R.F.Note 42

PS/Int. RF 59-42
26.6.1959

ETUDE ANALOGIQUE DU BRUIT DANS UN SYNCHROTRON A PROTONS

par

A.Chabert

Distribution: (ouverte)
Groupe R.F.
Comité des Paramètres

PS/699

Sommaire

TROISIEME PARTIE

ANNEXES

INTRODUCTION

L'objet de notre travail a été l'étude, au moyen d'une machine analogique électrique mise aimablement à notre disposition par le CERN, de la stabilité de phase d'un synchrotron à protons et en particulier du processus de perte des particules accélérées sous l'influence d'une fluctuation aléatoire de la phase de la tension accélératrice.

La première partie de cette thèse passe en revue les principes bien connus de l'accélération des particules dans un synchrotron et des problèmes qui s'y rattachent ainsi que ceux relatifs à l'utilisation des machines analogiques électroniques destinées à l'étude des types d'oscillations non linéaires que l'on rencontre en développant la théorie du synchrotron.

Les seconde et troisième parties contiennent plus spécialement ce qui a été notre travail personnel aux laboratoires du CERN au cours de l'année 1958-59.

PREMIERE PARTIE

A. Théorie élémentaire du Synchrotron à gradient alterné. réf. 1-2.

I. Rappel des principes du synchrotron à protons à gradient constant.

1) Considérations générales.

Un champ magnétique guide les particules sur des trajectoires circulaires. Le champ croit au fur et à mesure que l'énergie des particules augmente de façon à maintenir le rayon de l'orbite constant.

L'accélération est obtenue en un ou plusieurs points de l'orbite par un champ électrique longitudinal et sinusoidal dont la fréquence est synchronisée avec le mouvement des particules.

2) Oscillations bétatroniques.

Ce sont les oscillations qu'une particule effectue à énergie constante dans un plan normal à sa trajectoire.

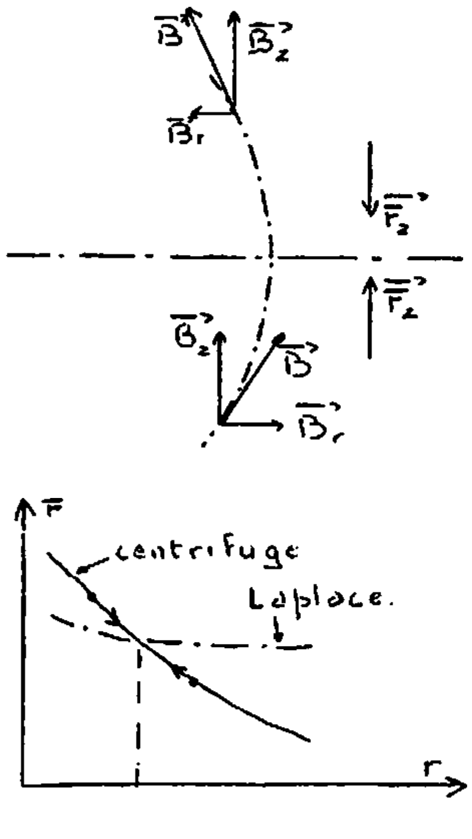


figure 1

Le champ magnétique décroissant vers l'extérieur, il existe des forces de rappel ramenant les particules dans le plan horizontal. Si nous définissons l'indice de champ par:

$$n = -\frac{r_0}{B_0}\frac{dB}{dr} \qquad (1)$$

la condition de focalisation verticale est évidemment

$$n > 0$$

Dans le plan horizontal on doit équilibrer la force centrifuge par la force de Laplace:

$$B_0 r_0 = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{e c} \qquad (2)$$

E : énergie totale de la particule

E_0: énergie au repos de la particule

La limite est atteinte lorsque (2) est une identité, c'est-à-dire si:

$$\frac{dBr}{dr} = 0 \qquad \text{donc pour} \qquad n = 1$$

La condition de stabilité des oscillations bétatroniques s'exprime donc par la double inégalité

$$0 < n < 1 \qquad (3)$$

En première approximation, les équations de ces oscillations sont:

$$I \left\{ \begin{array}{l} x'' + \omega^2(1-n)\,x = 0 \\ z'' + \omega^2 n\, z = 0 \end{array} \right.$$

et nous voyons l'équivalence avec un oscillateur harmonique de pulsations:

$$II \left\{ \begin{array}{l} \omega_r = \omega\sqrt{1-n} \\ \omega_z = \omega\sqrt{n} \end{array} \right.$$

Le nombre d'oscillations bétatroniques par tour est donc inférieur à un.

3) Oscillations synchrotroniques.

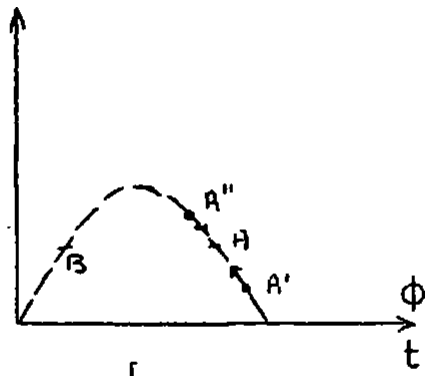


figure 2

Il existe un rayon r_0 où le champ est B_0, la particule ayant l'énergie E_0 vérifiant la relation (2) cheminera sans oscillations sur le cercle de rayon r_0 : nous définissons ainsi orbite, énergie et particules synchrones.

Cette particule se présentera toujours dans une fente accélératrice quelconque avec la même phase A.

Si nous considérons maintenant une particule se présentant dans la fente accélératrice avec la phase A'' par exemple, son énergie supérieure à l'énergie synchrone entraine une augmentation du rayon et aussi un accroissement de sa vitesse. Mais, c'est le premier effet qui l'emporte, la particule mettra plus de temps pour décrire son orbite et se présentera dans la fente accélératrice à un instant où la tension sera inférieure à celle correspondant à l'énergie synchrone. Elle recevra donc un accroissement d'énergie moindre que celui de la particule synchrone et nous aurons une focalisation en énergie.

Nous pouvons faire le même raisonnement pour le point A'. La branche descendante de la sinusoide est donc stable, les particules qui y ont leurs points figuratifs effectuent des oscillations en énergie, rayon et phase autour de la position synchrone, mais avec une fréquence très faible devant celle des oscillations bétatroniques.

II. Principe du synchrotron à gradient alterné.

1) Généralités.

On renonce à focaliser dans toutes les directions à l'intérieur d'un même secteur magnétique; pour avoir dans une direction donnée, une focalisation intense, on prend un indice de champ de valeur élevée: $|n| \gg 1$
On accole alors deux secteurs magnétiques d'indices opposés et l'effet de l'ensemble provoque une focalisation intense. L'orbite synchrone devient quasi-sinusoidale avec la période de la structure magnétique.

2) Energie de transition.

Dans les machines à gradient alterné, un phénomène très important apparait: le déplacement de l'orbite d'équilibre pour une différence de quantité de mouvement donnée est beaucoup plus faible que dans une machine à gradient constant. Pour caractériser cet effet, on emploie le terme de "compaction des quantités de mouvement".

A cause de la forte compaction des quantités de mouvement dans une machine à gradient alterné, l'accroissement du rayon de l'orbite d'équilibre d'une particule possédant une énergie supérieure à celle de la particule synchrone est si faible que l'effet de vitesse l'emporte dans la région non-relativiste du cycle d'accélération et la phase stable est placée sur la partie ascendante de la sinusoïde. Cependant, lorsque la particule atteint des vitesses très grandes et devient relativiste, l'effet de vitesse devient de plus en plus petit et finalement l'effet de rayon l'emporte à nouveau. Donc à un certain moment du cycle d'accélération, l'angle de phase stable change et se déplace du côté ascendant au côté descendant de l'onde accélératrice.

Quantitativement, si T est la période de révolution et p la quantité de mouvement d'une particule

si $\frac{dT}{dp} \leqslant 0$ la phase stable est sur la partie ascendante de l'onde RF.

si $\frac{dT}{dp} \geqslant 0$ la phase stable est sur la partie descendante de l'onde RF.

a) $\frac{dT}{dp} < 0$	stabilité	instabilité
b) $\frac{dT}{dp} > 0$	instabilité	stabilité

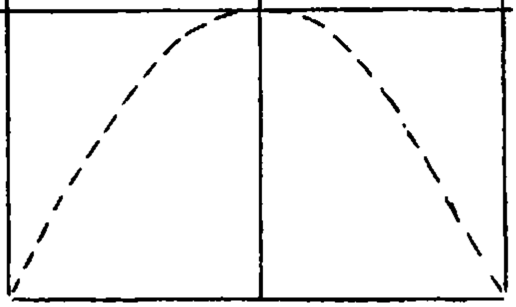


figure 3

Dans une machine à gradient constant, nous sommes constamment dans le cas b), l'énergie d'injection est supérieure à l'énergie de transition.

Dans une machine à gradient alterné, le cas a, est réalisé dans la première partie du cycle d'accélération, le cas b, dans la dernière partie.

III. Oscillations bétatroniques.

n étant grand devant l'unité, nous pouvons faire l'approximation $n \pm 1 \sim n$, alors les équations I deviennent identiques et nous aurons:

$$\mathrm{III} \begin{cases} z'' + n z = 0 \\ z'' - n z = 0 \end{cases}$$

suivant que le secteur considéré est focalisant ou défocalisant. La particule décrira une sinusoïde dans un secteur focalisant et une hyperbole dans un secteur défocalisant.

Si nous considérons une unité magnétique constituée par l'assemblage d'un secteur focalisant et d'un secteur défocalisant, la solution (effet de l'ensemble des deux secteurs) sera stable (convergence) si nous avons:

$$-1 < \cos \frac{2\pi\sqrt{n}}{N} \operatorname{ch} \frac{2\pi\sqrt{n}}{N} < 1 \qquad (4)$$

Nous poserons la quantité située entre les deux signes d'inégalité égale à $\cos \mu_z$. Physiquement, μ_z représente le déphasage subit par l'onde bétatronique durant la traversée d'une période magnétique.

Le nombre de cycles bétatroniques par tour de machine est donc

$$Q = \frac{\mu N}{2\pi} \qquad (5)$$

Une première approximation conduit à l'équation

$$x'' + Q^2 x = 0 \qquad (6)$$

En fait, nous devons faire apparaître un terme forcé dû au fait que la particule peut ne pas avoir la quantité de mouvement idéale. D'autre part, les défauts dans la construction de la machine (erreur dans le champ de guidage, déviation de n , etc....) donnent des termes perturbatoires se traduisant par des résonances et sous-résonances. Apparaissent aussi des forces de rappel non linéaires et le traitement analytique devient d'une complexité extrême nécessitant le recours aux intégrations numériques et à l'emploi d'analogue électro-mécanique (un tel analogue a été construit et utilisé au CERN par le Dr. Barbier, Réf. 3).

IV. Oscillations synchrotroniques.

1) Généralités.

L'étude de la stabilité longitudinale des particules fait apparaître des oscillations "synchrotroniques" affectant la phase et les oscillations radiales des particules, ce dernier effet étant dû à un couplage entre les oscillations synchrotroniques et les oscillations bétatroniques.

La période des oscillations synchrotroniques étant beaucoup plus longue que celle des oscillations bétatroniques, l'effet de couplage de ces dernières sur les premières sera en moyenne nul alors que les oscillations synchrotroniques affecteront les oscillations libres (par le fait qu'elles provoquent une variation adiabatique des paramètres).

Une façon d'écrire l'équation des oscillations de phase est:

$$\frac{d}{dt}\frac{P}{\omega\left[1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{Q^2}\right]}\Delta\dot{\Phi} = \frac{e\,U_m\cos\Phi_s}{2\pi r}\Delta\Phi \qquad (7)$$

avec

$U = U_m \sin\omega t$ tension d'accélération

Φ_s angle de phase stable

$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_s$

p impulsion de la particule

Les conditions de stabilité seront alors:

$$\begin{cases} 0 < \Phi_s < \frac{\pi}{2} & \text{si } 1-\frac{v^2}{c^2} > \frac{1}{Q^2} \\ \frac{\pi}{2} < \Phi_s < \pi & \text{si } 1-\frac{v^2}{c^2} < \frac{1}{Q^2} \end{cases}$$

La transition aura lieu pour

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{Q^2}$$

correspondant à l'énergie

$$E_{tr} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E_0\,Q \qquad (8)$$

2) Energie de transition.

Nous définirons un facteur de compaction des quantités de mouvement par la relation

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta p/p} = \frac{1}{Q^2} \qquad (9)$$

L étant la longueur de l'orbite et p la quantité de mouvement correspondante.

Comme nous l'avons dit, α est très petit dans une machine à focalisation forte (α = 0,027 pour le synchrotron à protons du CERN) alors que dans une machine à gradient constant α est toujours supérieur à l'unité.

Si L est la longueur de l'orbite décrite par une particule de vitesse v nous avons

$$T = \frac{L}{v} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta v}{v}$$

comme nous avons

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

et en se reportant à la définition de α, nous aurons:

$$\frac{\Delta T}{T} = \left[\alpha - \frac{E_0^2}{E^2}\right] \frac{\Delta p}{p}$$

D'où l'énergie de transition:

$$E_{tr} = \frac{E_0}{\sqrt{\alpha}} = E_0 Q \qquad (9)$$

B. Procédé d'accélération des particules dans un synchrotron, réf.4.

I. Généralités.

Les deux parties principales d'un synchrotron sont l'aimant et le système H.F.

1) Action de l'aimant.

Son but est de courber les trajectoires des particules en une orbite fermée et de focaliser le faisceau vers le centre de la chambre à vide grâce à son gradient radial. Au centre de la chambre le champ magnétique doit satisfaire la relation:

PS/699

$$Bev = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{soit} \qquad p = eBr$$

En réalité:

$$p = eBr_0 \left[1 + \frac{1}{\alpha} \frac{L - L_0}{L_0} \right] \qquad (1)$$

α : facteur de convergence

r_0 : rayon de l'orbite synchrone

L_0 : longueur de l'orbite synchrone

L : longueur de l'orbite réelle.

2) Action du système H.F.

Soit $\frac{V}{M} \cos 2\pi f t$ la tension appliquée entre les extrémités de chacune des M fentes d'accélération.

Chaque fois qu'une particule traverse une fente, elle reçoit une certaine accélération, nous avons en fait un processus discontinu mais étant donné les ordres de grandeur des divers paramètres nous pouvons l'assimiler à un processus continu susceptible d'être décrit par les relations:

$$\dot{p} = \frac{eV}{L} \cos \phi \qquad \text{avec} \quad \phi = \overline{2\pi f t} \qquad (2)$$

V est la somme des tensions dans toutes les fentes.

3) Mécanique relativiste.

Dans les relations que nous aurons à écrire, nous devrons tenir compte des effets de la relativité. Nous rappellerons les deux formules fondamentales liant:

- l'impulsion et la vitesse:

$$p = m_0 v \left| 1 - \frac{v^2}{c^2} \right|^{-\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

- l'énergie et la vitesse:

$$E = m_0 c^2 \left| 1 - \frac{v^2}{c^2} \right|^{-\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

II. Particule synchrone.

Les relations auxquelles doivent satisfaire les divers paramètres de la particule synchrone se déduisent facilement des relations fondamentales:

$$p_0 = e B r_0 \qquad (5)$$

$$\dot{p}_0 = \frac{eV}{L_0} \cos \Phi_0 \qquad (6)$$

$$p_0 = m_0 v_0 \left[1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

En éliminant $\dot{p}_0$ entre (5) et (6), nous obtenons une relation liant la variation du champ magnétique et la tension d'accélération:

$$\frac{\dot{B}}{V} = \frac{\cos \Phi_0}{L_0 r_0} \qquad (8)$$

En éliminant p_0 entre (5) et (7) et en remarquant que le temps de transit d'une particule entre deux fentes consécutives est tel que:

$$T_0 = \frac{L}{M v_0} = \frac{1}{f_0}$$

nous obtenons une seconde relation liant la fréquence du champ H.F. au champ magnétique:

$$f_0 = \frac{Mc}{L_0} \frac{B}{\left| B^2 + \left(\frac{mc}{e r_0}\right)^2 \right|^{1/2}} \qquad (9)$$

Si les relations (8) et (9) sont continuellement vérifiées au cours du cycle d'accélération, il existe des particules de phase stationnaire. C'est l'idéal que l'on cherche à atteindre.

III. Particule quelconque.

Considérons une particule de vitesse v décrivant une orbite de longueur L; le temps de transit entre deux fentes consécutives est:

$$T = \frac{L}{M v}$$

et pendant ce temps T, la variation de phase de la tension accélératrice a été:

$$\Delta\Phi = \int_t^{t+T} 2\pi f \, dt \qquad (10)$$

Nous poserons:

$$\delta\Phi = \Delta\Phi - 2\pi$$

$$\delta f = f - f_0 \qquad (11)$$

$$\delta L = L - L_0 \qquad (12)$$

$$\delta v = v - v_0 \qquad (13)$$

δf est une erreur de fréquence nulle dans une machine idéale. Comme la variation de f est très faible pendant la période T, nous pouvons intégrer (10) et déterminer la variation de phase par unité de temps:

$$\dot{\Phi} = \frac{\delta\Phi}{T} = 2\pi \left| f - \frac{1}{T} \right| \qquad (14)$$

Comme T et T_0 sont très peu différents, nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{T} = \frac{M v_0}{L_0} \left| 1 + \frac{\delta v}{v_0} - \frac{\delta L}{L_0} \right| \qquad (15)$$

et l'équation (14) devient:

$$\dot{\Phi} = 2\pi f_0 \left| \frac{\delta L}{L_0} - \frac{\delta v}{v_0} \right| + 2\pi\,\delta f \qquad (16)$$

Nous allons maintenant exprimer $\delta L/L_0$ et $\delta v/v_0$ en fonction de $\delta p/p_0$. Pour cela nous nous adressons à la relation (1) qui donne:

$$\frac{\delta L}{L_0} = \alpha \frac{\delta p}{p_0} \qquad (17)$$

puis à la relation (3) dont nous prenons la dérivée logarithmique:

$$\frac{\delta v}{v_0} = k^2 \frac{\delta p}{p_0} \qquad \text{avec} \quad k^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \qquad (18)$$

Reportons alors ces valeurs (17) et (18) dans (16), nous obtenons:

$$\delta p = \frac{p_0}{f_0(\alpha - k^2)} \left[\frac{\dot{\Phi}}{2\pi} - \delta f \right] \qquad (19)$$

En différentiant la relation $p = p_0 + \delta_p$ nous obtenons:

$$\dot{p} = \dot{p}_0 + \dot{\delta p} \qquad (20)$$

$\dot{p}$ est donné par la relation (2)

$\dot{p}_0$ est donné par la relation (5)

$\dot{\delta p}$ s'obtient en différentiant la relation (19)

Nous obtenons finalement:

$$(21) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{p_0}{2\pi f_0(\alpha - k^2)} (\dot{\phi} - 2\pi \delta f) \right] = \frac{eV}{L} \cos\phi - e\dot{B} r_0$$

Si nous tenons compte du fait que dans un synchrotron $\delta L / L_0 \ll 1$ (dans le P.S. $\delta L / L_0 < 7 \cdot 10^{-4}$) on peut dans le second membre remplacer L par L_0 et l'écrire

$$\frac{eV}{L_0} \left[\omega_1 \phi - \frac{\dot{B}}{V} r_0 L_0 \right]$$

D'autre part, nous nous efforcerons de satisfaire la relation (8), mais en fait nous aurons pour une machine réelle:

$$\frac{\dot{B}}{V} = \frac{\omega_1 \phi}{r_0 L_0} + \delta\left(\frac{\dot{B}}{V}\right)$$

La relation (21) s'écrit alors:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{p_0}{2\pi f_0(\alpha - k^2)} (\dot{\phi} - 2\pi \delta f) \right] = \frac{eV}{L_0} \left(\omega_1 \phi - \omega_1 \phi_0 - r_0 L_0 \, \delta \frac{\dot{B}}{V} \right) \qquad (22)$$

ou encore en fonction de l'énergie:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{E}{2\pi c f_\infty(\alpha - k^2)} (\dot{\phi} - 2\pi \delta f) \right] = \frac{eV}{L_0} \left(\omega_1 \phi - \omega_1 \phi_0 - r_0 L_0 \, \delta \frac{\dot{B}}{V} \right) \qquad (23)$$

f_∞ valeur de la fréquence lorsque $v = c$

Cette équation décrit les variations de phase d'une particule.

IV. Intégration de l'équation du mouvement d'une particule.

Dans une machine idéale $\delta t = 0$ et $\delta \frac{\dot{E}}{V} = 0$
L'équation (23) devient

$$\frac{d}{dt} \frac{E}{2\pi c f_\infty (\alpha - k^2)} \dot{\phi} = \frac{eV}{L_0} (\cos \phi - \cos \phi_0) \qquad (24)$$

pour plus de commodité, nous poserons:

$$A = \frac{E}{2\pi c f_\infty (\alpha - k^2)} \qquad (25)$$

l'équation (24) s'écrit alors:

$$A \ddot{\phi} + \dot{A} \dot{\phi} = \frac{eV}{L_0} (\cos \phi - \cos \phi_0) \qquad (26)$$

Nous obtenons une équation non-linéaire du second degré comportant un terme d'amortissement $\dot{A}$. Dans de nombreux cas la valeur de $\dot{A}$ est très faible devant celle des autres paramètres et peut être négligée. (25) s'intègre alors facilement en posant:

$$y = \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} \qquad (27)$$

ce qui donne

$$\frac{dy}{dt} = \frac{eV}{L_0} \frac{1}{A} (\cos \phi - \cos \phi_0)$$

ou encore

$$y\,dy = \frac{eV}{L_0} \frac{1}{A} (\cos \phi - \cos \phi_0)\, d\phi$$

d'où la solution:

$$\dot{\phi}^2 = y^2 = \frac{2eV}{AL_0} \left[\sin \phi - \cos \phi_0 \cdot \phi \right] + \text{cst} \qquad (28)$$

Ce résultat se prête soit à une intégration numérique, soit à une intégration graphique.

Il est en effet facile de tracer les courbes de l'équation (28) dans le plan des phases $\phi \cdot \dot{\phi}$: figure 4.

La courbe représentative de la fonction $\sin \phi - \cos \phi_s \cdot \phi$ est une sinusoïde dont les alternances sont décalées verticalement. Le mouvement d'une particule est alors parfaitement représenté par celui d'une bille roulant sans frottement sur une surface matérialisant cette courbe.

La bille abandonnée sans vitesse initiale en Δ_1 oscillera sur l'arc $\Delta_1 \; \Delta_0 \; \Delta'_1$; pour obtenir $\dot{\phi}$, il suffit de prendre les racines carrées des distances telles que $h_1 \, h_2$ entre la courbe de potentiel et la droite $p_2 \; p'_2$; on obtient alors les courbes intégrales de (28) dans le plan des phases.

Le point p_0 correspond à la position d'équilibre stable et est représentatif de la particule à phase stationnaire.

Pour les autres particules, nous aurons deux types de mouvement:

- soit un mouvement périodique stable autour de p_0 , la particule ne se perdra pas.
- soit un mouvement non périodique, la quantité de mouvement de la particule augmente ou diminue et la particule est perdue au bout de quelques révolutions.

La position $p_3 \; p'_3$ donne la séparatrice entre ces deux sortes de mouvements.

Il est intéressant de remarquer les deux quantités:

- $\Delta \phi_{max}$ donnant l'amplitude maximum des oscillations de phase stable.

- La différence des abscisses entre les points stables et instables qui est une mesure de la phase du point stable: $OS = 2 \, \phi_s$ en effet le point S correspond à la valeur ϕ_1 de ϕ annulant la dérivée première de

$$\sin \phi - \cos \phi_0 \cdot \phi$$

et donnant un maximum pour y^2

$$\phi_1 = \phi_s$$

Le point O correspond à la valeur Φ_1 de Φ annulant la dérivée première de cette même quantité mais donnant un minimum de y^2

$$\Phi_1 = - \Phi_0$$

Nous avons donc bien:

$$|\overline{OS}| = 2\, \Phi_0$$

C. Utilisation d'un analogue électronique.

Une résolution analytique de l'équation des oscillations synchrotroniques est ardue, voir même impossible si l'on tient compte des divers termes perturbatoirs.

Nous avons utilisé un analogue électronique capable de résoudre une équation telle que:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{E}{2\pi c f_\infty(\alpha - k^2)}(\dot{\Phi} - 2\pi\, \delta f)\right] = \frac{eV}{L_0}\left[\cos\Phi - \cos\Phi_0 - r_0 L_0\, \delta\frac{\dot{B}}{V}\right] \qquad (1)$$

Cet analogue était une machine classique qui avait été construite au CERN avant le début de notre travail.

Nous l'avons tout d'abord utilisée pour résoudre l'une ou l'autre des deux équations:

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases} A\dfrac{d}{dt}(\dot{\Phi} - 2\pi\, \delta f) = \dfrac{eV}{L_0}\left[\cos\Phi - \cos\Phi_0 - r_0 L_0\, \delta\dfrac{\dot{B}}{V}\right] & (2) \\ A\dfrac{d}{dt}(\Delta\dot{\Phi} - 2\pi\, \delta f) = -\dfrac{eV}{L_0}\left[\sin\Phi_0 \cdot \Delta\Phi + r_0 L_0\, \delta\dfrac{\dot{B}}{V}\right] & (3) \end{cases}$$

qui constituent, la première une approximation de l'équation (1) dans laquelle nous avons considéré:

$$A = \frac{E}{2\pi c f_\infty(\alpha - k^2)}$$

comme une constante, au moins pendant le temps que durera un enregistrement, c'est-à-dire quelques oscillations de phase (nous verrons que cette approximation est justifiée dans les parties du cycle d'accélération éloignées de la transition). La seconde équation (3) est obtenue en linéarisant la première (2) ce qui est valable pour les petites oscillations de phase au voisinnage de la position d'équilibre.

Une approximation en principe meilleure (nous verrons plus loin ce qu'il faut en penser) consiste à tenir compte du terme d'amortissement. Nous avons modifié l'analogue de façon qu'il résolve les équations:

$$\mathrm{II} \left\{ \begin{array}{ll} A\ddot{\phi} + \dot{A}\dot{\phi} = \frac{eV}{L_0}\left(\cos\phi - \cos\phi_0 - r_0 L_0 \delta \frac{\dot{B}}{V}\right) + 2\pi \dot{\overline{A\,\delta f}} & (4) \\ A\Delta\ddot{\phi} + \dot{A}\Delta\dot{\phi} + \frac{eV}{L_0}\left[\sin\phi_0 \cdot \Delta\phi + r_0 L_0 \delta \frac{\dot{B}}{V}\right] = 2\pi \dot{\overline{\delta f \cdot A}} & (5) \end{array} \right.$$

où nous considèrerons A et $\dot{A}$ comme constante dans les mêmes conditions que celles dégagées ci-dessus.

Enfin, nous avons essayé de résoudre rigoureusement des équations telles que (1), c'est-à-dire de la forme:

$$\mathrm{III} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt} H(t)\left[\dot{\phi} - 2\pi\,\delta f\right] = \frac{eV}{L_0}\left(\cos\phi - \cos\phi_0 - \delta \frac{\dot{B}}{V}\right) & (6) \\ \frac{d}{dt} H(t)\left[\Delta\dot{\phi} - 2\pi\,\delta f\right] + \frac{eV}{L_0}\left[\sin\phi_0\,\Delta\phi + \delta \frac{\dot{B}}{V}\right] = 0 & (7) \end{array} \right.$$

Les divers modes d'utilisation de l'analogue en font une machine très commode pour étudier les oscillations synchrotroniques.

I. Analogie ne donnant pas d'amortissement.

Cette analogie est destinée à la résolution de l'équation

$$A \frac{d}{dt}\left(\dot{\phi} - 2\pi\delta f\right) = \frac{eV}{L_0}\left[\cos\phi - \cos\phi_0 - r_0 L_0 \,\delta\, \frac{\dot{B}}{V}\right] \qquad (2)$$

1) Schéma de principe, équation résolue.

Les branchements de la machine analogique sont conformes dans ce cas au schéma de la figure V; on trouve essentiellement deux intégrateurs sommateurs réunis d'une part directement, d'autre part par l'intermédiaire d'un générateur de fonctions trigonométriques.

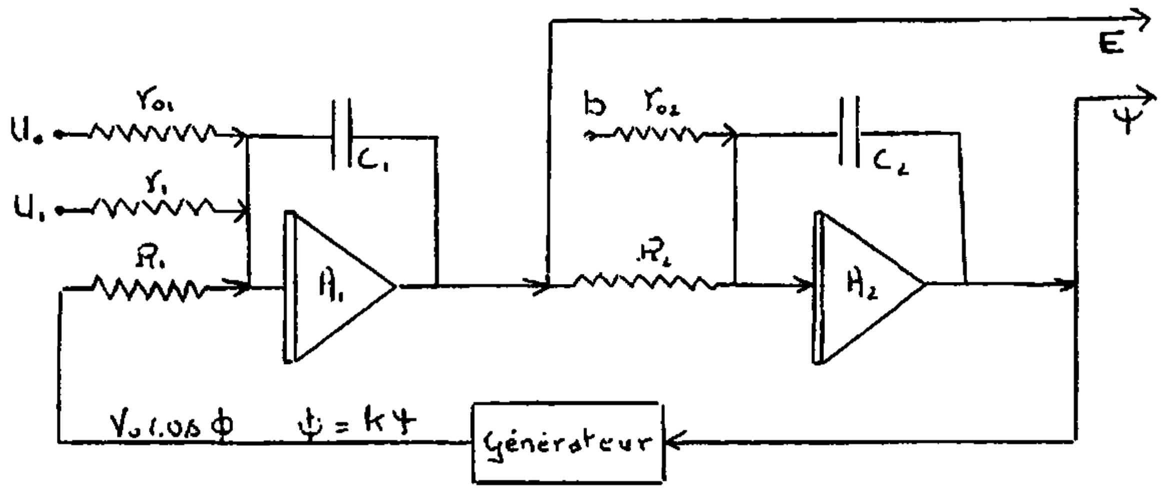


figure 5

Les relations élémentaires entre les tensions aux divers points de la machine sont:

$$E = -\int_{t_0}^{t}\left[\frac{V_0\cos\phi}{\tau} + \frac{u_0}{\tau_0} + \frac{u_1}{\tau_1}\right] dt$$

$$\phi = k\Psi$$

$$\Psi = -\int_{t_0}^{t}\left[\frac{E}{\theta} + \frac{b}{\theta_0}\right] dt$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 C_1 = \tau \\ r_0 C_1 = \tau_0 \\ r_1 C_1 = \tau_1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} R_2 C_2 = \theta \\ r_{02} C_2 = \theta_0 \end{array}\right.$$

De ces relations, nous déduisons l'équation résolue par l'analogue:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\theta}{k}\left(\dot{\phi} + \frac{k}{\theta_0} b\right)\right] = \frac{V_0 \cos\phi}{\tau} + \frac{u_0}{\tau_0} + \frac{u_1}{\tau_1} \qquad (8)$$

Cette équation a bien la même forme que l'équation (2).

2) Remarque.

Si nous réalisions une correspondance parfaite entre les termes des équations (2) et (8), nous obtiendrions dans l'analogue des oscillations dont la période, égale à celle des oscillations dans la machine réelle, serait très petite. Il nous serait alors difficile:

- d'obtenir des enregistrements graphiques de ces oscillations étant donné la vitesse de réponse limitée des servo-mécanismes qui commandent l'enregistreur;

- d'introduire manuellement les perturbations dont nous voulons étudier les effets;

- de prévoir une programmation de la machine analogique.

Ces diverses raisons conduisent à dilater l'échelle du temps propre à l'analogue; pour cela, nous poserons:

$$t_a = \mathcal{T}\, t_{ps}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} t_a : & \text{temps propre à l'analogue.} \\ t_{ps} : & \text{temps propre à la machine réelle.} \\ \mathcal{T} : & \text{coefficient d'extension du temps.} \end{array}\right.$$

Nous devons alors dériver l'équation (8) par rapport à t_a:

$$\frac{1}{\mathcal{T}}\frac{d}{dt}\left[\frac{\theta}{k\mathcal{T}}\left(\dot{\phi} + \frac{\mathcal{T} k}{\theta_0} b\right)\right] = \frac{V_0 \cos\phi}{\tau} + \frac{u_0}{\tau_0} + \frac{u_1}{\tau_1} \qquad (9)$$

3) Ajustage des coefficients.

Rappelons que l'approximation qui a conduit à l'équation (2) est qu'il soit justifié de considérer que A n'a pas varié pendant la durée de l'enregistrement; ceci revient à dire que la période des oscillations est elle-même restée fixe.

Pour assurer une bonne stabilité à l'analogue, nous lui imposerons ses constantes de temps, c'est-à-dire la période de ses petites oscillations, dans ces conditions $\mathcal{T}$ est une fonction du temps, donc de l'énergie, et nous avons:

$$\mathcal{T} = \frac{T_a}{T_{ps}} \qquad (10)$$

Pendant un enregistrement nous considérerons que $\mathcal{T}$ est constant. Nous aurons donc à établir les correspondances:

$$\text{IV} \left| \begin{array}{ll} \eta \cdot \frac{1}{\mathcal{T}^2} \cdot \frac{\vartheta}{k} = A & (11) \\ \frac{k\mathcal{T}}{\vartheta_0} b = -2\pi \delta f & (12) \\ \eta \frac{V_0}{\tau} = \frac{eV}{L_0} & (13) \\ \eta \frac{u_0}{\tau_0} = -\frac{eV}{L_0} \cos \phi_0 & (14) \\ \eta \frac{u_1}{\tau_1} = -eVr_0 \delta \frac{\dot{B}}{V} & (15) \end{array} \right.$$

II. Analogie donnant un amortissement dissipatif réel.

En mettant en parallèle sur la capacité du second intégrateur une résistance ρ (cf. schéma de la figure VI), nous introduisons dans l'équation résolue par l'analogue un terme d'amortissement. En effet l'équation résolue par ce nouveau montage est:

$$\frac{\vartheta}{k\mathcal{T}^2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\dot{\phi} + \frac{k\mathcal{T}}{\vartheta_0}\right) + \frac{\dot{\Phi}}{\eta L_2} \cdot \frac{\vartheta}{k\rho} = \frac{V_0 \cos \phi}{\tau} + \frac{u_0}{\tau_0} + \frac{u_1}{\tau_1} \qquad (16)$$

et pour ajuster l'équation (16) à l'équation (4), nous devons établir en plus des correspondances IV la correspondance:

$$\eta \frac{1}{f C_2} \cdot \frac{\partial}{k\rho} = \dot{A} \quad (17)$$

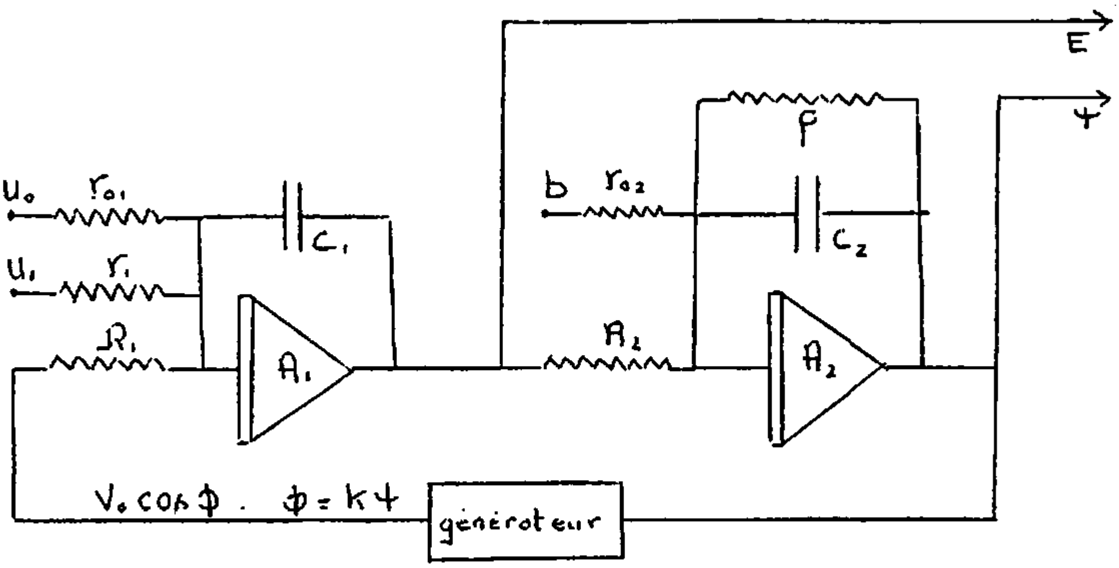


figure 6

Nous pouvons grouper dans un même tableau numérique les valeurs des paramètres des équations (2),(4),(9),(17) en fonction de l'énergie. Les deux grandeurs principales à déterminer sont : $\mathcal{T}$ et ρ .

E_{GeV}	A	$2m = \frac{\dot{A}}{A}$	$T_s = 2\pi \frac{\lvert A\rvert^{\frac{1}{2}}}{\lvert B\rvert}$	$f_s = \frac{1}{T_s}$	$Q = \frac{AB}{\bar{A}}$	$\tau_{exp} = \frac{T_s}{T_{ps}}$	$\tau_{thé} = \sqrt{\frac{\partial\gamma}{AK}}$	$\rho = \tau \frac{A}{AC}$	$\log_{10}\lvert\rho\rvert$	$\frac{\delta f}{f}$
1	$0{,}0006.10^{-3}$	77,8	$0{,}13.10^{-3}$	7608	$1{,}9.10^{-2}$	100420	103750	12906	10.1108	$74{,}3.10^{-5}$
2	0,0051	41,7	0,39	2559	3,57	33777	34897	8109	9.9090	9,8
3	0,0255	31,9	0,79	1265	4,67	16701	17255	5242	9.7195	4,5
4	0,0793	31,3	1,45	658	4,76	9097	9399	2907	9.4635	2,4
5	0,338	48,6	2,99	334	3,06	4405	4551	905	8.9570	1,15
5,1	0,414	54,2	3,31	302	2,74	3981	4113	734	8.8656	1,04
5,2	0,520	62,1	3,71	269	2,4	3553	3671	572	8.7574	0,93
5,3	0,68	74	4,24	236	2	3110	3212	420	8.6232	0,80
5,4	0,94	93,8	5	200	1,59	2641	2728	281	8.4435	0,69
5,5	1,45	133	6,22	161	1,12	2123	2194	160	8.2043	0,55
5,6	2,92	243	8,8	114	0,61	1500	1549	61,6	7.79	0,39
5,7	34	2600	30,1	33	0,06	439	454	1,68	6.2276	0,11
5,8	3,86	270	10,1	99	0,55	1304	1347	48,2	7.6833	0,34
5,9	1,91	123	7,13	140	1,21	1852	1914	151	8.1787	0,48
6	1,31	77	5,89	169	1,93	2240	2315	291	8.4633	0,58
7	0,43	10,8	3,38	296	13,8	3906	4035	3619	9.5586	1,01
8	0,33	5,41	2,98	335	43,5	4424	4571	12957	10.1125	1,14
9	0,31	0,98	2,87	349	152	4602	4755	46992	10.6720	1,18
10	0,30	0,08	2,85	351	1796	4638	4792	559790	11.7480	1,19
11	0,31	0,61	2,87	349	246	4604	4757	75992	10.8808	1,18
12	0,32	0,88	2,91	344	169	4536	4686	51671	10.7132	1,16
13	0,33	1,02	2,96	337	146	4451	4599	43640	10.6399	1,14
14	0,34	1,09	3,03	330	136	4359	4504	39989	10.6019	1,12
15	0,36	1,12	3,09	323	133	4266	4407	38109	10.5810	1,09
16	0,38	1,12	3,16	316	132	4172	4310	37109	10.5695	1,07
17	0,39	1,11	3,23	309	133	4081	4216	36631	10.5638	1,04
18	0,41	1,10	3,30	302	136	3993	4126	36454	10.5617	1,02
19	0,43	1,07	3,38	296	139	3909	4038	36479	10.5620	1,00
20	0,44	1,04	3,45	290	142	3828	3955	36648	10.5641	0,98
21	0,46	1,02	3,52	284	146	3751	3876	36904	10.5671	0,96
22	0,48	0,99	3,59	279	151	3678	3799	37229	10.5709	0,94
23	0,50	0,96	3,66	273	155	3608	3728	37621	10.5754	0,92
24	0,52	0,93	3,73	268	160	3542	3659	38022	10.5800	0,91
25	0,54	0,90	3,79	264	165	3478	3593	38468	10.5851	0,89

1) Paramètres du Synchrotron à Protons du CERN.

Les principaux paramètres du PS apparaissant dans les équations (2) et (4) sont:

$E_0 = 938{,}2$ Mev $c = 3.10^{10}$ cm/s

$\dot{E} = 25{,}4$ Bev/s $\alpha = 0{,}027$ $k = \frac{E_0}{E}$

$eV_0 = 108$ Kev $L_0 = 2\pi\, 10^4$ cm

$\sqrt{3}\, E_{tr} = 9{,}90$ Bev $f_\infty = 9542650$ cycles/s $\beta = \sqrt{1-k^2}$

$E_{tr} = 5{,}72$ Bev $\Phi_0 = \pm \frac{\pi}{3}$

$$A = \frac{E}{2\pi c f_\infty (\alpha - k^2)} \qquad \dot{A} = \frac{\dot{E}}{2\pi c f_\infty} \times \frac{\alpha - 3k^2}{(\alpha - k^2)^2}$$

Dans les équations linéarisées apparaît en plus la quantité:

$$B = \frac{eV}{L_0} \sin \Phi_0$$

Et nous définirons les quantités:

$m = \frac{\dot{A}}{2A}$ analogue à un coefficient d'amortissement

$Q = \frac{AB}{\dot{A}}$ analogue à un coefficient de surtension

$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{A}{B}}$ période des petites oscillations de phase

$f_s = \frac{1}{T_s}$ fréquence des petites oscillations de phase

2) Paramètres de l'analogue.

Nous avons les paramètres fixes suivants:

$$C_1 = C_2 = 10^{-7} \text{ farads}$$

$$K = 8 \text{ degrés/volt} = 1/7 \text{ radians/volt}$$

$\frac{V_0}{\tau} = 1{,}75$ volt/seconde $\tau_0 = \theta_0 = 0{,}93$ seconde
$\theta = 1{,}02$ seconde

$T_0 = 13{,}2$ secondes   [T_0 théorique $= 2\pi \sqrt{\frac{A}{B}} = 13{,}6$ secondes]

Nous aurons à déterminer les quantités:

$$\mathcal{T} = \frac{T_0}{T_{ps}} \qquad \text{theoriquement } \mathcal{T} = \sqrt{\frac{\theta}{AK}\eta} \quad \text{avec } \eta = \frac{eV}{L_0}\frac{\tau}{V_0}$$

$$\rho = \mathcal{T}\frac{A}{\dot{A}C}$$

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{K}{2\pi\partial_0 f_0}\cdot\frac{\mathcal{T}}{\beta} \qquad \text{par volt RMS}$$

D'où notre tableau et les courbes représentant les variations de ces grandeurs en fonction de l'énergie totale E donc du temps t puisque:

$$E = E_{inj} + \dot{E}t$$

Nous obtenons les courbes des figures 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16.

III. <u>Analogie donnant un amortissement adiabatique.</u>

Le montage est destiné à résoudre une équation de la forme:

$$\frac{d}{dt}A(t)\left[\dot{\phi} - 2\pi\delta f\right] = \frac{eV}{L_0}\left[\cos\phi - \cos\phi_0 - r_0 L_0 \delta\frac{\dot{B}}{V}\right] \quad (6)$$

1) <u>Première méthode.</u>

Pendant une grande partie du cycle d'accélération, il est légitime de supposer que A(t) est une fonction linéaire du temps.

Le schéma de la figure VII dans lequel on a mis un multiplicateur entre les deux intégrateurs donne les solutions d'une telle équation dans de petites bandes d'énergies (soit de petits intervalles de temps) où l'on peut prendre A de la forme:

$$A(t) = A(t_1) + \left[A(t_2) - A(t_1)\right]\frac{t}{t_2}$$

t_1 et t_2 correspondant aux extrémités de la bande d'énergie.

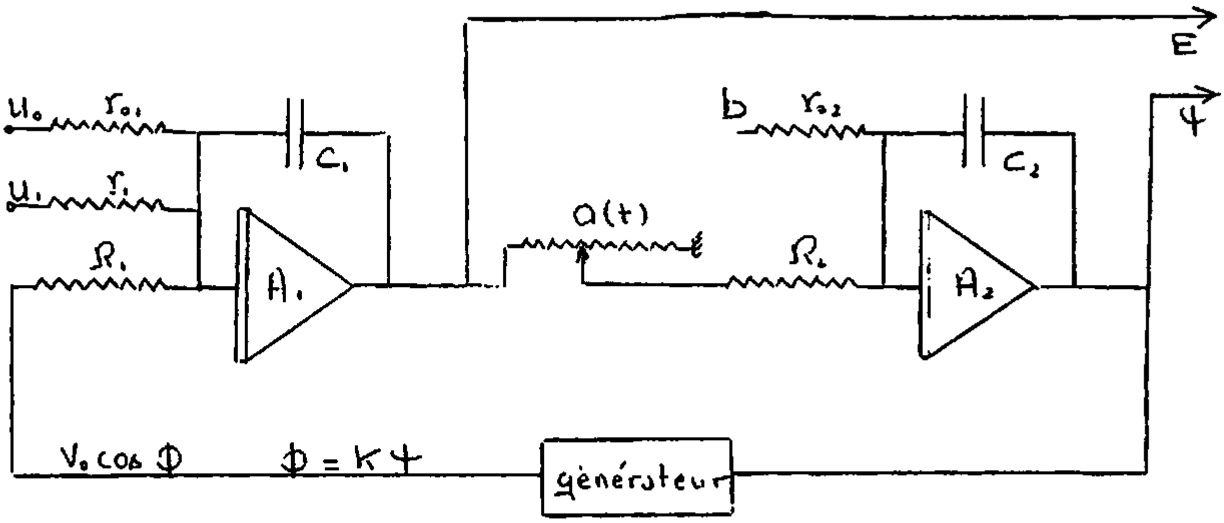


figure7

L'équation résolue est de la forme:

$$\frac{1}{\mathcal{T}}\frac{d}{dt}\frac{\theta}{a k \mathcal{T}}\left(\dot{\Phi} + \frac{k\mathcal{T}}{\theta_0} b\right) = \frac{V_0 \cos \Phi}{\tau} + \frac{u_0}{\tau_0} + \frac{u_1}{\tau_1} \qquad (18)$$

Nous considérons encore $\mathcal{T}$ constant pendant chaque enregistrement et nous avons alors les correspondances:

$$\mathrm{V} \quad \left|\begin{array}{l} \eta \, \dfrac{\theta}{a k \mathcal{T}^2} = A \\[2ex] \dfrac{k\mathcal{T}}{\theta_0} b = -2\pi \delta f \\[2ex] \eta \, \dfrac{V_0 \cos \Phi}{\tau} = \dfrac{eV}{L_0} \cos \Phi \\[2ex] \eta \, \dfrac{u_0}{\tau_0} = - \dfrac{eV}{L_0} \cos \Phi_0 \\[2ex] \eta \, \dfrac{u_1}{\tau_1} = - e V r_0 \, \delta \dfrac{\dot{B}}{V} \\[2ex] \dfrac{\dot{a}}{a} = \dfrac{\dot{A}}{A} \end{array}\right.$$

Nous verrons ultérieurement les valeurs numériques à donner aux paramètres et la manière d'employer ce montage.

2) Résolution rigoureuse de l'équation des oscillations de phase.

Le principe de l'analogue est donné par le schéma de la figure VIII; deux amplificateurs à gain variable ajustent à chaque instant le coefficient de $\dot{\phi}$ et nous prenons cette fois un facteur de dilatation du temps $\mathcal{T}$ fixe.

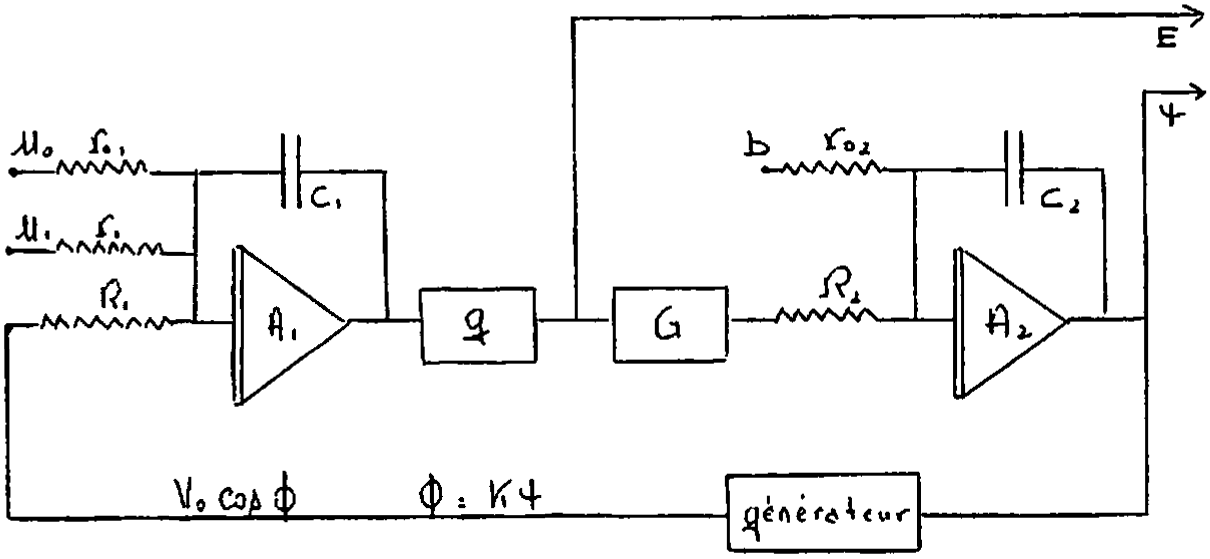


figure 8

L'équation résolue est:

$$\frac{1}{\mathcal{T}}\frac{d}{dt}\left[\frac{\theta}{\mathcal{T}k}\cdot\frac{1}{gG}\left(\dot{\phi}+\frac{k\mathcal{T}b}{\theta_0}\right)\right] = \frac{V_0\cos\phi}{\tau}+\frac{\mu_0}{\tau_0}+\frac{\mu_1}{\tau_1} \qquad (19)$$

elle sera rigoureusement analogue à l'équation des oscillations de phase si nous établissons à chaque instant du cycle d'accélération les correspondances suivantes:

$$\left|\begin{array}{l} \eta\,\dfrac{\theta}{\mathcal{T}^2 k}\,\dfrac{1}{gG} = A \\[2mm] \eta\,\dfrac{V_0}{\tau} = \dfrac{eV}{L_0} \\[2mm] \eta\,\dfrac{\mu_0}{\tau_0} = +\dfrac{eV}{L_0}\cos\phi_0 \\[2mm] \eta\,\dfrac{\mu_1}{\tau_1} = -\,eV r_0\,\delta\,\dfrac{\dot{B}}{V} \\[2mm] k\,\dfrac{\mathcal{T}}{\theta_0}\,b = -2\pi\,\delta f \end{array}\right.$$

IV. Réalisation.

La machine qui a été mise à notre disposition pour réaliser les études faisant l'objet des chapitres suivants avait été imaginée par le Docteur Schmelzer (réf. 5) et réalisée sous la direction du Docteur Gabillard par Messieurs Leroux, ingénieur, et Serras (réf. 6 et 7) à partir d'une première machine due à Messieurs Sharp, Sagnell et Vaughan. Son schéma de principe était conforme à la figure VIII.

Notre étude nous a amené à lui apporter successivement les modifications suivantes:

- supprimer les amplificateurs à gain variable g et G de façon à obtenir un analogue conforme au schéma de la figure V;

- introduire la résistance d'amortissement ρ sur la plaquette de l'intégrateur "$\Delta\phi$" , conformément au schéma de la figure VI;

- introduire un multiplicateur et le munir d'un système d'asservissement conformément au schéma de la figure VII;

- modifier les constantes de temps de l'intégrateur "$\Delta\phi$" en vue d'étudier la stabilité des résultats en fonction de la période des petites oscillations délivrées par l'analogue.

L'annexe I donne le principe d'un intégrateur sommateur et celui d'un multiplicateur à potentiomètres asservis (réf. 9).

L'annexe II donne le principe, le calcul et les diverses considérations ayant présidé à l'élaboration de l'analogue électronique du CERN (réf. 8, 6 et 7).

D. Etude des oscillations de phase en absence de perturbations, réf. 10.11.

Nous avons vu qu'en absence de perturbations, c'est-à-dire dans une machine idéale, les oscillations synchrotroniques sont décrites par l'équation:

$$\frac{d}{dt} A\dot{\phi} = \frac{eV}{L_o}(\cos\phi - \cos\phi_o)$$

I. Etude des zones de stabilité.

Nous voulons déterminer, à un instant donné du cycle d'accélération, les zones de l'espace des phases à l'intérieur desquelles les oscillations de phase sont stables (cf. Liapounov, stabilité d'un mouvement périodique, réf. 12).

Expérimentalement, nous nous plaçons à une énergie donnée E , nous faisons donc des enregistrements à A constant.

Si nous employons le montage de la figure V, l'énergie E détermine la valeur du coefficient $\mathcal{T}$ et par suite l'échelle de l'axe ΔE de l'espace des phases. L'échelle de l'axe ϕ est fixe et nous en déduisons immédiatement que l'extension le long de l'axe des ϕ de la zone de stabilité (soit $\Delta\phi_m$) est constante pour un ϕ_0 donné quelle que soit l'énergie E .

Nous pouvons aussi utiliser le montage de la figure VIII, l'énergie détermine alors les gains des amplificateurs g et G et nous pouvons voir que pour un ϕ_0 déterminé, les enregistrements obtenus conduisent à une même valeur de $\Delta\phi_m$ quelle que soit E .

Or ce qui nous intéresse ici est justement $\Delta\phi_m$; toutes les particules dont la phase est intérieure à cette bande et dont la quantité de mouvement est assez proche de la quantité de mouvement idéale sont stables.

Nous étudions donc l'étendue en phase de la zone où les oscillations de phase sont stables en fonction de l'angle de phase stationnaire choisi: ϕ_0.

Nous obtenons des enregistrements tels que ceux des figures 17 et 18 qui permettent de tracer la courbe

$$\Delta\phi_m = f(\phi_0) \qquad \text{figure 19.}$$

Le synchrotron à protons du CERN fonctionnera avec $\phi_0 = \pm \frac{\pi}{3}$ suivant que nous sommes avant ou après la transition, l'extension de la zone stable est alors de l'ordre de π $(\Delta\phi_m > \pi)$.

II. Déformations de la zone de stabilité au cours du cycle d'accélération.

Nous voulons maintenant voir comment varie la zone stable pendant le cycle d'accélération; nous ferons une étude en régime dynamique.

1) Amortissement dans le synchrotron.

Nous devons employer l'analogie correspondant au schéma de la figure VIII simulant exactement les oscillations de phase en régime dynamique. Partant d'une énergie E_i inférieure à l'énergie de transition E_{tr}, nous avons enregistré la déformation subie par la zone stable entre E_i et E_{tr} et obtenu des enregistrements tels que celui de la figure 20 qui montre un amortissement des oscillations de phase le long de l'axe (phase damping: cf. courbe calculée par K. Johnsen, fig. 21, réf. 2) tandis qu'au contraire il y a dilatation de la zone stable le long de l'axe E.

Nous nommerons un tel genre d'amortissement: "amortissement adiabatique"; ce n'est pas un amortissement dissipatif, d'ailleurs l'équation des oscillations de phase peut être déduite d'une équation hamiltonienne et nous savons que dans ce cas le théorème de Liouville s'applique, c'est-à-dire qu'un élément d'aire de l'espace des phases se conserve.

D'autres enregistrements ont été faits montrant le passage par la transition:

- de E_i à E_{tr} : amortissement faible au début devenant de plus en plus intense à mesure que l'on approche de E_{tr} pour devenir infini à E_{tr}.

- de E_{tr} à $\sqrt{3}\,E_{tr}$: nous avons au contraire un auto-amortissement et la particule décrit dans l'espace des phases un parcours analogue mais en sens inverse de celui qu'elle a précédemment décrit.

- de $\sqrt{3}\,E_{tr}$ à $E_{\text{éjection}}$: de nouveau amortissement adiabatique, mais assez faible.

Cependant loin de la transition et si on considère des intervalles de temps assez faibles, l'amortissement adiabatique peut être négligé, et nous pouvons considérer que A est constant pendant un intervalle de temps de l'ordre de celui nécessaire pour effectuer deux ou trois oscillations de phase. Près de la transition, cette approximation n'est plus valable.

2) Amortissement par résistance.

Un tel type d'amortissement peut être obtenu au moyen du schéma analogique de la figure 6; on obtient alors des enregistrements tels que celui de la figure 22 topologiquement très différent de ceux montrant un véritable amortissement adiabatique (cf. figure 20). Nous avons ici un amortissement dissipatif caractéristique d'un système non hamiltonien.

Nous avons utilisé ce schéma analogique pour poursuivre l'analogie apparente du cas étudié avec celui des oscillations d'un courant oscillant (cf. plus loin).

Nous avons vérifié que tant que cet amortissement n'est pas trop important, la période des petites oscillations ne varie pas sensiblement.

3) Dispositif expérimental permettant d'obtenir un amortissement adiabatique.

Le montage de la figure 8 ne se prêtait pas aisément à une étude statistique du bruit (cf. plus loin: nous ne pouvions pas faire revenir de façon automatique les amplificateurs g et G à des conditions initiales déterminées).

Il a été nécessaire de prévoir un système simulant dans de petites bandes d'énergies un amortissement adiabatique; ceci a été obtenu à l'aide d'un multiplicateur muni d'un système d'asservissement. Les branchements de l'analogue sont alors conformes à ceux du schéma de la figure 7.

L'approximation introduite par l'emploi du multiplicateur consiste en ce que nous considérions que A varie linéairement dans la bande d'énergie correspondant au temps Δt d'un enregistrement. Ceci est valable pratiquement pendant tout le cycle d'accélération si Δt est assez faible.

L'emploi du multiplicateur fournit des enregistrements tels que celui de la figure 23 et constitue une excellente approximation.

SECONDE PARTIE

Cette seconde partie constitue l'étude analogique expérimentale du bruit.

Le "bruit" est constitué par l'ensemble des perturbations de caractère aléatoire qui affectent la fréquence de la tension d'accélération et peut être envisagé comme une fluctuation de cette fréquence telle qu'à chaque instant, on ait :

$$f = f_0 + \delta f$$

f_0 : fréquence d'accélération idéale correspondant au temps de transit T_0 et à l'énergie E_0.

δf : variable aléatoire caractéristique du bruit et telle que

$$\overline{\delta f} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\delta f^2} = \sigma^2$$

Nous supposerons dans toute cette partie que le bruit est la seule perturbation existante et susceptible de modifier la phase; ceci revient à supposer que :

$$\delta\left(\frac{\dot{B}}{V}\right) = 0$$

Nous nous placerons dans les conditions de fonctionnement du synchrotron à protons du CERN, donc :

$$\phi_0 = -\frac{\pi}{3} \quad \text{avant la transition}$$

$$\phi_0 = +\frac{\pi}{3} \quad \text{après la transition.}$$

Dans ces conditions, l'équation des oscillations de phase est :

$$\frac{d}{dt} A(\dot{\phi} - 2\pi\,\delta f) = \frac{eV}{L_0}(\cos\phi - \cos\phi_0) \qquad (1)$$

A. Equation des petits-mouvements.

Soit une particule initialement représentée dans l'espace des phases par le point de coordonnées

$$\phi_i \text{ et } \dot{\phi}_i$$

Au bout d'un temps Δt et en l'absence de toute perturbation, ce point représentatif aurait pour coordonnées

$$\phi(\Delta t) \quad \text{et} \quad \dot{\phi}(\Delta t)$$

En fait, il a - sous l'effet du bruit - subi un petit déplacement et se trouve au point de coordonnées

$$\phi(\Delta t) + \Delta\phi(\Delta t) \text{ et } \dot{\phi}(\Delta t) + \Delta\dot{\phi}(\Delta t)$$

Trouver l'équation des petits mouvements, c'est déterminer la relation liant $\Delta\phi(\Delta t)$ au bruit δf .

I. Détermination directe de l'équation des petits mouvements

La phase de la particule synchrone ϕ_o peut être définie comme étant la phase de la tension d'accélération lorsque cette particule pénètre dans une fente d'accélération. Elle est fixe et se confond avec l'angle de phase stable φ_s

Une particule réelle se présente en général dans une fente d'accélération lorsque la tension d'accélération est $\varphi \neq \varphi_o$. Nous définissons encore la phase ϕ de cette particule comme étant la phase que la tension d'accélération possède au moment où cette particule se présente à l'entrée d'une fente accélératrice (Cette définition un peu simpliste suffit à notre démonstration).

Nous pouvons poser :

$$\phi = \phi_o + \Delta\phi$$

$\Delta\Phi$ dépend de deux facteurs :

- La variation entre temps de transit de la particule idéale, soit T_0, et celui de la particule réelle, soit T. La contribution de ce facteur à $\Delta\Phi$ est :

$$\int_t^{t+T} 2\pi f_0\, dt = \int_t^{t+T_0} 2\pi f_0\, dt + \int_{t+T_0}^{t+T} 2\pi f_0\, dt$$

La première intégrale représente évidemment la variation de la phase de la particule stationnaire entre deux fentes d'accélérations consécutives; elle est nulle à 2π près.

La seconde intégrale représente la variation de la phase de la particule réelle. Comme le temps $\Delta T = T - T_0$ est très petit, la fréquence f_0 n'a pratiquement pas changé et nous pouvons faire l'approximation :

$$\int_{t+T_0}^{t+T} 2\pi f_0\, dt = 2\pi f_0\, \Delta T$$

- Le second facteur est le bruit. Sa contribution à $\Delta\Phi$ est :

$$\int_t^{t+T} 2\pi\, \delta f\, dt = \delta\Phi$$

Nous aurons alors :

$$\Delta\Phi = 2\pi f_0\, \Delta T + \delta\Phi$$

La variation du temps de transit résulte d'une variation de l'énergie de la particule lors de la traversée d'une fente accélératrice d'où :

$$\frac{\Delta T}{T_0} = (\alpha - k^2)\,\frac{\Delta p}{p_0}$$

Nous avons alors successivement :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi f_o T_o}{p_o}(\alpha - k^2)\,\Delta p + \delta\phi$$

$$\Delta\dot{\phi} \cong \frac{\Delta\phi}{T} \sim \frac{\Delta\phi}{T_o} = \frac{2\pi f_o}{p_o}(\alpha - k^2)\,\Delta p + \frac{\delta\phi}{T_o}$$

d'où :

$$\Delta\dot{p} = \frac{d}{dt}\left[\frac{p_o}{2\pi f_o(\alpha - k^2)}\left(\Delta\dot{\phi} - \frac{\delta\phi}{T}\right)\right]$$

Or, l'énergie reçue par une particule lors de la traversée d'une fente accélératrice est $eV\cos\phi$; nous en déduisons l'accroissement d'énergie par unité de temps :

$$\Delta\dot{p} = \frac{eV}{L_o}(\cos\phi - \cos\phi_o)$$

Comme $\Delta\phi$ est faible, nous pouvons assimiler $\cos\Delta\phi$ à l'unité et $\sin\Delta\phi$ à $\Delta\phi$ d'où :

$$\cos\phi - \cos\phi_o \cong -\sin\phi_o\cdot\Delta\phi \qquad \text{et}$$

$$\Delta\dot{p} = -\frac{eV}{L_o}\sin\phi_o\cdot\Delta\phi$$

Identifions les deux expressions trouvées pour $\Delta\dot{p}$:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{p_o}{2\pi f_o(\alpha - k^2)}\left(\Delta\dot{\phi} - \frac{\delta\phi}{T}\right)\right] + \frac{eV}{L_o}\sin\phi_o\cdot\Delta\phi = 0 \qquad (2)$$

II. Remarque

Nous pouvons déterminer beaucoup plus rapidement l'équation des petits mouvements en linéarisant l'équation des oscillations de phase (1) . Pour cela nous posons :

$$\Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi$$

et comme $\Delta\Phi$ est faible, nous assimilons

$$\cos\Phi - \cos\Phi_0 \quad \text{à} \quad -\sin\Phi_0\,\Delta\Phi$$

Nous obtenons alors immédiatement l'équation :

$$\frac{d}{dt} A(\dot{\Delta\Phi} - 2\pi\delta f) + \frac{eV}{L_0}\sin\Phi_0 . \Delta\Phi = 0 \qquad (3)$$

Comparons les équations (2) et (3) :

$$\frac{\delta\Phi}{T} = \frac{2\pi}{T}\int_t^{t+T}\delta f\,dt = 2\pi\left(\overline{\delta f^2}\right)^{1/2} = 2\pi\,\delta f$$

Il nous faut donc admettre que dans l'équation (3), δf est égal à $\overline{|\delta f|}$.

III. Résolution de l'équation des petits mouvements

L'équation des petits mouvements est :

$$\frac{d}{dt} A(\dot{\Delta\Phi} - 2\pi\delta f) + B\,\Delta\Phi = 0 \qquad (3)$$

Remarquons alors que dans la région linéaire de la zone stable $\Delta\Phi$ est en principe indépendant des conditions initiales Φ_i, $\dot{\Phi}_i$. En effet, $\Delta\Phi$ est déterminé dans un système de coordonnées liées à la particule idéale (figure 24). Nous supposerons que cette indépendance de conditions initiales et de $\Delta\Phi$ reste vraie dans tout le domaine de stabilité des oscillations de phase (cf plus loin : vérification expérimentale).

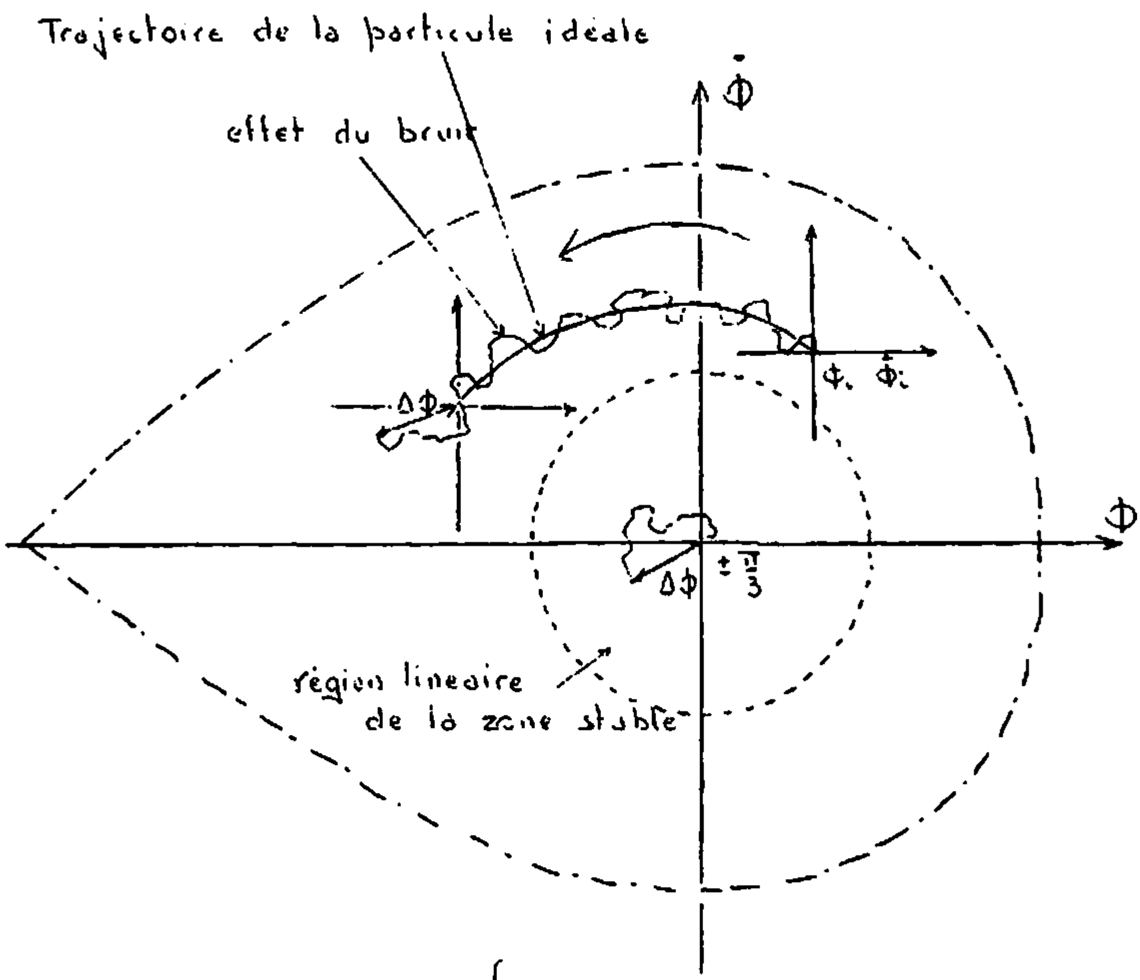


figure 24

Nous pouvons donc faire notre étude expérimentale du bruit en choisissant les conditions initiales les plus favorables, le choix de $\Phi_i = \pm \frac{\pi}{3}$ et de $\dot{\Phi}_i = 0$ s'impose de lui-même.

D'autre part, pour mesurer des distances dans l'espace des phases, il faut y définir une métrique. Pour cela, il nous a semblé suffisant de régler les échelles des axes Φ et $\dot{\Phi}$ de l'enregistreur de façon que la zone stable se rapproche le plus possible d'un cercle et de dire qu'alors la distance entre deux points peut effectivement être une mesure de l'effet du bruit (ceci sera rigoureux si on peut effectivement ramener la zone stable à être un cercle).

B. Réalisations expérimentales

I. Remarque préliminaire

Des particules stables vis à vis des oscillations de phase peuvent, sous l'effet du bruit, devenir instables et se perdre. Notre étude du bruit a pour but une détermination qualitative et, si possible, quantitative, de ce processus de perte.

Il est possible d'enregistrer la trajectoire du point figuratif d'une particule en présence de bruit pendant une partie importante du cycle d'accélération et ceci en partant de conditions initiales quelconques (figure 25).

Nous pourrions faire notre étude au moyen de tels enregistrements. Mais le bruit étant un phénomène aléatoire, nous devons en faire une étude statistique. Pour chaque couple de valeurs données aux conditions initiales, il faudrait faire un grand nombre d'enregistrements pour déterminer une valeur moyenne du nombre de particules perdues et ceci pour différentes valeurs du bruit. Une telle méthode conduit à un nombre prohibitif d'enregistrements et, de plus, ne fournira pas une bonne description des phénomènes.

Nous avons, par contre, la possibilité de faire une étude statistique qui fournira une valeur moyenne de $\Delta\Phi$ en fonction du bruit et du temps. Pour cela, en se rappelant que $\Delta\Phi$ est indépendant des conditions initiales, nous nous placerons toujours aux conditions initiales $\Phi_i = \pm \frac{\pi}{3}$, $\dot{\Phi}_i = 0$ et nous pointerons la position des particules au bout d'un temps Δt pour une intensité donnée du bruit δf . Pour chaque couple de valeurs Δt et δf il nous faudra pointer un grand nombre de particules pour avoir une valeur moyenne de $\Delta\Phi$. Nous pourrons alors déterminer une loi reliant $\Delta\Phi$ et Δt et à δf et poursuivre l'étude de façon théorique.

Cette méthode demande, elle aussi, un grand nombre d'enregistrements, mais nous aurons l'avantage de pouvoir rendre la marche de l'analogue automatique.

II. Programmation de l'analogue

Un générateur BF du type Hewlett-Packard délivre une tension en dents de scie dont on peut faire varier la fréquence. A la cime de chaque dent de scie, on a une impulsion (nous avons d'ailleurs modifié le générateur de façon à ce qu'il délivre aussi une impulsion au fond de chaque dent de scie en vue de l'utiliser avec le multiplicateur de la figure 7 : cf plus loin). Les impulsions permettent de déclencher avec une fréquence voulue un système de relais qui assure une programmation automatique de l'analogue. Les opérations sont les suivantes :

- nous nous fixons les conditions initiales (en principe $\Phi_i = \pm \frac{\pi}{3}$, $\dot{\Phi}_i = 0$) qui sont introduites automatiquement dans l'analogue au moyen d'un clavier étalonné. Nous nous fixons la valeur de la tension b délivrée par le générateur de bruit. Nous nous fixons enfin l'intervalle de temps Δt que durera chaque enregistrement.

- l'analogue mis en marche réalisera alors automatiquement fois le cycle suivant : départ des conditions initiales choisies, intégration pendant le temps Δt (l'enregistrement suit la courbe intégrale mais ne trace pas). Au bout du temps Δt , l'enregistreur pointe le position de la particule et l'analogue revient aux conditions initiales.

Nous obtenons des enregistrements, tels que celui de la figure 26, qui représentent les positions de N particules partant des mêmes conditions initiales et qui ont été accélérées pendant un temps Δt sous l'influence d'un bruit δf .

De tels enregistrements permettent d'atteindre la quantité $\Delta \Phi$ qui est la valeur la plus probable de l'excursion d'une particule. Nous pouvons ainsi étudier $\Delta\Phi$ en fonction de Δt , de δf et de la bande d'énergie choisie.

III. Plan de l'étude du bruit

L'équation décrivant les petites oscillations de phase est :

$$\frac{d}{dt} A(\Delta\dot{\Phi} - 2\pi\,\delta f) + B\,\Delta\Phi = 0$$

1) Première série d'expériences

Nous faisons l'approximation A = est pendant de courts intervalles de temps Δt, ceci revient à négliger l'amortissement dans le synchrotron.

Nous nous plaçons donc dans une bande d'énergie déterminée $[E_i - E(\Delta t)]$ et nous faisons des enregistrements durant Δt, temps pendant lequel nous supposons que les paramètres du synchrotron n'ont pas varié de façon appréciable.

Ces expériences sont donc faites avec un analogue branché conformément au schéma de la figure 5; tous ces éléments sont fixes et la bande d'énergie à laquelle on opère est déterminée par une valeur du coefficient d'extension du temps $\mathcal{T}$.

2) Seconde série d'expériences

Nous avons introduit un terme d'amortissement et nous résolvons une équation de la forme :

$$A\,\Delta\ddot{\Phi} + \dot{A}\,\Delta\dot{\Phi} + B\,\Delta\Phi = \sim$$

Ces expériences ne sont, en fait, pas destinées à l'étude des oscillations de phase; en effet, l'amortissement d'un synchrotron (amortissement adiabatique) est essentiellement différent de l'amortissement dissipatif introduit ici. Le but de ces expériences est, en fait, l'étude d'un circuit oscillant amorti.

Elles seront réalisées à l'aide d'un analogue branché, conformément au schéma de la figure 6. Tous ces éléments sont fixes et l'énergie à laquelle on opère est déterminée par la valeur de la résistance d'amortissement.

3) Troisième série d'expériences

L'étude des oscillations de phase se poursuivra en tenant compte de l'amortissement adiabatique.

L'introduction d'un multiplicateur (schéma de la figure 7) permet de résoudre l'équation :

$$\frac{d}{dt} A(\Delta\dot{\Phi} - 2\pi\delta f) + B\Delta\Phi = 0$$

où le coefficient A varie linéairement, ce qui constitue une excellente approximation.

Nous avons fait successivement les trois séries d'expériences mais la forme des équations décrivant les oscillations de phase nous suggère une analogie entre ces oscillations de phase et un phénomène beaucoup plus connu, celui de la variation de tension aux bornes d'un circuit oscillant.

C. Analogie avec un circuit oscillant (Réf. 13, 14)

I. Equations du circuit oscillant

Soit les schémas de montage suivants :

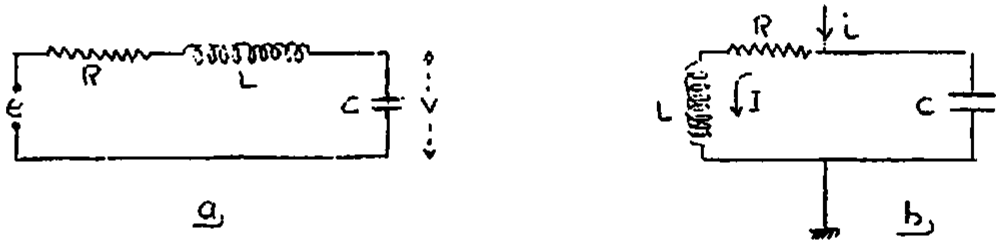


figure 27.

Les équations de ces circuits sont :

1) pour le circuit a :

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2m\frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 e$$

2) pour le circuit b :

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2m\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 i$$

avec

$$2m = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Ces deux équations ont exactement la même forme. Nous raisonnerons sur la première donnant la tension aux bornes de la capacité d'un circuit oscillant série excité par la tension e .

Prenons pour tension d'excitation e une tension aléatoire telle que :

$$\overline{e} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{e^2} = \sigma^2$$

Nous pouvons développer e en série de Fourier :

$$e = \sum_k C_k \sin(\omega_k t + \varphi_k).$$

et nous avons :

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T e \sin(\omega_k t + \varphi_k)\, dt$$

Nous en déduisons

$$\overline{C_k^2} = cst \times \overline{e^2}$$

II. Cas d'un circuit oscillant non amorti

Nous devons résoudre l'équation :

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 \sum_k C_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

Une solution particulière relative à l'indice K est :

$$V_K = a_k \left[\sin(\omega_k t + \varphi_k) - \sin(\omega_0 t + \varphi_k) \right]$$

a_k déterminé par identification est :

$$a_k = C_k \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_k^2}$$

Nous avons alors :

$$\overline{V_k^2} = \overline{a_k^2}\left[\overline{\sin^2(\omega_k t+\varphi_k)} + \overline{\sin^2(\omega_0 t+\varphi_k)} + \overline{\cos[(\omega_k+\omega_0)t+2\varphi_k]} - \overline{\cos(\omega_k-\omega_0)t}\right]$$

Nous savons que

$$\overline{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\cos x} = 0$$

il reste donc

$$\overline{V_k^2} = \overline{a_k^2}\left[1-\cos(\omega_k-\omega_0)t\right]$$

Nous avons donc :

$$\overline{V^2} = \sum_k \overline{V_k^2} \cong \int_0^\infty \overline{C_k^2}\,\frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2-\omega_k^2)^2}\,2\sin^2\frac{\omega_k-\omega_0}{2}t \cdot dk$$

Nous poserons pour résoudre cette intégrale :

$$\omega_k = k\omega_0 \quad \text{d'où} \quad dk = \frac{d\omega_k}{\omega_0}$$

D'autre part :

$$(\omega_k^2-\omega_0^2)^2 = (\omega_k+\omega_0)^2(\omega_k-\omega_0)^2 \cong 4\omega_0^2(\omega_k-\omega_0)^2$$

Toutes réductions faites, il reste

$$\overline{V^2} = cst\; e^2 t\;\frac{\omega_0}{4}\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{(\omega_k-\omega_0)t}{2}}{\left(\frac{\omega_k-\omega_0}{2}t\right)^2}\; d\,\frac{\omega_k-\omega_0}{2}t$$

C'est une intégrale classique dont la valeur est $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons alors :

$$\overline{V^2_{max}} = 2\,\overline{V^2} \qquad \text{d'où}$$

$$\overline{V^2_{max}} = cst\cdot\frac{\pi\omega_0}{4}e^2 t$$

Le carré moyen de la tension croît au delà de toute limite.

III. Cas d'un circuit amorti

Nous devons résoudre l'équation :

$$\ddot{V} + 2m\dot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 \sum_K C_K \sin(\omega_K t + \varphi_K)$$

dont une solution particulière relative à l'indice K est :

$$V_K = A_K \exp(-mt) . \sin(\omega_0 t + \varphi_K) + a_K \sin(\omega_K t + \varphi_K)$$

Nous nous intéressons au comportement asymptotique de V_K. Lorsque t tend vers l'infini, V_K tend vers $V_K$limite et

$$V_{K\,\text{limite}} = a_K \sin(\omega_K t + \varphi_K).$$

Nous avons donc :

$$\overline{(V_{K\,\text{limite}})^2} = \overline{a_K^2}\;\overline{\sin^2(\omega_K t + \varphi_K)} = \frac{1}{2}\overline{a_K^2}$$

On détermine a_K par identification :

$$a_K = C_K \frac{\omega_0^2}{\left[(\omega_K^2 - \omega_0^2)^2 + 4m^2\omega_K^2\right]^{1/2}}$$

Nous avons donc :

$$\overline{V^2_{\text{limite}}} = \sum_K \overline{V^2_{K\,\text{limite}}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \overline{C_K^2} \frac{\omega_0^4}{(\omega_K^2 - \omega_0^2)^2 + 4m^2\omega_K^2}\, dK$$

En intégrant, nous trouvons finalement (Annexe III, paragr. 1)

$$\overline{V^2_{\text{limite}}} = C^{st}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{Q}{\omega_0}\,\overline{\epsilon^2} \qquad \text{avec } Q = \frac{\omega_0^2}{2m}$$

Le carré moyen de la tension tend vers une limite.

IV. Détermination de $\overline{C_k^2}$.

Nous avons vu que :

$$\overline{C_k^2} = cst \times \overline{e^2}$$

Nous avons déterminé expérimentalement la valeur de la constante. L'étude expérimentale a été effectuée toujours à l'aide de l'analogue électronique modifié de telle sorte qu'il résolve rigoureusement l'équation :

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 e$$

La tension aléatoire est fournie par le générateur de bruit. Son spectre est celui de la figure 28 (Réf. 7) et nous admettons que, compte tenu du facteur d'extension du temps, cette tension aléatoire est une bonne représentation du "bruit" dans le synchrotron.

Notre étude expérimentale a donné comme valeur de $\overline{C_k^2}$

$$\overline{C_k^2} = \frac{1}{5}\,\overline{e^2}$$

(précision de 5 % environ).

Mathématiquement, la détermination précise de $\overline{C_k^2}$ nécessite l'intégration de :

$$\overline{C_k^2} = \frac{4}{T^2}\,\overline{\left|\int_0^T e \sin(\omega_k t + \varphi_k)\,dt\right|^2}$$

où e est la tension aléatoire délivrée par notre générateur de bruit et $\sum_k C_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$ son développement en série de Fourier.

Remarquons que la valeur trouvée est particulière au spectre de fréquence de la tension aléatoire choisie e et sera certainement différente pour une tension aléatoire ayant un autre spectre (en particulier pour un bruit blanc).

Nous aurons donc les formules suivantes :

$$\overline{V^2} = \frac{\pi\,\omega_0}{20}\,\overline{e^2}\,t$$

$$\overline{V^2_{limite}} = \frac{\pi}{20} \cdot \frac{Q}{\omega_0} \cdot \overline{e^2}$$

dont les coefficients numériques ont été déterminés expérimentalement; elles correspondent :

la première à un circuit oscillant série non amorti excité par la tension aléatoire e donnée par notre générateur de bruit,

la seconde à un circuit oscillant série amorti excité par la même tension.

V. Analogie entre les équations des petites oscillations de phase, les équations résolues par l'analogue et les équations d'un circuit oscillant

1) L'équation qui décrit les petites oscillations de phase est :

$$\frac{d}{dt}\,A\,(\Delta\dot{\Phi} - 2\pi\,\delta f) + B\,\Delta\Phi = 0$$

En développant, on a :

$$A\,\Delta\ddot{\Phi} + \dot{A}\,\Delta\dot{\Phi} + B\,\Delta\Phi = 2\pi\,\dot{\overline{A\,\delta f}}$$

analogue à l'équation du circuit oscillant amorti.
En faisant l'approximation A = cst, on obtient :

$$A\,\Delta\ddot{\Phi} + B\,\Delta\Phi = 2\pi\,A\,\dot{\delta f}$$

semblable à l'équation du circuit oscillant non amorti.

2) Les équations résolues par l'analogue sont :

$$\ddot{\Delta\phi} + \frac{KV_0 \sin\phi_0}{\theta\tau}\Delta\phi = -\frac{K}{\theta_0}\dot{b}$$

si les branchements sont conformes au schéma a de la figure 5.

$$\ddot{\Delta\phi} + \frac{1}{\rho C}\dot{\Delta\phi} + \frac{KV_0 \sin\phi_0}{\theta\tau} = -\frac{K}{\theta_0}\dot{b}$$

si les branchements sont conformes au schéma de la figure 6.

Ces deux équations sont elles aussi analogues à celles du circuit oscillant.

3) Nous devons établir les correspondances :

$$\frac{KV_0 \sin\phi_0}{\theta\tau} = \omega_0^2 \quad , \quad \frac{1}{\rho C} = 2m \quad , \quad \frac{K}{\theta_0}\dot{b} = -\omega_0^2 e$$

Nous allons exprimer $\overline{\dot{b}^2}$ en fonction de $\overline{b^2}$; pour cela, nous développons b série de Fourier :

$$b = \sum_k C_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

avec

$$\overline{C_k^2} = cst \times \overline{b^2}$$

Nous avons aussi

$$\dot{b} = \sum_k \omega_k C_k \sin(\omega_k t + \varphi'_k)$$

avec

$$\overline{\omega_k^2 C_k^2} = \overline{\dot{b}^2} \times cst$$

comme $\overline{\omega_k^2} = \omega_0^2$ nous en déduisons :

$$\overline{\dot{b}^2} = \omega_0^2 \, \overline{b^2}$$

D. Résultats expérimentaux

La réalisation pratique des expériences ci-dessous a été indiquée précédemment (modèle à employer, programmation, etc.).

Dans ce chapitre, nous indiquons les résultats fournis par l'analogue électronique et nous les exprimons en fonction des grandeurs qui le caractérisent.

La traduction de ces résultats en fonction des paramètres du PS fera l'objet d'une autre partie de cet exposé.

I. Première série d'expériences

Dans cette série d'expériences, nous négligerons l'effet d'amortissement; l'équation résolue est :

$$A \frac{d}{dt_{ps}} (\Delta\dot{\phi} - 2\pi \delta f) + B \Delta\phi = 0$$

exprimée en termes du synchrotron.

ou $$\frac{\theta}{K} \frac{d}{dt_a} \left(\Delta\dot{\phi} + \frac{V_1}{\theta_1} b \right) + \frac{V_2}{\tau} \sin\phi_0 \cdot \Delta\phi = 0$$

exprimée en termes de l'analogue.

Nous avons successivement étudié :

$\overline{\Delta\phi^2}$ en fonction de Δt_a pour b donné
$\overline{\Delta\phi^2}$ " " " $\overline{b^2}$ " Δt_a "

et les diverses valeurs obtenues ont permis le tracé des courbes :

$\overline{\Delta\phi^2} = f(\Delta t_a)$ pour b donné (figure 29)

$\overline{\Delta\phi^2} = f(\overline{b^2})$ " Δt_a " (figure 30)

$\overline{\Delta\phi^2} = f(\overline{b^2} \cdot \Delta t_a)$ (figure 31)

Nous avons obtenu des droites dans tous les cas, ce qui prouve que la loi de variation du $\Delta\phi$ peut s'exprimer par la solution :

$$\overline{\Delta\phi^2} = C_d^2 \, \overline{b^2} \, \Delta t_d .$$

$\overline{\Delta\phi^2}$ croit indéfiniment en fonction du temps, ce que laissait prévoir l'étude théorique du circuit oscillant excité par une tension aléatoire. Les résultats théoriques et expérimentaux sont en accord.

L'étude expérimentale nous a donné :

$$C_d^2 = 0{,}0075 \ (\text{radians})^2 \ (\text{volts})^{-2} (\text{secondes})^{-1}$$

la solution de l'équation du circuit oscillant non amorti

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 e$$

est

$$\overline{V^2} = \frac{\pi}{2o} \omega_0 \overline{e^2} t$$

la solution de l'équation des oscillations de phase :

$$\Delta\ddot{\phi} + \frac{kV_0 \sin\phi_0}{\theta \tau} \Delta\phi = -\frac{k}{\theta_0} \dot{b}$$

sera, si l'analogue est valable et en se souvenant que $\overline{\dot{b}^2} = \omega_0^2 \overline{b^2}$:

$$\overline{\Delta\phi^2} = \frac{\pi}{2o} \frac{k^2}{\theta_0^2} \sqrt{\frac{\tau\theta}{kV_0 \sin\phi_0}} \, . \, \overline{b^2} \, t$$

ce qui donne numériquement

$$C_d^2 = 0{,}0080$$

Les résultats s'accordent donc dans le cas linéaire; si notre approximation consistant à négliger l'amortissement dans le synchrotron est valable, alors :

- à énergie constante, le synchrotron sera équivalent (au point de vue de l'effet du bruit) à un circuit oscillant non amorti dont les éléments sont fixes;

- lorsque l'on accélère, nous pourrons l'assimiler à un circuit oscillant non amorti dont la fréquence propre varie.

II. Seconde série d'expériences

Cette série d'expériences est effectuée en introduisant un terme d'amortissement réel; l'équation résolue est :

$$A \Delta\ddot{\Phi} + \dot{A} \Delta\dot{\Phi} + B \Delta\Phi = 2\pi \dot{\overline{A \delta f}}$$

exprimée en termes "synchrotron"

$$\Delta\ddot{\Phi} + \frac{1}{\rho C} \Delta\dot{\Phi} + \frac{k V_0 \sin \Phi_0}{\theta \tau} \Delta\Phi = - \frac{K}{\theta_0} \dot{b}$$

exprimée en termes "analogue".

Nous avons successivement étudié :

$\overline{\Delta\Phi^2}$ en fonction de Δt_d pour b donné
$\overline{\Delta\Phi^2}$ " " " $\overline{b^2}$ " Δt_d "

et ceci pour différentes valeurs de la résistance d'amortissement ρ.

Les courbes que nous pouvons tracer :

$\dfrac{\overline{\Delta\Phi^2}}{\overline{b^2}}$ en fonction de Δt_d pour ρ donné (figure 32)

montrent que $\overline{\Delta\Phi^2}$ ne croît plus indéfiniment avec le temps mais tend vers une limite conformément à l'étude théorique.

Les courbes ci-dessus dépendant de deux paramètres ρ et b, nous cherchons cette limite en fonction de ces paramètres.

Pour cela, nous avons tracé les courbes :

$\overline{\Delta\Phi^2_{lim}}$ en fonction de ρ pour $\overline{b^2}$ donné (figure 33)
$\overline{\Delta\Phi^2_{lim}}$ " " " $\overline{b^2}$ " ρ " (figure 34)

Nous avons obtenu des droites.

Donc $\overline{\Delta\phi^2_{lim}}$ est proportionnel à $\overline{b^2}$ et à ρ. Si nous remarquons que le coefficient de surtension Q est proportionnel à ρ, la courbe

$$\overline{\Delta\phi^2_{limite}} = f(Q\overline{b^2}) \qquad \text{(figure 35)}$$

sera une droite; c'est effectivement le cas.

Nous avons donc :

$$\overline{\Delta\phi^2_{limite}} = D^2_a\, Q\, \overline{b^2}$$

la solution de l'équation du circuit oscillant amorti

$$\ddot{V} + 2m\dot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 e$$

étant

$$\overline{V^2_{limite}} = \frac{\pi}{2o} \cdot \frac{Q}{\omega_0} \cdot \overline{e^2}$$

la solution de l'équation des oscillations de phase :

$$\Delta\ddot{\phi} + \frac{1}{\rho C}\Delta\dot{\phi} + \frac{kV_0 \sin\phi_0}{\tau\theta}\Delta\phi = -\frac{k}{\theta_0}\dot{b}$$

sera, si l'analogue est valable et en se rappelant que $\overline{\dot{b}^2} = \omega_0 \overline{b^2}$;

$$\overline{\Delta\phi^2_{limite}} = \frac{\pi}{2o}\,\frac{k^2}{\theta_0^2}\left|\frac{\tau\theta}{kV_0 \sin\phi_0}\right|^{3/2} Q\,\overline{b^2}$$

Nous en déduisons la valeur de

$$D^2_a = 0{,}038$$

Expérimentalement, nous avons trouvé

$$D^2_a = 0{,}036$$

Les résultats sont en bon accord dans le cas non linéaire.

En fait, nous verrons que l'approximation conduisant à l'équation

$$A\Delta\ddot{\phi} + \dot{A}\Delta\dot{\phi} + B\Delta\phi = 2\pi\,\overline{\dot{H}\delta t}$$

avec A et $\dot{A}$ fixe n'est pas valable et qu'on ne peut pas assimiler le synchrotron à un circuit oscillant amorti.

III. Troisième série d'expériences

Tenons compte de l'amortissement adiabatique, nous avons à résoudre l'équation :

$$\frac{d}{dt} A(\Delta\dot{\Phi} - 2\pi\,\delta f) + B\Delta\Phi = 0$$

le terme A étant une fonction de l'énergie (figure 9).

Nous avons vu que nous pouvons simuler exactement ce terme d'amortissement en utilisant les deux amplificateurs à gain variable g et G ; malheureusement, ces amplificateurs ne se prêtent pas à la programmation désirée.

La courbe de la figure 9 montre que A peut être considéré comme une fonction linéaire du temps dans d'assez larges bandes d'énergie et en particulier que cette approximation est tout à fait bonne si nous nous bornons aux petits intervalles d'énergie correspondant au temps que dure un enregistrement.

Une variation linéaire de ce terme est très facile à obtenir au moyen d'un multiplicateur. Le multiplicateur a l'avantage de pouvoir être asservi facilement.

Nous savons que dans ce cas (emploi d'un multiplicateur et branchements conformes au schéma de la figure 7), l'analogue résoud l'équation :

$$\frac{1}{T_1}\frac{d}{dt}\frac{\theta}{T_1 a k}\left(\Delta\dot{\Phi} + \frac{T_1 k}{\theta_0} b\right) + \frac{V_0}{\tau}\sin\Phi_0 \cdot \Delta\Phi = 0$$

et que nous devons vérifier les correspondances :

$$\mathrm{I}\quad\left|\begin{array}{ll} \eta\,\dfrac{\theta}{k}\,\dfrac{1}{T_1^2 a} = A & \quad 1)\\[2ex] \eta\,\dfrac{V_0}{\tau} = \dfrac{eV}{L_0} & \quad 2)\\[2ex] T_1\,\dfrac{k b}{\theta_0} = -2\pi\,\delta f & \quad 3)\\[2ex] \dfrac{\dot{a}}{a} = \dfrac{\dot{A}}{A} & \quad 4)\end{array}\right.$$

1) <u>Ajustement des paramètres du multiplicateur</u> :

Le schéma de principe du multiplicateur est :

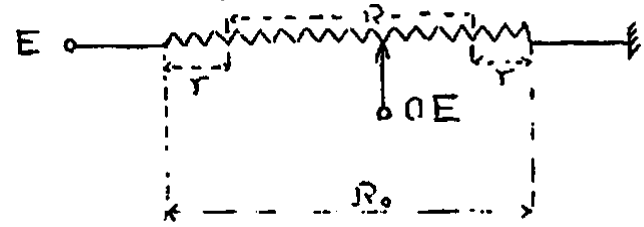


figure 36

Le curseur entraîné par un moteur (Annexe I Paragr. 2) décrit d'un mouvement uniforme la partie R du potentiomètre R_0.

Nous pouvons régler à volonté la partie R décrite et la vitesse de balayage.

Nous avons alors, suivant le sens de déplacement du curseur :

$$\left| \begin{array}{l} a = \dfrac{r + R(1 - t/\Delta t_0)}{R_0} \\[2ex] a = \dfrac{r + R\, t/\Delta t_0}{R_0} \end{array} \right. \quad \text{si } \Delta t_0 \text{ est le temps de balayage}$$

Nous en déduisons :

$$\dot{a} = \frac{R}{R_0} \, \frac{1}{\Delta t_0} \, \mathcal{T}_1 \qquad \text{puisque } t_d = \mathcal{T}_1 \, t_{ps}$$

Pour vérifier les correspondances I, nous devons choisir une définition moyenne pour a ; nous prendrons la valeur de a lorsque le curseur est au point milieu du potentiomètre. Dans cette position, nous avons

$$t = \frac{1}{2} \Delta t_0 \quad \text{d'où} \quad a = \frac{1}{2} \qquad \text{puisque } r + \frac{R}{2} = \frac{R_0}{2}$$

Nous garderons donc pour a la valeur fixe 1/2; nous devons alors prendre

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{a}} = \mathcal{T}\sqrt{2}$$

pour ajuster l'équation I (1). La valeur $\mathcal{T}_1$ du facteur d'extension du temps détermine l'énergie à laquelle on se place.

Cette énergie fixe le rapport $\dot{A}/A$ et permet de calculer $\dot{a}/a$, c'est-à-dire de déterminer la vitesse de balayage. Remarquons que pour une énergie donnée, nous ferons des enregistrements pour différents Δt; il faut donc que quel que soit Δt, $\dot{a}$ garde la même valeur, donc nous devons avoir :

$$R = R_o \frac{\Delta t}{\Delta t_o}$$

où Δt_o est le temps mis pour décrire R_o.

Nous avons alors

$$\dot{a} = \frac{\dot{A}}{A} a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{A}}{A}$$

soit

$$\Delta t_o = 2 T_1 \frac{1}{\dot{A}/A}$$

2) <u>Résultats expérimentaux</u>

Nous avons fait une étude qualitative sans ajuster les paramètres de l'analogue à ceux du synchrotron. Notre but est de montrer que, quelle que soit la grandeur de l'amortissement adiabatique, la figure de diffusion reste la même et obéit à la même loi que celle déterminée dans la première série d'expériences.

Nous avons donc fait les enregistrements suivants :

- <u>pour une énergie donnée</u> (Δt_o et T_1 fixés)

étude de $\overline{\Delta\Phi^2}$ en fonction de $\overline{b^2}$ pour Δt_d donné; nous avons obtenu la droite de la figure 37;

étude de $\overline{\Delta\Phi^2}$ en fonction de Δt_d pour b donné; nous avons obtenu la droite de la figure 38.

Ceci prouve que, en tenant compte de l'amortissement adiabatique, nous obtenons encore une loi de la forme

$$\overline{\Delta\Phi^2} = C_d^2 \, \overline{b^2} \, \Delta t_d$$

- pour diverses énergies

- nous devons voir si le coefficient C_a^2 dépend de la grandeur de l'amortissement.

Pour cela, en laissant b et Δt_a fixes, nous avons fait plusieurs enregistrements correspondant à des amortissements variables et nous avons trouvé que les $\overline{\Delta\Phi^2}$ observés sont les mêmes qu'en l'absence d'amortissement.

Donc C_a^2 est indépendant de l'amortissement.

Au point de vue de la diffusion des particules sous l'effet du bruit, nous voyons que tout se passe comme s'il n'y avait pas d'amortissement.

E. Stabilité des enregistrements

Nous allons vérifier que les constantes trouvées ne dépendent ni du choix des constantes de temps des intégrateurs (c'est-à-dire de la période des petites oscillations délivrées par l'analogue), ni du choix des conditions initiales.

I. Stabilité des résultats en fonction de la période des petites oscillations

Nous avons établi la loi

$$\overline{\Delta\Phi^2} = C_a^2 \, \overline{b^2} \, \Delta t_a$$

exprimée en fonction des constantes et des données de l'analogue; exprimée en fonction des paramètres du synchrotron, elle devient :

$$\overline{\Delta\Phi^2} = C_{ps}^2 \, \overline{\delta f^2} \, \Delta t_{ps}$$

d'où

$$C_{ps}^2 = C_a^2 \, \frac{\overline{b^2}}{\overline{\delta f^2}} \cdot \frac{\Delta t_a}{\Delta t_{ps}}$$

Or, nous savons que :

$$\delta f = \frac{k}{2\pi\theta_0} \tau . b \quad \text{et} \quad \Delta t_d = \tau \Delta t_{ps}$$

Nous avons donc

$$C_{ps}^2 = C_d^2 \frac{1}{T_d} \left| \frac{2\pi\theta_0}{k} \right|^2 T_{ps}$$

Nous devons donc vérifier que la quantité

$\frac{C_d^2}{T_d}$ est une constante lorsque la période des petites oscillations données par l'analogue varie.

Nous avons fait trois séries d'enregistrements pour

$\overline{T_d}$ = 13,2 secondes

$\overline{T_d}$ = 9 secondes

$\overline{T_d}$ = 28 secondes

Nous avons pu tracer les courbes

$$\overline{\Delta\Phi^2} = C_d^2 \; \overline{b^2} \; \Delta t_d \quad \text{(figure 39)}$$

et nous avons trouvé les valeurs

$$\sqrt{\frac{C_d^2}{T_d}} = \begin{cases} 1{,}430 & \text{degrés/volts/secondes}^{1/2} \\ 1{,}446 & \text{"} \\ 1{,}436 & \text{"} \end{cases}$$

ce qui prouve bien l'indépendance des résultats trouvés et des constantes de temps choisies.

Notons que ces enregistrements ont été effectués avec le plus de soins possible; dans les calculs qui suivent nous adopterons la valeur moyenne qu'ils ont fournie pour le rapport $C_d/\sqrt{T_d}$ c'est-à-dire 1,437 degrés,volts^{-1}, secondes$^{-1/2}$.

II. Stabilité des résultats en fonction des conditions initiales

Partant de conditions initiales (ϕ_i et $\dot{\phi}_i$) différentes, nous comparons les figures de diffusion obtenues avec des valeurs de b et de Δt identiques (figure 40).

Les valeurs des $\Delta\phi$ observés sont pratiquement les mêmes et nous pouvons dire qu'effectivement le choix des conditions initiales n'influe pas sur les résultats obtenus.

F. Conclusions qualitatives

1) Les deux premières séries d'expériences ont, en fait, constitué l'étude de la tension aux bornes de la capacité d'un circuit oscillant excité par une tension aléatoire; elles ont confirmé les résultats théoriques, à savoir que :

- si le circuit oscillant n'est pas amorti ($R = 0$), cette tension croît au delà de toute limite suivant la loi très simple :

$$\overline{V^2} = cst\ \omega_0 \overline{e^2} t$$

$\overline{V^2}$: carré moyen de la tension aux bornes de la capacité

ω_0 : fréquence propre du circuit

$\overline{e^2}$: carré moyen de la tension d'excitation.

- si le circuit oscillant est amorti ($R \neq 0$), la tension tend vers une limite définie par :

$$\overline{V^2_{limite}} = cst\ \frac{Q}{\omega_0} \overline{e^2}$$

Q : coefficient de surtension du circuit.

2) La troisième série d'expériences constitue l'étude des petites oscillations de phase sous l'effet du bruit. Elles ont prouvé que l'amortissement adiabatique ne peut pas, même vis à vis de ses conséquences, s'assimiler à un amortissement réel (par résistance par exemple).

En effet, dans les zones du cycle d'accélération qui ont été explorées, c'est-à-dire en dehors de la zone de transition que nous définirons dans l'intervalle (5,5 à 6 GeV), nous avons pu vérifier la loi :

$$\overline{\Delta\Phi^2} = C_{ps}^2(E) \cdot \overline{\left(\frac{\delta f}{f}\right)^2}\, t$$

$\overline{\Delta\Phi^2}$ ne tend pas vers une limite mais croît indéfiniment.

Nous supposerons, ce qui est logique étant donné que nous sommes dans un espace de Liouville où des éléments d'aire se conservent, que cette loi reste valable dans la zone de transition et ceci avec le même coefficient

3) Il est alors possible, au point de vue de l'effet du bruit sur les petites oscillations de phase, d'établir l'analogie entre le proton-synchrotron et un circuit oscillant non amorti excité par une tension aléatoire et dont la fréquence propre varie en cours du temps suivant la loi :

$$\omega_0 = cst \cdot C_{ps}^2(t)$$

Cette analogie peut suggérer un moyen d'étude des oscillations de phase dues au bruit.

TROISIEME PARTIE

Nous allons appliquer les résultats expérimentaux au cas du synchrotron à protons du CERN.

Nous pouvons d'abord déterminer une quantité analogue à une vitesse de diffusion, puis par intégration nous obtiendrons une longueur de diffusion et finalement nous essaierons de déterminer le pourcentage des particules perdues à cause du bruit.

A. Diffusion des Particules.

I. Vitesse de diffusion.

L'étude expérimentale nous a fourni la loi:

$$\overline{\Delta\phi^2} = C_a^2 \, \overline{b^2} \, t_a$$

Dans cette formule, le coefficient Ca^2 est une constante pour une valeur donnée de la période des petites oscillations délivrées par l'analogue.

Dans le synchrotron, nous aurons:

$$\overline{\Delta\phi^2} = C_{ps}^2 \, \overline{\left(\frac{\delta f}{f}\right)^2} \, t_{ps}$$

Nous devons identifier ces deux formules. Nous obtenons:

$$C_{ps}^2 = C_a^2 \frac{\overline{b^2}}{(\delta f/f)^2} \cdot \frac{t_a}{t_{ps}} .$$

$$\text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{t_a}{t_{ps}} = \mathcal{T} \\[2ex] \dfrac{\delta f}{f} = \dfrac{k}{2\pi\tau_0 f_{\omega}} \left(\dfrac{\beta}{\mathcal{T}}\right)^{-1} \cdot b \end{array} \right.$$

$$\text{or} \quad \mathcal{T} = \frac{T_a}{T_{ps}} \qquad \text{et} \qquad T_{ps} = 2\pi \sqrt{\frac{E_0}{2\pi c f_\omega} \cdot \frac{1}{k(\alpha - k^2)} \cdot \frac{L_0}{eV_0 \sin\phi_0}}$$

En se rappelant que $k = E/E_0$ nous obtenons finalement:

$$C_{ps}^2 = \frac{C_d^2}{T_d} \cdot \left|\frac{2\pi \tau_s f_\omega}{K}\right|^2 \cdot \sqrt{\frac{2\pi E_0 L_0}{c f_\omega e V \sin\Phi_s}} \cdot \frac{E^2 - E_0^2}{\sqrt{E_0 E |\alpha E^2 - E_0^2|}}$$

$$C_{ps}^2 = \frac{1}{\overline{(\delta f/f)^2}} \cdot \frac{\overline{\Delta\Phi^2}}{t_{ps}}$$

peut se définir comme une vitesse de diffusion.

La quantité $\overline{(\delta f/f)^2}$ apparait comme un paramètre; nous définirons donc une vitesse de diffusion

$$\eta = C_{ps}^2 \quad \text{par unité de} \quad \overline{(\delta f/f)^2}$$

qui sera fonction de l'énergie et qui représentera la vitesse avec laquelle croît le carré moyen de $\Delta\Phi$ au cours du cycle d'accélération.

Nous avons tracé la courbe $\eta = C_{ps}^2 \overline{\left(\frac{\delta f}{f}\right)^2}$ pour une valeur de $\frac{\delta f}{f} = 10^{-5}$ (figure 41).

II. Longueur de Diffusion.

La vitesse de diffusion étant une fonction de l'énergie pour savoir de quelle valeur une particule à diffusée lorsqu'elle a atteint l'énergie E, c'est-à-dire quel est son rayon de diffusion à cette énergie, nous devons procéder à une intégration.

Si nous assimilons les quantités $\overline{\Delta\Phi^2}$ et Δt_{ps} à des différentielles, nous aurons:

$$d\,\overline{\Delta\Phi^2} = C_{ps}^2(E)\, dt_{ps}$$

Or le temps et l'énergie sont liés par la relation

$$E = E_{inj} + \dot{E}t$$

Nous avons donc

$$\left[\overline{\Delta\Phi^2}\right]_{E_{inj}}^{E} = \left(\overline{\frac{\delta f}{f}}\right)^2 \int_{E_{inj}}^{E} C_{ps}^2(E)\ \frac{dE}{\dot{E}}$$

soit

$$\left[\overline{\Delta\Phi^2}\right]_{E_{inj}}^{E} = \left(\overline{\frac{\delta f}{f}}\right)^2 \frac{C_d^2}{T_d} \left|\frac{2\pi\tau_0 f_\infty}{K}\right|^2 \sqrt{\frac{2\pi E_0 L_0}{cf_\infty eV \beta \sin\Phi_0}} \cdot \frac{1}{\dot{E}} \int_{E_{inj}}^{E} \frac{E^2 - E_0^2}{\sqrt{E_0 E |\alpha E^2 - E_0^2|}} . dE$$

Effectuons le changement de variable $E = E_{tr} u$ avec $E_{tr} = \frac{E_0}{\sqrt{\alpha}}$ nous obtenons

$$\left|\overline{\Delta\Phi^2}\right|_{E_{inj}}^{E} = \left(\overline{\frac{\delta f}{f}}\right)^2 \cdot \frac{C_d^2}{T_d} \cdot \left|\frac{2\pi\tau_0 f_\infty}{K}\right|^2 \sqrt{\frac{2\pi E_0 L_0}{cf_\infty eV \beta \sin\Phi_0}} \cdot \frac{E_0}{\dot{E}} \int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{\alpha^{-2}(u^2 - \alpha)}{\sqrt{u\,|u^2 - 1|}}\ du$$

Finalement:

$$\langle \Delta\Phi \rangle = \sqrt{\overline{\Delta\Phi(E)^2}} = 11,21.10^6 \langle \frac{\delta f}{f} \rangle \left\{ \int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{u^2 - \alpha}{\sqrt{u|u^2 - 1|}} du \right\}^{1/2}$$

L'intégrale est calculée dans l'annexe III, par.II.

La figure 42 donne la courbe $\lambda(E) = \langle \Delta\Phi(E) \rangle$ en fonction de l'énergie pour un $\langle \frac{\delta f}{f} \rangle = 10^{-5}$

<u>Remarque.</u>

Dans un synchrotron, où l'on injecterait les particules à une énergie notablement supérieure à l'énergie de transition ou plus généralement dans les parties du cycle d'accélération où l'on peut négliger E_{tr}^2 devant E^2, la loi de variation de λ prend une expression très simple, nous avons en effet à intégrer:

$$\int \frac{E^2 dE}{\sqrt{\alpha}\, E^{3/2}} = \frac{2}{3\sqrt{\alpha}} E^{3/2}$$

Nous avons alors:

$$\lambda(E) = C_{st} \left[E^{3/2} - E_{inj}^{3/2} \right]^{1/2} < \frac{\delta f}{f} >$$

Avec les paramètres du synchrotron du CERN, nous obtenons

$$C_{st} = 2,5 \cdot 10^6$$

Nous avons aussi tracé cette courbe sur la figure 42, ce qui permet une comparaison.

B. Pourcentage de particules perdues.

Dans l'espace des phases, nous venons de voir que l'effet du bruit se traduit par une diffusion du point représentatif des particules et nous avons pu déterminer une longueur de diffusion moyenne fonction du temps:

Sous l'effet de ce phénomène de diffusion, un certain nombre de particules vont perdre la propriété de stabilité de phase et vont être perdues; nous allons essayer de déterminer le pourcentage de particules perdues ce qui revient à déterminer le pourcentage des points figuratifs qui vont franchir la séparatrice de la zône stable.

Pour effectuer ce calcul, nous supposerons

1) que nous avons muni l'espace des phases d'une métrique pour pouvoir y effectuer des calculs, ceci est possible comme nous l'avons dit en assimilant la zône stable à un cercle;

2) que les particules sont uniformément réparties en phase, c'est-à-dire que la densité des points figuratifs est uniforme à l'intérieur de la zône stable ce qui est vrai au bout de quelques oscillations de phase.

I. Rayon de diffusion.

Nous avons trouvé un rayon de diffusion moyen $\Delta\Phi$; nous pouvons d'abord supposer que toutes les particules ont diffusé d'une longueur $\Delta\Phi$

Il est plus satisfaisant d'admettre que le rayon de diffusion obéit à une loi de répartition normale; le $\Delta\Phi$ que nous avons trouvé étant la longueur moyenne de diffusion.

Mathématiquement ceci revient à dire que si N est le nombre de particules contenues dans l'élément d'aire ΔS de l'espace des phases, le nombre de particules dn ayant un rayon de diffusion compris entre r et $r + dr$ sera:

$$dn = \mathrm{Cst} \cdot N \int_r^{r+dr} e^{-\frac{r^2}{\Delta\Phi^2}} dr$$

La constante s'obtenant de façon évidente

$$1 = \mathrm{cst} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{\Delta\Phi^2}} dr.$$

nous avons

$$\mathrm{cst} = \frac{2}{\Delta\Phi\sqrt{\pi}}$$

II. Première approximation.

Nous prendrons une répartition uniforme du rayon de diffusion

1) $\Delta\Phi$ faible devant $\Delta\Phi_{max}$.

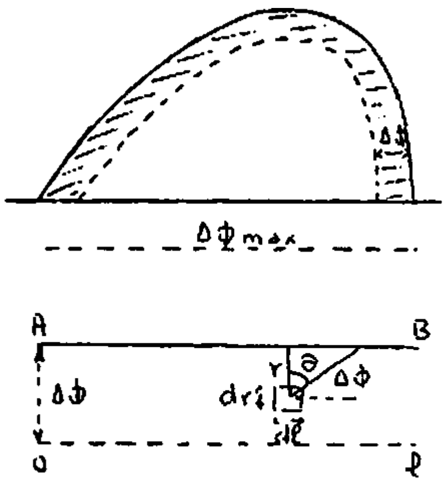


figure 43

Il est évident que sales les particules contenues dans la zône hâchurée seront susceptibles d'être perdues. Si cette bande a effectivement une largeur $\Delta\Phi$ faible devant $\Delta\Phi_{max}$, il est possible de développer cette couronne et nous aurons alors à calculer les particules diffusant à travers la droite AB.

Considérons un petit élément de surface $\Delta S = dr.dl$ au point de coordonnées l et r il contient $a\ dr.dl$ particules, a étant la densité superficielle (supposée constante) des particules à l'intérieur de la zône stable.

Les particules de ΔS ont au bout d'un temps Δt diffusé d'une longueur $\Delta\Phi(t) = \Delta\Phi$ le nombre n de particules perdues est égal au nombre de particules ayant traversé AB c'est-à-dire proportionnel à l'angle θ et nous aurons:

$$n = \int_0^l a\,dl \int_0^{\Delta\Phi} \frac{\theta}{\pi}\, dr$$

Mais $\theta = \operatorname{Arccos} \frac{r}{\Delta\Phi}$ d'où:

$$n = \frac{al}{\pi} \int_0^{\Delta\Phi} \operatorname{Arccos} \frac{r}{\Delta\Phi} \,.\, dr = \frac{al}{\pi}\,\Delta\Phi$$

Si nous appelons S la surface de la bande de largeur $\Delta\Phi$ et S_0 la surface de la zône stable, le pourcentage de particules perdues sera dans cette approximation:

$$p_1 = \frac{100}{\pi} \cdot \frac{S}{S_0}$$

Assimilons la zône stable à un cercle, nous aurons:

$$S = 2\pi\rho\,\Delta\phi \quad \text{et} \quad S_0 = \pi\rho^2$$

si ρ est le rayon de ce cercle $\left(\rho = \frac{1}{2}\Delta\phi_{max}\right)$

Nous en déduisons:

$$p_0 = \frac{400}{\pi}\,\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{max}} \qquad \Delta\phi_{max} \cong 180^\circ$$

La courbe I de la figure 44 donne p_0 en fonction de $\Delta\phi$

2) <u>$\Delta\phi$ n'est pas faible</u>.

Nous devons considérer que les particules diffusent à travers un cercle:

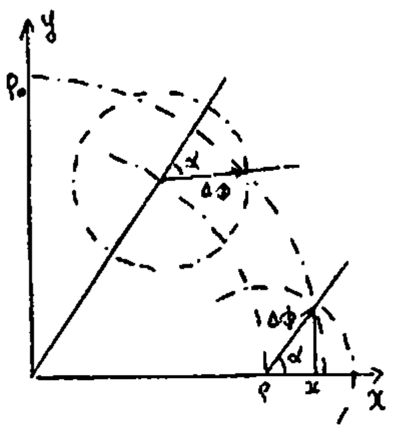


figure 45

Comme dans le cas précédent, le nombre de particules du petit élément d'aire $\rho\,d\rho\,d\theta$ qui traversent le cercle est proportionnel à α et nous avons:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho_0^2 & \text{cercle de rayon } \rho_0 \\ (x-\rho)^2 + y^2 = \Delta\phi^2 & \text{cercle de rayond } \Delta\phi \end{cases}$$

d'où $$x = \frac{\rho^2 + \rho_0^2 - \Delta\phi^2}{2\rho}$$

donc comme $\cos\alpha = \frac{x - \rho}{\Delta\phi}$ nous aurons:

$$\alpha = \text{Arccos}\,\frac{\rho_0^2 - \rho^2 - \Delta\phi^2}{2\rho\,\Delta\phi}$$

et le nombre de particules perdues est donné par l'intégrale:

$$n = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho_0 - \Delta\Phi}^{\rho_0} \frac{a}{\pi} \operatorname{Arccos} \frac{\rho_0^2 - \rho^2 - \Delta\Phi^2}{2\rho\,\Delta\Phi}\ \rho\, d\rho$$

intégrale dont la valeur est:

$$n = a \left| 2\rho_0^2 \operatorname{Arcsin} \frac{\Delta\Phi}{2\rho_0} + \frac{\Delta\Phi}{2} \sqrt{4\rho_0^2 - \Delta\Phi^2} \right|$$

La surface du cercle est $\pi\rho_0^2$ il contient donc initialement $a\pi\rho_0^2$ particules et le pourcentage de particules perdues est:

$$p_1 = 100 \cdot \frac{2\rho_0^2 \operatorname{Arcsin} \Delta\Phi/2\rho_0 + \Delta\Phi/2 \sqrt{4\rho_0^2 - \Delta\Phi^2}}{\pi\rho_0^2}$$

Dans le cas du P.S., nous pouvons assimiler la zône stable à un cercle de rayon $\rho_0 \simeq 30°$ d'où les résultats numériques (figure 44) courbe II.

III. Distribution normale du rayon de diffusion.

Nous allons refaire le calcul précédent en supposant cette fois que le rayon de diffusion $\Delta\phi$ des différentes particules n'est plus le même mais obéit à une loi de distribution normale ce qui est beaucoup plus conforme à la réalité. Nous pouvons d'ailleurs nous en rendre compte en regardant comment se répartit la densité des points à l'intérieur du cercle de diffusion (figure 26).

Nous ne ferons le calcul que dans le cas de la diffusion à travers un cercle.

Les particules du petit élément d'aire $\rho\, d\rho\, d\theta$ (figure 44) qui seront perdues seront celles qui auront un rayon de diffusion $r \geqslant \rho_0 - \rho$ et qui seront contenues dans l'angle 2α

Nous aurons donc:

$$dN = \frac{2a\rho\, d\rho\, d\theta}{\Delta\Phi\sqrt{\pi}} \cdot \left[\int_{\rho_0-\rho}^{\rho_0+\rho} \frac{\alpha}{\pi}\, e^{-\frac{r^2}{\Delta\Phi^2}}\, dr + \int_{\rho_0+\rho}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{\Delta\Phi^2}}\, dr\right]$$

avec

$$\alpha = \text{Arccos}\,\frac{\rho_0^2 - \rho^2 - r^2}{2\rho r}$$

d'où le pourcentage de particules perdues:

$$P = \frac{100}{a\pi\rho_0^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho_0} dN\, \rho\, d\rho$$

ce qui s'écrit:

$$P = \frac{400}{\Delta\Phi\, \rho_0^2\, \pi\sqrt{\pi}} \int_0^{\rho_0} \rho\, d\rho \left[\int_{\rho_0-\rho}^{\rho_0+\rho} \text{Arccos}\,\frac{\rho_0^2-\rho^2-r^2}{2\rho r} \cdot e^{-\frac{r^2}{\Delta\Phi^2}}\, dr + \pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{\Delta\Phi^2}}\, dr\right]$$

Intégrale qui s'écrit encore:

$$P = \frac{400}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_0}{\Delta\Phi} \left[\int_0^1 u\, du \left\{\int_{1-u}^{1+u} \text{Arccos}\,\frac{1-u^2-v^2}{2uv}\, e^{-v^2\frac{\rho_0^2}{\Delta\Phi^2}}\, dv + \pi \int_{1+u}^{\infty} e^{-v^2\frac{\rho_0^2}{\Delta\Phi^2}}\, dv\right\}\right]$$

Cette intégrale a été calculée numérique pour plusieurs valeurs du rapport $\rho_0/\Delta\Phi$ sur la machine à calculer du CERN et a permis de tracer la courbe III de la figure 44 (nous avons pris $\rho_0 \cong 90°$).

IV. Pertes des particules dans le synchrotron sous l'effet du bruit.

Il est intéressant de déterminer le pourcentage de particules que l'on a perdues sous l'effet du bruit en fonction de l'énergie.

Grâce aux courbes des figures 42 (courbe I) et 44 (courbe III) on peut tracer les courbes de la figure 46.

C. Conclusion à l'étude du Bruit.

I. Réserves introduites par nos approximations.

1) Toutes nos approximations des deux premières parties consistent en fait à supposer que les paramètres varient adiabatiquement au cours du cycle d'accélération. Nous pouvons donc les considérer comme justifiées dans les zônes éloignées de la transition; pour fixer les idées, disons en dehors de l'intervalle 5.5 - 6 GeV que nous définissons comme "zône de transition".

Rappelons brièvement ces approximations, ce sont:

- au point de vue théorique, le fait de prendre pour période des petites oscillations:

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{A}{B}}$$

c'est-à-dire de considérer que $\dot{A}$ est nul, et le fait de faire l'hypothèse de l'indépendance des conditions initiales sur les petits mouvements.

- au point de vue expérimental, le fait de considérer que A reste constant $(\dot{A} = 0)$ pendant le temps d'un enregistrement lors de la première série d'expériences, et le fait de considérer que A varie linéairement lors de la second série d'expériences.

Nous avons vu que ces approximations sont bien justifiées hors de la zône de transition.

2) Dans la troisième partie, nous avons supposé que tous les résultats obtenus à l'aide des approximations ci-dessus sont encore applicables dans la zône de transition. Etant donné que le temps mis pour franchir cette zône est très faible nous pensons ne pas avoir commis de grosses erreurs en faisant cette supposition.

Nous avons d'autre part muni l'espace des phases d'une métrique pour pouvoir y définir $|\overrightarrow{\Delta\Phi}|$. Cette métrique n'est valable qu'à la condition que la zône de stabilité des oscillations de phase soit un cercle (ou puisse s'y ramener par affinité) or ceci n'est pas rigoureusement exact.

Enfin, nous avons supposé une distribution normale du rayon de diffusion ce qui semble assez logique.

3) Il eut peut-être bon de considérer aussi une répartition gaussienne de l'amplitude du bruit pour poursuive nos calculs et donner ainsi une meilleure illustration des phénomènes.

Nous aurions aussi pu faire ces calculs en considérant que $\overline{\delta f^2}$ est une fonction de l'énergie, c'est effectivement le cas, mais la fonction liant $\overline{\delta f^2}$ à l'énergie est mal connue.

4) L'analogue électronique n'est lui-même pas parfait et en tenant compte des erreurs que l'expérimentateur commet dans les règlagles et les lectures, on peut estimer une erreur relative maximum de 5 o/o sur les résultats numériques.

II. Résultats.

Notre étude permet de dégager les résultats suivants.

1) Etude d'un circuit oscillant excité par une tension aléatoire.

Les deux premières séries d'expériences ont conduit aux résultats suivants:

- La tension aux bornes de la capacité d'un circuit oscillant non amorti excité par une tension aléatoire croît au-delà de toute limite conformément à la formule:

$$\overline{V^2} = cst \cdot \pi \omega_0 \overline{v^2} t$$

- La tension aux bornes de la capacité d'un circuit oscillant amorti excité par une tension aléatoire tend vers une limite donnée par:

$$\overline{V^2_{lim}} = cst \cdot \pi \frac{Q}{\omega_0} \overline{v^2}$$

Q étant le coefficient de surtension du circuit, ω_0 sa fréquence propre, v la tension aléatoire qui lui est appliquée.

2) Effet du bruit sur la stabilité de phase d'un synchrotron.

Sous l'effet du bruit, il se produit une diffusion des particules autour de leur position d'équilibre (au sens de Liapounov) tout à fait analogue à la diffusion brownienne.

Cet effet est caractérisé par la quantité $\overline{|\Delta\Phi|}$ qui représente dans l'espace des phases munie de la métrique définie précédemment, la "distance la plus probable" séparant une particule accélérée dans un synchrotron non perturbé et une particule accélérée en présence de bruit. La variation de $\Delta\Phi$ est décrite par:

$$\overline{\Delta\Phi^2} = C(E)\,\overline{\delta f^2}\,t$$

où $C(E)$ est une fonction de l'énergie (donc du temps t) et δf l'erreur de fréquence caractéristique du bruit.

Cette dernière formule suggère l'analogie entre le synchrotron et un circuit oscillant non amorti excité par une tension aléatoire et dont la fréquence propre est variable dans le temps.

3) Perte des particules.

Nous pouvons définir une "vitesse de diffusion" égale à $C(E)$ qui sera fonction du temps et en intégrant au cours du cycle d'accélération nous obtiendrons une "longueur de diffusion" qui représentera l'excursion de la particule dans le plan des phases.

Il est bien évident que sous l'effet de la diffusion due au bruit, les particules vont s'échapper de la zône stable et se perdre.

Nous avons calculé le pourcentage de particules perdues en fonction de $\Delta\phi$ donc du temps et par suite de l'énergie.

4) Application au Synchrotron à protons du CERN.

Le résultat final de notre travail peut se résumer par la courbe de la figure 46 qui représente le pourcentage de particules perdues en fonction de l'énergie.

Nous remarquerons deux choses:

a) La grande rapidité avec laquelle nous perdons les particules. Avec un $\delta f/f$ de 10^{-4}, nous avons perdu pratiquement toutes les particules à 10 GeV.

Nous remarquons aussi le gros intérêt qu'il y a à réduire le plus possible le bruit

$\delta f/f$	
10^{-4}	80 o/o de particules perdues à 4 GeV
5.10^{-5}	65 o/o de particules perdues à 4 GeV
10^{-5}	17,5 o/o de particules perdues à 4 GeV
5.10^{-6}	9 o/o de particules perdues à 4 GeV

b) A l'énergie de transition, les courbes présentent un point d'inflexion à tangente verticale, la vitesse de perte dévient infinie. Ceci s'explique par le fait qu'à cette énergie la période des oscillations de phase devient infinie, il n'y a plus aucune force de rappel et les particules, absolument libres, sont très sensibles à l'effet du bruit.

III. Conclusion.

Le phénomène du bruit a une grande importance et produit une diffusion rapide des particules créant ainsi des processus de perte très importants. Il est trivial d'affirmer que l'on doit chercher à réduire son intensité au maximum.

Théoriquement, il est assez facile de comprendre l'importance de l'effet du bruit: en effet, bien que le bruit n'ait pas de fréquences discrètes qui puissent donner lieu à des résonances avec la fréquence des oscillations de phase, il contient des composantes dans une très large bande de fréquence qui englobe entièrement la bande dans laquelle se situent les oscillations de phase. Alors, au lieu d'avoir une résonance seulement pendant un très faible intervalle de temps, on a toujours une composante du bruit en résonance et ceci tout au long du cycle d'accélération. Les diverses composantes du spectre du bruit ne sont pas cohérentes et ne produisent que des effets statistiques, beaucoup plus faibles en amplitude que si elles étaient cohérentes(comme une fréquence discrète) mais à cause de leur long temps d'interaction le bruit peut produire des oscillations de phase considérables.

Remarque: Beam Control.

Dans le synchrotron à protons du CERN, il a été prévu un système nommé "beam control" dont le but est d'ajuster à chaque instant la phase de la haute tension d'accélération à celle de la "particule moyenne". Le beam control n'est pas autre chose qu'un système d'asservissement pouvant être décrit par le schéma de principe:

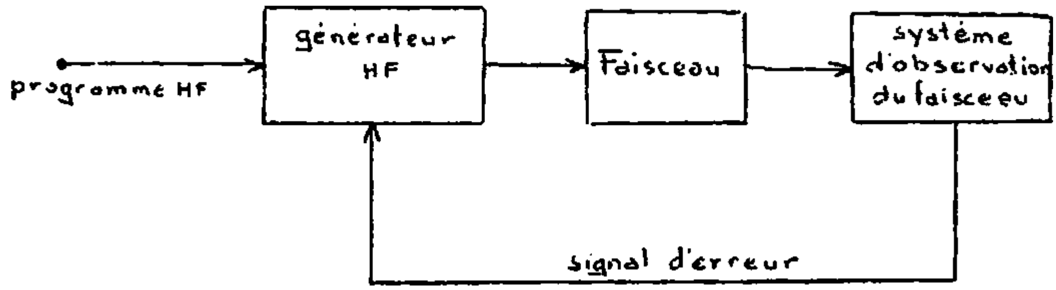


figure 47

L'effet du beam control est d'annuler l'effet des perturbations et en particulier celui du bruit (ou tout au moins de l'atténuer dans une large mesure).

Notre étude a été faite sans en tenir compte et nous voyons l'intérêt de l'introduire le plus rapidement possible pour perdre un minimum de particules. En principe il sera établi lorsque les protons seront à une énergie totale voisine de 2 GeV.

Annexe I : ref.9

I. Principe de l'intégrateur-Sommateur.

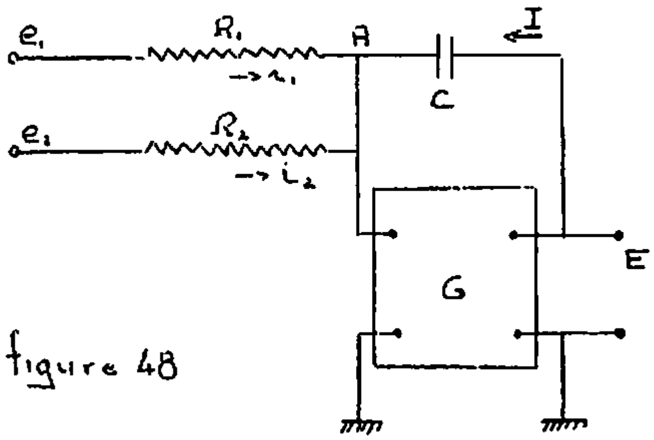


figure 48

Le rôle de l'amplificateur est de maintenir le potentiel du point A égal à celui de la masse, ceci sera d'autant mieux réalisé que le gain de G sera plus élevé.

Ecrivons que:

$$I = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

Nous avons

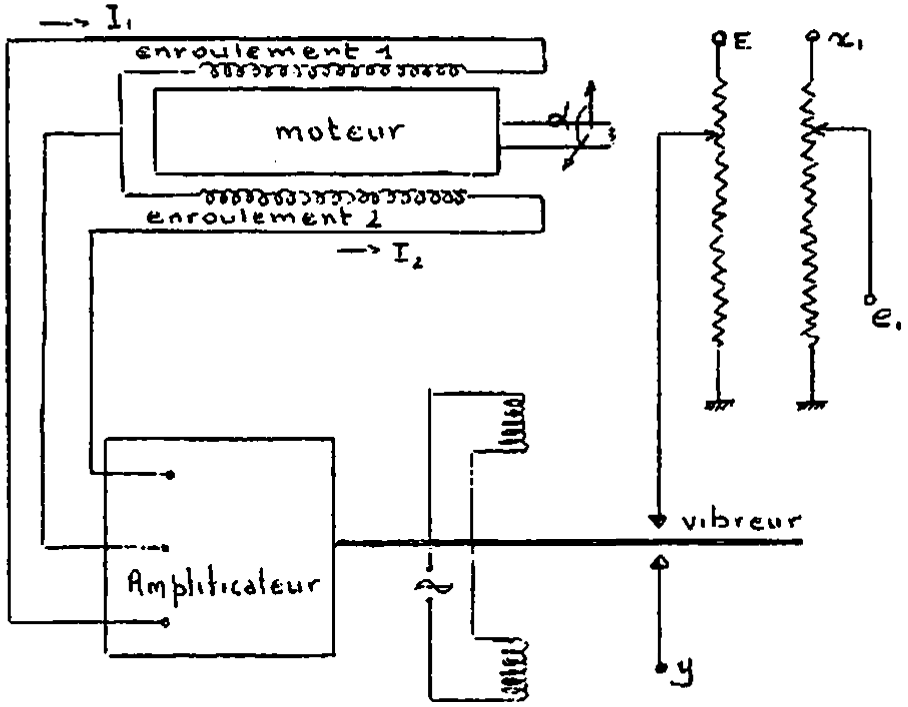
$$i_n = \frac{e_n}{R_n} \qquad \text{et} \qquad E = \frac{1}{C}\int I \, dt$$

d'où l'équation résolue par ce montage:

$$E = -\int \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{R_i C} \, dt$$

II. Principe d'un multiplicateur à potentiomètres.

Si on fait passer les courants I_1 et I_2 en directions opposées dans chacun des deux enroulements d'un moteur à deux enroulements, le sens de de rotation du moteur sera déterminé par le plus intense des deux courants. On peut ainsi rendre la position du curseur du potentiomètre proportionnelle à la tension y, pour cela, on alimente l'un des potentiomètres par une tension constante E, son curseur est à la tension αE et on applique périodiquement cette tension au moyen d'un vibreur à un amplificateur dont



l'autre entrée est reliée pendant l'autre moitié du temps à la tension y. Les bornes de sortie symétriques de cet amplificateur sont reliées aux enroulements du moteur. Si G est le gain de l'amplificateur, on a:

$$\overline{I_1 - I_2} = G(\alpha E - y)$$

Le moteur se met en mouvement dans un sens ou dans l'autre jusqu'à ce que $\overline{I_1 - I_2} = 0$, son arbre se stabilise donc à une position d'équilibre telle que $\alpha = y/E$ d'où les tensions recueillies sur les autres potentiomètres:

$$e_i = \alpha x_i = x_i \frac{y}{E}$$

Annexe II : ref.6, 8 et 7

Conception d'une machine analogique destinée à résoudre l'équation des oscillations de phase synchrotroniques.

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{B}{f_0(\alpha - b^2)}\left[\frac{\dot{\Phi}}{2\pi} - \delta t\right]\right\} = \frac{V}{\mathfrak{M}_0}\cos\Phi - \dot{B} \qquad (1)$$

I. Principe et remarques préliminaires.

1) Schéma de principe et équation résolue.

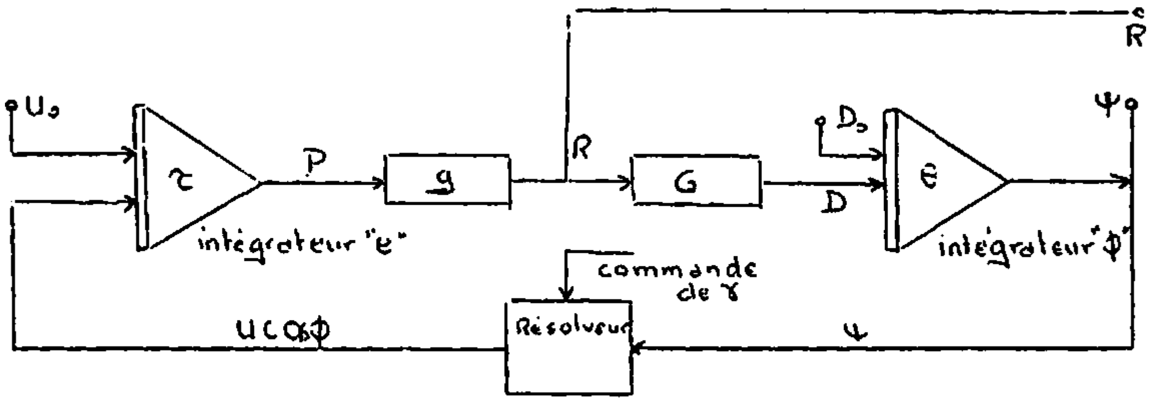


figure 50

Nous avons essentiellement deux intégrateurs sommateurs reliés d'une part par deux amplificateurs à gains variables g et G et d'autre part par un générateur de fonction trigonométrique.

Les relations élémentaires reliant les tensions aux divers points sont:

$$P = -\int_{t_0}^{t} \frac{u\cos\Phi}{\tau}\,dt - \int_{t_0}^{t} \frac{u_0}{\tau_0}\,dt - P_0 \qquad (2)$$

$$\Psi = -\int_{t_0}^{t} \frac{D}{\theta}\,dt - \int_{t_0}^{t} \frac{D_0}{\theta_0}\,dt - \Psi_0 \qquad (3)$$

$$R = -gP \quad \text{et} \quad D = -gGP \qquad (4)$$

$$\Psi = k\Phi \qquad (5)$$

τ et τ_0 (respectivement θ et θ_0) étant les constantes de temps relatives aux deux entrées de l'intégrateur "θ" (respectivement de l'intégrateur "ϕ").

En égalant les expressions de $\dot{P}$ tirées de (2) et (3), compte tenu de (4) et (5), nous obtenons l'équation différentielle que peut résoudre la machine:

$$\frac{d}{dt}\left|\frac{\theta}{gG}\left(k\dot{\phi}+\frac{D_0}{\theta_0}\right)\right| = -\frac{u}{\tau}\cos\phi - \frac{u_0}{\tau_0} \qquad (6)$$

qui a bien la même forme que (1).

Si nous voulons représenter rigoureusement les oscillations synchrotroniques dans notre machine, il suffit d'établir les correspondances (7).

$$(7) \quad \frac{\theta k}{gG} = \frac{B}{2\pi f_0(1-k^2)}\ , \quad \frac{\theta}{gG}\cdot\frac{D_0}{\theta_0} = -\frac{B}{f_0}\,\frac{\delta f}{1-k^2}\ ; \quad \frac{u}{\tau} = -\frac{V}{KL_0}\ , \quad \frac{u_0}{\tau_0} = \dot{B}$$

2) <u>Dilatation de l'échelle de temps.</u>

Si on vérifie les correspondances (7), nous aurons dans l'analogue une simultation exacte des oscillations de phase d'un proton dans le P.S., nous obtiendrons donc des oscillations de fréquence élevée telle que:

- il sera difficile d'en obtenir un enregistrement graphique, le servo-mécanisme commandant l'enregistreur ayant une vitesse de réponse limitée;
- il sera difficile d'introduire manuellement les perturbations dont nous voulons étudier les effets;
- il sera difficile d'établir une programmation de la machine.

Pour ces diverses raisons, on est conduit à dilater l'échelle du temps de la machine pour obtenir des fréquences plus basses. Des raisons purement techniques ont conduit à choisir le rapport:

$$t_a = \mathcal{T}\, t_{ps} \quad \text{avec} \quad \mathcal{T} = 9887$$

Alors un opérateur travaillant à 0,5 seconde près sur l'analogue équivaut à un programmateur travaillant à 50 µ seconde près sur le P.S.

Nous devons réécrire l'équation (6) dérivée cette fois par rapport à t_{ps}

$$\frac{1}{T}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{gG}\left[\frac{k}{T}\dot{\phi}+\frac{D_o}{\partial_o}\right]\right\} = -\frac{\mu\cos\phi}{\tau}-\frac{\mu_o}{\tau_o} \qquad (8)$$

et les correspondances à établir sont maintenant:

$$(9)\left|\begin{array}{ll}
\dfrac{1}{T^2}\dfrac{\partial k}{gG} = \dfrac{B}{2\pi f_o}\cdot\dfrac{1}{\alpha-k^2} & a) \\[2ex]
\dfrac{1}{T}\dfrac{\partial}{gG}\dfrac{D_o}{\partial_o} = -\dfrac{B}{f_o}\cdot\dfrac{\delta f}{\alpha-k^2} & b) \\[2ex]
\dfrac{\mu}{\tau} = -\dfrac{V}{RL_o} & c) \\[2ex]
\dfrac{\mu_o}{\tau_o} = \dot{B} & d)
\end{array}\right.$$

3) 3) <u>Conditions de fonctionnement du P.S. et de l'analogue.</u>

a) <u>Paramètres du P.S.</u>

$\alpha = 0{,}027$ $\qquad f_\infty = 9542650$ cycles/s

$m_oc^2 = 938{,}2$ Mev $\qquad L_o = 2\pi\,10^4$ cm $\qquad \cos\phi_o = 0{,}5$

$V = 108$ kv $\qquad R_o = 7.10^3$ cm

b) <u>Gamme de fonctionnement de l'analogue.</u>

Pour des raisons de simplicité, la machine ne simulera que la partie du cycle d'accélération comprise entre 3,75 et 13,13 GeV, partie qui englobe l'énergie de transition.

Un système de potentiomètres muni par un moteur à vitesse constante fait varier les gains g et G des amplificateurs de façon à assurer à chaque instant l'égalité des deux membres des relations 9a, et 9b, lors d'une variation linéaire de B.

La position du cadran des potentiomètres définit le rapport:

$$\gamma = \frac{E}{M.C^2}$$

On fera varier ce rapport entre les valeurs 4 et 14 en une heure, ce qui correspond aux limites de 3,75 et 13,13 GeV définies ci-dessus. L'énergie de transition correspond à $\gamma = 6.086$

c) Remarques.

- entre 3,75 et 13,13 GeV, le rapport $\beta = \frac{v}{c}$ varie de 0,968 à 0,999; on peut donc d'une part le considérer comme constant, et d'autre part remplacer f par f_∞ en ne commettant qu'une erreur inférieure à 3 o/o.

- la largeur de la chambre à vide étant de 14 cm et le diamètre de l'orbite de 400 mètres, nous ne commettrons qu'une erreur de 7 o/oo en assimilant L à L_0.

II. Paramètres de la machine analogique.

1) Considérations générales.

Nous voulons obtenir en $\mathcal{R}$ une tension proportionnelle à l'excursion radiale de la particule par rapport au centre de la chambre à vide. Des raisons techniques limitent en chaque point de l'analogue les tensions à ± 40 volts nous aurons donc 40 volts pour représenter une excursion de 7 cm

$$\frac{r}{\mathcal{R}} = 0{,}175 \ \text{cm/volts} \qquad (10)$$

Dans le P.S., nous aurons:

$$r = \frac{L - L_0}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{L_0}{p_0} \cdot (p - p_0)$$

$$\text{or} \quad p_0 = eBR. \quad \text{et} \quad B = \frac{mc\beta}{eR} \gamma.$$

d'où

$$r = \frac{\alpha L_0}{2\pi m c \beta} \cdot \frac{p - p_0}{\gamma}$$

La machine analogique donne: $\dot{P} = -g\,P$, il faut donc rendre P proportionnel à $p - p_0$, pour celà, nous devons prendre un gain g de la forme:

$$g = \frac{g_0}{\gamma}$$

et g doit être tel que l'amplificateur ne soit jamais saturé lorsque l'intégrateur "e" débite au maximum (P = ± 40 volts), donc $g \leqslant 1$ quelque soit γ , ceci nous conduit à prendre

$$g_0 = 4$$

Dans ces conditions, nous aurons

$$\frac{p - p_0}{P} = \frac{r}{R}\, g_0 \,\frac{2\pi m c \beta}{\alpha L_0} = 8.108 \cdot 10^{-5} \;\frac{eV/cm/s}{volts} \qquad (11)$$

D'autre part, dans notre cas, la relation

$$E = \frac{c^2}{v}\, p$$

se simplifie puisque nous avons supposée valable l'approximation $\beta = \frac{v}{c} \sim 1$

On peut donc considérer que P est proportionnel à la différence d'énergie entre la particule idéale et la particule étudiée d'où:

$$\frac{\Delta E}{P} = 2.432 \;\; \text{Mev/volts}$$

Dans le P.S., le gain d'énergie d'une particule par unité de temps est:

$$\frac{d}{dt_{ps}} E = eV \cos\phi \cdot \frac{f}{M} \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{dt_{ps}} \Delta E = eV \frac{f}{M} (\cos\phi - \cos\phi_0)$$

dans le modèle analogique, nous aurons:

$$\frac{d}{dt_0} P = -\frac{u \cos\phi}{\tau} - \frac{u_0}{\tau_0} \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt_{ps}} P = \frac{\mathcal{T} u}{\tau} \cos\phi - \frac{\mathcal{T} u_0}{\tau_0}$$

mais

$$\frac{d}{dt_{ps}} \Delta E = \frac{d}{dt_{ps}} \left| P \frac{\Delta E}{P} \right| = \frac{\Delta E}{P} \frac{d}{dt_{ps}} P$$

d'où en identifiant:

$$\frac{eVf}{M} = -\frac{\mathcal{T} u}{\tau} \cdot \frac{\Delta E}{P} \qquad \text{et} \qquad \frac{eVf}{M} \cos\phi_0 = \frac{\mathcal{T} u_0}{\tau_0} \cdot \frac{\Delta E}{P}$$

ce qui impose les valeurs des deux rapports:

$$\left| \begin{array}{ll} \mu/\tau = 2{,}143 \ \text{volts}/\mu & (13) \\ \mu_0/\tau_0 = 1{,}071 \ \text{volts}/\mu & (14) \end{array} \right.$$

2) <u>Vérification des conditions (9).</u>

Nous avons vu que pour avoir une analogie valable, nous devons vérifier les relations (9); or, il est évident que la valeur de μ/τ donnée par (13) ne peut être égale à V/L_0R_0 . Pour rétablir, l'analogie, nous emploierons l'artifice constituant à multiplier les deux membres de l'équation (8) par une constante η, les relations (9) deviennent alors:

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{\eta}{T^2} \cdot \frac{K\theta}{gG} = \frac{1}{2\pi f} \cdot \frac{B}{\alpha - b^2} & (15) \\ \frac{\eta}{T} \cdot \frac{\theta}{gG} \cdot \frac{D_0}{\mathcal{D}_0} = - \frac{B}{f} \frac{\delta f}{\alpha - b^2} & (16) \\ \eta \frac{\mu}{\tau} = - \frac{V}{R_0 L_0} & (17) \\ \eta \frac{\mu_0}{\tau_0} = \dot{B} & (18) \end{array} \right.$$

η est déterminé par les relations 17 et 13

$$\eta = 1{,}146 . 10^{-4} \ \%_{cm^2} \qquad (19)$$

On peut alors vérifier que la relation 18 est vérifiée avec cette valeur de η ($\dot{B}$ = 12000 gauss/μ) et la valeur μ_0/τ_0 donnée par 14 et ceci avec l'erreur de 3 o/o correspondant à l'approximation $f \approx f_\infty$

Nous devons maintenant vérifier la relation 15 qui s'écrit aussi

$$\frac{\eta}{T^2} \frac{\theta K}{gG} = \frac{1}{2\pi f_\infty} \cdot \frac{mc}{eR_0\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\gamma}\left|1 - \frac{1}{\alpha\gamma^2}\right|}$$

Nous choisirons alors un amplificateur de gain G tel que:

$$G = G_0 \left| 1 - \frac{1}{\alpha\gamma^2} \right|$$

La relation 15 sera alors vérifiée quelque soit γ si:

$$\frac{1}{f^2} \cdot \frac{K\theta}{q \cdot G_0} = \frac{1}{2\pi f_\omega} \cdot \frac{mc}{eR_0\alpha} \qquad (20)$$

K est déterminé par les caractéristiques du générateur de fonction, nous utilisons un résolveur pour lequel

$$K = 7 \text{ volts/radians}$$

La relation 20 donne alors:

$$\frac{\theta}{G_0} = 1.345 \text{ secondes}$$

III. Constituants de la machine. Calcul des constantes de temps.

1) Intégrateurs sommateurs.

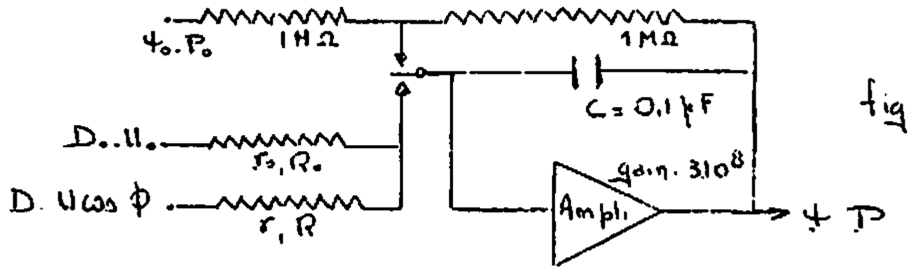


figure 51

Le schéma de principe est classique, un relai permet de démarrer l'intégration à partir de conditions initiales données $\psi_0 . P_0$

Nous avons: $\left| \begin{array}{l} \tau = RC \\ \tau_0 = R_0 C \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \theta = rC \\ \theta_0 = r_0 C \end{array} \right.$

2) Générateur de fonction.

Un générateur sinusoïdal (1 Kilocycle) déclenche un générateur d'impulsions. L'impulsion produite est déphasée d'une quantité proportionnelle à ψ et est utilisée pour découper la sinusoïde au moyen d'un modulateur à diodes.

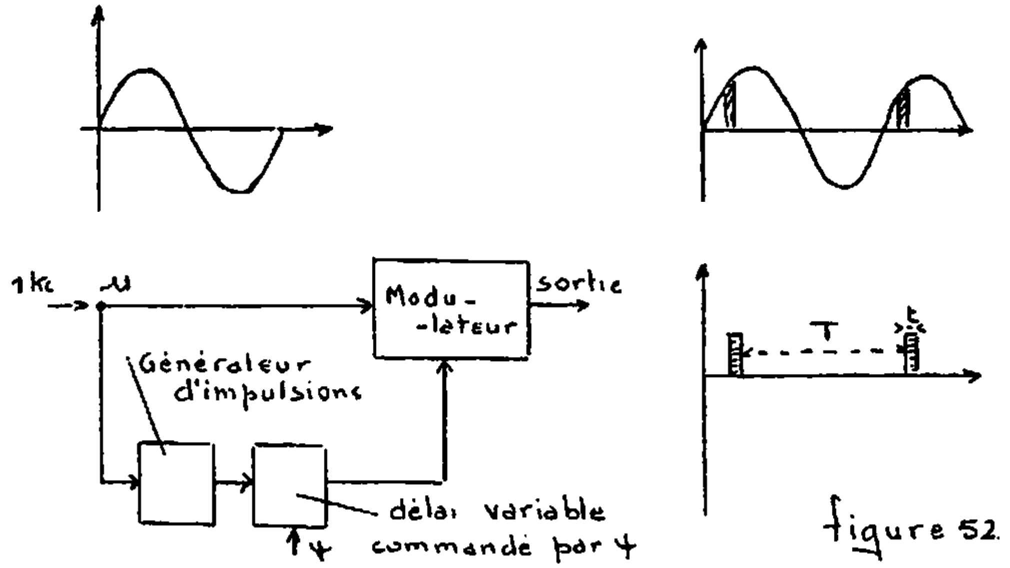


figure 52

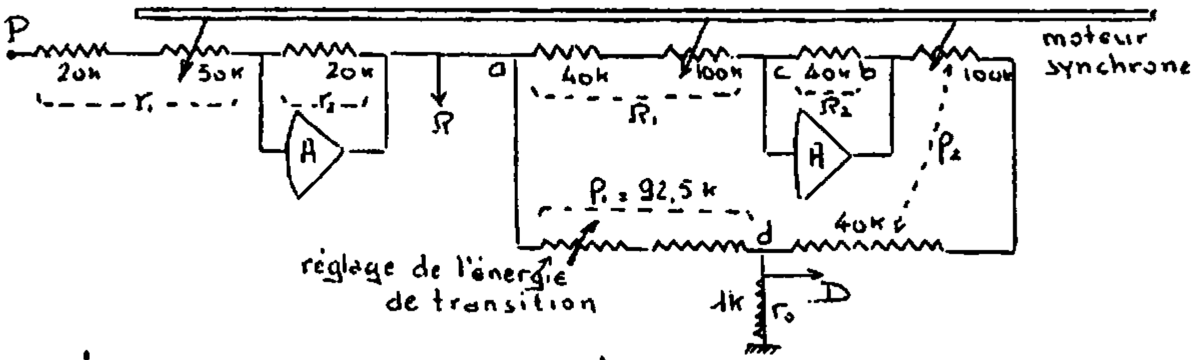
La valeur moyenne de la tension de sortie est:

$$u \frac{t}{T} \cos \frac{\psi}{k}$$

Les caractéristiques de l'appareil sont les suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} u = 11,25 \text{ volts} \\ t = 485\ \mu'' \\ T = 2\ m'' \end{array}\right\} \quad U = 2,728 \text{ volts} \ - \ k = 7 \ \frac{\text{volts}}{\text{radian}}$$

3) Amplificateurs g et G.



← Ampli g : R = gP →   ← Ampli G : D = GR →

figure 52

Fonctionnement de g (classique)

Nous avons évidemment:

$$\frac{R}{P} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{r_2}{r} \cdot \frac{1}{\gamma} = -\frac{g_0}{\gamma} \qquad \text{avec} \quad r_1 = r\gamma.$$

avec $r_2 = 20k$ et $r = 5$, nous avons bien $g_0 \doteq 4$

Fonctionnement de G (en pont)

Nous avons les relations élémentaires:

$$\frac{D}{\mathcal{R}} = \frac{\frac{1}{\rho_1}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{r_0}} \left[1 - \frac{\rho_1 R_2}{\rho_2 R_1}\right]$$

Nous prendrons

$$\rho_2 = R_1 = R\gamma$$

avec

$$\frac{R^2}{\rho_1 R_2} = \alpha$$

Nous obtenons alors

$$\frac{D}{\mathcal{R}} = \frac{r_0}{\rho_1 + r_0 (1 + \rho_1/\rho_2)} \left|1 - \frac{1}{\alpha\gamma^2}\right| = G_0 \left|1 - \frac{1}{\alpha\gamma^2}\right|$$

C'est bien ce que nous voulions.

Avec les valeurs du schéma, G_0 varie de $1,044.10^{-2}$ à $1,062.10^{-2}$ lorsque γ varie de 4 à 14 ; nous pouvons donc prendre pour G_0 la valeur

$$G_0 = 1,053\ 10^{-2}$$

4) Calcul des constantes de temps.

Nous savons que nous devons avoir:

$$\frac{u}{\tau} = 2,143 \text{ volts/u}$$

$$\frac{u_0}{\tau_0} = 1,071 \text{ volts/u} \qquad \text{comme} \left\{ \begin{array}{l} u = 2,428 \text{ volts} \\ G_0 = 1,053.10^{-2} \end{array} \right. \quad \text{on a}$$

$$\frac{\theta}{G_0} = 1,345 \text{ seconde}$$

$$\tau = 1,273 \text{ secondes}$$

$$\theta = 1,416.10^{-2} \text{ seconde}$$

Nous pouvons choisir τ_0 que nous prendrons égal à 1,82 seconde ce qui impose ($\Phi_0 = 60°$) la valeur de U_0 :

$$\tau_0 = 1,82 \text{ seconde}$$
$$U_0 = 1.95 \text{ volt}$$

IV. Règlage de la machine. Introduction des perturbations.

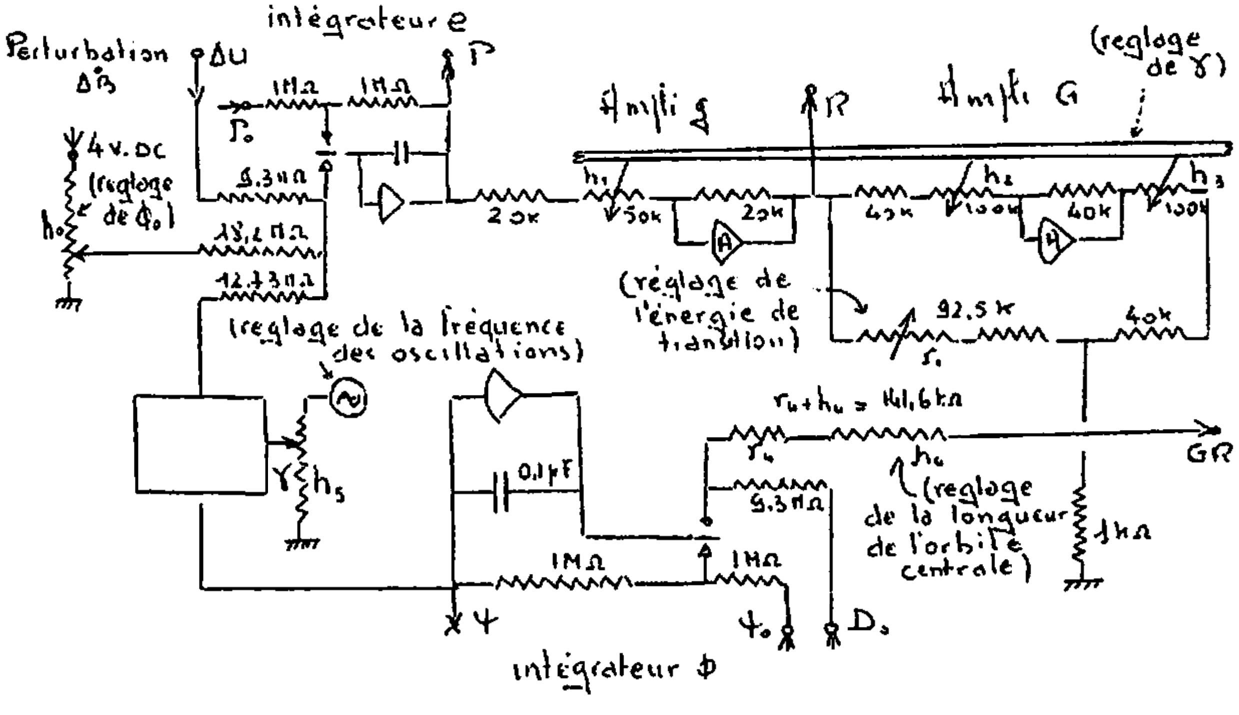


figure 54

1) Règlage de l'énergie de transition.

Nous avons déjà indiqué que l'énergie de transition correspond à:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = 6,036$$

Quand cette énergie est atteinte, nous avons $\dot{\Phi} = 0$ quelque soit ΔE. Le règlage s'effectue alors en plaçant le cadran commun des hélipots h_1, h_2 et h_3 sur la valeur 6,086 pour l'intégrateur "e" étant en position, conditions initiales avec $P_0 \neq 0$, en règlant la résistance r_1, jusqu'à ce que GR = 0.

2) Réglage de l'orbite centrale.

La différence Δp entre les impulsions de deux particules dont l'une décrit l'orbite centrale et l'autre une orbite excentrée de Δr et la différence ΔT entre leur temps de révolution sont telles que

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta L}{L_0} - \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\Delta r}{r_0}\left|1 - \frac{1}{\alpha \gamma^2}\right.$$

La variation de phase au bout d'un tour est:

$$\Delta\Phi = 2\pi M \frac{\Delta T}{T_0}$$

soit $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 2\pi M \dfrac{\Delta T}{T_0} \dfrac{f_0}{M}$ par unité de temps.

Nous en déduisons:

$$\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{2\pi f_0 \frac{\Delta r}{r}\left(1 - \frac{1}{\alpha\gamma^2}\right)}$$

L'onde accélératrice étant supprimée, le temps Δt au bout duquel $\Delta\Phi$ sera égal à π est:

$$\Delta t = \frac{1}{2 f_0 \left|1 - \frac{1}{\alpha\gamma^2}\right|}$$

spot numériquement $\Delta t = \dfrac{21.23}{\Delta r}$ secondes (pour $\gamma = 7$)

Pour règler la longueur de l'orbite, nous placerons donc le quadran des hélipots h_1, h_2 et h_3 à la valeur $\gamma = 7$ et les deux intégrateurs étant sur la position "conditions initiales", nous ajusterons R_0, de façon que l'enregistreur branché en R donne une excursion radiale de 1^{cm}.
L'intégrateur Φ étant alors mis en marche, on mesurera le temps nécessaire pour que l'intégrateur branché sur Ψ indique une variation de $\Phi = \pi$ et on règlera ce temps à 21,23 secondes au moyen de h_4.

3) Réglage de Φ_o.

L'intégrateur Φ étant en position "conditions initiales", on ajuste ψ_o pour avoir $\Phi = \Phi_o$; il reste à régler le potentiomètre h_e pour que la tension de sortie de l'intégrateur "e" reste constante.

4) Réglage de la fréquence des oscillations.

Ainsi réglée, la machine donne la période des petites oscillations de phase pour chaque valeur de γ. Si cette période n'est pas correcte, il faut retoucher la tension U au moyen de h_s (régler à nouveau Φ_o).
La période idéale des oscillations de faible amplitude est en fonction de γ :

γ	T_o
4	12.35
5	22.81
6	102.24

γ	T_o
7	37.89
8	30.83
9	28.81

γ	T_o
10	28.21
11	28.19
12	28.45

γ	T_o
13	28.87
14	29.43

5) Perturbations.

a. Erreur de fréquence.

En combinant 15 et 16 , nous obtenons:

$$\frac{\delta f}{f} = -\frac{2\pi}{f_o} \cdot \frac{\tau}{K} \cdot \frac{D_o}{\theta_o}$$

Nous choisirons θ_o de façon qu'à une variation de 1 volt de D_o corresponde une variation relative de δf égale à 10^{-3}; ceci nécessite

$$\theta_o = 0{,}93 \text{ seconde}$$

b. Erreur sur $\dot{B}$

On a prévu une entrée séparée sur l'intégrateur "e" pour introduire la perturbation $\Delta\dot{B}$; si τ_1 est la constante de temps de cette entrée et Δu la tension appliquée, nous aurons:

$$\frac{\Delta\dot{B}}{\dot{B}_o} = \frac{\Delta u}{U_o} \cdot \frac{\tau_o}{\tau_1}$$

Nous choisirons τ_1 de façon qu'à une variation de U de 10^{-2} v corresponde une variation relative de $\dot{B}$ égale à 10^{-2}; ceci nécessite:

$$\tau_1 = 0{,}93 \text{ seconde}$$

Annexe III

Intégrales

I. Calcul de l'intégrale. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\omega_0^4\, d\omega_K}{(\omega_K^2-\omega_0^2)^2+4m^2\omega_K^2}$

En effectuant le changement de variable $\omega_K = u\,\omega_0$ nous obtenons

$$\omega_0 \int_0^\infty \frac{du}{(u^2-1)^2+\lambda^2 u^2}$$

avec

$$\lambda^2 = \frac{4m^2}{\omega_0^2} < 1 \quad \text{en général}$$

mais

$$(u^2-1)^2+\lambda^2u^2 = u^4-(2-\lambda^2)u^2+1 = (u^2+1)^2-(4-\lambda^2)u^2$$

l'intégral devient

$$\omega_0 \int_0^\infty \frac{du}{(u^2+\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1)(u^2-\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1)}$$

ce qui s'écrit aussi:

$$\omega_0 \left| \int_0^\infty \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{u}{\sqrt{4-\lambda^2}}+1\right)du}{u^2+\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1} + \int_0^\infty \frac{1}{2}\,\frac{\left(-\frac{u}{\sqrt{4-\lambda^2}}+1\right)du}{u^2-\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1} \right|$$

soit

$$\omega_0 \left\{ \frac{1}{4\sqrt{4-\lambda^2}} \left[\int_0^\infty \frac{d(u^2+\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1)}{u^2+\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1} - \int_0^\infty \frac{d(u^2-\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1)}{u^2-\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left[\int_0^\infty \frac{du}{u^2+\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1} + \int_0^\infty \frac{du}{u^2-\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1} \right] \right\}$$

$$u^2 \pm \sqrt{4-\lambda^2}\, u + 1 = \left(u \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-\lambda^2}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4} .$$

$$\text{posons} \quad u \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-\lambda^2} = \frac{\lambda}{2} v$$

Nous obtenons finalement

$$\frac{\omega_0}{4\sqrt{4-\lambda^2}} \underbrace{\left[\operatorname{Log} \frac{u^2+\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1}{u^2-\sqrt{4-\lambda^2}\,u+1}\right]_0^\infty}_{0} + \frac{\omega_0}{4}\,\frac{2}{\lambda} \underbrace{\left\{ \left[\operatorname{Arctg} v\right]_{\frac{1}{\lambda}\sqrt{4-\lambda^2}}^{\infty} - \left[\operatorname{Arctg} v\right]_{-\frac{1}{\lambda}\sqrt{4-\lambda^2}}^{\infty} \right\}}_{\pi}$$

L'intégrale est donc égale à

$$\pi \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\omega_0^2}{2m} = \frac{\pi}{2} Q .$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega_0^4\, d\omega_k}{(\omega_k^2-\omega_0^2)^2 + 4m^2\omega_k^2} = \frac{\pi}{2} Q \qquad \text{avec} \qquad Q = \frac{\omega_0^2}{2m}$$

II. Calcul de l'intégrale. $\displaystyle\int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{u^2-\alpha}{\sqrt{u|u^2-1|}}\, du$

Nous devons séparer l'intégrale en deux parties, suivant que E/E_{tr} est ou non inférieur à l'unité.

1) $E \leqslant E_{tr}$. Nous avons $u \leqslant 1$

$$I_1 = \int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{u^2-\alpha}{\sqrt{u(1-u^2)}}\, du = \int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{-\frac{1}{3}\, d\, u(1-u^2) + \frac{1-3\alpha}{3\alpha}\, du}{\sqrt{u(1-u^2)}}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{u(1-u^2)}\right]_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} + \frac{1-3\alpha}{3\alpha}\int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{du}{\sqrt{u(1-u^2)}}$$

Nous reconnaissons une intégrale elliptique de première espèce que nous mettrons sous forme classique en posant:

$$u = 1 - v^2$$

Nous obtiendrons finalement:

$$I_1 = \int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{u^2 - \alpha}{\sqrt{u(1-u^2)}}\,du = \frac{2}{3}\Big|\sqrt{u(1-u^2)}\Big|_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} + \frac{\sqrt{2}(1-3\alpha)}{3}\int_{\sqrt{\frac{E_{tr}-E}{E_{tr}}}}^{\sqrt{\frac{E_{tr}-E_{inj}}{E_{tr}}}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{u^2}{2})}}$$

pour les valeurs de $E \leqslant E_{tr}$

Nous obtenons une fonction de E.

2) $\underline{E \geqslant E_{tr}}$. Nous avons $u \geqslant 1$

$$\int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} (\ ) = \int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{1} (\ ) + \int_{1}^{\frac{E}{E_{tr}}} (\ ) = I_1(E_{tr}) + \int_{1}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{u^2-\alpha}{\sqrt{u(u^2-1)}}\,du$$

Nous avons comme précédemment:

$$\int_{1}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{u^2-\alpha}{\sqrt{u(u^2-1)}}\,du = \int_{1}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{\frac{1}{3}\,d\,u(u^2-1)}{\sqrt{u(u^2-1)}} + \int_{1}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{\frac{1-3\alpha}{3}\,du}{\sqrt{u(u^2-1)}}$$

Nous obtenons encore une intégrale elliptique de première espèce que nous mettrons sous forme classique en posant cette fois:

$$u = \frac{2-v^2}{v^2}$$

Nous obtiendrons finalement:

$$I_2 = \int_{\frac{E_{inj}}{E_{tr}}}^{\frac{E}{E_{tr}}} \frac{u^2-\alpha}{\sqrt{u(u^2-1)}}\,du = I_1(E_{tr}) + \frac{2}{3}\Big|\sqrt{u(u^2-1)}\Big|_{1}^{\frac{E}{E_{tr}}} + \frac{\sqrt{2}(1-3\alpha)}{3}\int_{\sqrt{\frac{2E_{tr}}{E+E_{tr}}}}^{1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{u^2}{2})}}$$

pour les valeurs de $E \geqslant E_{tr}$

III. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\Delta\Phi} \text{Arccos}\frac{r}{\Delta\Phi}\,dr$

Effectuons le changement de variable:

$$\frac{r}{\Delta\Phi} = \cos u$$

Nous obtenons:

$$-\int_0^{\pi/2} \Delta\Phi \cdot u \, d\cos u$$

Intégrons par parties; nous obtenons:

$$\underbrace{-\Delta\Phi\left[u\cos u\right]_0^{\pi/2}}_{0} + \underbrace{\Delta\Phi\int_0^{\pi/2}\cos u\,du}_{\Delta\Phi\left[\sin u\right]_0^{\pi/2}}$$

Finalement

$$\int_0^{\Delta\Phi}\text{Arccos}\frac{r}{\Delta\Phi}\,dr = \Delta\Phi .$$

IV. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{\rho_0-\Delta\Phi}^{\rho_0} \rho\,\text{Arccos}\frac{\rho_0^2-\rho^2-\Delta\Phi^2}{2\rho\Delta\Phi}\,d\rho$

Intégrons par parties, nous obtenons:

$$I = \underbrace{\left[\frac{\rho^2}{2}\text{Arccos}\frac{\rho_0^2-\rho^2-\Delta\Phi^2}{2\rho\Delta\Phi}\right]_{\rho_0-\Delta\Phi}^{\rho_0}}_{A} - \underbrace{\int_{\rho_0-\Delta\Phi}^{\rho_0}\frac{\rho^2}{2}\,d\,\text{Arccos}\frac{\rho_0^2-\rho^2-\Delta\Phi^2}{2\rho\Delta\Phi}}_{B}$$

$$B = \frac{1}{4}\int_{\rho_0-\Delta\Phi}^{\rho_0}\frac{\rho^2+\rho_0^2-\Delta\Phi^2}{\sqrt{4\rho^2\Delta\Phi^2-(\rho_0^2-\rho^2-\Delta\Phi^2)^2}}\,d\rho^2$$

mais $4\rho^2\Delta\Phi^2-(\rho_0^2-\rho^2-\Delta\Phi^2)^2 = 4\rho_0^2\Delta\Phi^2-(\rho^2-\rho_0^2-\Delta\Phi^2)^2$

nous poserons donc

$$z(2\rho_0\Delta\Phi) = \rho^2-\rho_0^2-\Delta\Phi^2$$

L'intégrale devient:

$$B = \frac{1}{4}\int_{-1}^{-\frac{\Delta\phi}{2\rho_0}} \frac{2\rho_0\Delta\phi\, z + 2\rho_0^2}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\rho_0^2 \operatorname{Arcsin} z - 2\rho_0\Delta\phi\sqrt{1-z^2}\right]_{-1}^{-\frac{\Delta\phi}{2\rho_0}}$$

Nous devons choisir

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq \operatorname{Arccos} \leq \pi$$

$$I = A + B = \frac{\rho_0^2}{2}\left[\operatorname{Arcsin}(-1) + \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\Delta\phi}{2\rho_0}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\Delta\phi}{2\rho_0}\right)\right] + \frac{\Delta\phi}{4}\sqrt{4\rho_0^2 - \Delta\phi^2}$$

Finalement après réduction:

$$\int_{\rho_0-\Delta\phi}^{\rho_0} \rho \operatorname{Arccos}\frac{\rho_0^2 - \rho^2 - \Delta\phi^2}{2\rho\Delta\phi}\, d\rho = \rho_0^2 \operatorname{Arcsin}\frac{\Delta\phi}{2\rho_0} + \frac{\Delta\phi}{4}\sqrt{4\rho_0^2 - \Delta\phi^2}\,.$$

Références

1. E.Regenstreif: "Le Synchrotron à Protons du CERN" (1ère partie) CERN 58-6a.

2. K.Johnson: "Synchrotron oscillations". Minutes of CERN-PS (89) Staff Meeting. Feb. 12th, 1957 (non publié).

3. M.Barbier et A.Schoch: "Study of two-dimensional non-linear oscillations by means of an electromechanical analogue model, applied to particle motion in circular accelerators". CERN 58-5.

4. R.Gabillard: Communications privées.

5. Ch.Schmelzer: "Principle of an electronic analogue of the phase motion in radio-frequency accelerators" . CERN-PS/CS 16. Mars 1956 (non publié).

6. R.Gabillard: "Minutes of CERN-PS Staff Meeting (93)." Avril 1956 (non publié).

7. J.Leroux: "Générateur de bruit électrique 0-40 c/s". PS/Int- RF 58-12; R.F.Note No.29 (non publié).

8. R.Gabillard: Communications privées.

9. R.Gabillard:

10. R.Gabillard: "Anisochronisme des oscillations de phase du Synchrotron". CERN-PS/RF Note No.18 (1957).

11. R.Gabillard: "Surface des diagrammes de Phase". CERN-PS/RF Note No.24 (1958).

12. A.M. Liapounov: "Problème général de la stabilité du mouvement". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 1907.

13. W.Schottky: "Ueber spontane Stromschwankungen". Annalen der Physik. 57.541 (1918).

14. R.Keller: "Determination of the orbits in a strong focusing Synchrotron". (non publié). Genève April 29th. 1953. Institut de Physique. Université, Genève.

Bibliographie

1. Bohm D. and Foldy L. :Phys. Rev. 70. 249 (1946). "The theory of the Synchrotron".

2. Kerst D.W., Symon K.R., Laslett L.S., Jones L.W. and Terwillinger K.M. Symposium CERN 1956-32. "Fixed Field, alternating gradient particle accelerators".

3. Symon K.R. and Sessler A.M.: CERN Symposium 1956-44. "Method lf radio-frequency accelrators with application to high current and intersecting beam accelerators".

4. Steinwedel H.:CERN 56-20. "Particle orbits in circular accelerators".

5. Hereward H.G., Johnson K. : CERN-PS/HGH.KJ 1, mars 1957. "On the phase equations for synchrotrons".

6. Johnson K.: CERN-PS/KJ-11, 1952. "Phase oscillations".

7. Vogt-Nilsen N. et Pentz M.J. :

   CERN-PS/NVN 1. Fév. 1958
   CERN 58-9
   CERN 58-10

   "Study program of beam stacking processing".

8. Bodenstedt E. : Ann. Phys. (Leipzig) 15. No.1.35.54 (1954). : "On the phase Oscillations of a strong focusing synchrotron (an investigation using a mechanical analogue machine)".

9. Goldin L.L. and Kostiarev D.G. : Nuovo-Cimento (10) 2 1251-68 (1955) "Synchrotron oscillations in strong focusing accelerators".

10. Green G.K. : Symposium CERN 1956-103.

11. Regenstreif E. : Minutes of CERN-PS Staff Meeting (89) (12th.Feb.1957). "Synchrotron oscillations".

12. Blachman N.M. : The Review of Scientific Instruments. Vol.23 No.5. 250. May 1952. "Synchrotron oscillation resonance".

13. Blachman N.M. : The Review of Scientific Instruments. Vol.21 No.11. 908.911 Nov. 1950) "Synchrotron oscillation resonances".

/jdw
PS/699

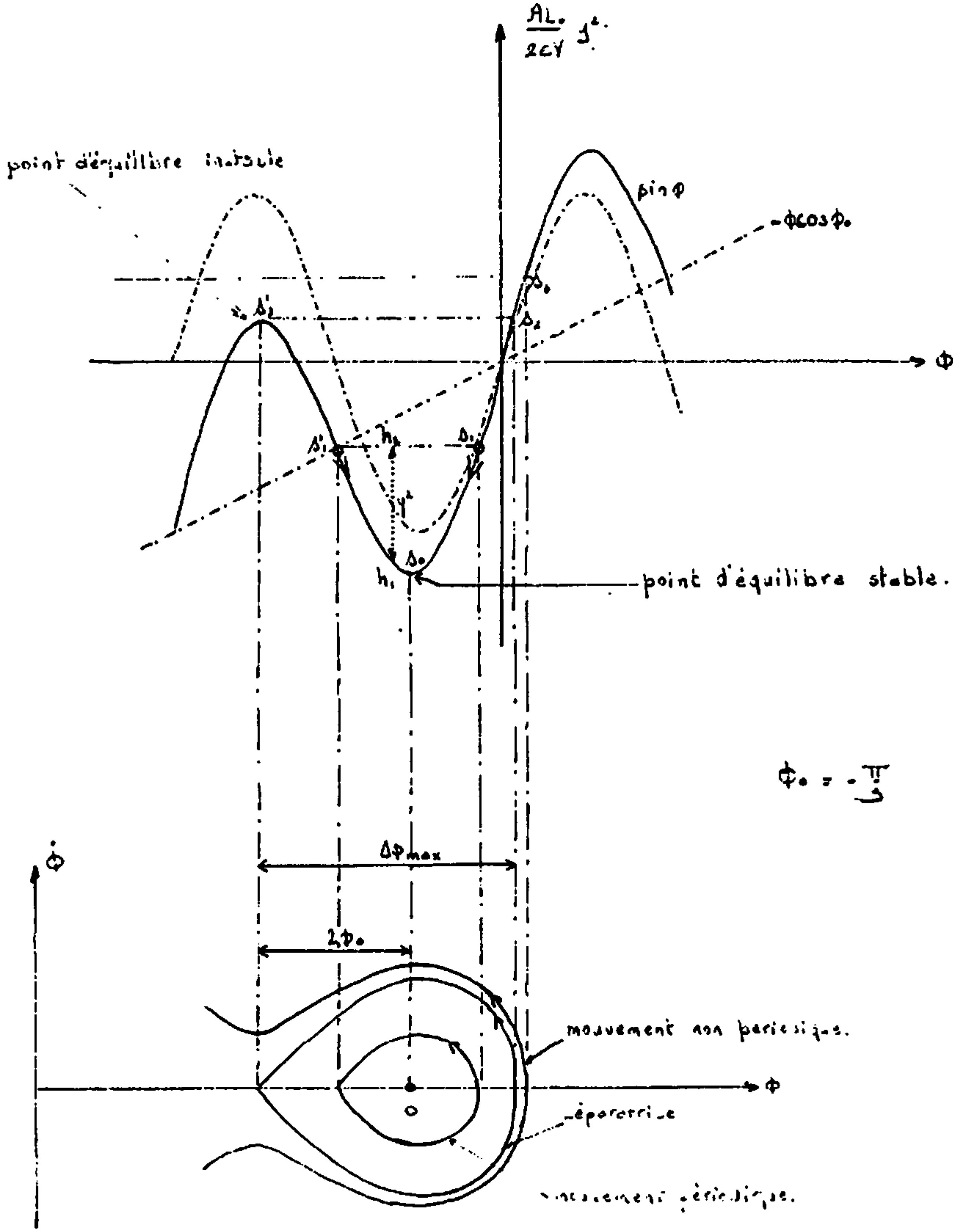
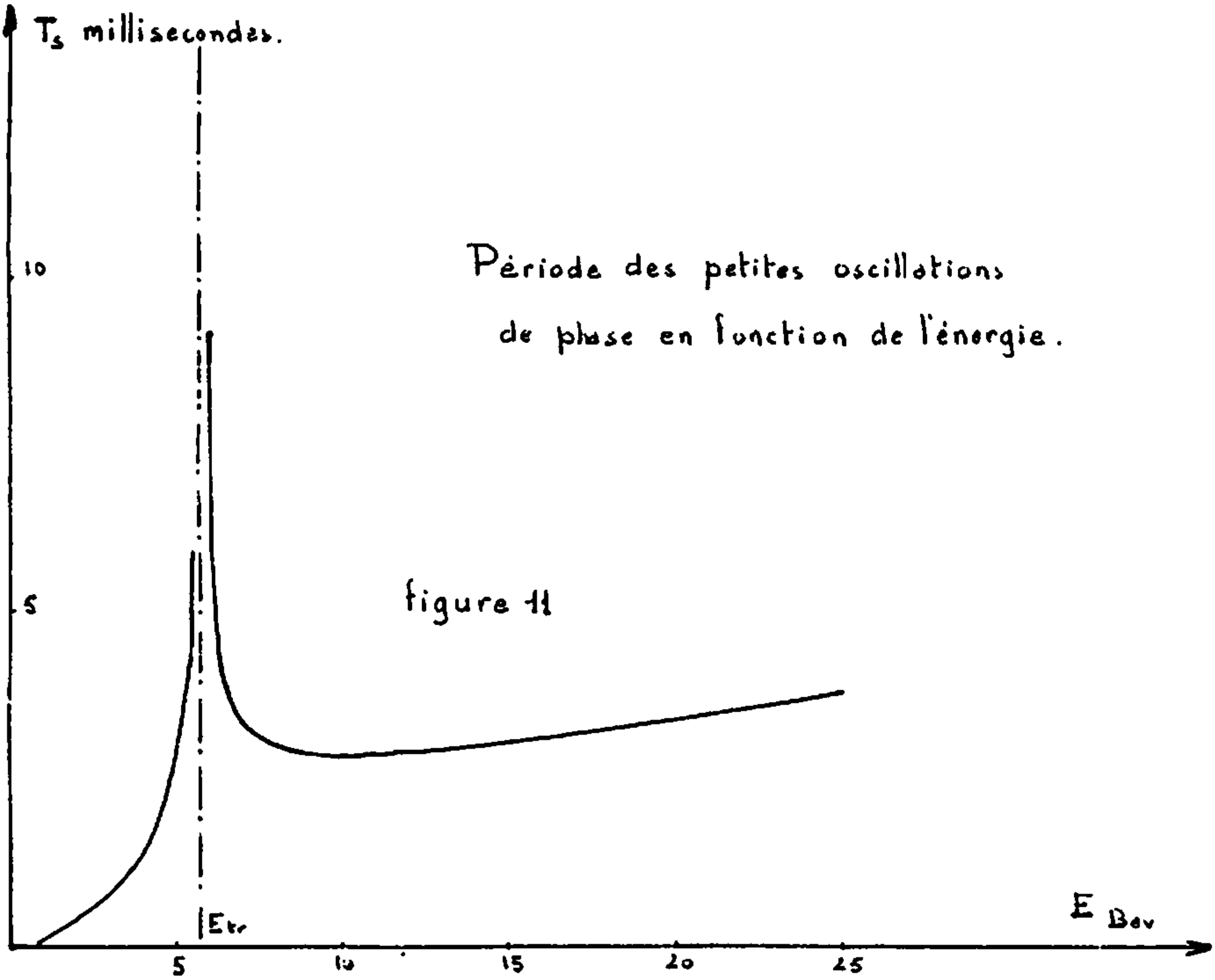
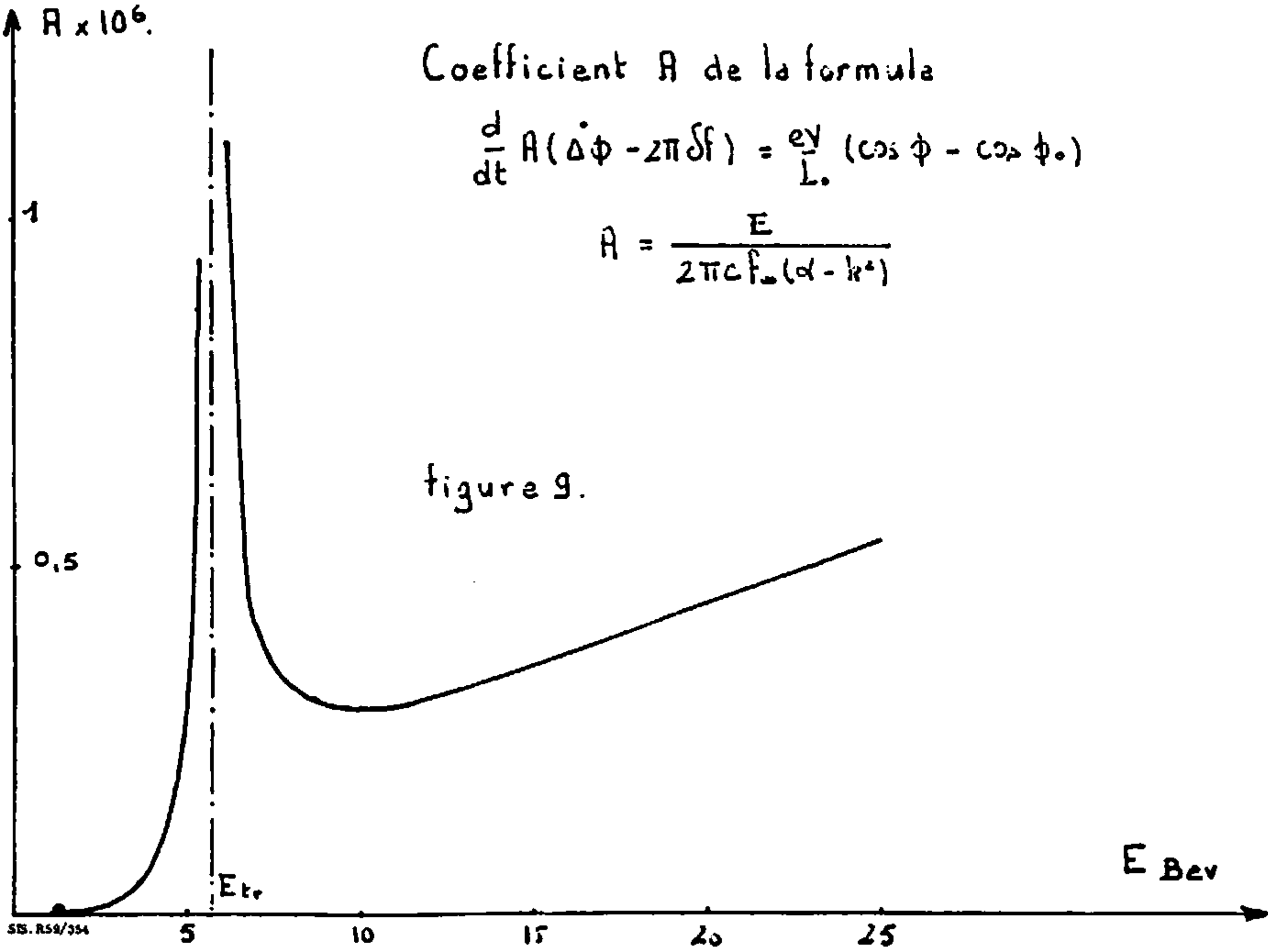


figure 4.

SIS. R59/352


T_s millisecondes.
Période des petites oscillations de phase en fonction de l'énergie.
figure 11
10
5
E_{tr}
E Bev
5
10
15
20
25


$A \times 10^6$.
Coefficient A de la formule
$\frac{d}{dt} A(\Delta\dot{\phi} - 2\pi\delta f) = \frac{eV}{L_0}(\cos\phi - \cos\phi_0)$
$A = \frac{E}{2\pi c f_\infty(\alpha - k^2)}$
figure 9.
1
0,5
E_{tr}
E Bev
5
10
15
20
25

SIS. R59/354

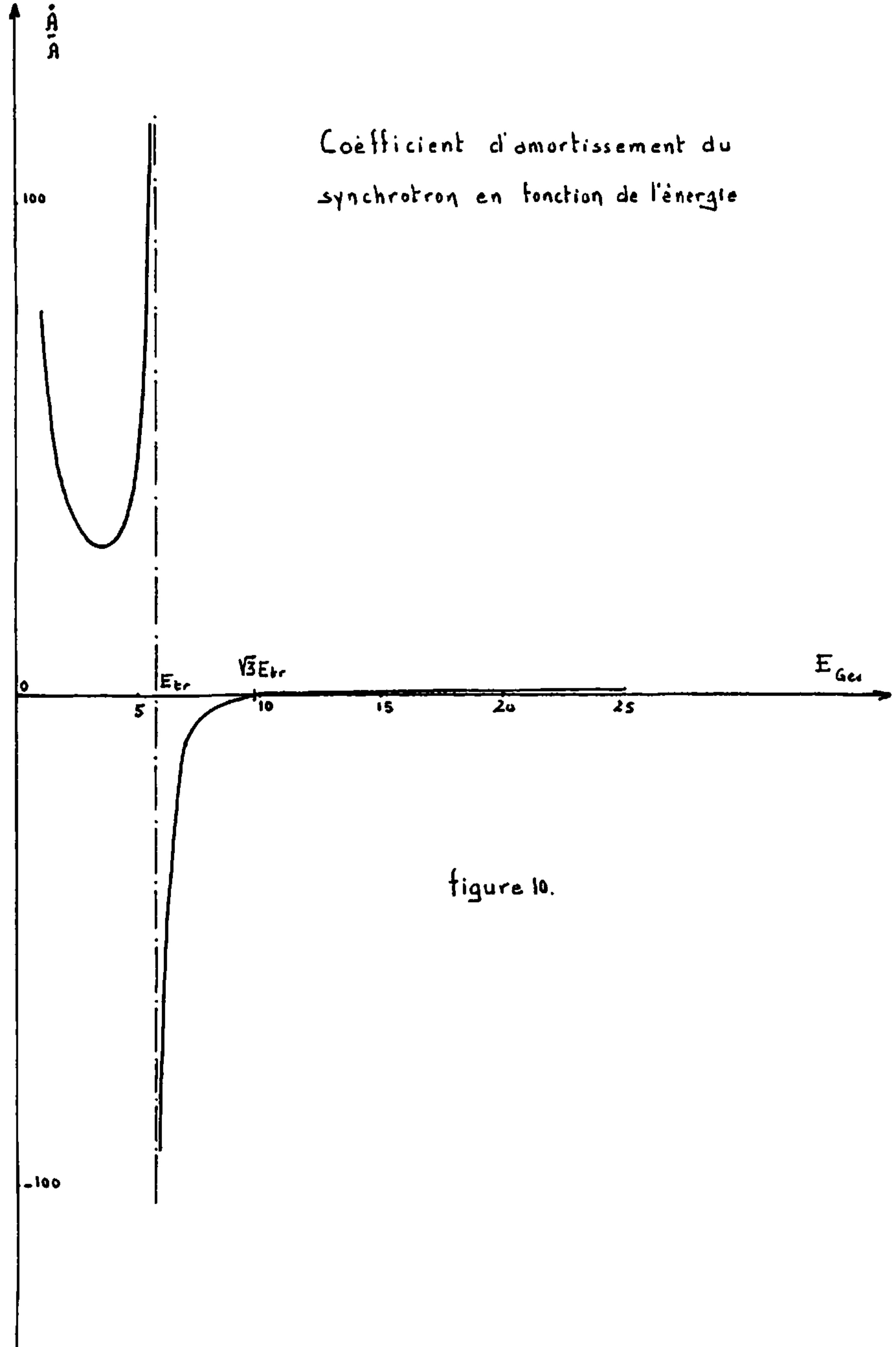
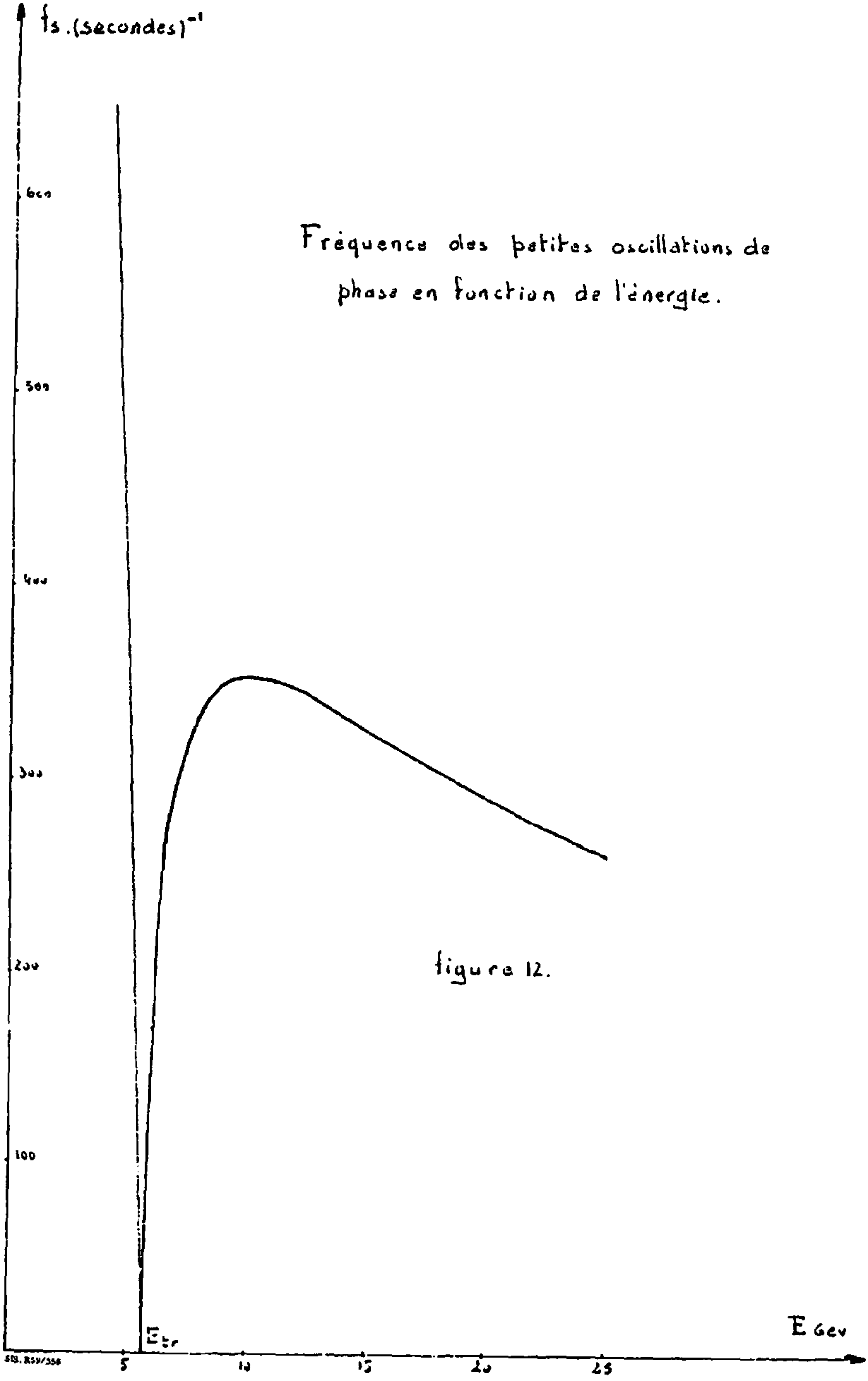


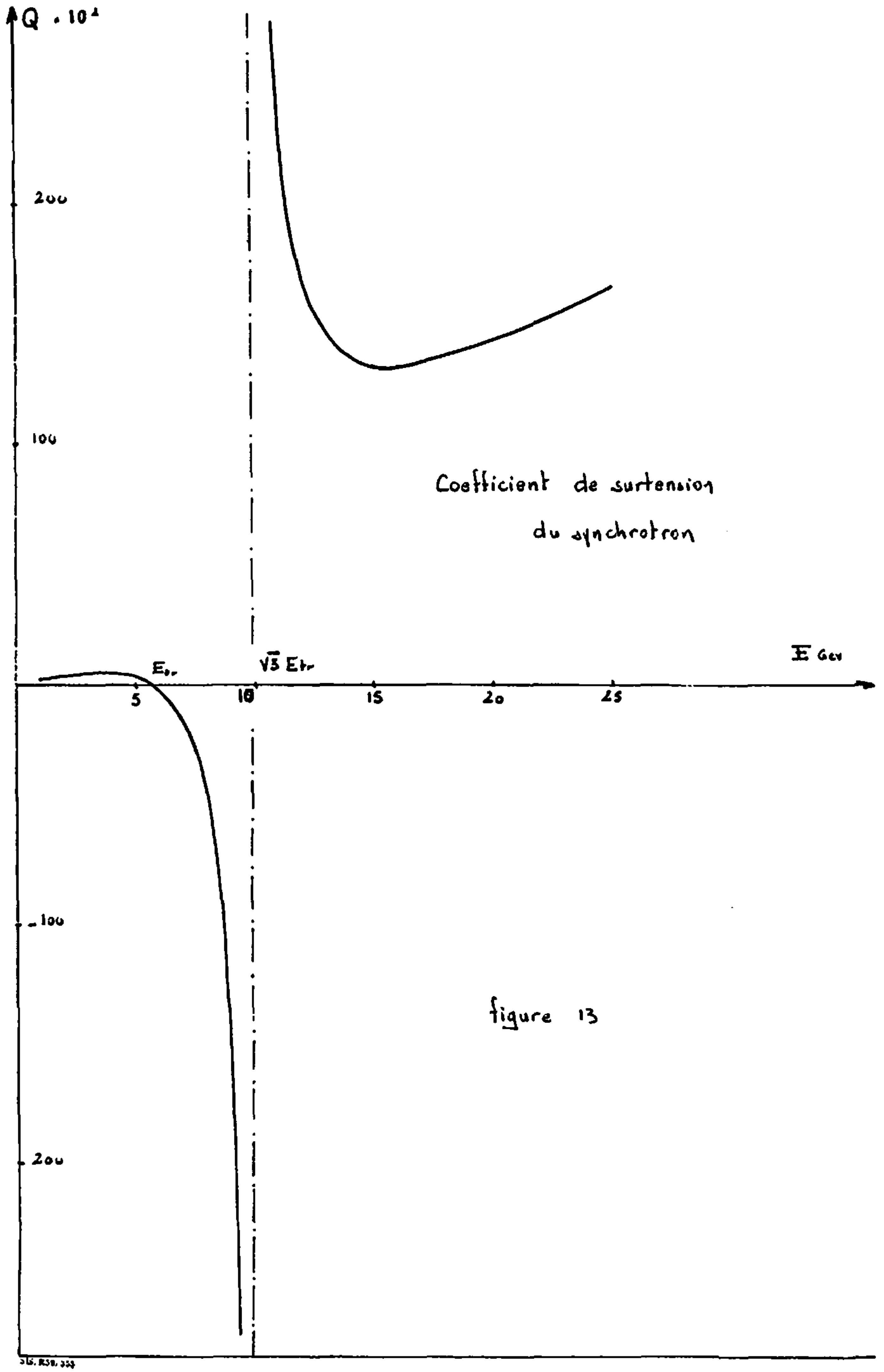
figure 10.

SIS. R59/353



Fréquence des petites oscillations de phase en fonction de l'énergie.

figure 12.


Q . 10²
200
100
-100
200
E Gev
5
10
15
20
25
Etr
√3 Etr
Coefficient de surtension
du synchrotron
figure 13

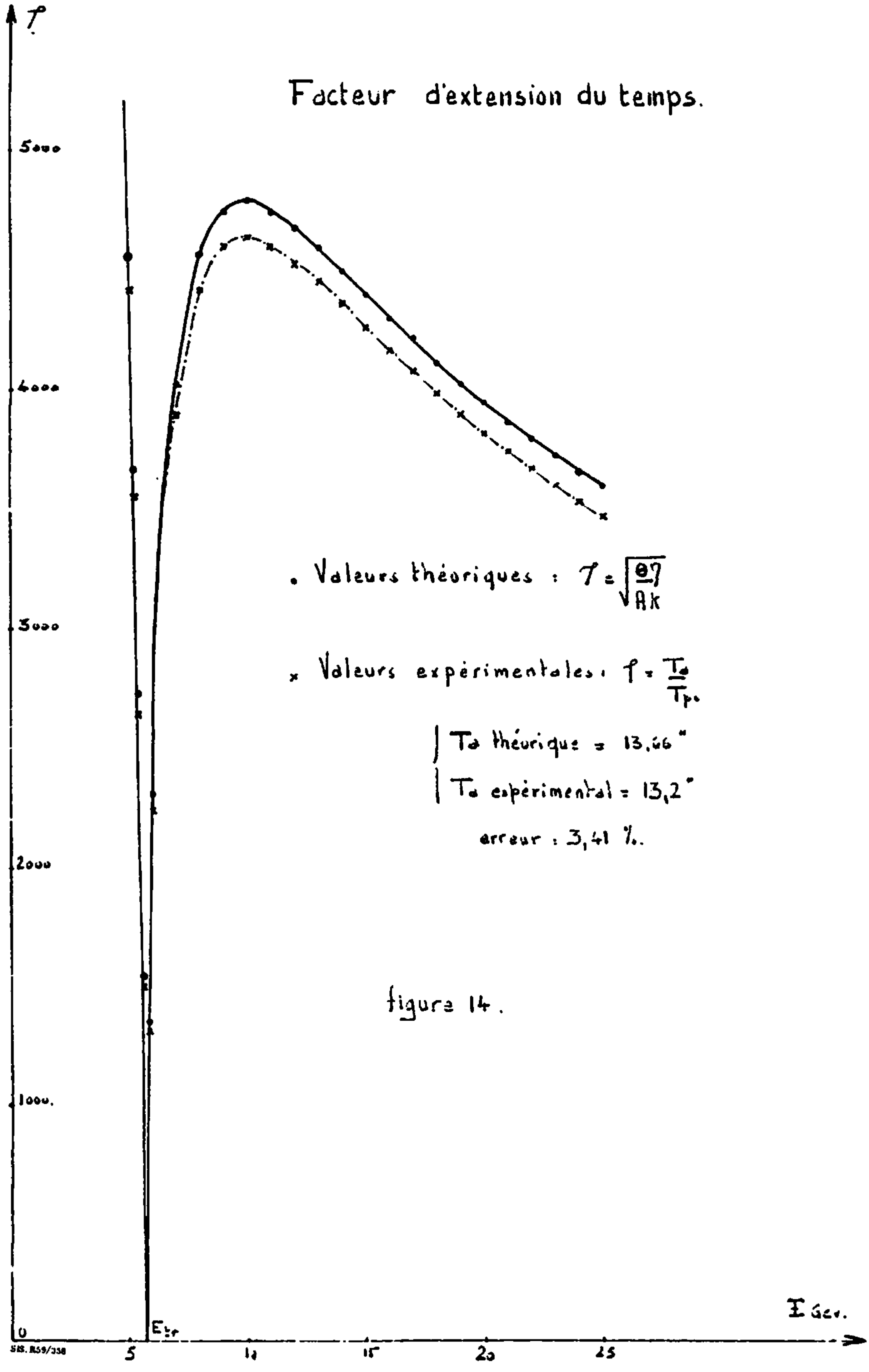
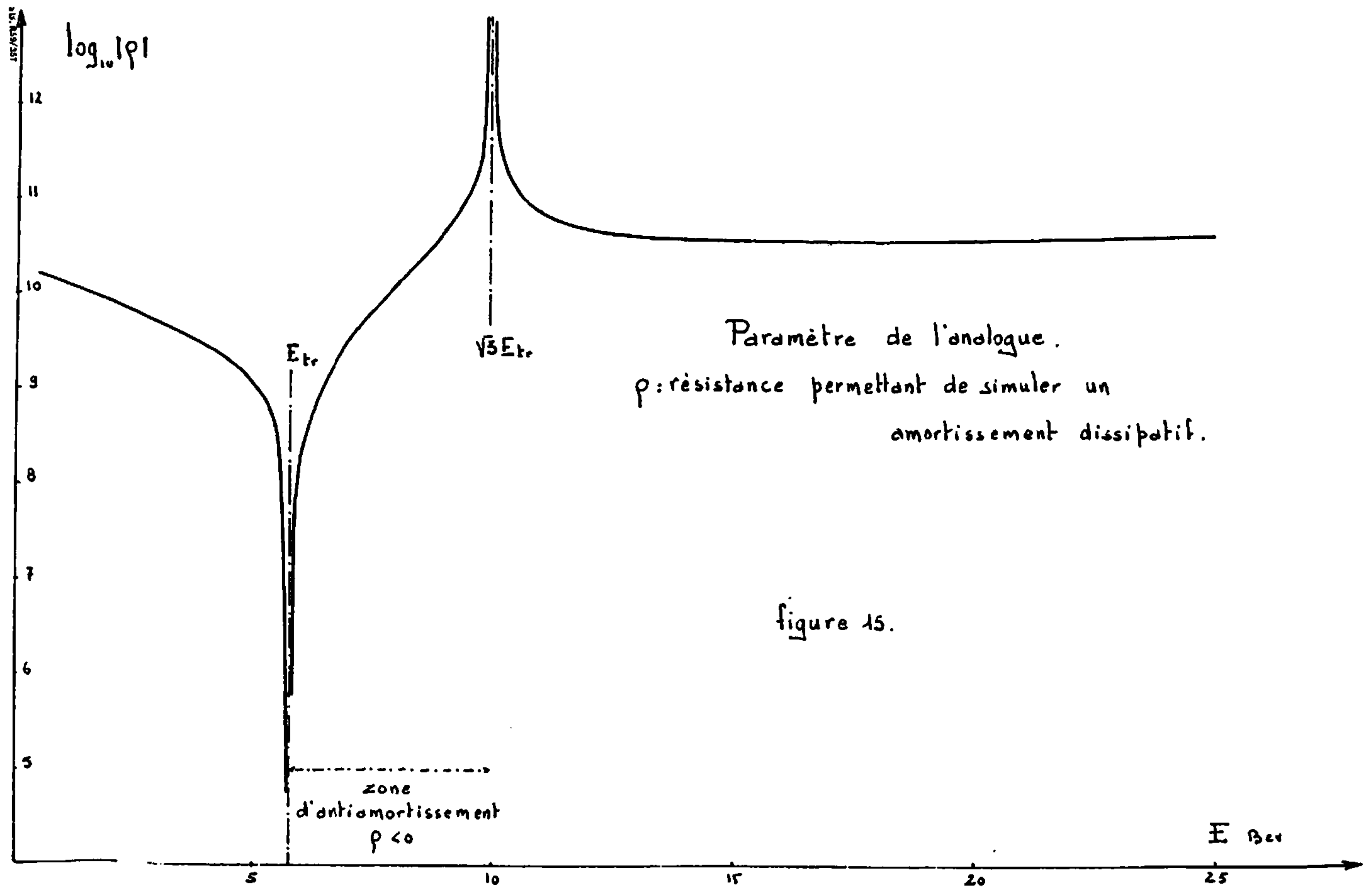

Facteur d'extension du temps.
τ
5000
4000
3000
2000
1000.
0
. Valeurs théoriques : $\tau = \sqrt{\frac{e\eta}{AK}}$
x Valeurs expérimentales : $\tau = \frac{T_0}{T_p}$
T_0 théorique = 13,66"
T_0 expérimental = 13,2"
erreur : 3,41 %.
E_{tr}
5
10
15
20
25
E Gev.

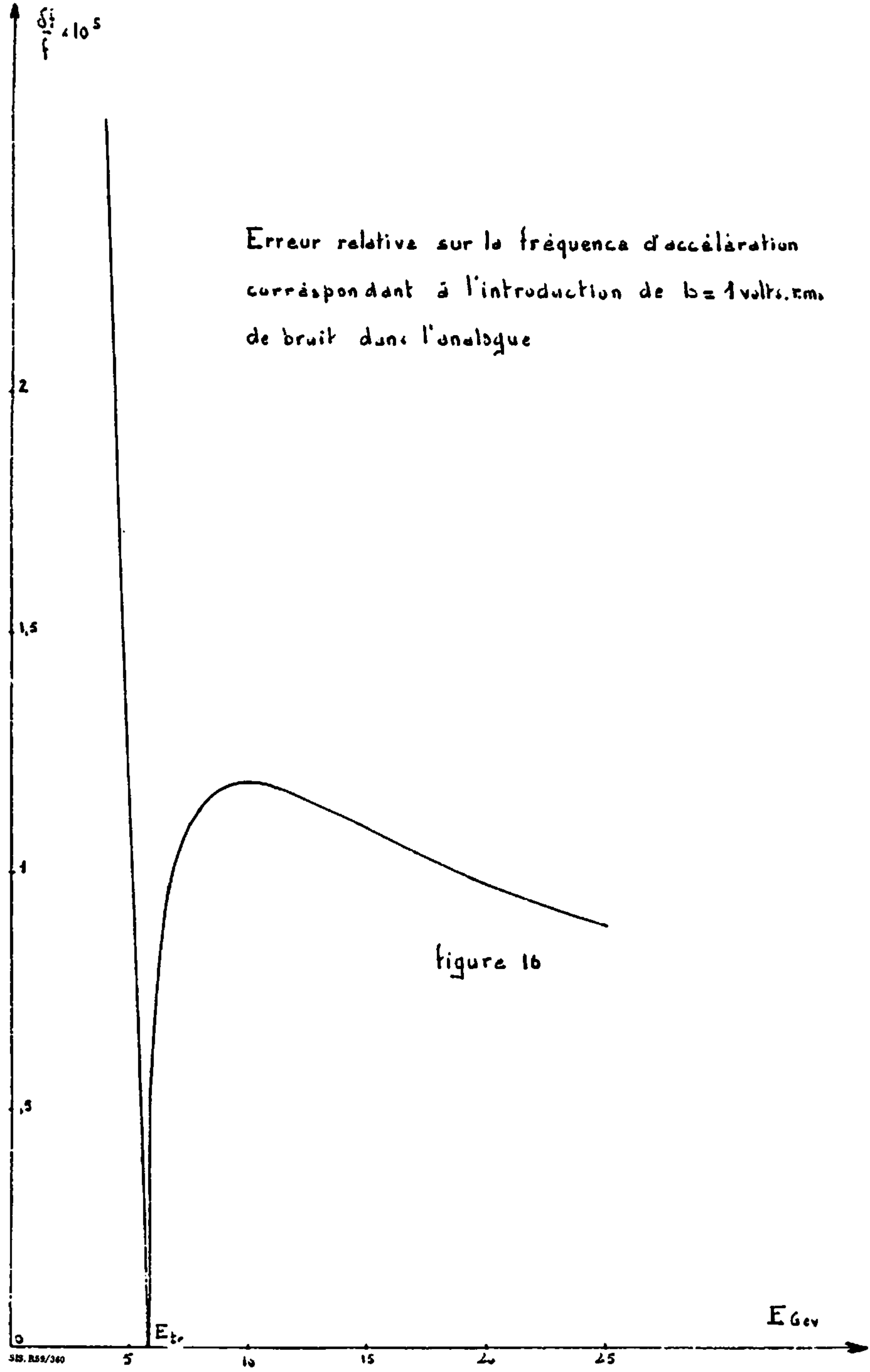
figure 14.



Paramètre de l'analogue.

ρ : résistance permettant de simuler un amortissement dissipatif.

figure 15.



Erreur relative sur la fréquence d'accélération correspondant à l'introduction de b = 1 volts r.m.s de bruit dans l'analogue

figure 16

Axe $\frac{\Delta E}{E_0}$ étalonné pour une énergie de 13,75 GeV

(zone après transition).

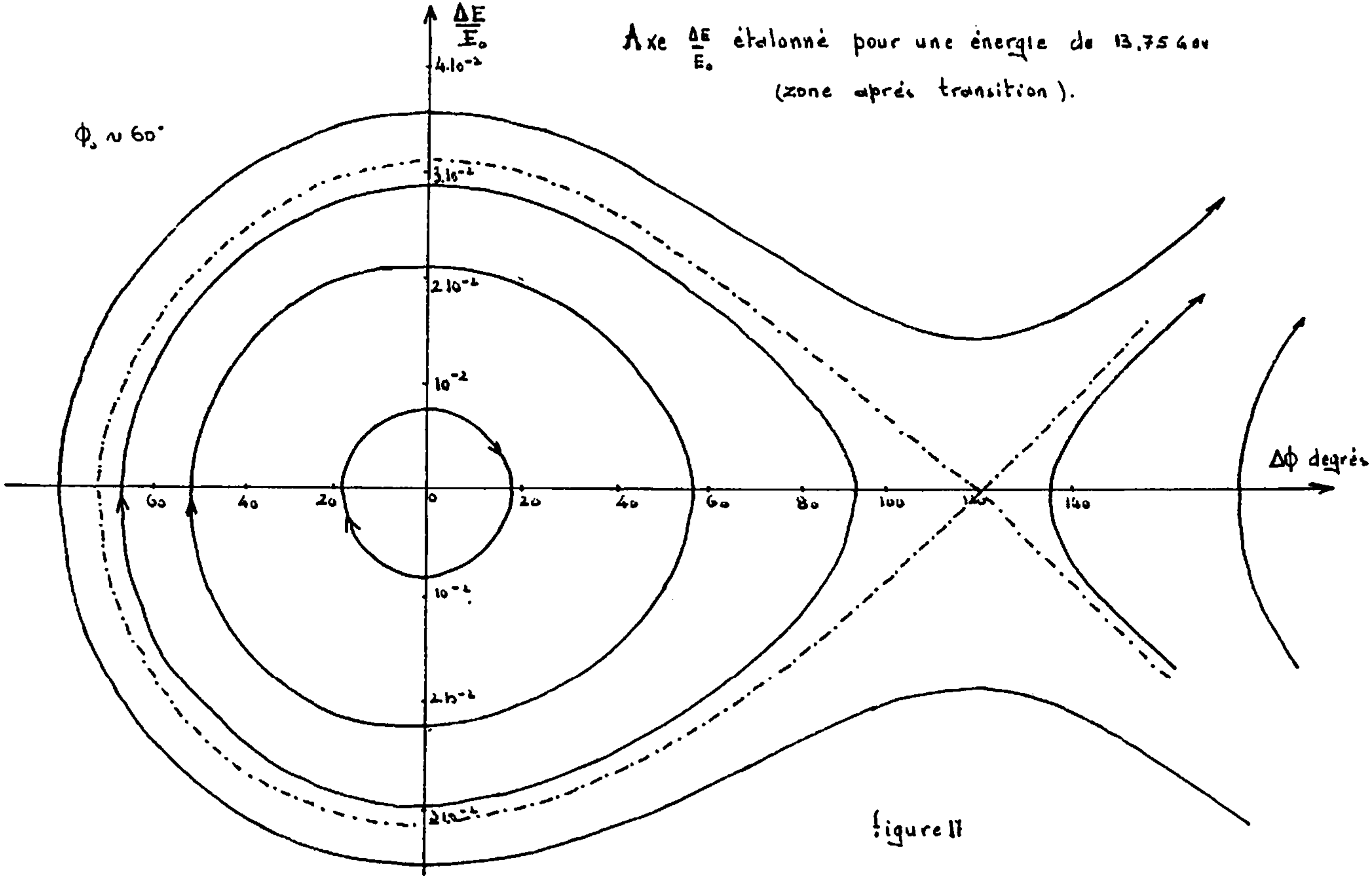


figure 11

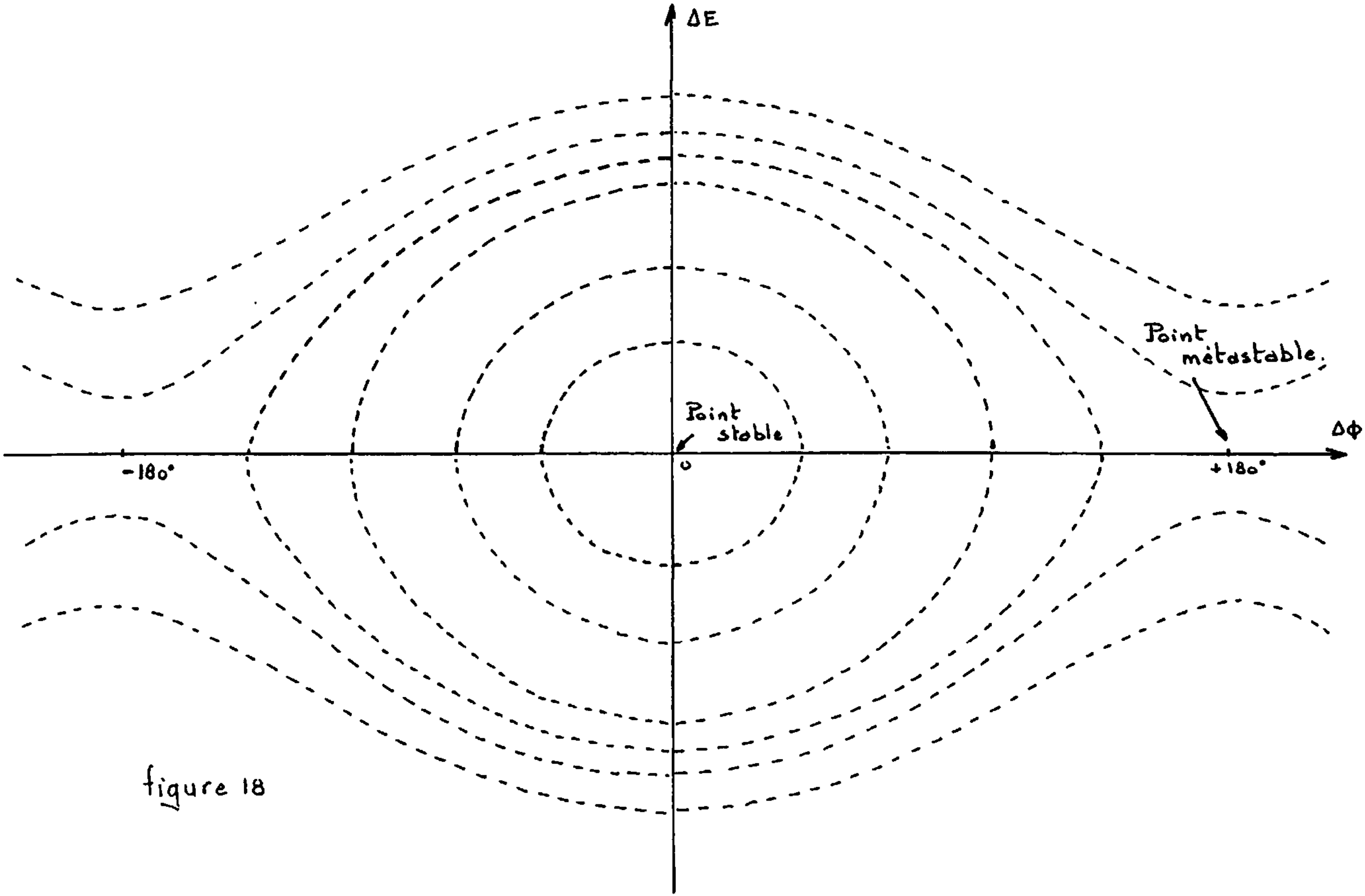
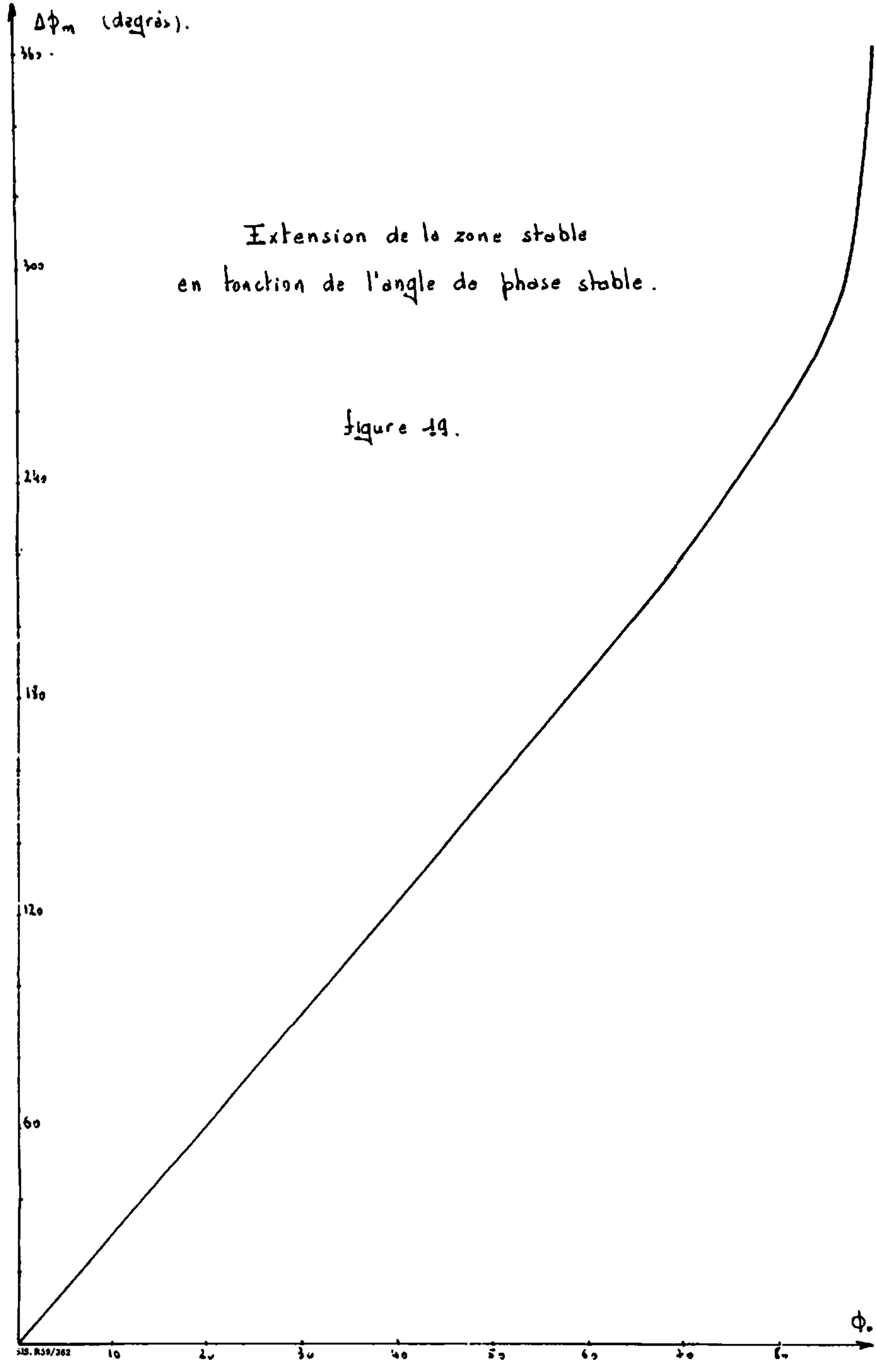


figure 18



Extension de la zone stable
en fonction de l'angle de phase stable.

figure 19.

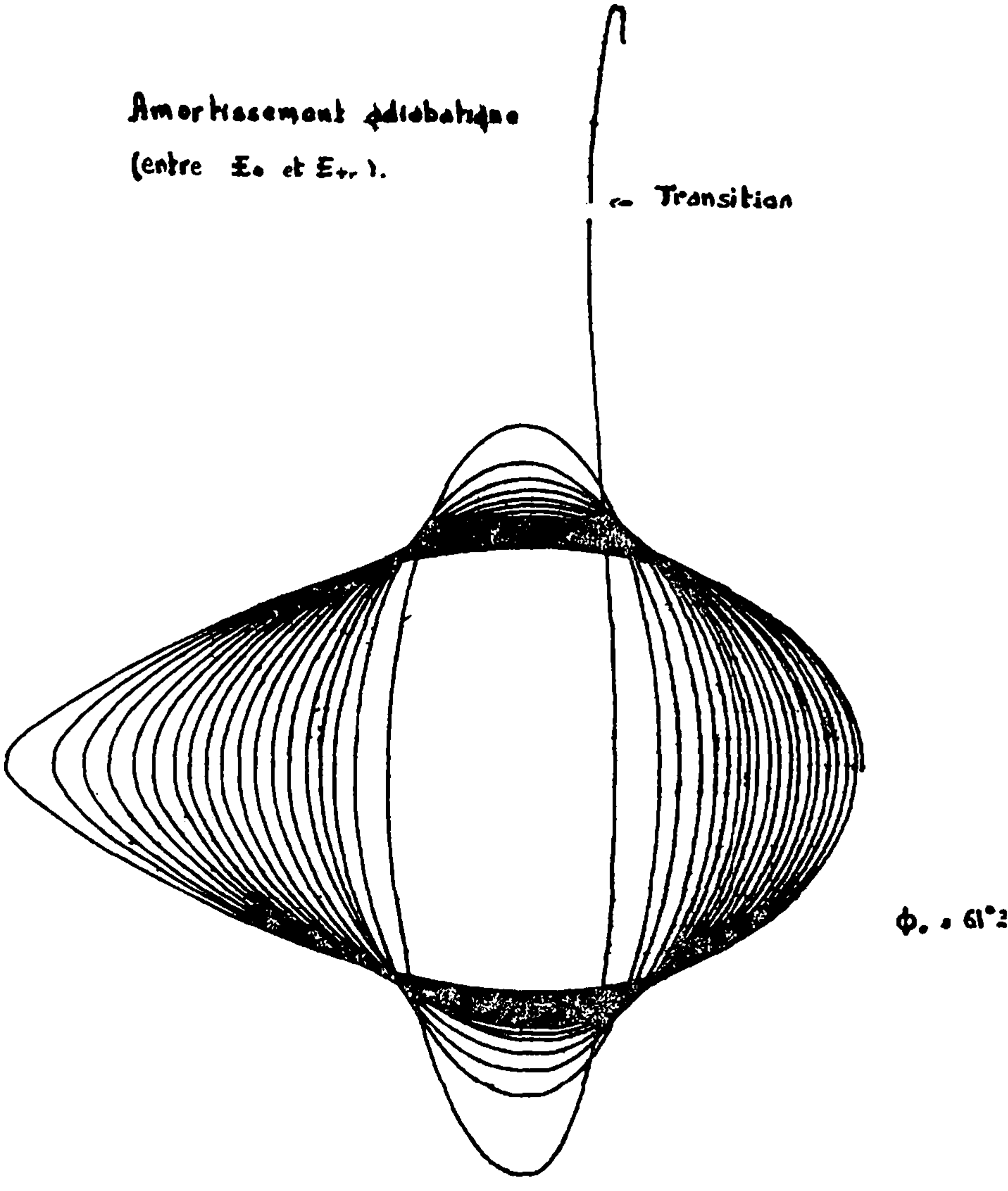
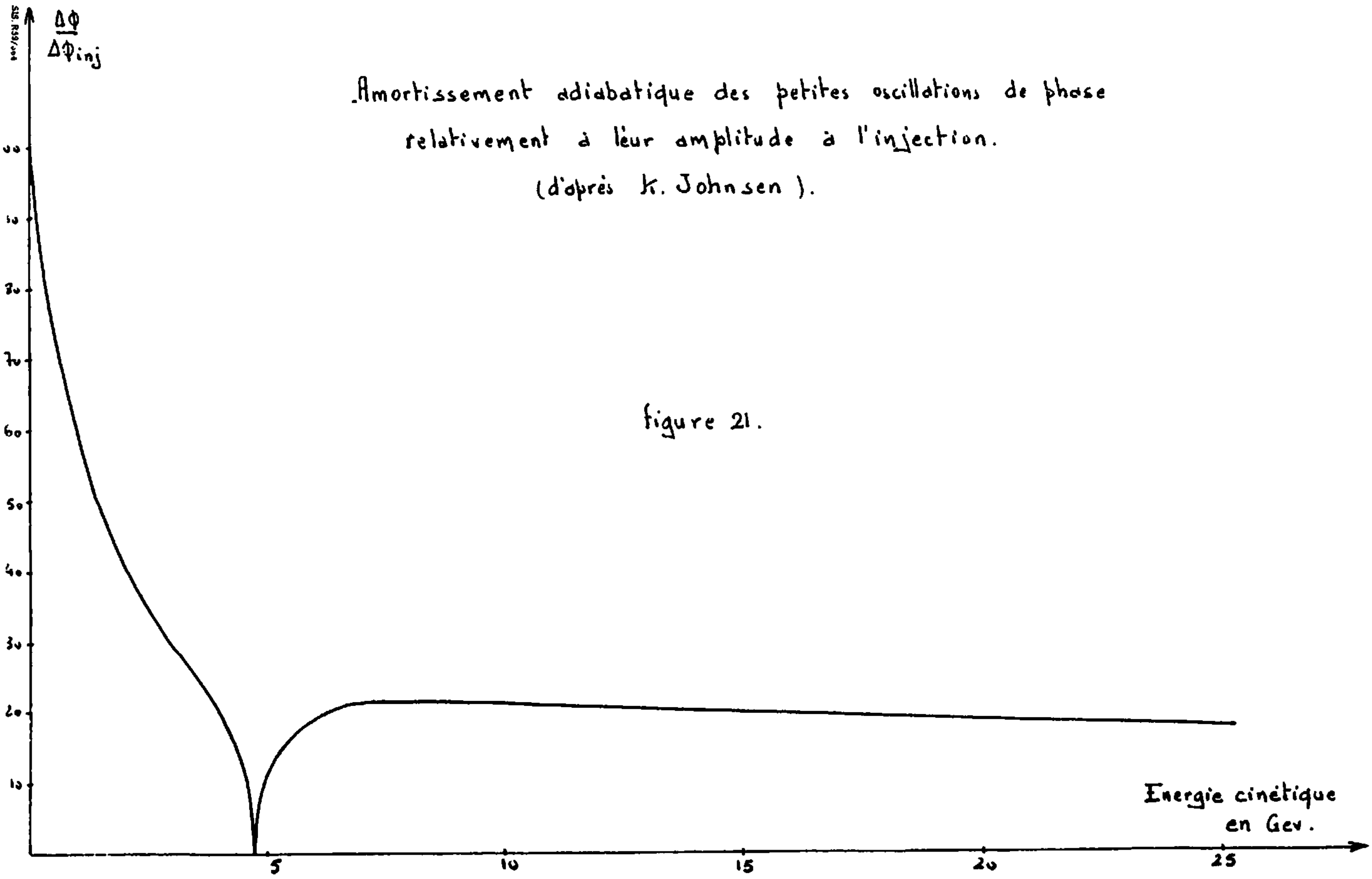

Amortissement adiabatique
(entre E_0 et E_{tr}).
Transition
$\phi_0 = 61°2$

figure 20.



Amortissement adiabatique des petites oscillations de phase relativement à leur amplitude à l'injection.
(d'après K. Johnsen).

figure 21.

Diagramme caractéristique
d'un amortissement dissipatif.

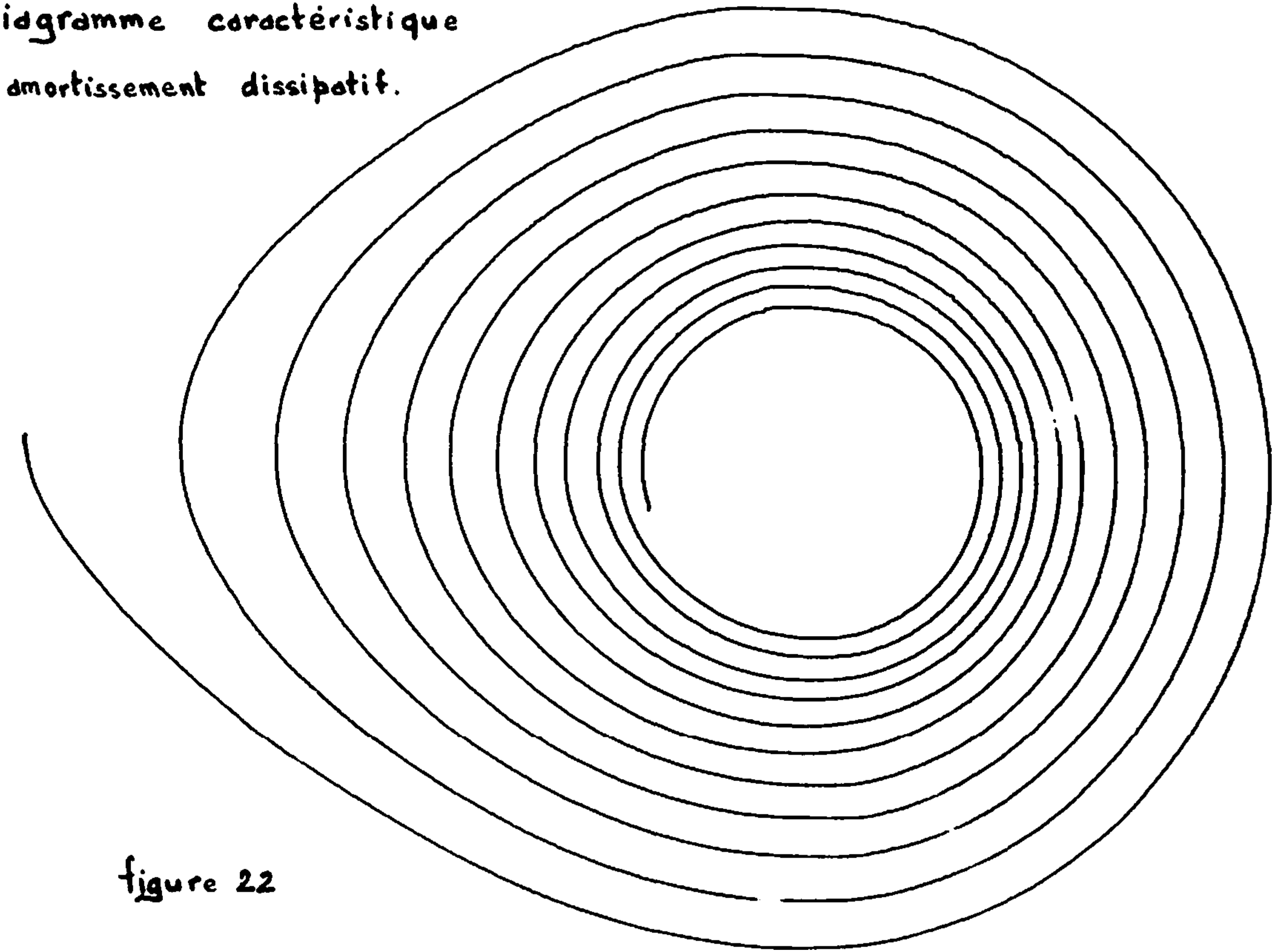


figure 22

Diagramme caractéristique d'un amortissement adiabatique non dissipatif.

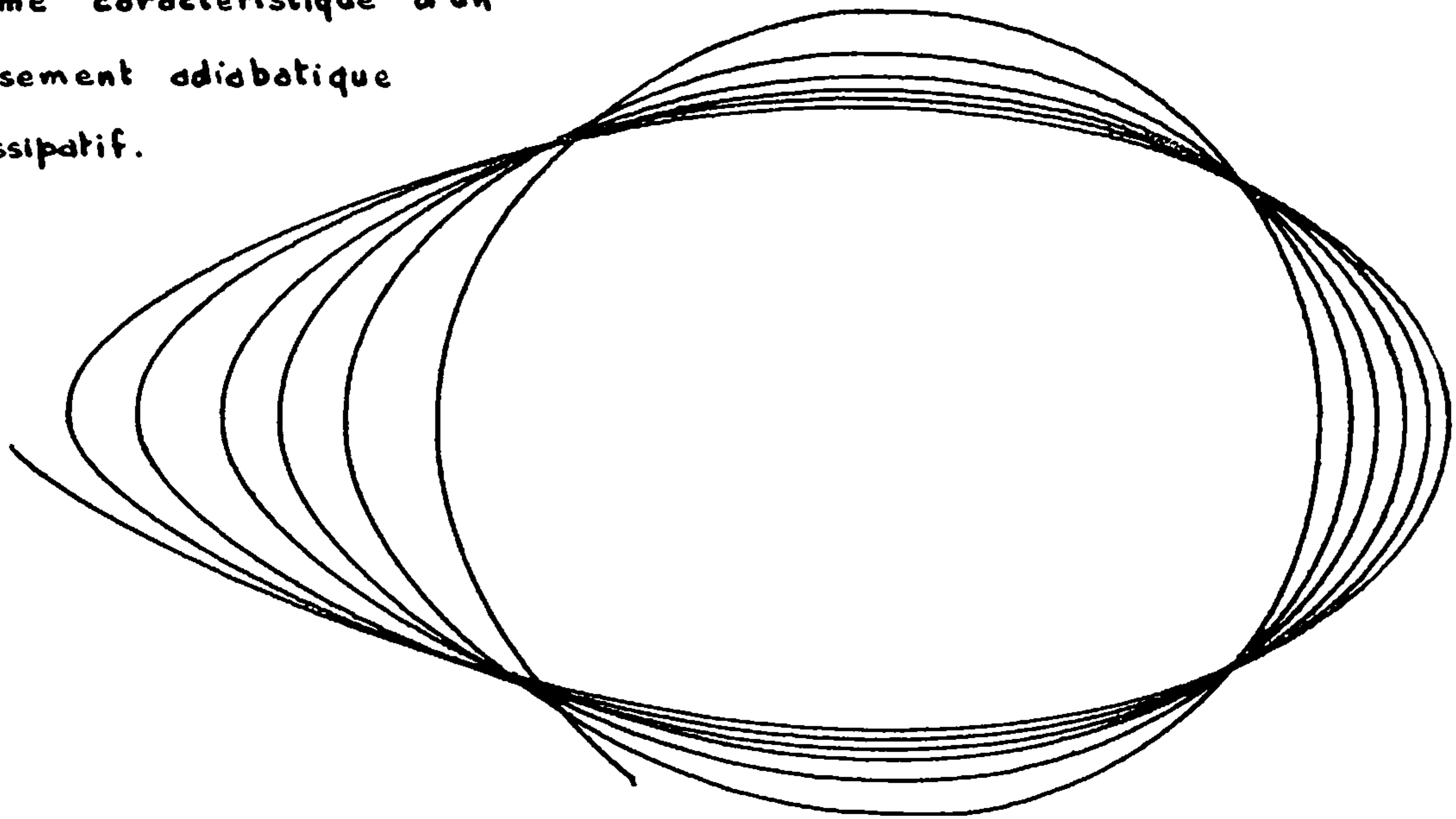
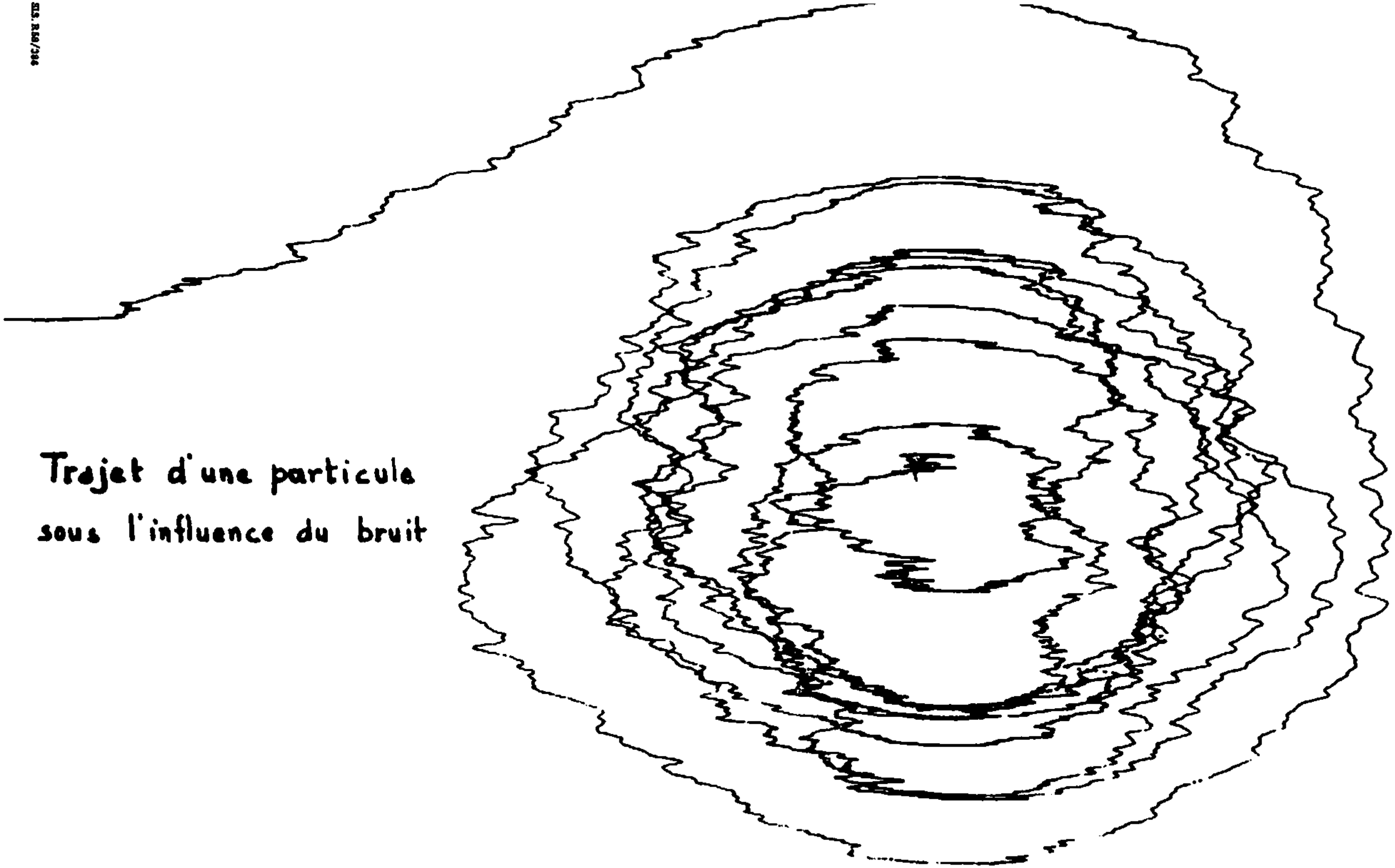


figure 23.



Trajet d'une particule
sous l'influence du bruit

figure 25

S2S. R59/361

Etude du bruit.

Enrégistrement statistique.

bruit : b = 4 volts RMS.

temps : Δt_0 = 6 secondes.

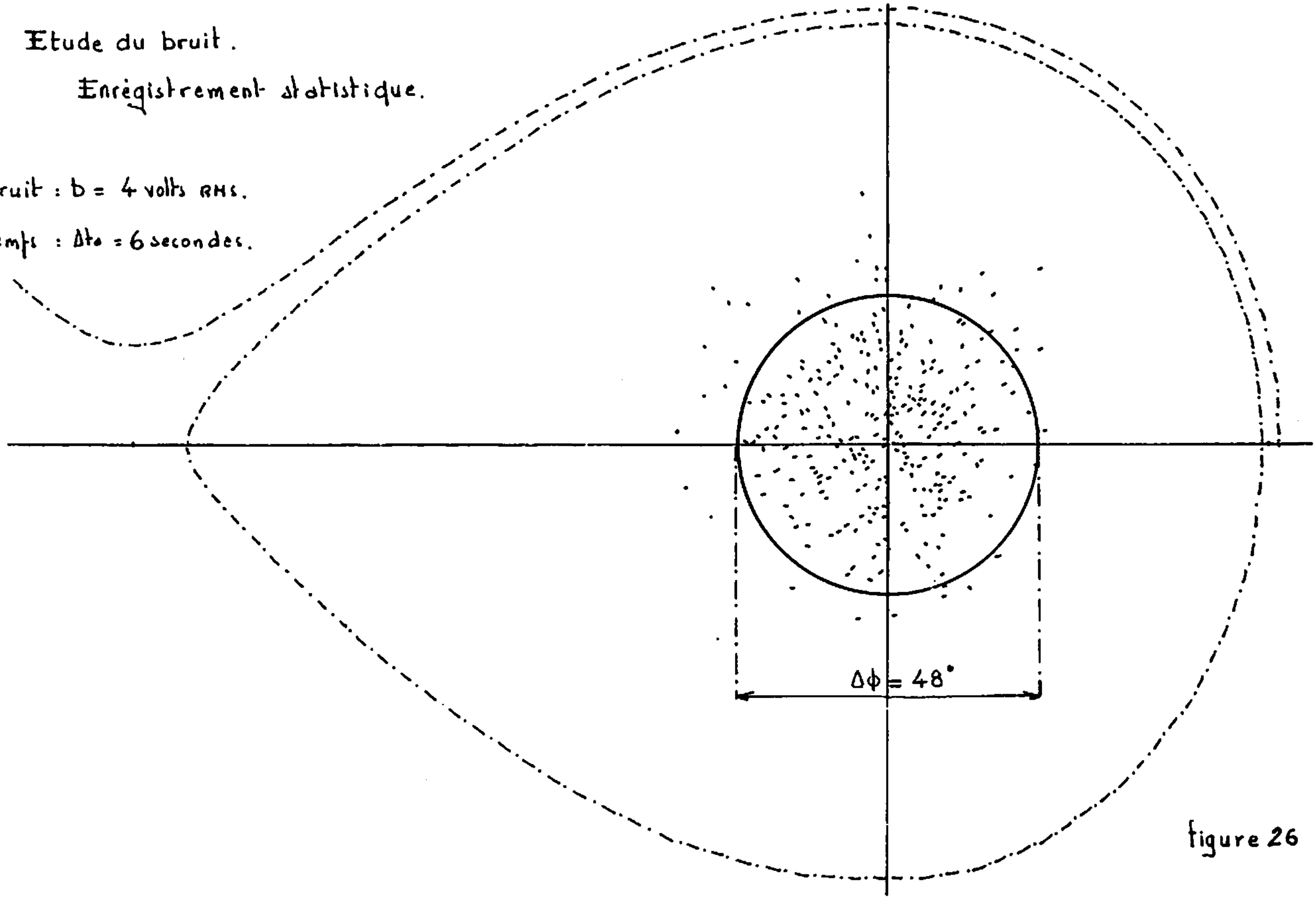
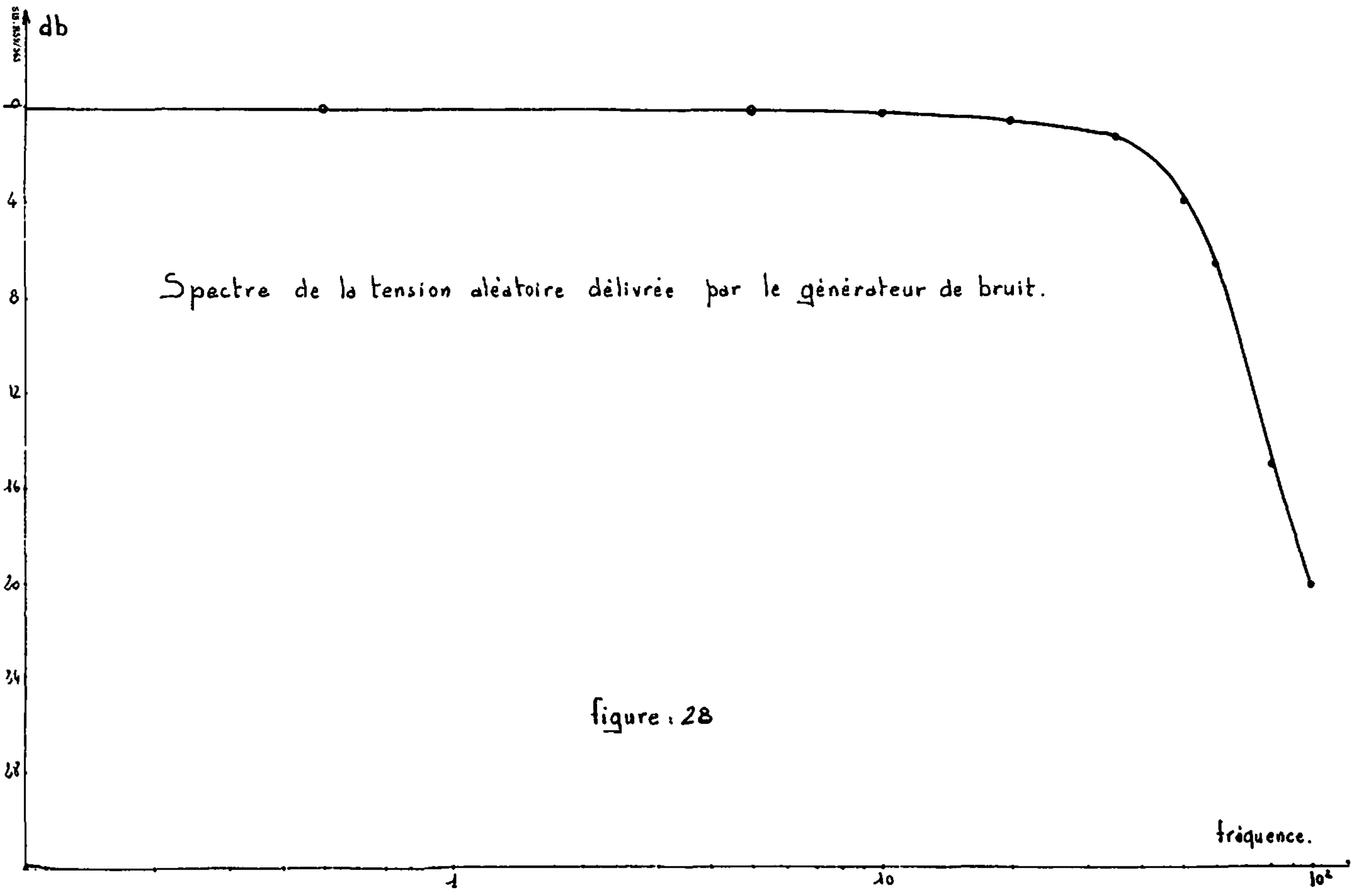


figure 26



Spectre de la tension aléatoire délivrée par le générateur de bruit.

figure : 28

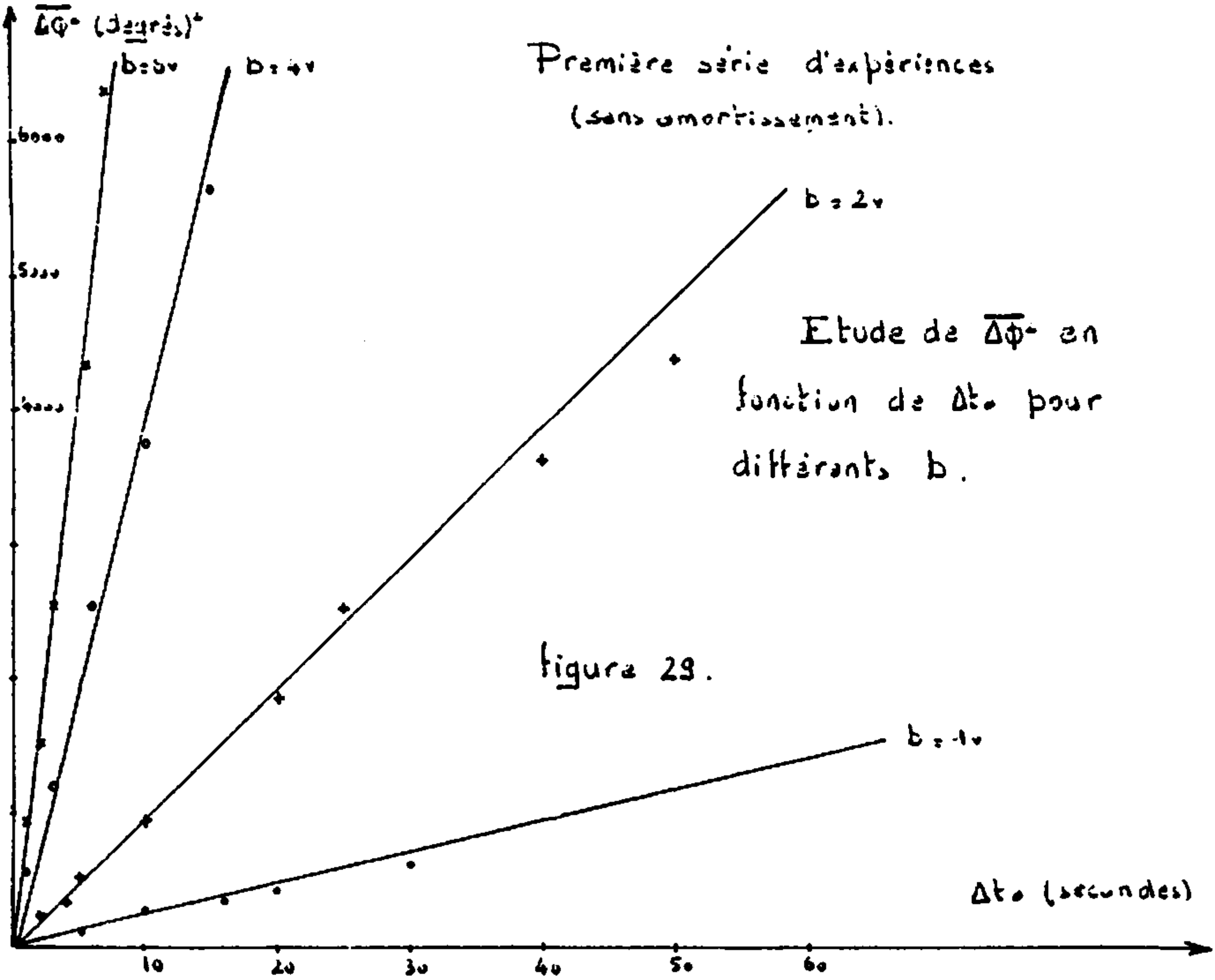


figure 29.

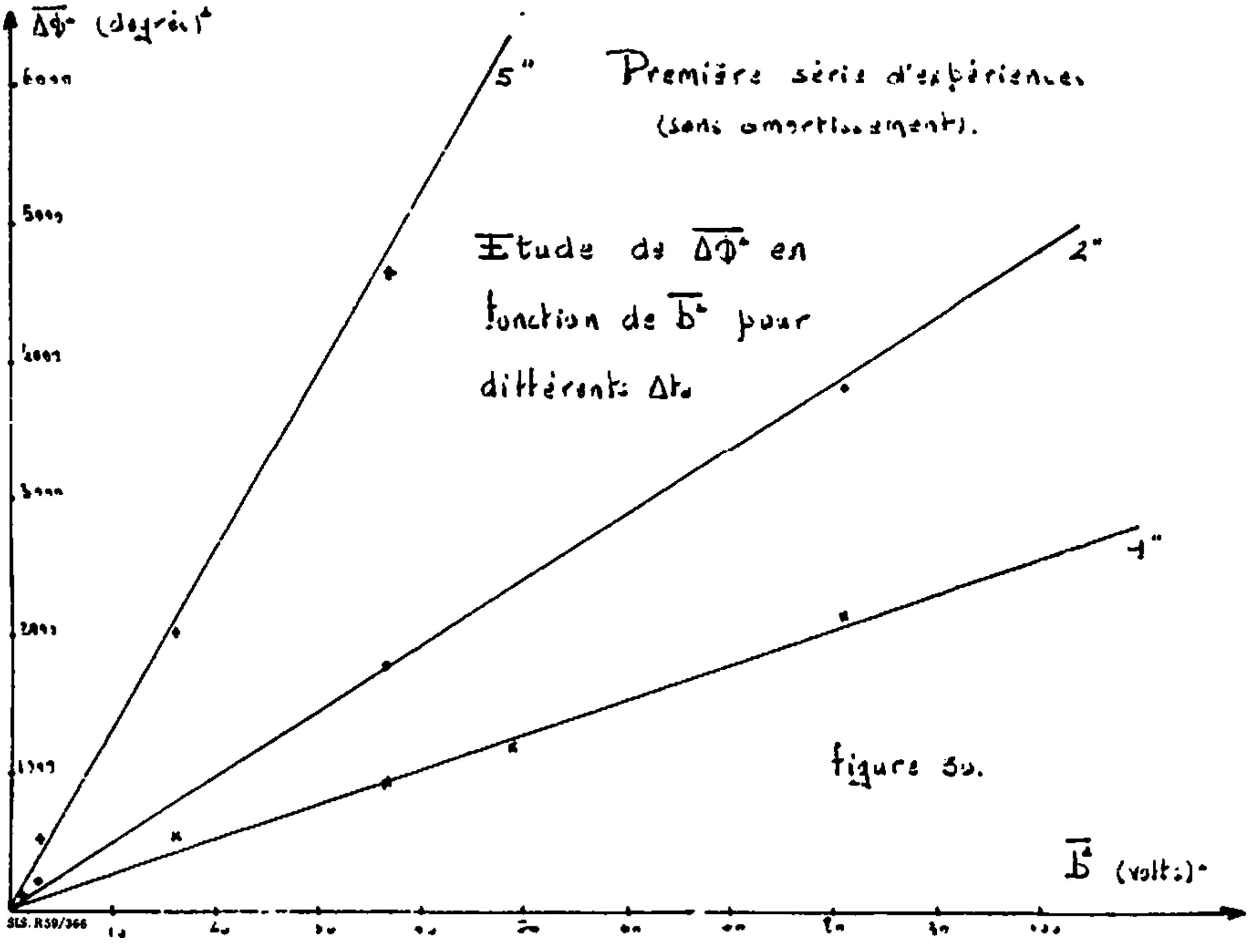


figure 30.

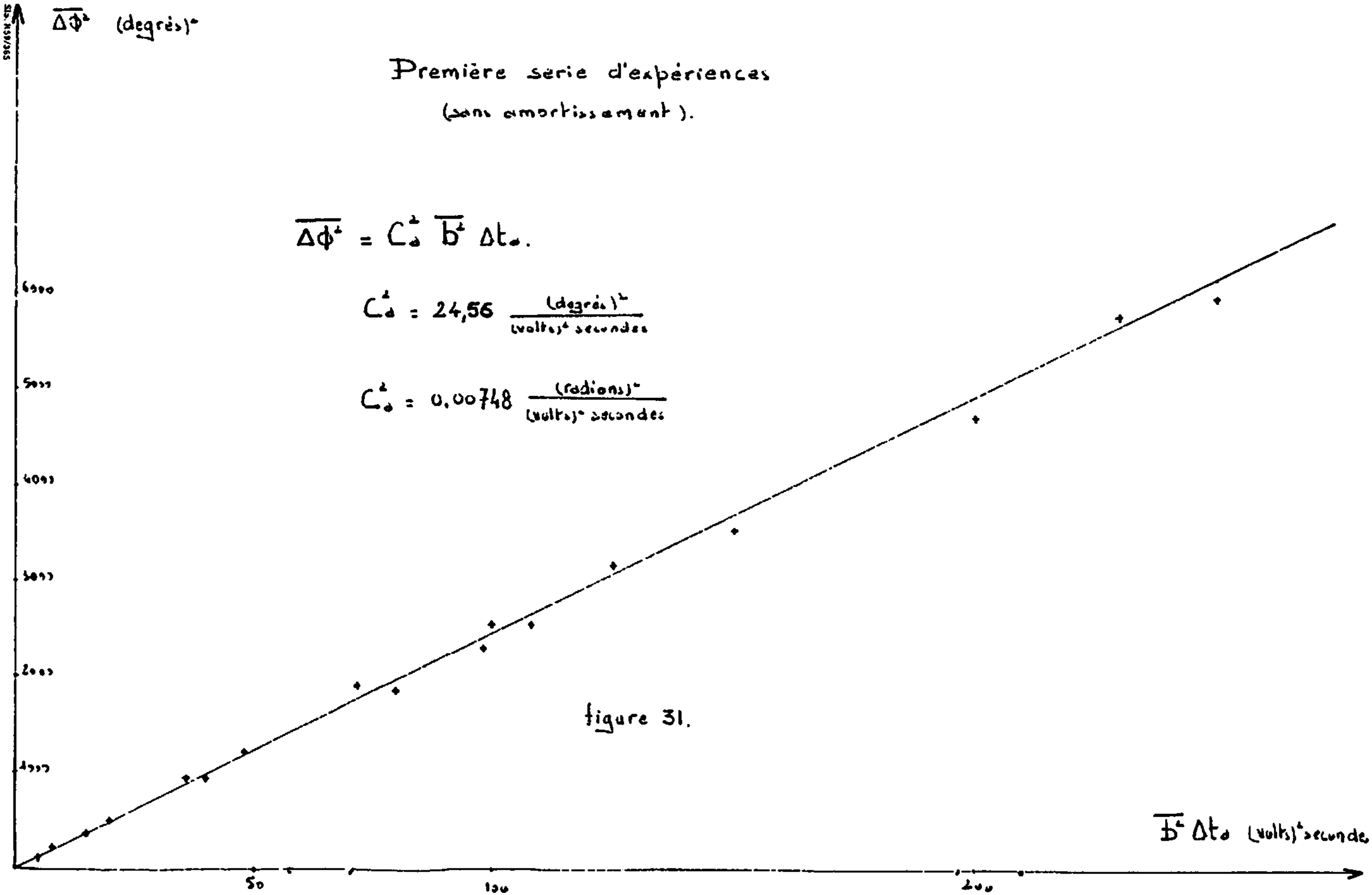
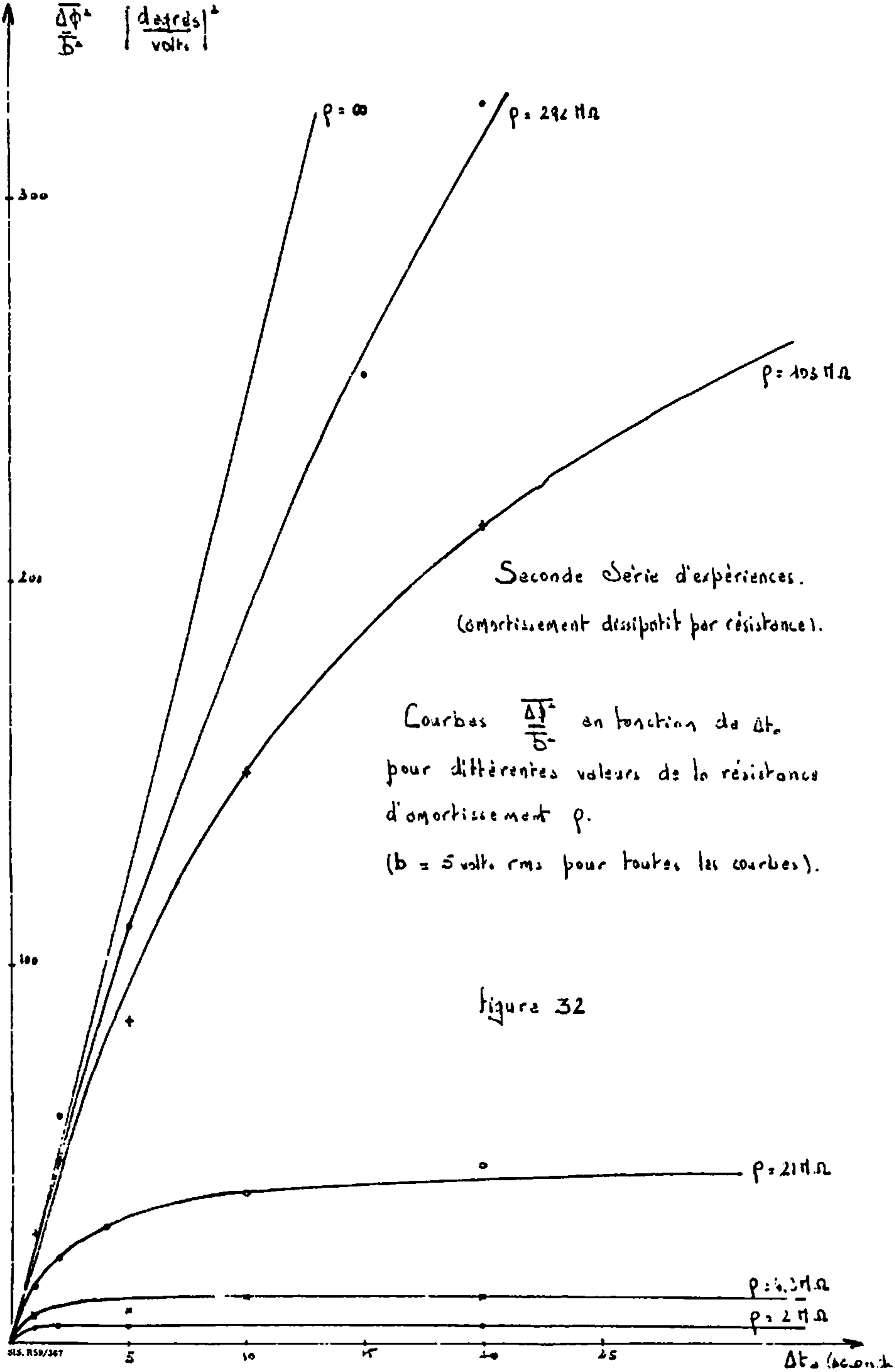

$\overline{\Delta\phi^2}$ (degrés)²
Première série d'expériences
(sans amortissement).
$\overline{\Delta\phi^2} = C_a^2\ \overline{b^2}\ \Delta t_a$.
$C_a^2 = 24{,}56\ \frac{(\text{degrés})^2}{(\text{volts})^2\ \text{secondes}}$
$C_a^2 = 0{,}00748\ \frac{(\text{radians})^2}{(\text{volts})^2\ \text{secondes}}$
6000
5000
4000
3000
2000
1000
50
100
200
$\overline{b^2}\ \Delta t_a$ (volts)² seconde

figure 31.



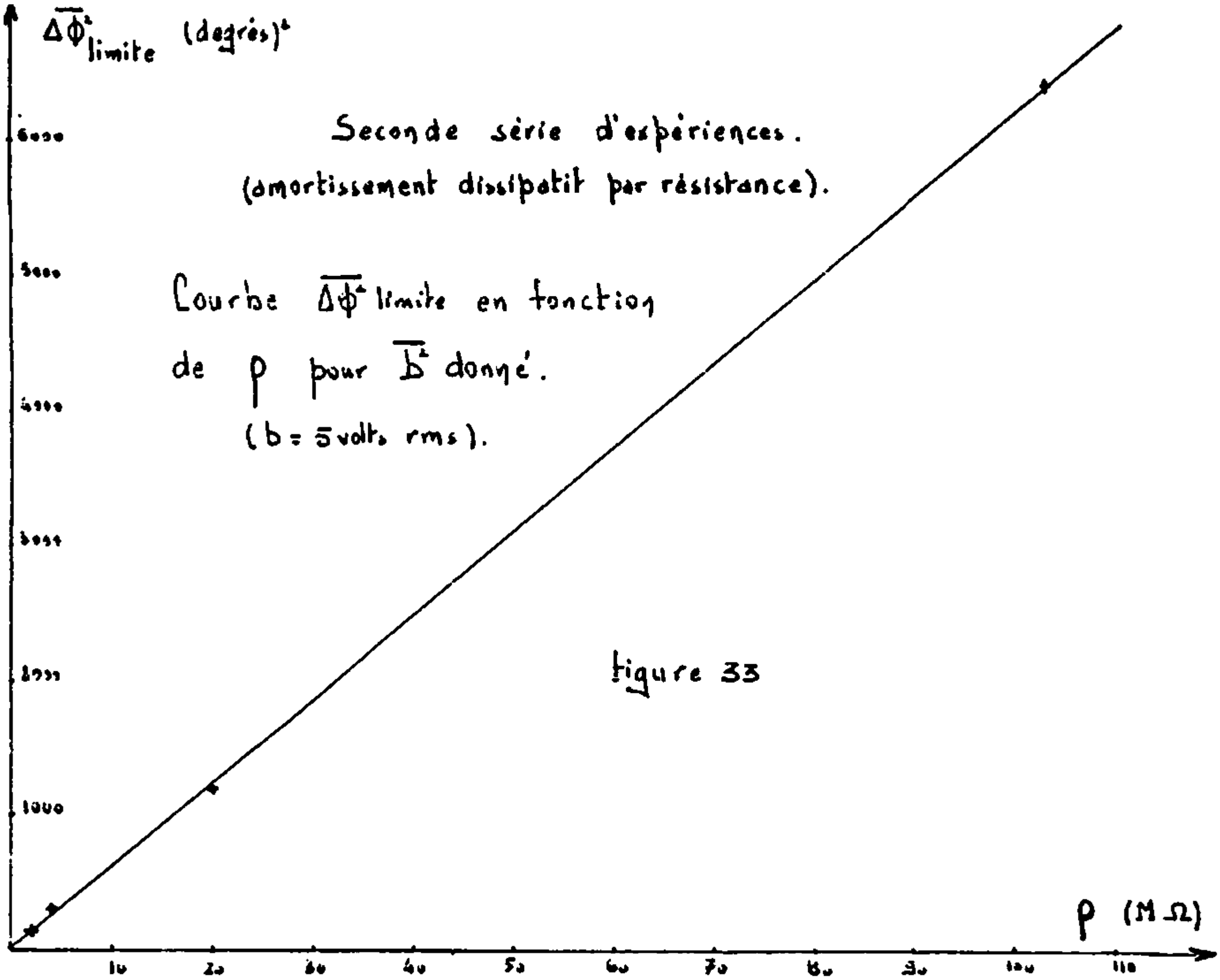
Seconde Série d'expériences.

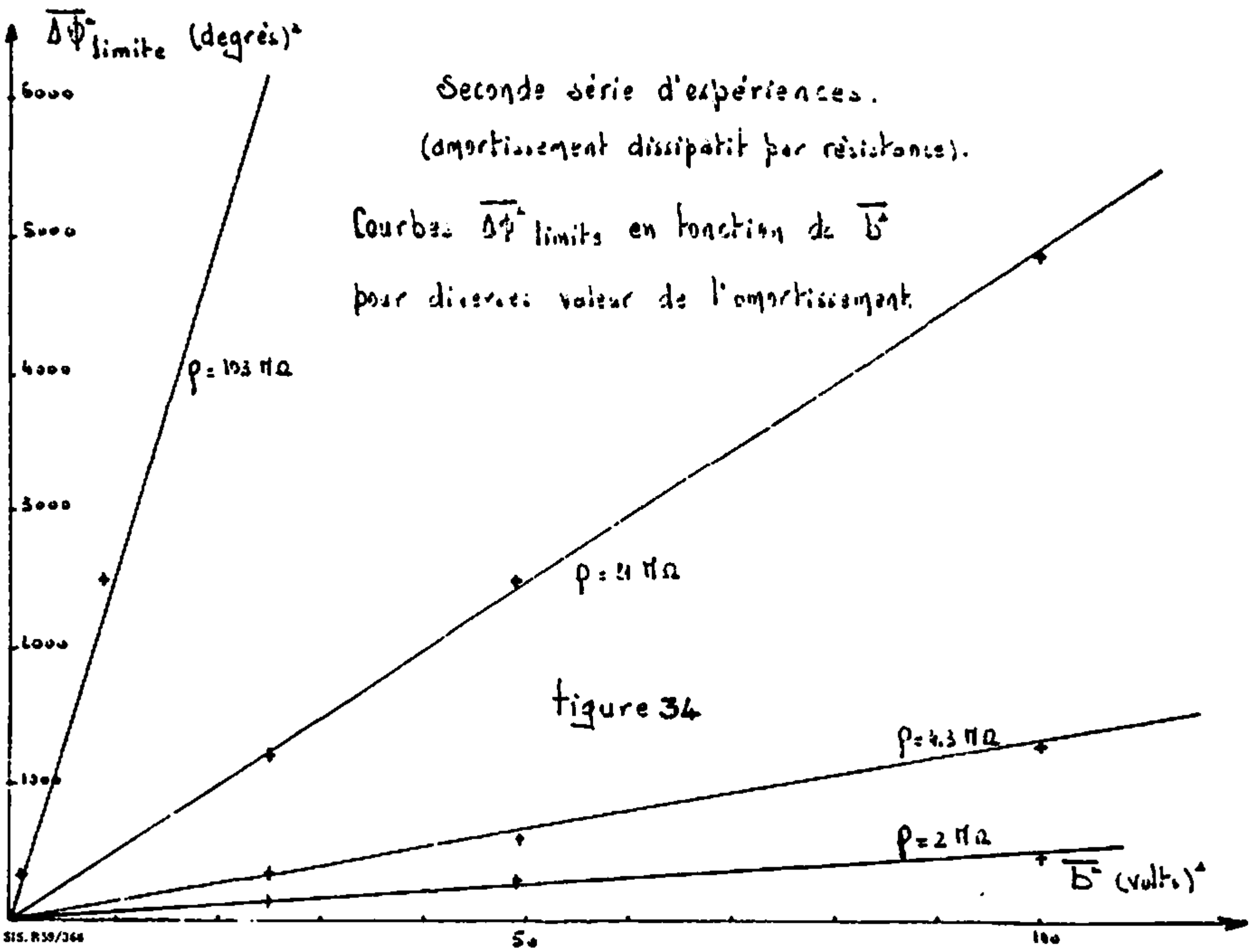
(amortissement dissipatif par résistance).

Courbes $\overline{\Delta\Phi^2}/\overline{b^2}$ en fonction de Δt_0 pour différentes valeurs de la résistance d'amortissement ρ.

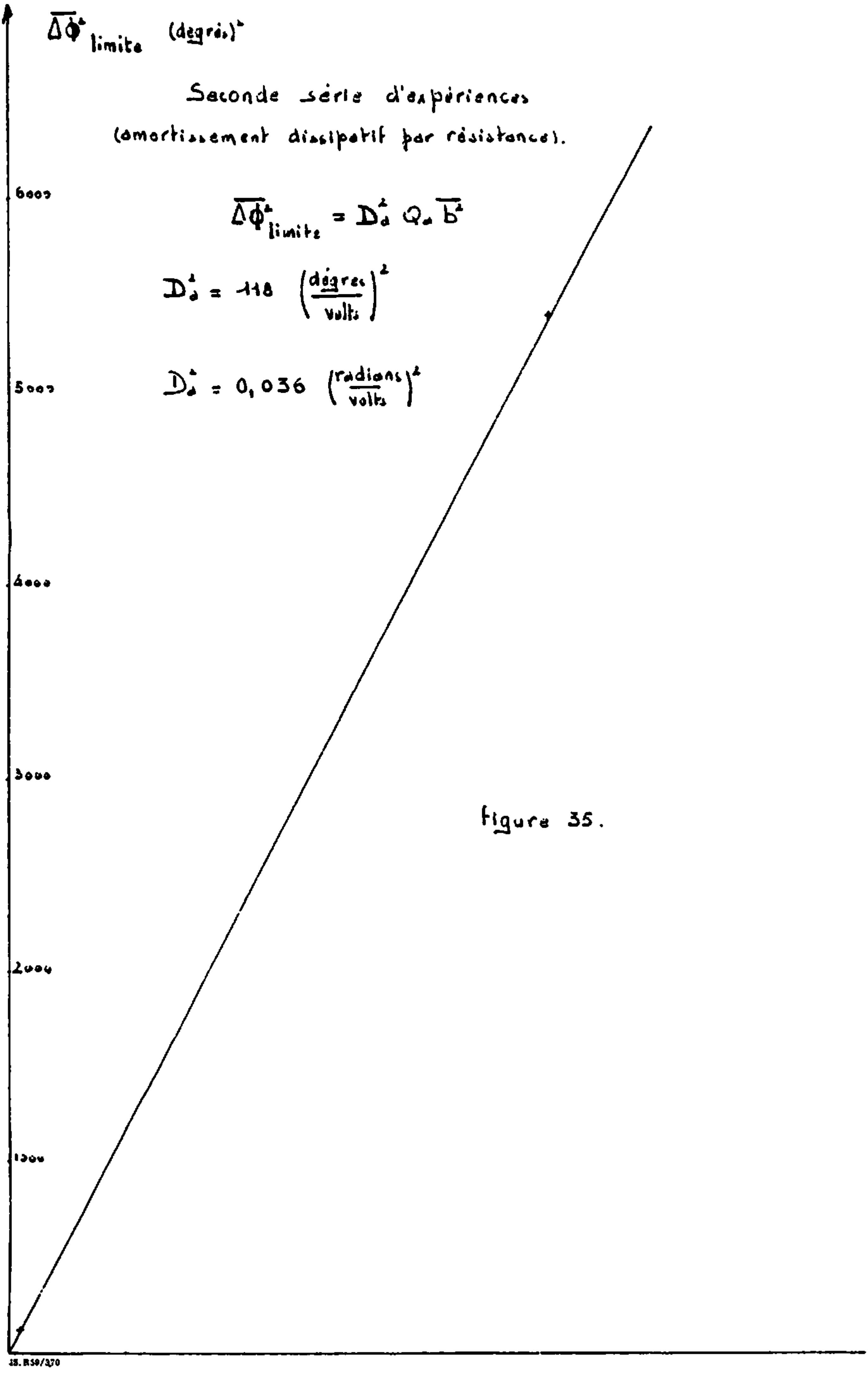
(b = 5 volts rms pour toutes les courbes).

figure 32


$\overline{\Delta\Phi^2}_{limite}$ (degrés)^2
Seconde série d'expériences.
(amortissement dissipatif par résistance).
Courbe $\overline{\Delta\Phi^2}$ limite en fonction
de ρ pour $\overline{b^2}$ donné.
(b = 5 volts rms).
figure 33
ρ (M Ω)
1000
6000
10
20
40
50
60
70
100
110


$\overline{\Delta\Phi^2}_{limite}$ (degrés)^2
Seconde série d'expériences.
(amortissement dissipatif par résistance).
Courbes $\overline{\Delta\Phi^2}$ limite en fonction de $\overline{b^2}$
pour diverses valeur de l'amortissement
ρ = 103 MΩ
ρ = 21 MΩ
ρ = 4.3 MΩ
ρ = 2 MΩ
figure 34
$\overline{b^2}$ (volts)^2
6000
5000
4000
3000
2000
1000
50
100

SIS. R39/366



$\overline{\Delta\Phi^2}_{limite}$ (degrés)^2
Seconde série d'expériences
(amortissement dissipatif par résistance).
$\overline{\Delta\Phi^2}_{limite} = D_a^2 \, Q_a \, \overline{b^2}$
$D_a^2 = 118 \left(\frac{\text{degrés}}{\text{volts}}\right)^2$
$D_a^2 = 0{,}036 \left(\frac{\text{radians}}{\text{volts}}\right)^2$
6000
5000
4000
3000
2000
1000

figure 35.

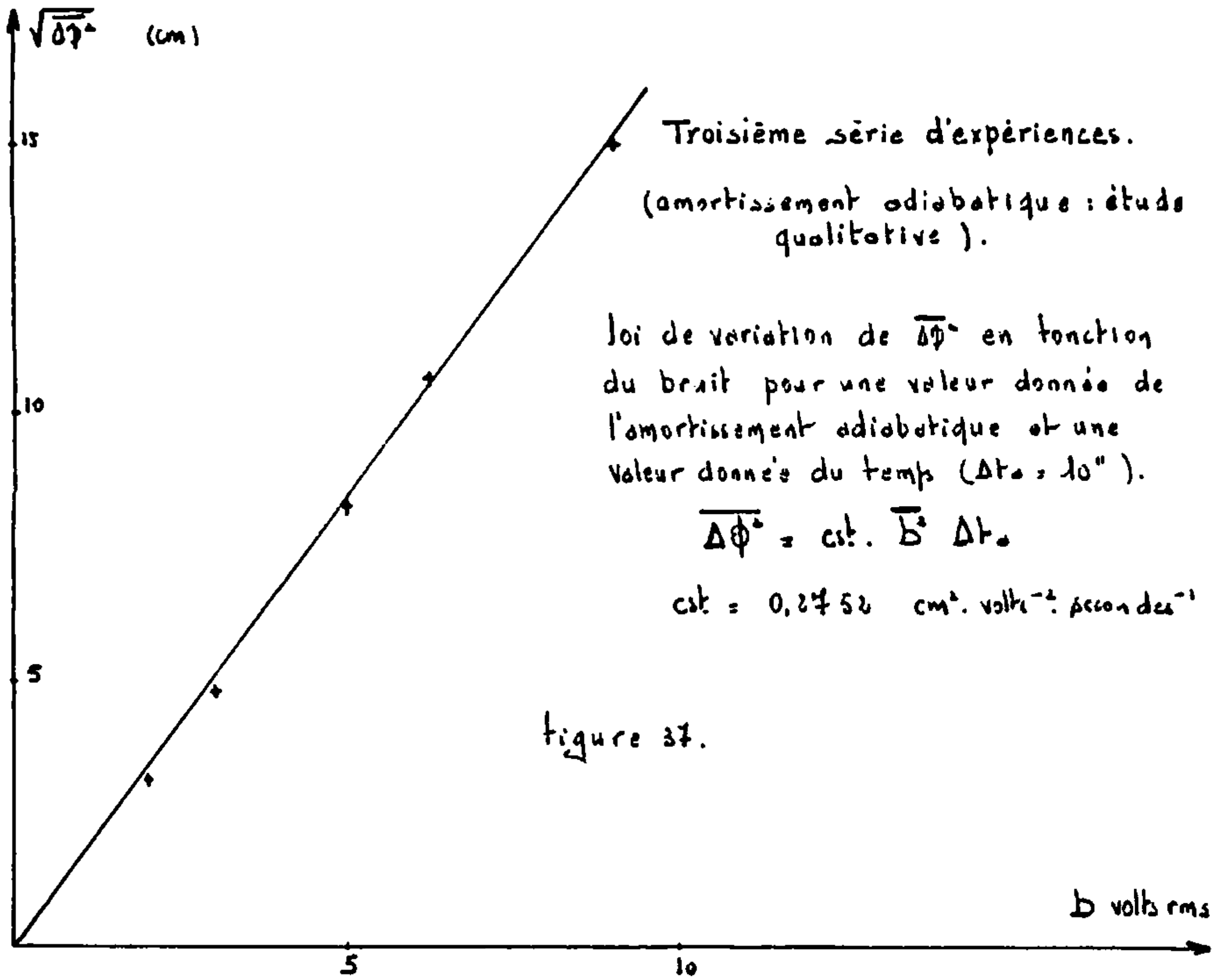


figure 37.

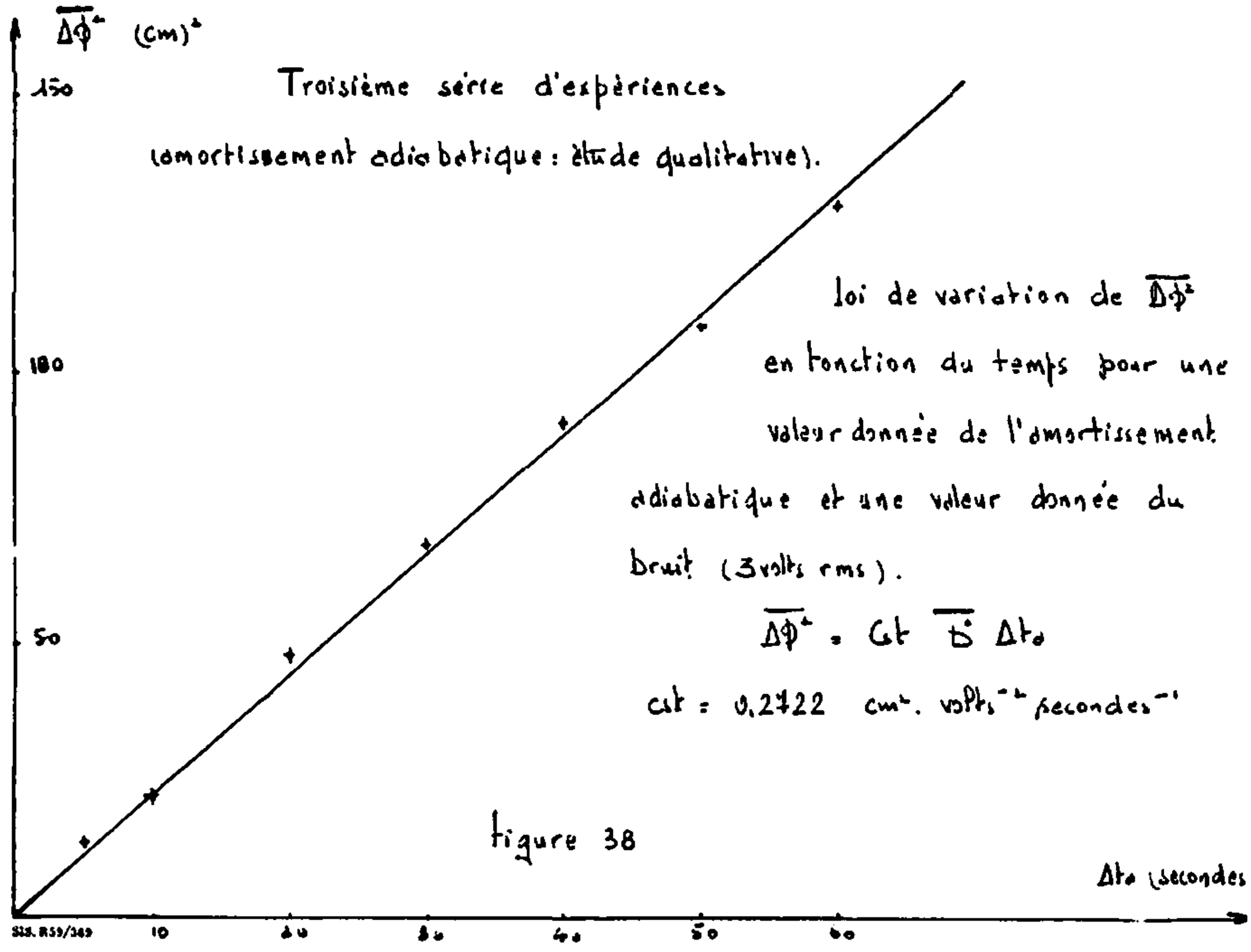


figure 38

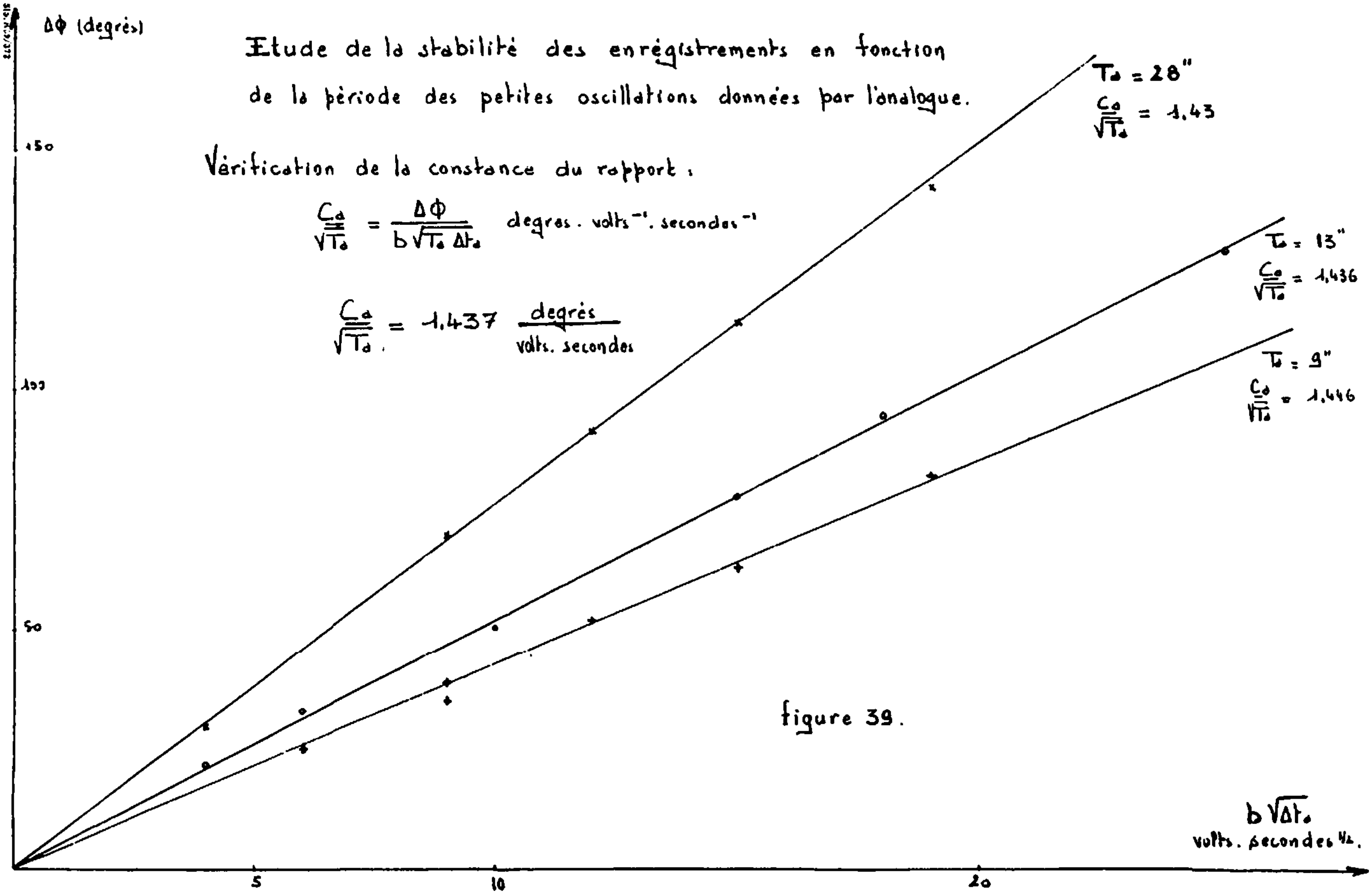

Etude de la stabilité des enrégistrements en fonction
de la période des petites oscillations données par l'analogue.
Vérification de la constance du rapport :
$\frac{C_a}{\sqrt{T_a}} = \frac{\Delta\Phi}{b\sqrt{T_a \Delta t_a}}$ degres . volts^{-1}. secondes^{-1}
$\frac{C_a}{\sqrt{T_a}} = 1{,}437 \frac{\text{degrés}}{\text{volts. secondes}}$
$\Delta\Phi$ (degrés)
150
100
50
5
10
20
$b\sqrt{\Delta t_a}$
volts . secondes$^{1/2}$.
$T_a = 28''$
$\frac{C_a}{\sqrt{T_a}} = 1{,}43$
$T_a = 13''$
$\frac{C_a}{\sqrt{T_a}} = 1{,}436$
$T_a = 9''$
$\frac{C_a}{\sqrt{T_a}} = 1{,}446$

figure 39.

Etude de la stabilité des
enrégistrements en fonction
des conditions initiales.

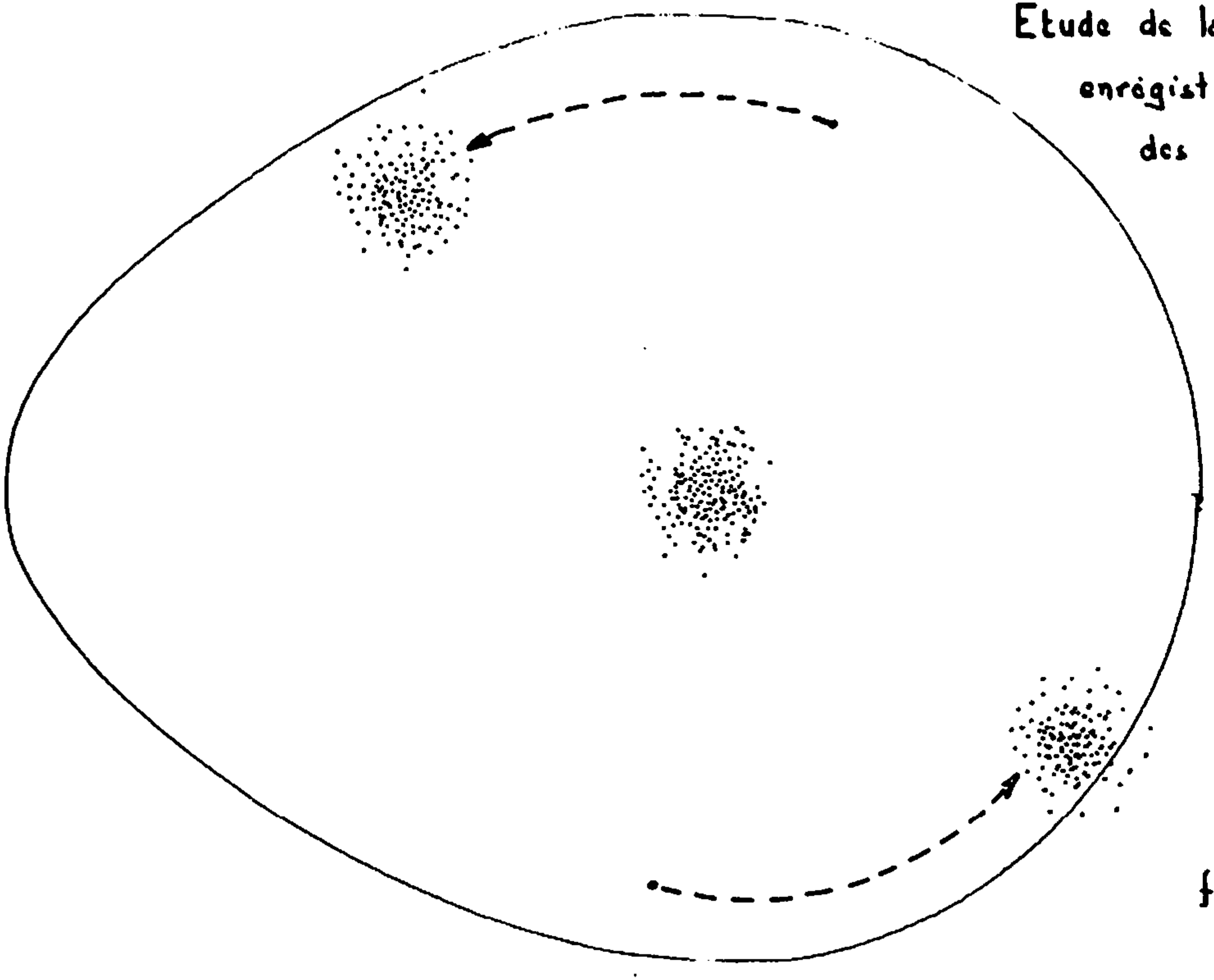
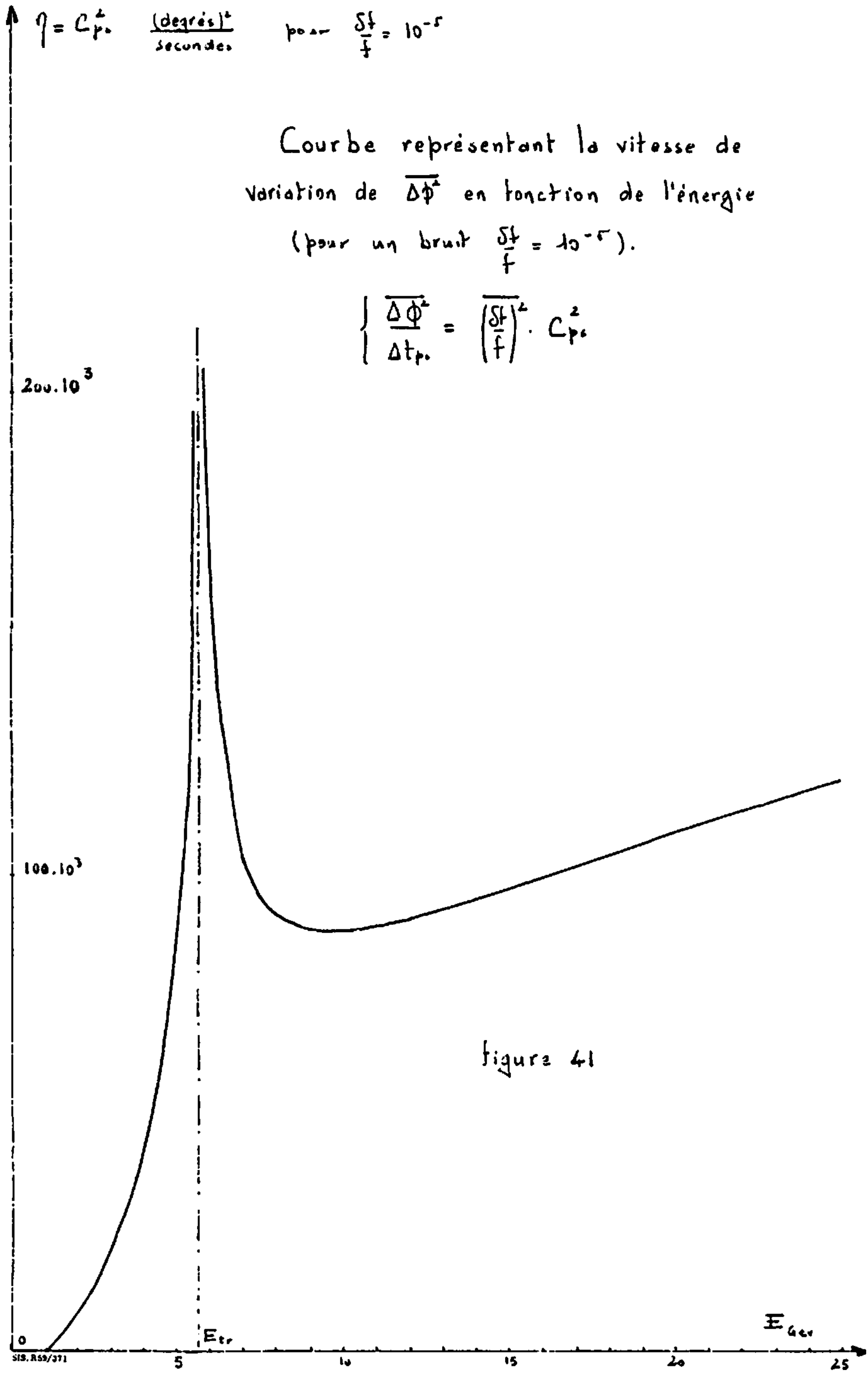
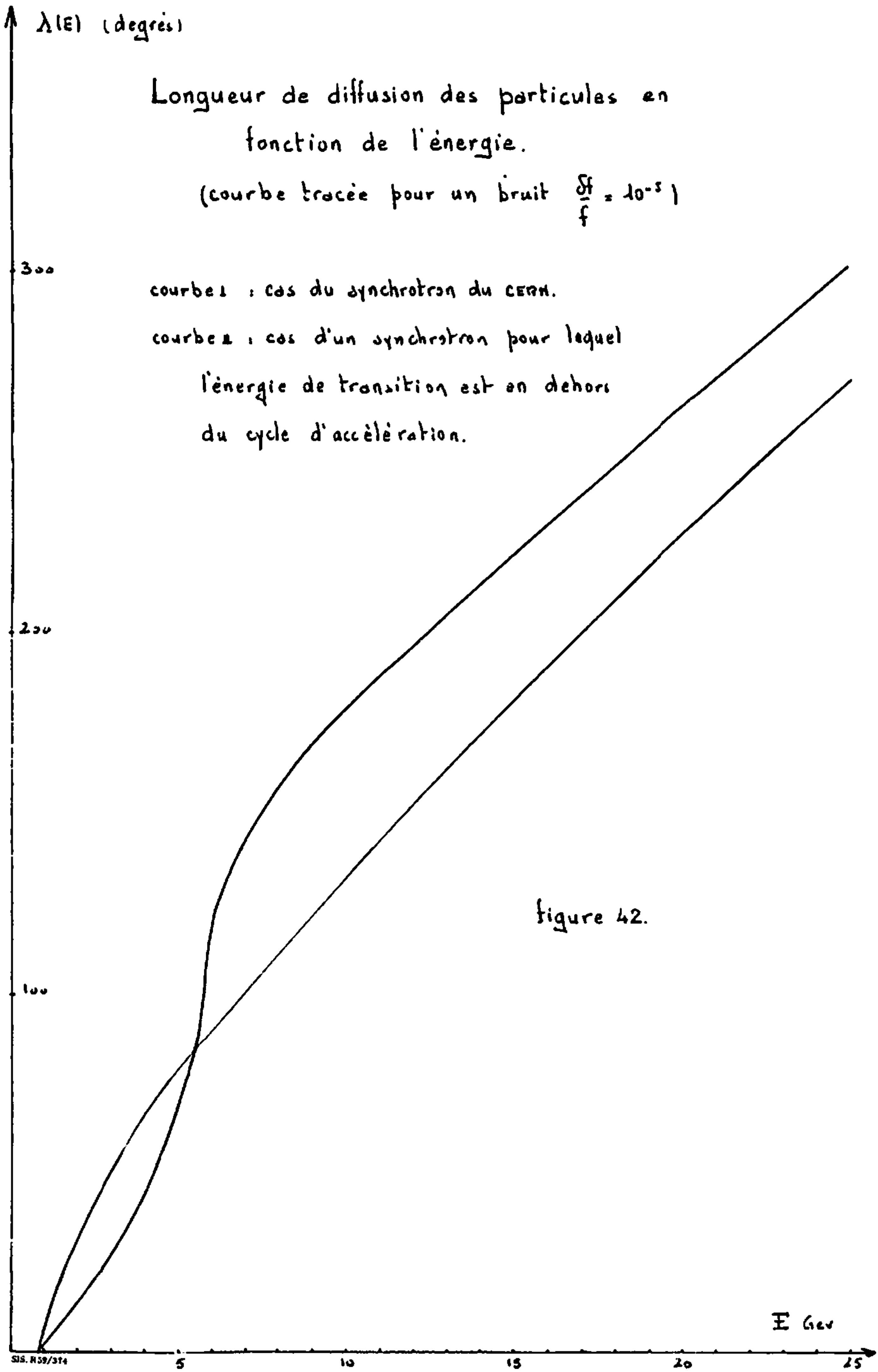


figure 40.



$\eta = C_{po}^2$ $\frac{(\text{degrés})^2}{\text{secondes}}$ pour $\frac{\delta f}{f} = 10^{-5}$
Courbe représentant la vitesse de variation de $\overline{\Delta\Phi^2}$ en fonction de l'énergie (pour un bruit $\frac{\delta f}{f} = 10^{-5}$).
$\frac{\overline{\Delta\Phi^2}}{\Delta t_{po}} = \overline{\left(\frac{\delta f}{f}\right)^2} \cdot C_{po}^2$
200.10^3
100.10^3
0
E_{tr}
E_{GeV}
5
10
15
20
25
SIS.R59/371

figure 41


λ(E) (degrés)
Longueur de diffusion des particules en fonction de l'énergie.
(courbe tracée pour un bruit $\frac{\delta f}{f} = 10^{-5}$)
courbe 1 : cas du synchrotron du CERN.
courbe 2 : cas d'un synchrotron pour lequel l'énergie de transition est en dehors du cycle d'accélération.
300
200
100
E Gev
5
10
15
20
25
SIS. R59/314
figure 42.

Pourcentage de particules perdues par diffusion en fonction de leur longueur de diffusion $\Delta\Phi$.

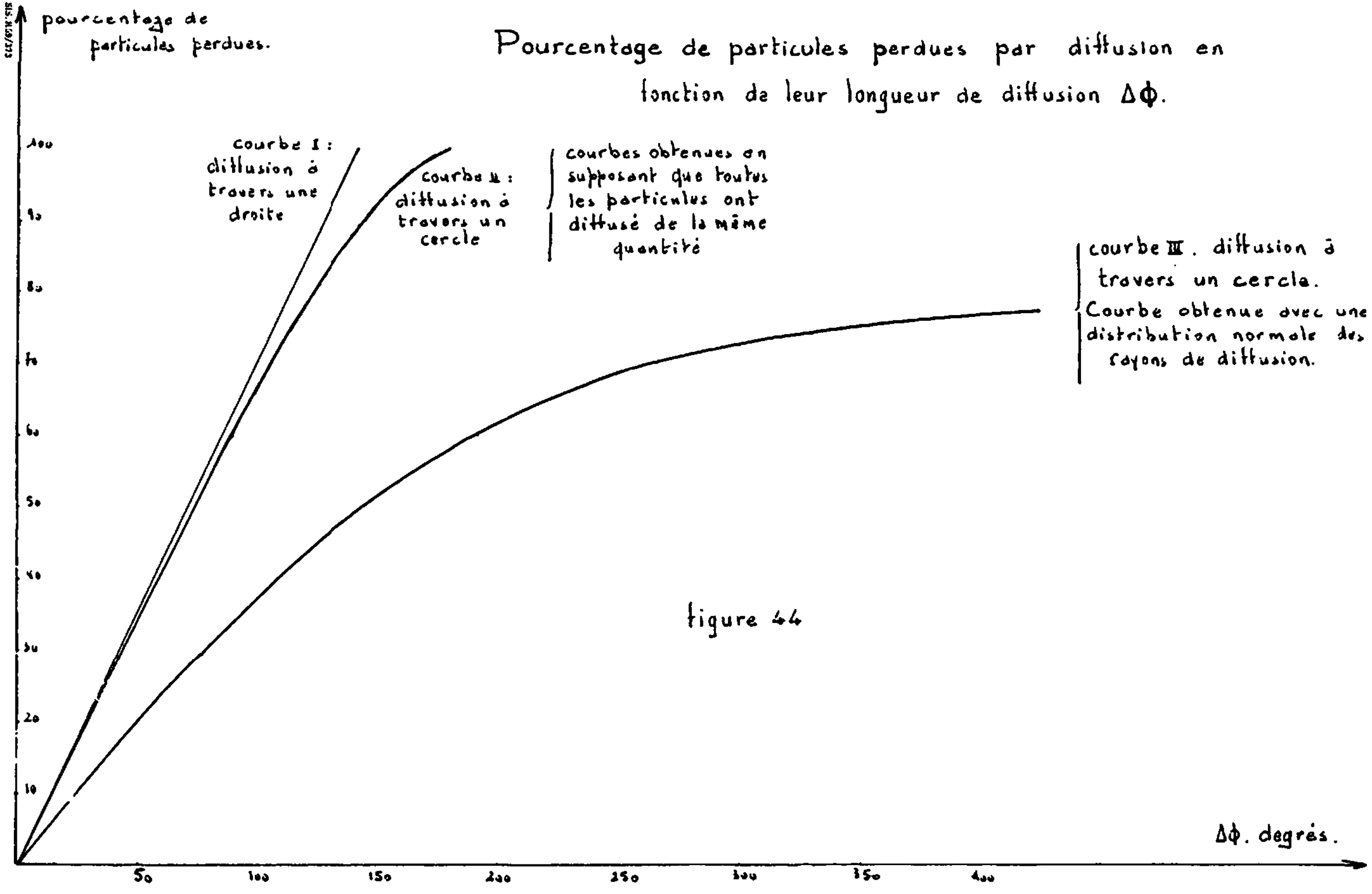


figure 44

Pourcentage de particules perdues sous l'effet d'un bruit δf en fonction de l'énergie.

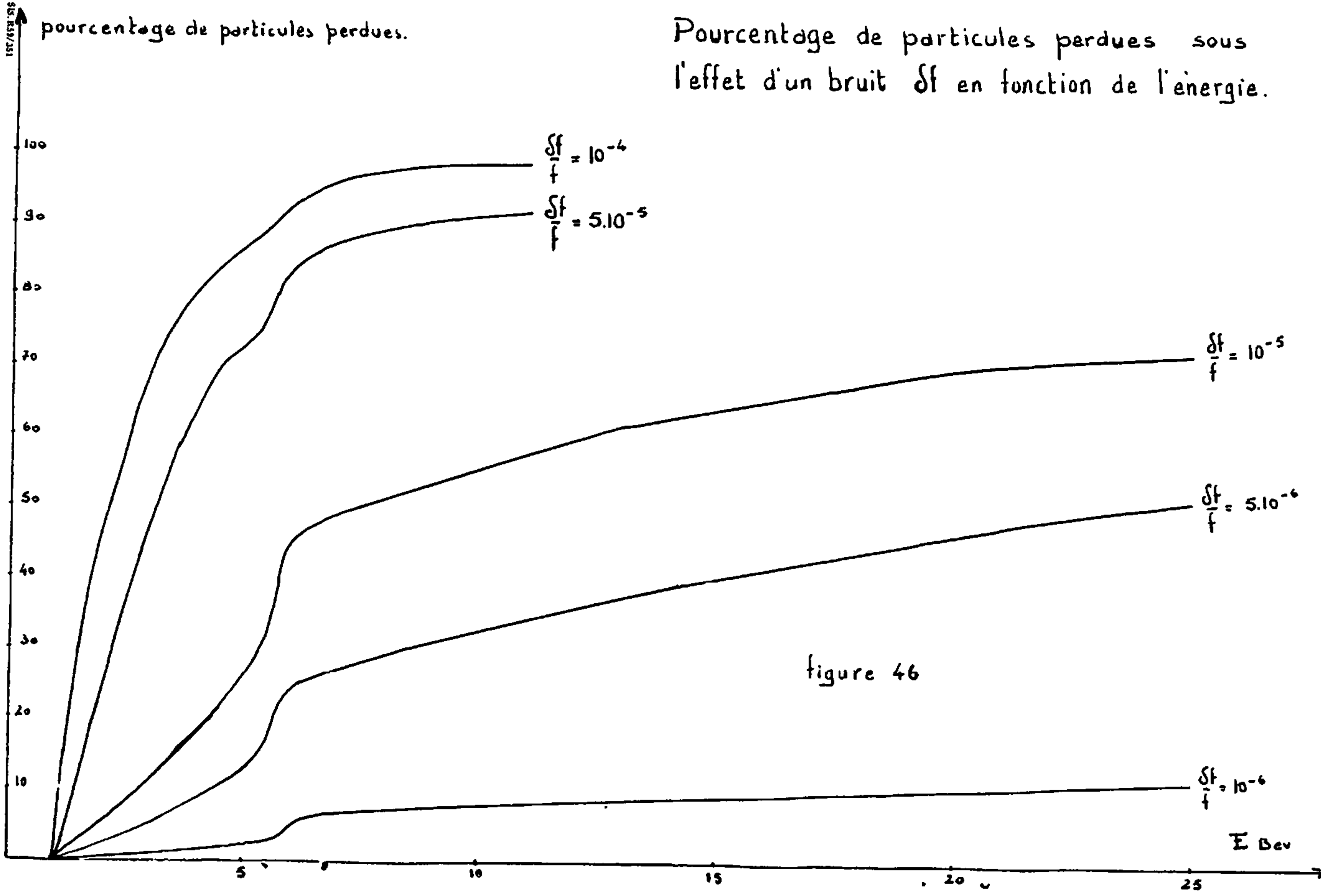


figure 46