tour}}}{T} \quad (94)$$

Pour la particule synchrone:

$$W(E_s) = e V(t_s) = (W_o)_{\text{tour}}$$

Développons (94) au voisinage de la particule synchrone, au premier ordre:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\left( W_o + \left( \frac{dW}{dE} \right) d\varepsilon \right) - \left( e V(t_s) + e \frac{dV}{dT} dT \right)}{T}$$

Exprimons dT à partir de (94):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{T} \left( \frac{dW}{dE} \right) d\varepsilon - \frac{e}{T} \left( \frac{dV}{dT} \right) \alpha_p \frac{\varepsilon}{E_s} dt$$

Dérivons par rapport au temps

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - \frac{1}{T} \left( \frac{dW}{dE} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{e}{T} \left( \frac{dV}{dT} \right) \frac{\alpha_p}{E_s} \varepsilon = 0 \quad (95)$$

La solution est donnée par:

$$\varepsilon(t) = A e^{-\alpha_\varepsilon t} \cos(\Omega_s t - \theta_0) \quad (96)$$

où l'on a posé:

$$\Omega_s^2 = \frac{e}{T} \frac{dV}{dT} \frac{\alpha_p}{E_s} \quad (97)$$

et

$$\alpha_\varepsilon = \frac{1}{\mathcal{L}_\varepsilon} = \frac{1}{2T} \frac{dW}{dE} \quad (98)$$

A et  $\theta_0$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

(95) est l'équation classique de l'oscillateur harmonique, à laquelle s'ajoute le second terme. C'est ce dernier qui donne le taux d'amortissement, défini par (98), provenant des radiations synchrotroniques.

Cet amortissement est dû au fait que l'énergie rayonnée par l'électron dépend de son écart en énergie avec la particule synchrone.

### II-2 Temps d'amortissement.

Nous avons vu que les particules avec  $\varepsilon \neq 0$  ont tendance à se rapprocher de la particule synchrone.

Jusqu'où ce processus a-t-il lieu?

S'il n'y avait pas de limite, toutes les particules finiraient par former un nuage très dense et l'émission de lumière pourrait devenir cohérente.

L'excitation produite par les fluctuations quantiques rend ce phénomène impossible. On aboutit à un équilibre entre amortissement et excitation.

Evaluons  $\frac{dW}{dE}$  pour calculer  $\alpha_c$ . (98).

Nous avons vu que:

$$W(E) = \oint_C P_0 dt = \oint_{C_s} P_0 \frac{dt}{ds} ds \quad (99)$$

La première intégrale est prise sur l'orbite d'une particule à l'énergie  $E \neq E_s$ .

La seconde est prise sur l'orbite de la particule synchrone.



Considérons la figure 11 d'un dipôle avec faces perpendiculaires à la trajectoire de la particule.

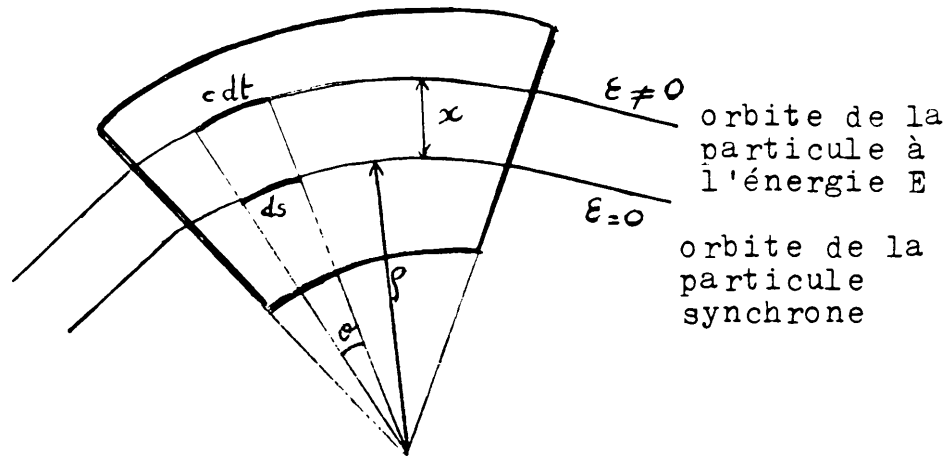


Fig. 11

$$ds = \rho \theta$$

$$c dt = (\rho + x) \theta$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{x(s)}{\rho} \right) \quad (100)$$

A un écart d'énergie  $\epsilon$  correspond un écart de position radiale  $x$  tel que:

$$x = D_x \frac{E - E_s}{E_s} = D_x \frac{\epsilon}{E_s} \quad (101)$$

$D_x$  = dispersion horizontale

Portons (100) et (101) dans (99) et différencions sous le signe intégrale (A1-21)

$$\frac{dW}{dE} = \int \frac{\partial}{\partial E} \left[ \frac{P_0}{c} \left( 1 + \frac{x(s)}{\rho} \right) \right] ds$$

$$= \frac{1}{c} \int \left( \frac{dP_0}{dE} + \frac{D_x P_0}{\rho E_s} \right) ds$$

D'après (63) la puissance rayonnée est:

$$P_0 \sim E^2 B^2(x(E))$$

Dérivons par rapport à E:

$$\frac{dW}{dE} = \frac{W_0}{E_s} \left[ 2 + \frac{1}{cW_0} \int D_x P_0 \left( \frac{2}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{1}{\rho} \right) ds \right]$$

L'expression (98) devient:

$$\boxed{\alpha_E = \frac{1}{\mathcal{L}_E} = \frac{1}{2T} \frac{W_0}{E_s} (2 + \tilde{D})} \quad (102)$$

$$\text{où } \tilde{D} = \frac{\int \frac{D_x}{\rho^2} \left( \frac{2}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{1}{\rho} \right) ds}{\int \frac{ds}{\rho^2}} \quad (103)$$

Pour des dipôles à faces parallèles et pour des machines à fonctions séparées, comme c'est très souvent le cas (hypothèses initiales de ce cours),

$$\tilde{D} \ll 1$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}_E \approx T \frac{E_s}{W_0} \quad (104)$$

### III- Oscillations transversales.

#### III-1 Oscillations bétatroniques verticales.

Si on néglige les variations de  $\beta$  en fonction de l'azimuth  $s$ , l'équation du mouvement s'écrit:

$$y = A \cos \left( \frac{s}{\beta} + \varphi \right)$$

$$y' = - \frac{A}{\beta} \sin \left( \frac{s}{\beta} + \varphi \right)$$

En l'absence de radiations synchrotroniques, l'amplitude  $A$  est un invariant.

$$A^2 = y^2 + (\beta y')^2 \quad (105)$$

A chaque émission d'un photon  $\delta E$ , la quantité de mouvement est réduite de  $\delta p = \delta E/c$ . (Fig. 12).

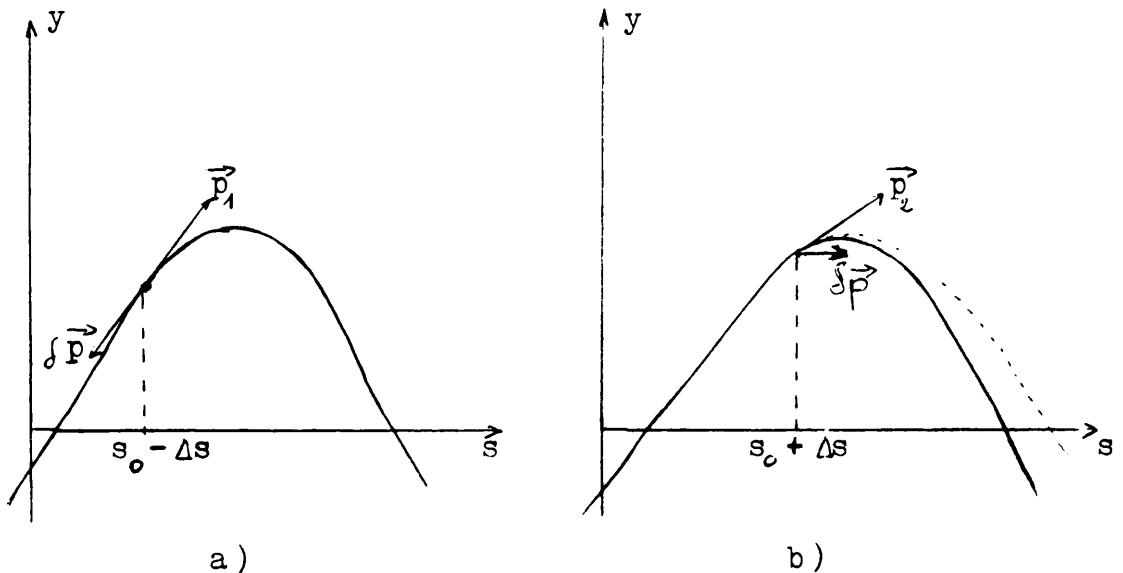


Fig. 12

En général, l'angle d'émission  $\theta_y$  entre le photon et  $\vec{p}$  est très petit ( $\theta_{\text{rms}} \sim \frac{1}{\gamma}$ ). On le négligera dans notre étude. Donc  $\delta \vec{p}$  a la même direction que  $\vec{p}$ .

L'angle  $y'$  et la position  $y$  de la particule restent inchangés.

Le mouvement n'est pas affecté par cette radiation synchrotronique pour autant que la dispersion verticale soit nulle.

Ce qui est le cas pour la plupart des accélérateurs.

A chaque passage dans la cavité RF, celle-ci fournit de l'énergie mais affecte seulement la composante longitudinale de  $\vec{p}$  (Fig. 12)

Donc l'angle  $y'$ , à la sortie de la cavité, sera modifié de telle sorte que si  $p_{\perp} \ll p$

$$y' + \delta y' = \frac{p_{\perp}}{p + \delta p} \approx y' \left(1 - \frac{\delta p}{p}\right)$$

$$= \frac{\frac{p_{\perp}}{p}}{1 + \frac{\delta p}{p}} \approx \frac{p_{\perp}}{p} \left(1 - \frac{\delta p}{p}\right)$$

$$y' + \delta y' \approx y' \left(1 - \frac{\delta p}{p}\right)$$

$$\delta y' \approx - y' \frac{\delta p}{p} = - y' \frac{\delta E}{E}$$

Dérivons (105)

$$A \delta A = (\beta^2 y') \delta y' = - \beta^2 y'^2 \frac{\delta E}{E_s} \quad (106)$$

L'émission des radiations synchrotroniques est un phénomène quantique aléatoire.

La phase de l'oscillation, à l'entrée de la cavité RF, peut avoir une quelconque valeur entre 0 et  $2\pi$ . On doit donc faire une moyenne sur toutes les phases.

L'équation (106) devient:

$$A \langle \delta A \rangle = \langle y^2 - A^2 \rangle \frac{\delta E}{E_s} = -\frac{A^2}{2} \frac{\delta E}{E_s}$$

Sur une période de révolution, la somme de tous les  $\delta E$  doit être égale à  $W_0$ .

On peut écrire:

$$\frac{\Delta A}{A} = -\frac{W_0}{2 E_s} \quad (107)$$

ou

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dA}{T} = -\frac{W_0}{2 E_s T}$$

On en déduit le coefficient d'amortissement  $\alpha_y$  des oscillations verticales (à condition que  $D_y = 0$ ).

$$\boxed{\alpha_y = \frac{W_0}{2 E_s T}} \quad (108)$$

et le temps d'amortissement:

$$\tau_y = 2 T \frac{E_s}{W_0} \quad (109)$$

### Commentaires.

1) Ce temps d'amortissement est deux fois plus grand que celui pour les oscillations en énergie (104).

2) L'amortissement vertical n'est pas une conséquence directe des radiations synchrotroniques, mais il est lié à l'existence de l'accélération PF.

3) Nous avons supposé  $\delta \vec{p}$  et  $\vec{p}$  colinéaires. En réalité, ils ne le sont pas et cela peut être la source d'excitations quantiques du mouvement vertical.

En pratique cet effet est très petit. Il est masqué par l'effet du couplage, entre le mouvement vertical et horizontal, qui est plus important.

### III-2 Oscillations bétatroniques horizontales.

Nous devons tenir compte de la dispersion horizontale  $D_x$ .

Après émission de lumière synchrotronique, l'énergie de la particule diminue et elle va osciller sur une autre trajectoire, écartée de celle de la particule synchrone d'une quantité (Fig. 13):

$$\delta x_\varepsilon = D_x \frac{\delta E}{E_s} \quad (110)$$

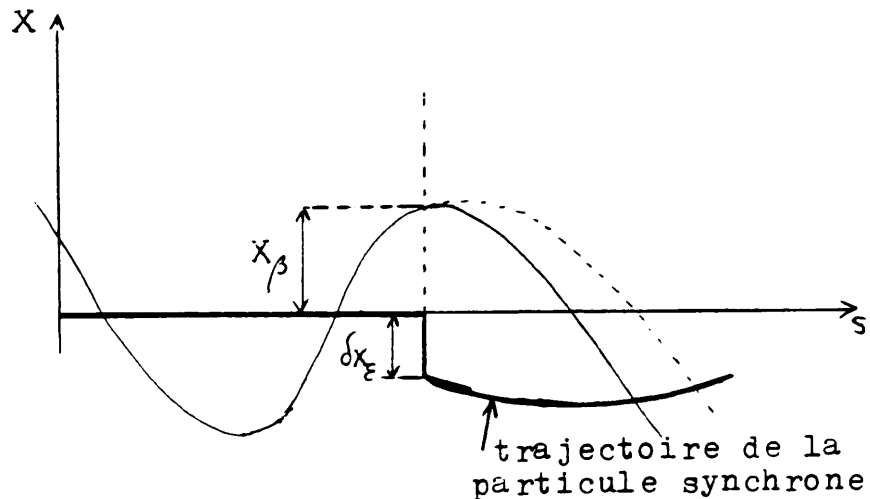


Fig. 13

Comme pour les oscillations verticales l'émission d'un photon ne modifie pas la position  $x$  et l'angle  $x'$ .

D'où

$$\delta x = \delta x_\beta + \delta x_\varepsilon = 0$$

En utilisant l'équation (110):

$$\delta x_\beta = - D_x \frac{\delta E}{E_s}$$

De nouveau nous supposons  $\vec{p}$  et  $\delta \vec{p}$  colinéaires:

$$\delta x' = \delta x'_\beta + \delta x'_\varepsilon = 0$$

Dérivons (110) par rapport à  $s$  et portons le résultat dans l'équation ci-dessus.

$$\delta x'_\beta = - D'_x \frac{\delta E}{E_s}$$

L'équation (105) est aussi valable pour la variable  $x$ .

$$\begin{aligned} A \delta A &= x_\beta \delta x_\beta + \beta^2 x'_\beta \delta x'_\beta \\ &= - (D_x x_\beta + D'_x \beta^2 x'_\beta) \frac{\delta E}{E_s} \end{aligned} \quad (111)$$

$\delta E < 0$  : l'émission de radiation synchrotrone seule conduit à un antiamortissement.

Maintenant, nous relierons  $\delta E$  avec la puissance radiative par unité de longueur.

L'oscillation bétatronique de la particule synchrone s'écrit:

$$\delta E = P_0 \delta t = P_0(B) \frac{\Delta \ell}{c} \quad (112)$$

Nous avons vu que:  $P_0 \sim E^2 B^2$

$$P_0(x/\rho) = P_0(x_s) + x/\rho^2 \frac{P_0}{B} \frac{dB}{dx}$$

Compte-tenu de la courbure dans un dipole

$$\Delta \ell \approx \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \Delta s$$

Reportons ces valeurs dans (112).

Gardons les termes du premier ordre et tenons compte de  $\delta E < 0$

$$\delta E = - \left(1 + \frac{2}{B} \frac{dB}{dx} x/\rho + \frac{x/\rho}{\rho_s}\right) \frac{P_0}{c} \Delta s$$

Introduisons cette expression dans (111).

Effectuons une moyenne sur toutes les oscillations bétatroniques. Il ne restera que les termes en  $x/\rho$ .

$$\frac{\langle \delta A \rangle}{A} = \frac{1}{2} \frac{D_x P_0}{c E_s} \left( \frac{2}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{1}{\rho_s} \right) \Delta s$$

Intégrons sur un tour machine.

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{2} \oint_C \frac{D_x P_0}{c E_s} \left( \frac{2}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{1}{\rho_s} \right) ds$$

C'est la contribution des termes  $D_x$  non nuls à l'antiamortissement.

Nous devons y ajouter les termes (107) qui proviennent de la cavité RF.

Comme pour les oscillations verticales, nous obtenons:

$$\alpha_x = - \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{W_0}{2 E_s T} (1 - \tilde{D}) \quad (113)$$

$\tilde{D}$  a la même signification qu'en (103).



Remarques:

1) Le fait que l'orbite horizontale passe dans des dipôles secteurs ou dipôles à fonctions combinées, donne un effet inverse à celui des oscillations en énergie.

2) En général  $D_x = 0$  au niveau de la cavité PF. Si ce n'était pas le cas, seule l'orbite fermée serait affectée. L'amortissement du faisceau ne le serait pas, car le changement se produit toujours au même point et non d'une manière aléatoire.

#### IV- Nombre de partition

A partir des équations (102), (108) et (113), on peut écrire:

$$\mathcal{C}_i = \frac{2 E_s T}{J_i W_0} \quad i = x, y, \varepsilon \quad (114)$$

$$\text{où } J_x = 1 - \tilde{D} \quad J_y = 1 \quad J_\varepsilon = 2 + \tilde{D}$$

$$J_x + J_y + J_\varepsilon = 4 \quad \forall \tilde{D} \quad (115)$$

SI on change le champ magnétique, on modifie le taux d'amortissement, mais la relation est toujours vraie.

Ce théorème est général.

## Bibliographie

- [1] L. Landau et E. Lifchitz      Théorie du champ.  
Edition de Moscou 1966
- [2] H. Bruck      Accélérateurs circulaires  
de particules.  
INSTN Saclay 1966
- [3] K. Hubner      Synchrotron radiation  
CERN 85-19    CAS sep. 1984
- [4] J. Le Duff      Dynamique des particules  
chargées, en présence du  
rayonnement synchrotron.  
DEA Physique et technologie  
des grands instruments.  
Paris
- [5] M. Sands      The Physics of electron  
storage rings  
An introduction    SLAC-121  
November 1970

A N N E X E S

I- Rappel de quelques constantes.

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \text{charge de l'électron}$$

$$m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad \text{masse de l'électron}$$

ou 0,511 MeV au repos.

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \quad \text{permittivité du vide}$$

$$c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{vitesse de la lumière.}$$

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2,818 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad \text{(A1-1)}$$

rayon classique pour  $e^-$

II- Rappel de quelques notations.

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{vitesse réduite normalisée} \quad \text{(A1-2)}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{(A1-3)}$$

$$\rho \text{ [m]} \quad \text{rayon de courbure de la trajectoire circulaire.}$$

III- Rappel de quelques formules.

Produit vectoriel.

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad \text{(A1-4)}$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A} (\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad \text{(A1-5)}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad \text{(A1-6)}$$

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{grad}} \phi) = 0 \quad \forall \phi \quad \text{(A1-7)}$$

$$\text{div} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0 \quad \forall \vec{A} \quad \text{(A1-8)}$$

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad \text{(A1-9)}$$

## Derivée sous le signe d'intégration

$$A1-21 \quad \frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} F(x, \alpha) dx = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{\partial \alpha} dx + F(\phi_2, \alpha) \frac{d\phi_2}{d\alpha} - F(\phi_1, \alpha) \frac{d\phi_1}{d\alpha}$$

## DERIVEES D'UN VECTEUR

La dérivée d'une fonction vectorielle  $A(u) = A_1(u)i + A_2(u)j + A_3(u)k$  de la variable scalaire  $u$  est donnée

$$A1-22 \quad \frac{dA}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u} = \frac{dA_1}{du}i + \frac{dA_2}{du}j + \frac{dA_3}{du}k$$

On définit de manière analogue les dérivées partielles d'une fonction vectorielle  $A(x, y, z)$ . Nous admettons toutes les dérivées existent sauf mention contraire.

## FORMULES COMPORTANT DES DERIVEES

$$A1-23 \quad \frac{d}{du}(A \cdot B) = A \cdot \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \cdot B$$

$$A1-24 \quad \frac{d}{du}(A \times B) = A \times \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \times B$$

$$A1-25 \quad \frac{d}{du}\{A \cdot (B \times C)\} = \frac{dA}{du} \cdot (B \times C) + A \cdot \left(\frac{dB}{du} \times C\right) + A \cdot \left(B \times \frac{dC}{du}\right)$$

$$A1-26 \quad A \cdot \frac{dA}{du} = A \frac{dA}{du}$$

$$A1-27 \quad A \cdot \frac{dA}{du} = 0 \quad \text{si } |A| \text{ est une constante.}$$

## L'OPERATEUR NABLA

L'opérateur Nabla est défini par

$$A1-28 \quad \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Dans les résultats ci-dessous on suppose que  $U = u(x, y, z)$ ,  $V = V(x, y, z)$ ,  $A = A(x, y, z)$  et  $B = B(x, y, z)$  admettent des dérivées partielles.

## LE GRADIENT

$$A1-29 \quad \text{Gradient de } U = \text{grad } U = \nabla U = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$$

## LA DIVERGENCE

$$A1-30 \quad \text{Divergence de } A = \text{div } A = \nabla \cdot A = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \\ = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

## LE ROTATIONNEL

A1-31 Rotationnel de  $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}
 &= \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \\
 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\
 &= \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) k
 \end{aligned}$$

## LE LAPLACIEN

A1-32 Le laplacien de  $U = \nabla^2 U = \nabla \cdot (\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

A1-33 Le laplacien de  $\mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$

## L'OPERATEUR BI-HARMONIQUE

A1-34 L'opérateur bi-harmonique appliqué à  $U = \nabla^4 U = \nabla^2(\nabla^2 U)$   
 $= \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2}$

## FORMULES DIVERSES COMPORTANT $\nabla$

A1-35  $\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V$

A1-36  $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$

A1-37  $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$

A1-38  $\nabla \cdot (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \cdot \mathbf{A} + U(\nabla \cdot \mathbf{A})$

A1-39  $\nabla \times (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \times \mathbf{A} + U(\nabla \times \mathbf{A})$

A1-40  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

A1-41  $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$

A1-42  $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

A1-43  $\nabla \times (\nabla U) = 0$ , c'est-à-dire que le rotationnel du gradient de  $U$  est nul.

A1-44  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ , c'est-à-dire que la divergence du rotationnel de  $\mathbf{A}$  est nul.

A1-45  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

A1-46  $\nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U = \Delta U = \text{laplacien}$

Calcul d'une intégrale particulière.  
solution de l'équation différentielle  
linéaire (14).

Afin de déterminer cette intégrale, nous divisons tout l'espace en éléments infinitésimaux de volume  $dV$ . Ils contiennent une charge  $dQ$ , somme de charges ponctuelles  $q$ .

Déterminons le champ créé par  $dQ$  qui sera en général fonction de  $t$  et de la distance  $\vec{r}$  entre le volume  $dV$  et le point d'observation.

Pour une charge ponctuelle, on a vu (21) que:

$$\rho = q \delta (\vec{x} - \vec{R})$$

Les définitions de  $\vec{x}$  et  $\vec{R}$  correspondent à la figure 2.

Pour une charge  $dQ$ :

$$\rho = dQ(t) \delta (\vec{r}) \quad (\text{A2-1})$$

En vertu de la linéarité des équations, le champ réel sera égal à la somme des champs créés par tous les éléments de ce genre.

Ainsi l'équation à résoudre (14) devient:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{1}{\epsilon_0} dQ \delta (\vec{r}) \quad (\text{A2-2})$$

La distribution de Dirac  $\delta (\vec{r})$  est nulle partout sauf à  $\vec{r} = 0$ , d'où:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Dans le cas considéré,  $\varphi$  a une symétrie centrale; il ne dépend que de  $r$  (19).



Exprimons l'opérateur de Laplace en coordonnées sphériques:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

L'équation à résoudre devient:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Posons 
$$\varphi = \frac{\chi(\vec{x}, t)}{r}$$

$\vec{x}$  étant les composantes spatiales dans le référentiel  $R_1$ .

Après quelques calculs méthodiques nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

C'est l'équation des ondes planes dont la solution est de la forme [1]

$$\chi = \chi_1(t - \frac{r}{c}) + \chi_2(t + \frac{r}{c})$$

où  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont deux fonctions arbitraires.

Il est pratique de prendre  $\chi_2 = 0$ .

Excepté à l'origine, le potentiel  $\varphi$  s'écrit:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \chi \left( \frac{t - \frac{r}{c}}{r} \right) \quad (\text{A2-3})$$

Afin de préciser la fonction  $\chi$ , on la choisit de manière à satisfaire l'équation (A2-2)

Pour  $r \rightarrow 0$  alors  $\varphi \rightarrow \infty$ , donc les dérivées de  $\varphi$  par rapport aux coordonnées croissent plus vite que les dérivées par rapport au temps. Par conséquent, pour  $r \rightarrow 0$ ,  $\partial^2 \varphi / \partial t^2$  est négligeable devant  $\Delta\varphi$ .

(A2-2) devient:

$$\Delta \left( \frac{\chi}{r} \right) = - \frac{dQ}{\epsilon_0} \delta(\vec{r})$$

qui est la loi de Coulomb.

Au voisinage de l'origine (A2-3) prend l'expression du potentiel coulombien (19).

$$\chi(t) = \frac{dQ(t)}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ou encore, d'après (A2-3)

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{dQ(t - \frac{r}{c})}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{A2-4})$$

Si  $\rho(x', y', z', t')$  est une distribution arbitraire de charge, exprimée dans le référentiel  $R_2$ :

$$dQ(x', y', z', t - \frac{r}{c}) = \rho(x', y', z', t') dV' \quad (\text{A2-5})$$

Pour avoir la charge totale correspondant à la solution particulière de (14), il faut intégrer dans tout l'espace, comme nous l'avons vu en (20).

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Remplaçons  $dQ$  par son expression:

$$\varphi(x, y, z, t) = \int_{\text{Volume}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \rho(x', y', z', t') dV' \quad (\text{A2-6})$$

où  $t' = t - \frac{r}{c}$

$dV' = dx' dy' dz'$  élément de volume comportant la charge  $dQ$ , exprimée dans le référentiel  $R_2$ .

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

$r$  est la distance entre l'élément de volume  $dV'$  et le point d'observation  $O_2$  où l'on cherche le potentiel.

L'expression (A2-6) peut s'écrire sous la forme condensée:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int_{\text{Volume}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \rho(\vec{x}', t') dV' \quad (\text{A2-7})$$

Calcul des potentiels scalaires  
et vecteur A.

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{e \delta(\vec{x}-\vec{R})}{r(t')} \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) dx'^3 dt' \quad (\text{A3-1})$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \iiint \frac{e \vec{\beta} \delta(\vec{x}-\vec{R})}{r} \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) dx'^3 dt' \quad (\text{A3-2})$$

Dans le domaine occupé par la charge ponctuelle, la distance  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{R}$  est considérée constante.

Intégration par rapport aux coordonnées spatiales:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r(t')} \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) dt' \quad (\text{A3-3})$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{\vec{\beta}(t')}{r(t')} \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) dt' \quad (\text{A3-4})$$

Dans l'argument de la fonction de Dirac figure la fonction:

$$\theta(t') = t' + \frac{r(t')}{c}$$

Différentions cette nouvelle variable  $\theta$  par rapport à  $t'$ :

$$\frac{d\theta}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dr}{dt'} = 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{\beta}}{c} \quad \text{d'après (28)}$$

$$\delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) dt' = \delta(\theta - t) d\theta \frac{dt'}{d\theta}$$

$$\delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) dt' = \frac{\delta(\theta - t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} d\theta \quad (\text{A3-5})$$

Introduisons l'expression (A3-5) dans (A3-3) et (A3-4).

Résultat de l'intégration:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{t'} \quad (\text{A3-6})$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{t'} \quad (\text{A3-7})$$

Calcul du champ  $\vec{E}(\vec{x}, t)$   
au point d'observation  $O_2$  à partir de  
l'expression (33)

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}_t \left[ \frac{1}{r(1-\vec{n}\vec{\beta})} \right]_t - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\vec{\beta}}{r(1-\vec{n}\vec{\beta})} \right]_t \quad (\text{A4-1})$$

Les crochets sont calculés au temps  $t'$ ,  
 le  $\overrightarrow{\text{grad}}$  et la dérivée partielle temporelle  
 doivent être calculés au temps  $t$ .

Posons  $S = r(1 - \vec{n}\vec{\beta})$  (A4-2)

D'après (29) on peut écrire

$$1 - \vec{n}\vec{\beta} = \frac{dt}{dt'} = \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{S}{r} \quad (\text{A4-3})$$

L'expression (A2-1) prend la forme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}_t \left( \frac{1}{S} \right)_t - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{\beta}}{S} \right)_t \quad (\text{A4-4})$$

Une fonction retardée s'exprime par

$$f(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t'(\vec{x}))$$

La dérivation spatiale:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_t = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_{t'} + \left( \frac{\partial}{\partial t'} \right)_x \left( \frac{dt'}{dx} \right)_t$$

ou encore:

$$\overrightarrow{\text{grad}}_t = \overrightarrow{\text{grad}}_{t'} + \left( \frac{\partial}{\partial t'} \right) \overrightarrow{\text{grad}}_{t'} t' \quad (\text{A4-5})$$

A partir de cette équation, nous allons expliciter le premier terme de (A4-4)

Appliquons (A4-5) à  $r$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_t r = \overrightarrow{\text{grad}}_t, r + \left( \frac{\partial r}{\partial t'} \right) \overrightarrow{\text{grad}}_t t' \quad (\text{A4-6})$$

D'après (28)

$$\frac{\partial r}{\partial t'} = - \vec{n} \vec{v} = - \vec{n} \vec{\beta} c$$

Par définition  $\overrightarrow{\text{grad}}_t, r = \vec{n}$  (fig 2)

D'après (26)  $r = c(t - t')$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_t r = - c \overrightarrow{\text{grad}}_t t'$$

Portons ces différentes expressions dans (A4-6) et factorisons  $\overrightarrow{\text{grad}}_t t'$

$$\vec{n} = - c (1 - \vec{n} \vec{\beta}) \overrightarrow{\text{grad}}_t t'$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_t t' = \frac{- \vec{r}}{c r (1 - \vec{n} \vec{\beta})} = \frac{- \vec{r}}{c S}$$

Appliquons (A4-5) à  $\frac{1}{S}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_t \left( \frac{1}{S} \right) = - \frac{1}{S^2} \overrightarrow{\text{grad}}_t (S) = - \frac{1}{S^2} \overrightarrow{\text{grad}}_t, (S) + \frac{\vec{r}}{c S^3} \frac{\partial S}{\partial t'} \quad (\text{A4-7})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_t, (S) = \overrightarrow{\text{grad}}_t, (r - \vec{r} \vec{\beta}) = \overrightarrow{\text{grad}}_t, r - \overrightarrow{\text{grad}}_t, (\vec{r} \vec{\beta})$$

$$\vec{r} \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{proj. } \vec{r} / \vec{\beta} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{\text{grad}}_t, (\vec{r} \vec{\beta}) = \vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_t, (S) = \vec{n} - \vec{\beta}$$

L'équation (A4-7) s'écrit:

$$\overrightarrow{\text{grad}}_t \left( \frac{1}{S} \right) = - \frac{1}{S^2} (\vec{n} - \vec{\beta}) + \frac{\vec{r}}{c S^3} \dot{S} \quad (\text{A4-8})$$

On note par un point les dérivées par rapport à  $t'$ .

Calcul du second terme de (A4-4).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{\beta}}{s} \right) &= s \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} - \vec{\beta} \frac{\partial s}{\partial t} \frac{1}{s^2} \\
 &= \left( s \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} - \vec{\beta} \frac{\partial s}{\partial t} \right) \frac{1}{s^2} \\
 &= \left( s \dot{\vec{\beta}} - \vec{\beta} \dot{s} \right) \frac{1}{s^2} \\
 &= \frac{r}{s^2} \dot{\vec{\beta}} - \frac{r \dot{s}}{s^3} \vec{\beta} \quad (\text{A4-9})
 \end{aligned}$$

Portons (A4-8) et (A4-9) dans (A4-4)

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r}}{cS^3} \dot{s} - \frac{1}{s^2} (\vec{n} - \vec{\beta}) \right] - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{r}{s^4} \dot{\vec{\beta}} - \frac{r\dot{s}}{s^3} \vec{\beta} \right]$$

Après développement et mise en facteur:

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{r}{s^3} \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \left( \frac{s}{r} - \frac{\dot{s}}{c} \right) - \frac{s}{c} \dot{\vec{\beta}} \right\} \quad (\text{A4-10})$$

Exprimons  $\dot{s}$ .

A l'aide de (A4-2) et de (28) nous parvenons à:

$$\begin{aligned}
 \dot{s} &= \dot{r} - (\dot{\vec{r}} \vec{\beta}) = -\vec{n} \vec{\beta} c - \dot{r} \vec{\beta} - \vec{r} \dot{\vec{\beta}} \\
 &= -\vec{n} \vec{\beta} c - (-\vec{\beta} c) \vec{\beta} - \vec{r} \dot{\vec{\beta}} \\
 \frac{\dot{s}}{c} &= -\vec{n} \vec{\beta} + \beta^2 - \frac{\vec{r}}{c} \dot{\vec{\beta}}
 \end{aligned}$$

Portons dans (A4-10)

$$\begin{aligned}
 \frac{4\pi\epsilon_0}{e} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{r}{s^3} \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \left( \frac{s}{r} + \vec{n} \vec{\beta} - \beta^2 + \frac{\vec{r}}{c} \dot{\vec{\beta}} \right) - \frac{s}{c} \dot{\vec{\beta}} \right\} \\
 &= \frac{r}{s^3} \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) (1 - \vec{n} \vec{\beta} + \vec{n} \vec{\beta} - \beta^2 + \frac{\vec{r}}{c} \dot{\vec{\beta}}) - \frac{s}{c} \dot{\vec{\beta}} \right\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{4 \pi \epsilon_0}{e} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{r}{s^3} \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2) + \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c} \left[ (\vec{n} - \vec{\beta})\vec{r} - r(1 - \vec{n}\vec{\beta}) \right] \right\} \\ &= \frac{r}{s^3} \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2) + \frac{r}{c} \left[ (\vec{n} - \vec{\beta})\vec{n}\dot{\vec{\beta}} - (1 - \vec{n}\vec{\beta})\dot{\vec{\beta}} \right] \right\} \end{aligned}$$

En vertu de la relation d'analyse vectorielle (A1-4), l'expression entre crochets peut s'écrire:

$$\vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}}]$$

d'où l'expression du champ électrique:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2) + \frac{r}{c} \left[ \vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}}] \right] \right\}}{4 \pi \epsilon_0 r^2 (1 - \vec{n}\vec{\beta})^3} \quad (\text{A4-11})$$

L'expression (A4-11) est composée de deux termes qui peuvent s'écrire (compte-tenu de (A1-3)):

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4 \pi \epsilon_0 r^2 \gamma^2} \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3} + \frac{e}{4 \pi \epsilon_0 r c} \frac{\vec{n} \wedge [(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}$$

(A4-12)

E X E R C I C E S

## EXERCICE 1

### Transformation de LORENTZ pour un champ magnétique

Soit un référentiel galiléen (R') animé d'une translation de vitesse  $v = \beta c$  dans le sens des  $x$  positifs par rapport à un référentiel (R).

On montre que les composantes cartésiennes des vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont reliées comme suit :

$$E_x = E'_x$$

$$B_x = B'_x$$

$$E_y = \frac{E'_y + \beta c B'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$B_y = \frac{B'_y - \beta/c E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E_z = \frac{E'_z - \beta c B'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$B_z = \frac{B'_z + \beta/c E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

a) Montrer que si  $\beta \ll 1$ , on peut écrire :

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v} \wedge \vec{B}'$$

$$\vec{B} = \vec{B}' + \frac{1}{c^2} (\vec{v} \wedge \vec{E}')$$

b) Montrer que si dans (R'), il existe uniquement des charges au repos, on observe dans (R) un champ magnétique dont on donnera l'expression.

c) Montrer que si dans (R'), il existe uniquement un champ magnétique, on observe dans (R) un champ électrique dont on donnera l'expression.

## EXERCICE 2

- 1) Démontrer l'équation (46)
- 2) Etude pour des électrons ultra-relativistes.  
On développera  $\beta \cos \vartheta$  jusqu'à l'ordre 2.  
Donner l'expression de  $\frac{dP_o}{d\Omega}$
- 3) Pour quelle valeur de  $\vartheta$ , cette puissance instantanée par unité d'angle solide passe-t-elle par un maximum ?
- 4) Le rayonnement est-il isotrope autour de la direction donnée par la vitesse ?
- 5) Donner une représentation graphique de  $\frac{dP_o}{d\Omega}$  en fonction de  $\vartheta$  exprimé en unités  $\frac{1}{\gamma}$   
Cas particulier :  $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $\gamma = 10^3$ .

### EXERCICE 3

Calculer la puissance totale rayonnée par un électron qui se déplace dans un champ magnétique, tel qu'il est décrit sur la figure 5.

$$P_{\bullet} = \iint_{4\pi} \frac{dP_{\bullet}}{d\Omega} d\Omega$$

On prendra l'expression (47) pour  $\frac{dP_{\bullet}}{d\Omega}$

et  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$

où  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$

-----

### EXERCICE 4

Calculer la puissance rayonnée par les électrons au bout du linac LIL (CERN).

L'énergie atteinte par les particules est de 500 MeV après un parcours de 100 m.

## EXERCICE 5

### Electrons dans un anneau de stockage.

1) Calculer les coefficients numériques de (62) et (67).

On exprimera  $P_o$  en fonction de  $\beta, \gamma$  et  $\rho$   
et  $P_N$  en fonction de  $\beta, \gamma, \rho$  et  $I$ .

2) On considère des électrons ultrarelativistes.

Toutes les machines affectées au rayonnement synchrotrone, fonctionnent dans une gamme d'énergie de l'ordre du GeV.

Si  $E$  est l'énergie à laquelle se trouvent les électrons, montrer que  $P_o$  et  $P_N$  peuvent s'écrire:

$$P_o = 6,77 \cdot 10^{-7} \frac{E^4}{\rho^2}$$

$$P_N = 8,86 \cdot 10^4 \frac{E^4 I}{\rho}$$

$P_o, P_N$  en (Watts) -  $E$  en (GeV) -  $\rho$  en (m)  
 $I$  en (A)

3) Compléter le tableau ci-dessous:

	$E$ (GeV)	$\rho$ (m)	$P_o$ ( $\mu W$ )	$W_o$ (eV)	$I$ (mA)	$P_N$ (W)
EPA/CERN	0,5	1,43			40	
DCI/Orsay	1,8	3,8			400	
ESRF/Grenoble	6	25			100	
LEP/CERN	50	3100			4	