MPS/RF
2 mai 1962
(à joindre à
MPS/RFM 62-5)

A N N E X E

des minutes des réunions du groupe RF
des 21 février 1962 et 4 avril 1962

Exposés de R. Kaiser et H. Isch:

ETUDES AVEC CALCULATEUR ANALOGIQUE

I. Principes de calcul analogique

Par analogie, il faut entendre le fait que deux systèmes physique différents sont décrits par la même relation mathématique. Les deux systèmes sont alors dits analogues . Par exemple un des systèmes peut contenir des grandeurs mécanique tandis que l'autre sera thermique ou électrique; mais la loi qui relie entre elles les grandeurs sera la même dans chaque système.

Un calculateur analogique n'est rien d'autre qu'un système physique qui obéit à une relation mathématique. La solution est donc le résultat d'une expérience physique.

Souvent les systèmes physiques sont décrits par un ensemble d'équations différentielles; c'est alors surtout que l'on peut utiliser avantageusement un calculateur analogique.

Un calculateur analogique électrique se compose d'un certain nombre d'éléments de base dont il faut expliquer le rôle pour comprendre le fonctionnement d'ensemble du calculateur.

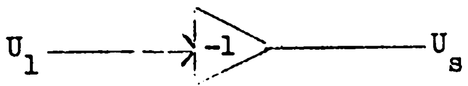
Un élément de base est une unité avec des entrées et une sortie. La tension de sortie étant liée d'une certaine façon aux tensions d'entrée. Par exemple la tension de sortie sera la somme des tensions d'entrée.

On utilise des éléments permettant les opérations mathematiques suivantes :

a) multiplication par un facteur constant :

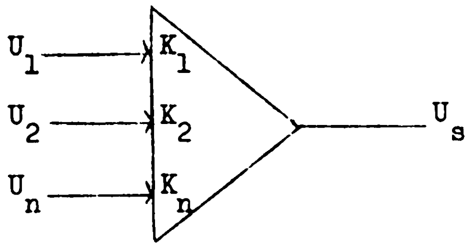
U_1 ——— α ——— U_s $\qquad\qquad$ $U_s = \alpha U_1$

b) inversion de signe :



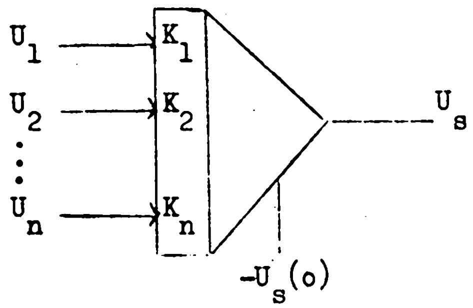
$$U_s = -U_1$$

c) sommation :



$$U_s = -\sum_{i=1}^{n} K_i U_i$$

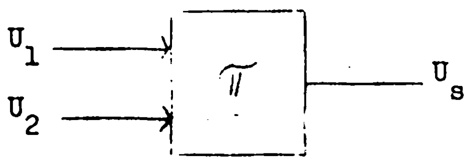
d) intégration avec sommation :



$$U_s = U_s(o) - \sum_{i=1}^{n} K_i \int_o^t U_i \, dt$$

$U_s(0)$: Condition initiale

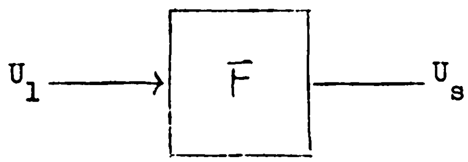
e) multiplication de deux variables :



$$U_s = \frac{U_1 \cdot U_2}{E}$$

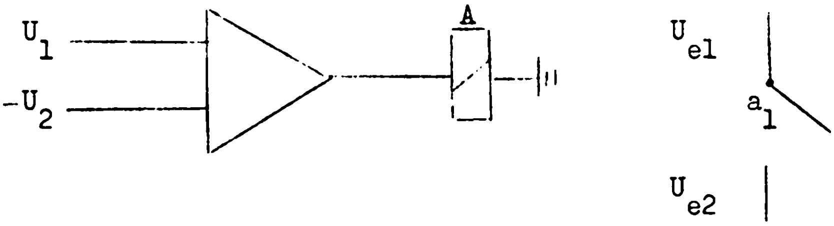
E = tension unitaire du calculateur

f) générateur de fonction :

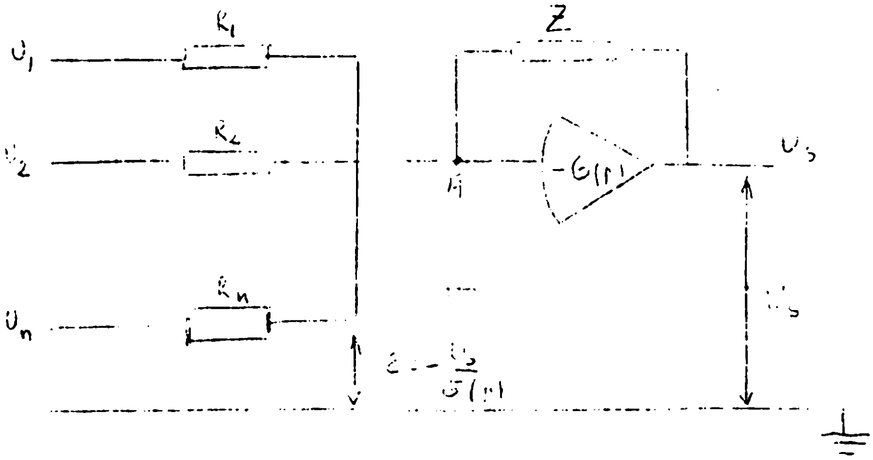


$$U_s = F\,(U_1)$$

g) comparateur :



L'élément le plus important est l'amplicateur opérationnel qui est un amplificateur à courant continu dont le gain serait idéalement $-\infty$ et le courant d'entrée nul.



Etant donné la contre-réaction introduite par l'élément Z, la tension à l'entrée de l'amplificateur tend vers $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans ces conditions, les courants dans les résistances d'entrée ne dépendent que de la valeur de ces résistances et des tensions d'entrée. La somme des courants d'entrée doit être égale au courant à travers Z, si on admet que le courant d'entrée de l'amplificateur est nul. On peut alors écrire :

$$U_s \left(1 + \frac{1}{G(p)}\right) \frac{1}{Z} + \sum_1^n \frac{1}{R_i} \left(U_i + \frac{U_s}{G(p)}\right) = 0$$

Si Z est une résistance pure R_o, on a :

$$U_s = -\sum_1^n \frac{K_i U_i}{1 + \frac{(1+\sum_1^n K_i)}{G(p)}} \qquad \begin{aligned} Z &= R_o \\ K_i &= R_o/R_i \end{aligned}$$

lorsque $G(p) \longrightarrow \infty$

$$U_s = -\sum_1^n K_i U_i$$

On a alors un amplificateur de sommation, on voit aussi qu'un amplificateur de sommation est un <u>inverseur de signe</u> pour autant que l'on ait une seule tension d'entrée et que $R_1 = R_o$.

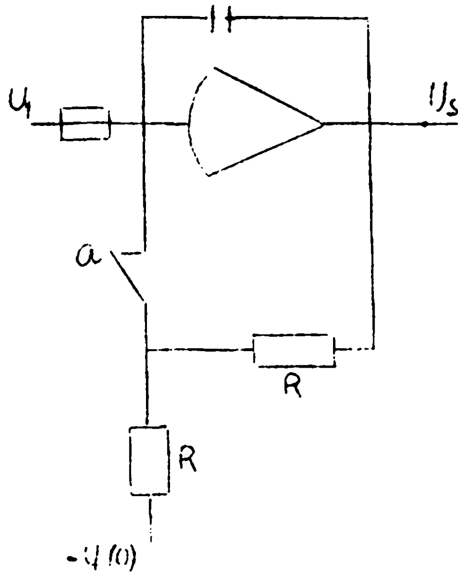
Si Z est une capacité

$$Z = \frac{1}{p\ C} \quad \text{et} \quad K_i = \frac{1}{R_i C}$$

$$U_s = U_s(0) - \frac{\sum_1^n K_i U_i}{p(1+\frac{1}{G(p)}) + \sum_1^n \frac{K_1}{G(p)}}$$

$$U_s\ (C \rightarrow \infty) = U_s(0) - \sum_1^n K_i \int_0^t U_i\ dt$$

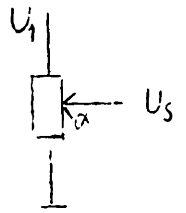
U_s (o) représente la condition initiale, c'est à dire qu'il faut donner une certaine charge au condensateur avant de commencer les calculs.



Le contact est ouvert pendant les calculs

L'amplificateur opérationnel permet donc de réaliser les opérations mathématiques b), c) et d).

La multiplication par une constante est réalisée par un simple potentiomètre.



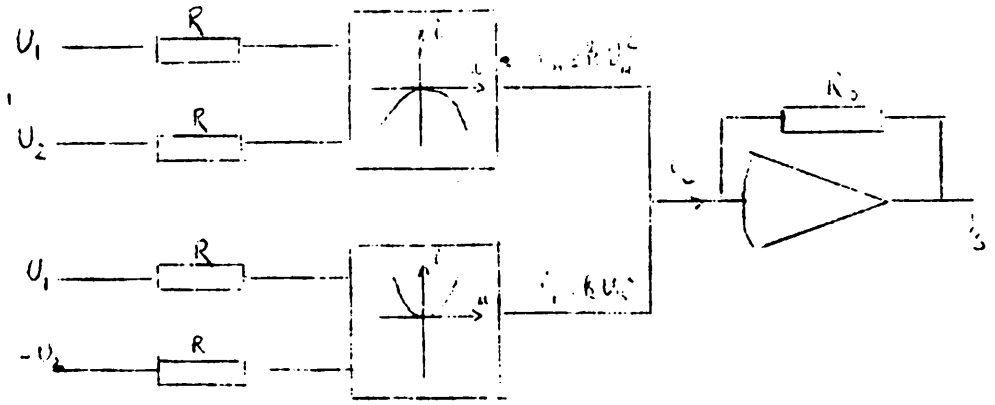
$U_s = \alpha U_1$ $\qquad$ $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

On peut réaliser la multiplication de deux variables de plusieurs manières différentes, multiplicateur à division de temps, multiplicateur à servomoteur, multiplicateur parabolique.

Ce dernier type de multiplicateur est basé sur la relation mathématique suivante :

$$U_1 U_2 = \left(\frac{U_1 + U_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{U_1 - U_2}{2} \right)^2$$

Le problème de la multiplication se ramène alors à celui de former un carré. On l'effectue en utilisant des éléments à caractéristique quadratique (ou parabolique):



$$i_A = -k\left(\frac{U_1+U_2}{2}\right)^2$$

$$i_B = k\left(\frac{U_1-U_2}{2}\right)^2$$

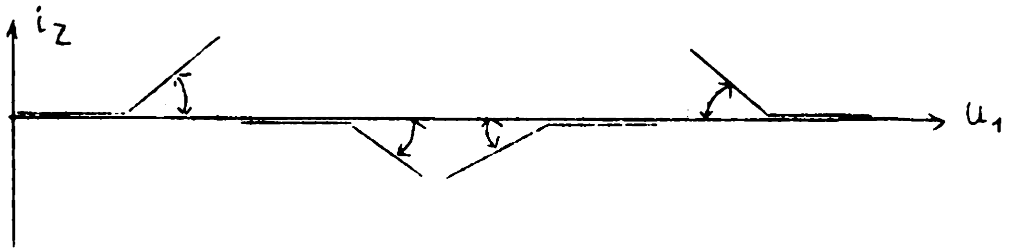
$$U_S = -R_o\, i_e = -R_o\,(i_A + i_B)$$

$$= R_o\, k\left[\left(\frac{U_1+U_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{U_1-U_2}{2}\right)^2\right] = R_o\, k\, U_1 \cdot U_2$$

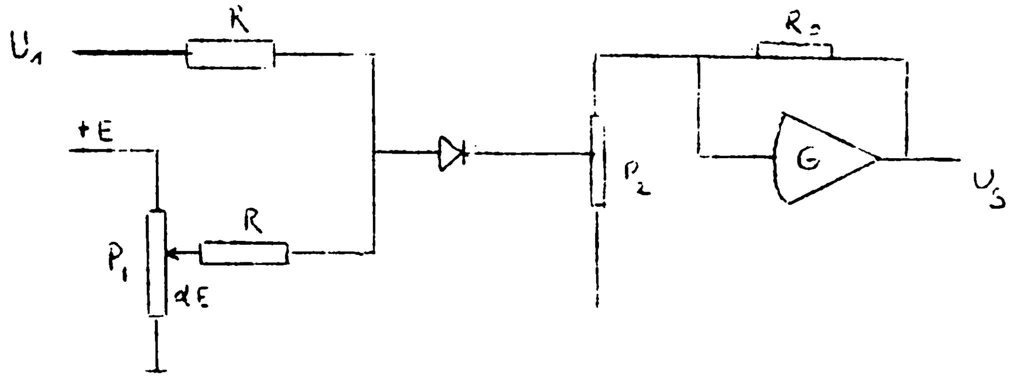
La caractéristique parabolique est réalisée au moyen s'une série de diodes convenablement polarisées sous forme d'une ligne polygonale. Il s'agit en fait ici d'un cas particulier de générateur de fonction à diodes.

En principe un générateur de fonction à diodes est réalisé en sommant les courants qui traversent un réseau de diodes:

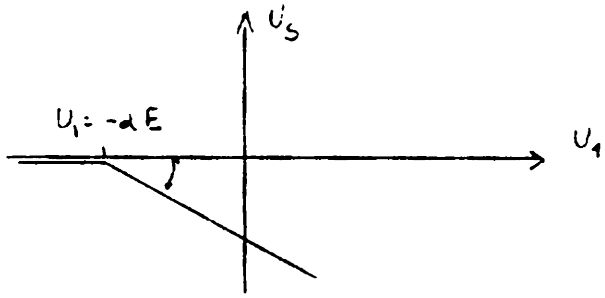
On doit essentiellement disposer de caractéristiques d'allures suivantes :



Le circuit de principe d'un élément est le suivant :



et donne la caractéristique suivante :



En modifiant les polarités de E, U_1 et de la diode on peut obtenir toutes les caractéristiques désirées.

Le potentiomètre P_1 permet de déplacer le coude de la caractéristique, tandis que P_2 permet de règler la pente.

En plaçant en parallèle plusieurs circuits de ce genre connectés à l'entrée du même amplificateur, on peut réaliser les fonctions continues habituelles.

II. Solution d'un problème de transport de faisceau

La solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{d\,s^2} = a\,(s)\,y + \frac{1}{y^3}$$

donne l'enveloppe des tr jectoires des particules que parcourent le système de lentilles (voir rapport de G. Auberson, MPS/Int. DL 61-36) . Elle est valable pour le plan horizontal et le vertical.

L'équation différentielle sans le terme $\frac{1}{y^3}$ décrit une particule isolée qui entre dans le système avec des conditions initiales déterminées. Dans cette équation s est l'abscisse suivant l'axe optique. Tandis que y permet de déterminer, compte tenu des conditions initiales, l'élongation par rapport à l'axe optique. a (s) est une constante variant d'une lentille à l'autre. Cette valeur est une mesure de la "force" de la lentille, et son signe caractérise le signe du gradient. Pour une lentille convergente a(s) est positif. En dehors des lentilles, dans l'espace libre $a(s) = 0$.

Etant donné que le calculateur analogique résoud des équations différentielles où la variable indépendante est le temps, l'abscisse s sera pour les calculs représentée par la variable t dans le calculateur.

Cette courte description du problème montre clairement que pour contrôler le processus de calcul, un appareillage auxiliaire important est nécessaire en dehors du calculateur. Mais la plus grande partie était disponible comme équipement de réserve pour le cadencement dans le synchrotron . La figure 1 montre l'ensemble du schéma du calcul .

Il est évident que dans le processus de calcul on doit, à des moments bien déterminés, insérer les coefficients α_{2i} qui représentent les "forces" des lentilles; il faut aussi pouvoir les modifier lorsque l'on passe d'une lentille à autre. Le choix des coefficients est réalisé par le disque C_1 du sélecteur. Le contact a_1 se ferme à l'entrée d'une lentille et s'ouvre à la sortie de sorte que le coefficient α_{2i} n'est en circuit que pendant le passage à travers une lentille.

La programmation du sélecteur est réalisée à partir d'une fréquence de référence de 20 kHz; qui est d'abord divisée par 200 et transformées en impulsions standard. Ces impulsions sont comptées, et envoyées dans des circuits de présélection, réglés de manière que l'espacement des impulsions de sortie correspond à la distance et à la longueur des lentilles.

La fréquence de référence a été choisie de manière que, compte tenu des échelles choisies, on puisse directement afficher en cm les longueurs sur les circuits de présélection.

Le relai A est actionné par chaque impulsion et commande l'entrée et la sortie des lentilles. La dernière impulsion commande la fin des calculs, en actionnant le relai B.

Le début des calculs se fait en remettant le compteur à zéro et en actionnant le relai B.

Le relai C agit une impulsion sur deux pour faire avancer le sélecteur et passer d'une lentille à la suivante . La remise à zéro 2 donne une série d'impulsions telle que le sélecteur retourne à sa position initiale.

Le contact b_1 a été remplacé par un commutateur à transistors ce qui a permis de réduire considérablement le temps de commutation; mais pour en utiliser pleinement les avantages, il aurait fallu remplacer tous les relais mécaniques. On pourrait alors calculer beaucoup plus vite.

Avec le calculateur que nous avons utilisé, il y avait deux possibilités de réaliser la fonction $f(x) = (\frac{a}{y})^3$, soit par des multiplicateurs, soit par un générateur de fonctions à diodes.

Il est évident que le générateur de fonction est dans ce problème un élément très critique. La fonction doit être réalisée avec une grande précision, précision qui ne pourrait être atteinte avec les multiplicateurs disponibles.

La fonction est produite au moyen de 2 générateurs de fonction (fig. 2)

Le fait que dans un petit domaine, une faible variation de la coordonnée d'entrée entraine une forte variation de la fonction suggère d'en élargir l'échelle dans ce domaine critique, d'isoler ce domaine et de le réaliser au moyen d'un générateur de fonction séparé, de manière à avoir un nombre aussi grand que possible de diodes pour l'approximation de la fonction.

Le schéma montre deux canaux séparés; chaque canal réalisant le fonction dans un domaine différent. Les amplificateurs I et II, servent à élargir l'échelle des coordonnées d'entrée. La commutation des canaux se fait à la sortie par le contact a. Le contact est actionné par le comparateur A. La coordonée pour laquelle on commute peut être réglée par U_k dans un certain domaine, de façon qu'il y ait un certain recouvrement des 2 canaux.

Les ordonnées de la fonction sont multipliées par le facteur 2 ou 20, de manière à utiliser le générateur de fonction dans les conditions optima.

Cette multiplication s'effectue à l'aide des potentiomètres P_1 et P_2 ; cela présente en outre l'avantage de diminuer l'effet du bruit de fond.

Les valeurs de $f(x)$, pour y $\geqslant 0,4$, sont, compte tenu de la précision du générateur de fonction, pratiquement nulles. Par conséquent, on met à la masse la sortie du générateur de fonction, par le relai B, lorsque y $\geqslant 0,4$.

D'après le schéma, on peut facilement voir que le calculateur résoud l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\alpha_1 k^2} \cdot \frac{d^2U(t)}{dt^2} = \pm \alpha_{2i} U(t) + \alpha_3 E^4 \left(\frac{a}{U(t)}\right)^3$$

On reconnait immédiatement l'identité formelle de cette équation avec celle du problème à résoudre.

On rend ces équations identiques en les normant.

Le passage du calcul de l'enveloppe à celui des trajectoires individuelles s'obtient en annulant α_3 ou mieux encore en déconnectant l'entrée correspondante du premier intégrateur.

On passe du plan horizontal au plan vertical, par les commutateurs S_1, S_2 et S_3 qui permettent d'appliquer les conditions initiales désirées.

La vitesse de calcul a été choisie compte tenu de la vitesse de commutation des relais, V = 1 m/sec.

Pour un faisceau de 60 m de longueur, le calcul d'une solution dure une minute. Les calculs ont été effectués pour 4 lentilles, mais le schéma montre, qu'avec le même appareillage on pourrait étudier un faisceau comportant jusque 10 lentilles.

Le générateur de fonction, les relais mécaniques et le sélecteur, ont été à la source de nombreuses difficultés et parfois de résultats erronés.

III. Application à un problème d'accélération

Le problème envisagé consiste à étudier la stabilité des oscillations synchrotroniques des protons circulant sur deux orbites différentes dans un synchrotron à protons.

Dans une étude antérieure (Rapport CERN 62-12) A. Chabert a établi l'équation générale des oscillations synchrotroniques décrivant le comportement des particules soumises à plusieurs tensions d'accélération (amplitudes et fréquences différentes).

En se limitant à deux tensions différentes et au champs magnétique constant il a obtenu l'équation suivante :

$$\Delta \ddot{\Phi}_i + C_i \left[\sin \Delta \Phi_i + a_{ij} \sin \left(n_{ij} \Delta \Phi_i + \delta\omega_{ij} t \right) \right] = 0$$

$\Delta \Phi_i$ = élongation de la particule par rapport à la position d'équilibre

C_i = Constante dépendant des paramètres de la machine, de l'amplitude et de la fréquence de la tension considérée

$a_{ij} = \dfrac{V_j}{V_i}$ = Rapport des tensions d'accélération

$n_{ij} = \dfrac{h_j}{h_i}$ = Rapport des nombres harmoniques des tensions d'accélération

$\delta\omega_{ij} = \omega_j - n_{ij} \omega_i$: Différence des pulsations des tensions d'accélération par rapport à la pulsation ω_j de la tension V_j.

Cette équation est valable pour les 2 orbites, il suffit de donner aux indices la valeur appropriées.

Pour la suite, on peut simplifier les notations en ne considérant qu'une seule orbite à la fois, l'équation prend la forme :

$$\ddot{\Phi} + C \left[\sin \Phi + a \sin \left(n \Phi + \omega t \right) \right] = 0$$

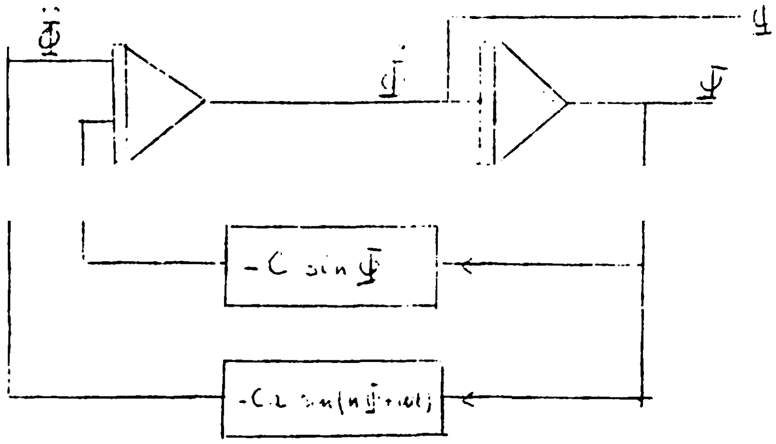
La solution analytique d'une telle équation serait impossible, il faudrait faire de nombreuses simplifications (se limiter à de petites valeurs de Φ) qui réduiraient considérablement l'exactitude du résultat.

Solution par calcul analogique

On peut résoudre cette équation par un calculateur analogique.

Ces méthodes permettent la résolution de l'équation sans devoir procéder à des simplifications restrictives.

Le schéma pour la solution analogique de cette équation est le suivant:



$$\ddot{\Phi} = - C \sin \Phi - C\, a \sin (n\Phi + \omega t)$$

ou

$$\ddot{\Phi} + C \left[\sin \Phi + a \sin (n \Phi + \omega t) \right] = 0$$

Pour la génération du sin Φ , on utilise un générateur de fonction à diodes, comme Φ est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, cela ne présente pas de difficultés particulières.

Par contre pour la fonction sin $(n \Phi + \omega t) = \sin \varphi$, le problème est plus complexe du fait que l'argument φ varie dans des limites très étendues.

Les principe consiste à utiliser un générateur de fonction sinus, variant de $-\pi$ à $+\pi$ et d'en étendre l'échelle en φ avec un système logique (voir figure 3) .

Lorsque φ a atteint la valeur $+ \pi$, au lieu de continuer vers 2π , on revient en arrière à $- \pi$, et on fait de nouveau croître φ vers $+ \pi$. Pour ne pas dépasser les limites de φ , qui sont fixées par les proprietés du calculateur, on doit non seulement commuter φ , mais aussi $\dot{\varphi}$.

Les oscillogrammes et le schéma de la figure 3 , permettent de comprendre exactement la façon dont on obtient ce résultat.

On tient aussi compte des changements de signe de $\dot{\varphi}$ par un système analogue.

On obtient enfin le schéma complet (voir figure 4) qui tient compte des détails précédents.

L'équation de ce schéma est la suivante :

$$\frac{1}{\alpha_4} \ddot{\beta} = - \alpha_7 \sin \pi\beta - \alpha_{10} \sin \left(\pi \frac{\alpha_8}{\alpha_4} \beta + \pi\alpha_{11} t\right)$$

ou

$$\pi\ddot{\beta} = - \pi\alpha_7 \alpha_4 \sin \pi\beta - \pi\alpha_{10}\alpha_4 \sin \left(\pi \frac{\alpha_8}{\alpha_4} \beta + \pi\alpha_{11} t\right)$$

Les coefficients de l'orbite étudiée sont :

$C = 3 \; 10^6$ $\qquad$ $a = 10$ $\qquad$ $n = 10$ $\qquad$ $\omega = - 3.10^5$

En tenant compte d'une dilatation T de l'échelle des temps, due à la vitesse de calcul limitée l'équation a la forme suivante :

$$\ddot{\Phi} = - \frac{3 \cdot 10^6}{T^2} \left[\sin \Phi + 10 \sin \left(10 \, \Phi - \frac{3 \cdot 10^5}{T} \; t \right)\right]$$

En comparant les coefficients pour $T = 10^5$ et pour $\Phi = \pi\beta$ on obtient :

$$\pi \alpha_4 \alpha_7 = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\pi \alpha_4 \alpha_{10} = 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\alpha_8}{\alpha_4} = 10$$

$$\pi \alpha_{11} = 3$$

Les résultats peuvent être présentés sous différentes formes, soit en fonction du temps, soit dans le plan des phases, ce qui présente le plus d'intérêt :

$$\Phi = F_1 (t) \qquad \text{et} \qquad \dot{\Phi} = F_2(t)$$

ou

$$\Phi = f (\dot{\Phi})$$

O. Barbalat

<u>Distribution</u> : (ouverte)
Comité de la Div. MPS
Groupe RF

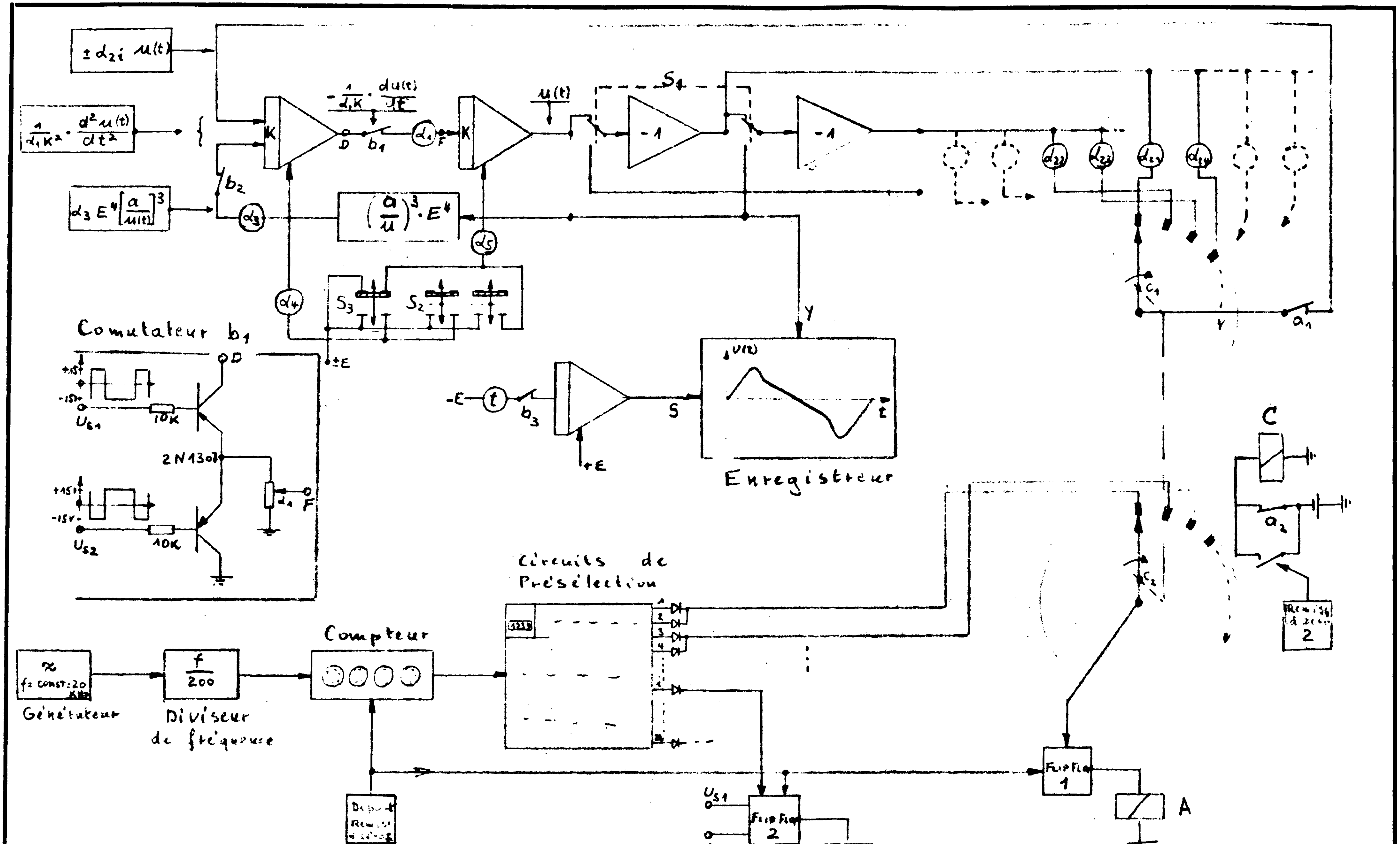
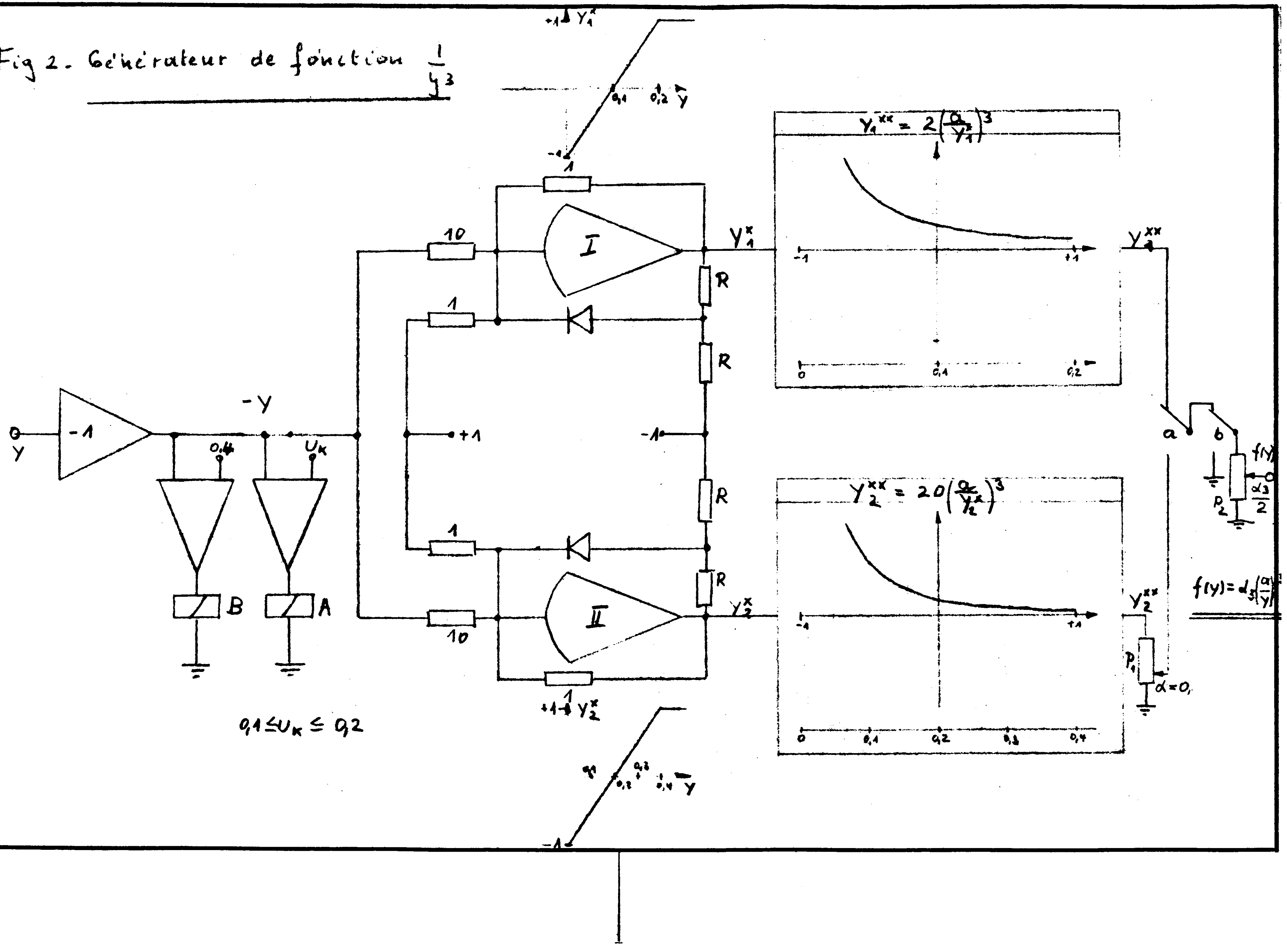


Fig 1- Schéma d'ensemble

Fig 2. Générateur de fonction $\frac{1}{y^3}$



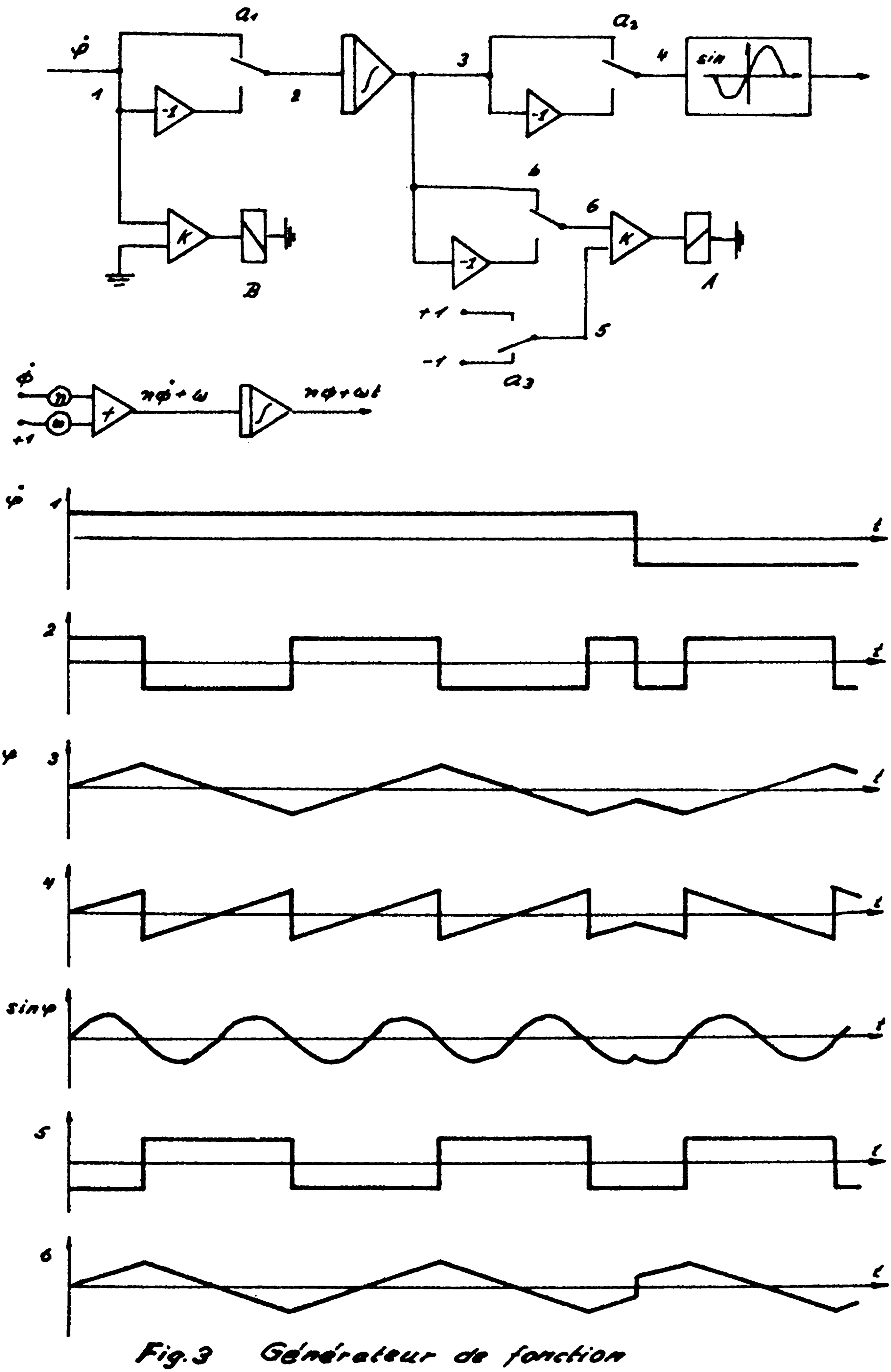


Fig.3 Générateur de fonction

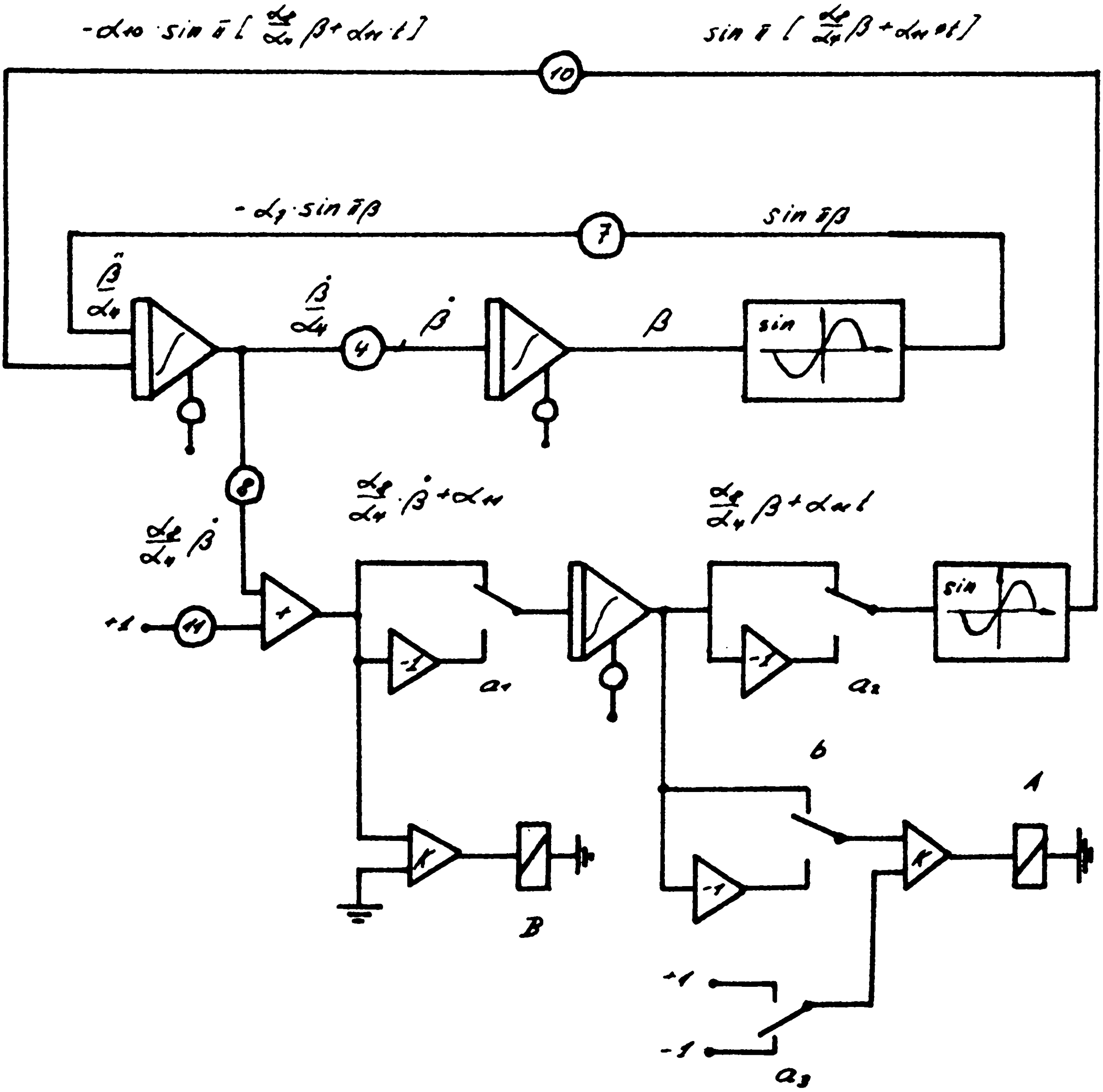


Fig.4 Schéma d'ensemble