

PS/MD 86-2
February 3, 1986

Emittance growth due to scattering by the stripping foil
on the AGS

Experimenters: L. Ahrens, D. Barton, C. Gardner, E. Gill, J.P. Potier

Reported by: D. Barton and J.P. Potier

* * * * *

Please find herewith the minutes of the measurements done in May and June 1985 at Brookhaven National Laboratory, Upton, N.Y., USA.

7/16/85

Number 188

AGS Studies Report

Date(s)	<u>May 29, 1985</u>	Time(s)	<u>1900-2400</u>
	<u>June 4, 1985</u>		<u>2200-0600</u>
	<u>June 12, 1985</u>		<u>1000-1800</u>
	<u>June 19, 1985</u>		<u>0800-1400</u>
Experimenter(s)	<u>L. Ahrens, D. Barton, C. Gardner, E. Gill, J-P Potier</u>		
Reported by	<u>D. Barton and J-P Potier</u>		
Subject	<u>Emittance Growth Due to Scattering by the Stripping</u>		
	<u>Foil</u>		

Introduction

This report is the first of two concerning a series of injection studies carried out during the months of May-July, 1985. The aim of these studies has been to systematically study the behavior of the beam, especially in vertical phase space as a function of injection parameters including intensity. The ultimate goal of the injection work is the optimization of accelerated beam intensity at acceptable loss levels.

EMITTANCE GROWTH DUE TO SCATTERING BY THE STRIPPING FOIL

I. Theoretical Summary

The effect of scattering by a stripping foil during charge exchange injection has been theoretically described by Cooper and Lawrence,¹ with reference to an analysis of residual gas scattering by Bruck.² The foil problem is somewhat simpler than Bruck's case, since the source of scattering is localized to one point along the machine azimuth. The theoretical result of the analysis is that the process leads to diffusion in the transverse phase space of the beam due to the averaged vector sum of the kicks, $\delta y'$, from each scattering. The RMS size of the beam increases each turn by an amount:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2} \beta_0 b t \overline{\sigma_c \cdot (\delta y')^2}$$

where B_0 is the value of the machine betatron function at the foil location, n is the atom density in the foil, t is the foil thickness, σ_c is the average effective Coulomb cross section, and $\overline{(\delta y')^2}$ is the mean square projection of the scattering angle in one plane. The theoretical expression for the product $\overline{\sigma_c \cdot (\delta y')^2}$ has been given by Bruck in the non-relativistic limit. The corresponding relativistic form appropriate for the AGS Linac energy is:

$$\overline{\sigma_c \cdot (\delta y')^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2Zr_p}{\gamma\beta^2} \right)^2 \left[2 \ln \frac{\theta_{\max}}{x} - 1 \right]$$

where for our injection parameters:

$$z = 6$$

$$r_p = e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_p c^2 = 1.5 \times 10^{-18} \text{ m}$$

$$\beta = .566$$

$$\gamma = 1.21 \quad \} \text{ 200 MeV H}^-$$

$$X| = 1.2 \theta_{\min} (1 + 3.33|z|^2)^{1/2}, \quad |z| = \frac{Z}{137\beta}$$

$$= 1.22 \theta_{\min}$$

$$\theta_{\min} = \frac{\hbar/p}{5.3 \times 10^{-11} Z^{-1/3}} = 1.05 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

(corresponds to effective screened atomic size)

The parameter θ_{\max} depends on aperture size since large angle scatters contribute to losses, but not to effective emittance growth.

For the AGS

$$\theta_{\max}^V \sim 2.4 \text{ mrad}$$

$$\theta_{\max}^H \sim 3.1 \text{ mrad}$$

For a $200 \mu\text{g} - \text{cm}^{-2}$ carbon foil, the product $nt = 10^{23}$ atoms/ m^2 , the growth in emittance corresponding to an increase in the RMS projected beam size by an amount σ_f is equal to

$$\Delta\epsilon_f^{\text{(rms proj.)}} = \pi\sigma_f^2/\beta_0$$

for the AGS at the foil location

$$\beta_o^V \approx 10.1\text{m} \quad , \quad \beta_o^H = 22.9 \text{ m}$$

so that we obtain the result:

$$\Delta\epsilon_f^{(\text{rms proj.})} = \beta_o(\text{nt}) \sigma_c \overline{(\delta y)^2} \cdot \pi$$

$$\text{vertical:} \quad \Delta\epsilon_f^V = .015 \pi \text{ mm-mrad/turn}$$

$$\text{horizontal:} \quad \Delta\epsilon_f^H = .033 \pi \text{ mm-mrad/turn}$$

II. Initial Conditions and Preliminary Measurements

HEBT: During all study sessions the six matching quadrupoles in HEBT have been set to the currents in use on May 29th. These values were simply that day's operational values, but they were not such at the beginning of the other sessions. It was desirable to keep the same values in order to have the same betatron phase advance between the SEM units in the line to avoid systematic difficulties with the fits to the beam emittance using the SEM profiles. The results of typical fits to the beam emittance are given in Figure 1. There were measurements made during each study period during the first 10 microseconds of the beam pulse, since this period was typical of short and few-turn studies. In addition, on June 4th, SEM runs and fits were done at 100, 200, and 300 microseconds after the beginning of the pulse and at 200 microseconds on June 12th. The emittance values determined in these measurements were in close agreement from session to session, with the exception of the vertical emittance on June 12th, which was approximately 50% larger than at other times. The Twiss parameters vary as a function of the percentage cut of the beam profile, which is reflected in the changing size and orientation of the fitted ellipses. This systematic variation of the

parameters will need to be verified using the destructive emittance device, which unfortunately was not working during these studies. The Linac beam was apparently quite stable from week to week, but the sensitivity of the SEM fits to variations in quadrupole settings needs to be established also.

Ring Equipment: An attempt was made to set up the AGS in a "bare machine" state which meant that all extraction equipment was OFF, all injection bumps for that equipment were OFF, low-field multipole correctors were OFF. In addition to the rf voltage being OFF, the cavities were mistuned to avoid self-bunching of the beam during spiraling. The low-field ν -quads were adjusted to move the operating point at injection well away from the coupling resonance. The values of the tune as determined by PIP were $\nu_x = 8.72$ and $\nu_y = 8.79$. The ring instrumentation used in this study comprised the PUE at D2 providing input to PIP, the fast beam transformer newly installed at B5, and the IPM (typically integrating for 25 microsec. every 100 microsec).

With the PIP program we have checked the effect of the low-field ν -quad. At a peaker delay of 2803 we have found:

	Q_H	Q
Quad off	8.592	8.666
Quad on	8.722	8.796
Measured effect	+0.130	+0.130
Calculated effect	0.125	0.125

This was for +1000 in V_{quads} and -1000 in H_{quads} (counts?); measured and calculated effect are in a reasonable agreement.

Peaker: We encountered a lack of reproducibility in the initial set-up between the first two studies (May 29th and June 4th) and the following two (June 12th and 19th). The value of the peaker delay for which we found acceptable injection changed by about 130 counts. As a matter of record, work had been done to the peaker circuit during the June 12th maintenance period preceding the study. In addition, the replacement of the H2O power supply was made on the same day, and there is some question of whether the H2O septum was turned "OFF" in the same way before and after this event. In any case, the injection conditions during the third and fourth sessions were not as clean as previously. We observed a persistent beam loss of about 10% on the horizontal aperture in the injection bump region which could not be avoided without steering the H⁻ beam off the foil. For the studies reported here, this problem was primarily an annoyance, which simply made the extraction of the results from the data somewhat more difficult. In the future, this aperture problem and variations in minimal peaker settings will have to be understood.

Betatron Oscillations and Coupling: We have used PIP to set up the steering of a short-pulse beam (half-turn) so as to have measurable betatron oscillations. The PIP results have been quite reproducible and a typical output is shown in Figs. 2. We have also introduced mis-steering in only one plane and looked for oscillations in the other and have seen no sign of coupling at this operating point. Finally, we have tuned the injection steering to give minimal oscillations (< 2 mm peak-to-peak) with minimal losses.

III. Aperture Studies (May 29th and June 4th)

As we want to "paint" the vertical acceptance, we have made a few tests on aperture, particularly the vertical one. This was done with the injection bump [^] used to bring the beam through the stripping foil ON.

First a half turn beam was injected into the AGS and the transverse oscillations cancelled by adjusting the last steering magnets of HEBT.

Then we mis-steered the vertical trajectory to set up vertical oscillations up to an amplitude where 25% losses occur after the first turn (see Fig. 3). In these conditions PIP indicates a 12 to 13 mm vertical oscillation amplitude at pickup C₂, and we have no appreciable horizontal oscillations, so no evidence of coupling.

The vertical emittance of the beam, as measured by the SEM (secondary emission monitors) is $\sim 6\pi$ measured at 90% and we can assume a mismatch of at least 50% from our observation giving $\sim 9\pi$ mm²-rad.

The overall 1/2 aperture removed by the beam is:

$$E_1 = \sqrt{\beta_z} \left(\frac{A}{\sqrt{B_{C_2}}} \right) + \sqrt{\epsilon_v}$$

B_{C_2} = vertical β at C₂

ϵ_v = vertical emittance

β_1 = local β where ϵ_v is needed

For	β_1 (m)	E_1 (mm)
	10.5	20.5
	15	24.6
	22	29.8

The most limiting vertical apertures in the AGS are ± 1.5 inches, and with the beam going through the stripping foil (injection bump ON), ± 1 inch at foil position. In the latter case, with an estimated closed orbit at the foil of the order of -4 mm and an oscillation amplitude of 13 mm, the beam is very close to the mechanical aperture. We conclude there is nothing abnormal in the vertical aperture during the injection process and we will be able to try to paint the vertical acceptance by mis-steering.

The horizontal aperture has not been studied. We have only to mention that losses were very sensitive to the amplitude of the horizontal bump and best results were obtained with the beam steered to the inside of the vacuum chamber. This is abnormal. Another indication is the fact that the foil had to be moved 1 to 2 cm inside from its theoretical position in order to get efficient injection during the H^- set-up. Both phenomena indicate a horizontal aperture restriction in the injection area which should be studied, and vacuum chamber positions should be checked carefully at survey time.

IV. Foil Blow-Up Studies

In Section 1, the foil induced blow-up has been estimated for Coulomb scattering. In the following we have done measurements on the actual blow-up encountered by the beam at injection.

The experimental procedure was the following:

The injection bumps were set to be larger than 500 μs ; then a half-turn beam was first injected and the transverse oscillations reduced to \sim

2 mm peak-to-peak. During the spiralling of the beam through the foil, even after the initial losses, which can be attributed to a scraping of tails, we have still 5% losses during 500 μ s. With the beam removed from the foil, no more losses occur during injection. An IPM scan was done starting 60 μ s after the beginning of the beam, every 100 μ s for 6 points. (See Fig. 4.)

A few scans were done inserting a target to restrict the vertical aperture in order to compare IPM profiles and target losses.

All studies have been done mainly with 5 turn injection which give approximately 2×10^{12} protons into the ring. Tests performed with 1 to 5 turns give the same results, but 5 turns enhance the signal to noise ratio of the IPM.

As described by the theory, at these levels of intensity, the beam blow-up is linear versus number of passes through the foil, with a good accuracy (see Fig. 5). The measured values are summarized below in terms of the 98% (± 2.50) emittance measured by the IPM as well as a theoretical prediction

Conditions	$\Delta\epsilon_V$ turn	$\Delta\epsilon_H$ turn (π mm mrad)
Theoretical values	0.094	0.27
June 12	0.042	0.074
June 19	0.050	0.11

Normally, as the ratio of the β functions of the horizontal to the vertical at foil level is around 2.2, one could expect the same ratio of the blow-up. On June 19th, the agreement was good, but on June 12th, we observed a smaller value in $\Delta\epsilon_H$ which can be partially due to the horizontal aperture problem that we suspect (cf. Section 2).

If we compare the theoretical prediction with the experimental data, the discrepancy is a factor of 2. A few comments are in order.

1. By continued scattering in the foil, the beam is permanently mismatched, but the emittance calculation from the IPM profile assumes a matched beam. This effect gives only a few percent error.
2. We have done some cross checking measurements:
 - a. By switching off the injection bump right after injection, the beams no longer pass through the foil. Then we have no more losses or growth.
 - b. By scraping the beam with the J19 target in the vertical plane, we measure no more vertical growth but the horizontal growth is still the same.
3. We have tried to relate target losses to IPM emittances. Top and bottom J19 targets were positioned respectively at +15.2 mm and -23.3 mm to avoid immediate losses during the stacking process, but giving ~40% losses after 500 μ s. The corresponding profiles are shown in Fig. 6. One can observe that the vertical profile is clearly truncated and gives an emittance of 8.75π measured, to be compared with the 17π acceptance at the target level. Another test was done by positioning the vertical targets to limit the aperture to ± 10 mm, that is, 4.5π mm mrad. In this case we have an immediate loss of about 15%

and the profile width seen by the IPM gives an emittance of 4.6π mm mrad which is consistent with the target aperture.

This will need further study but it seems obvious that the IPM sees mostly the beam heart and the target mainly the tails which are very substantial at injection.

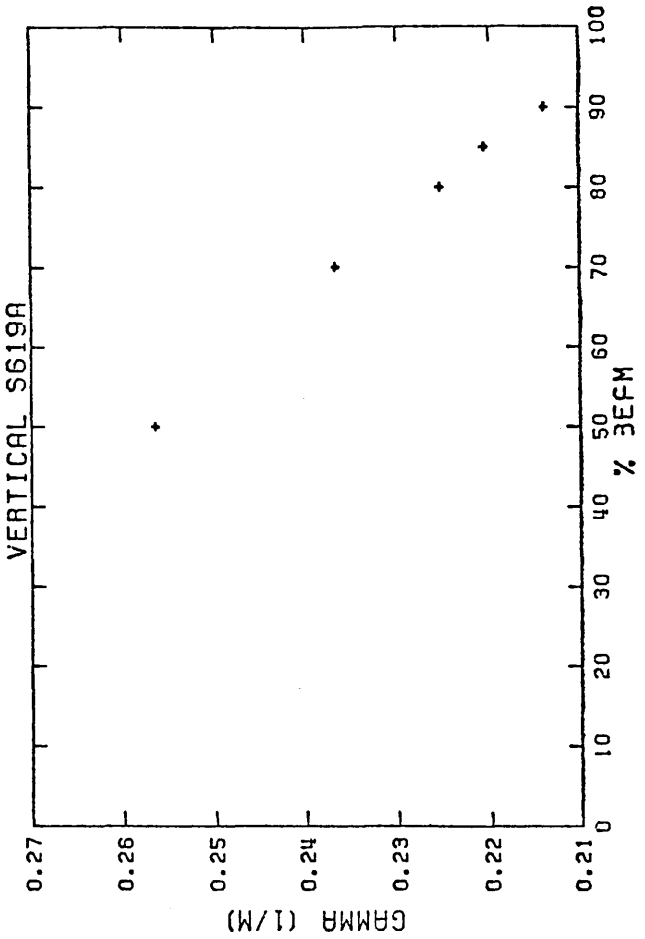
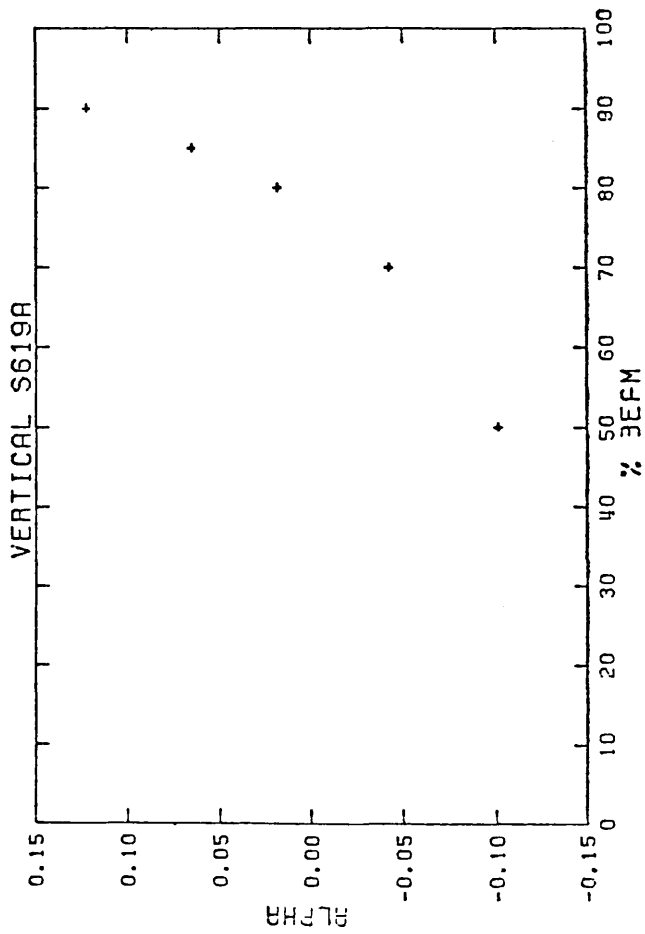
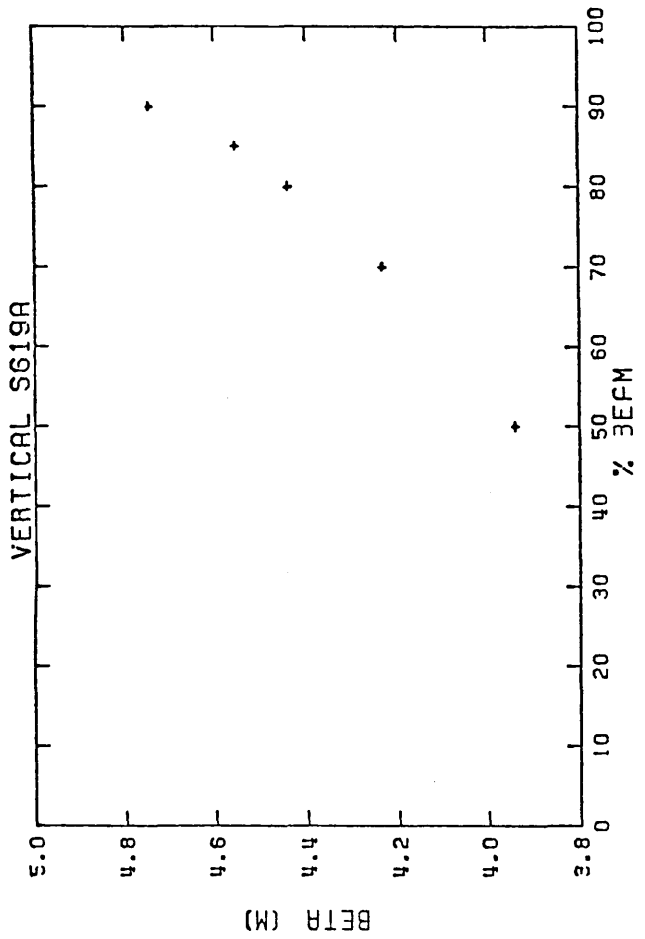
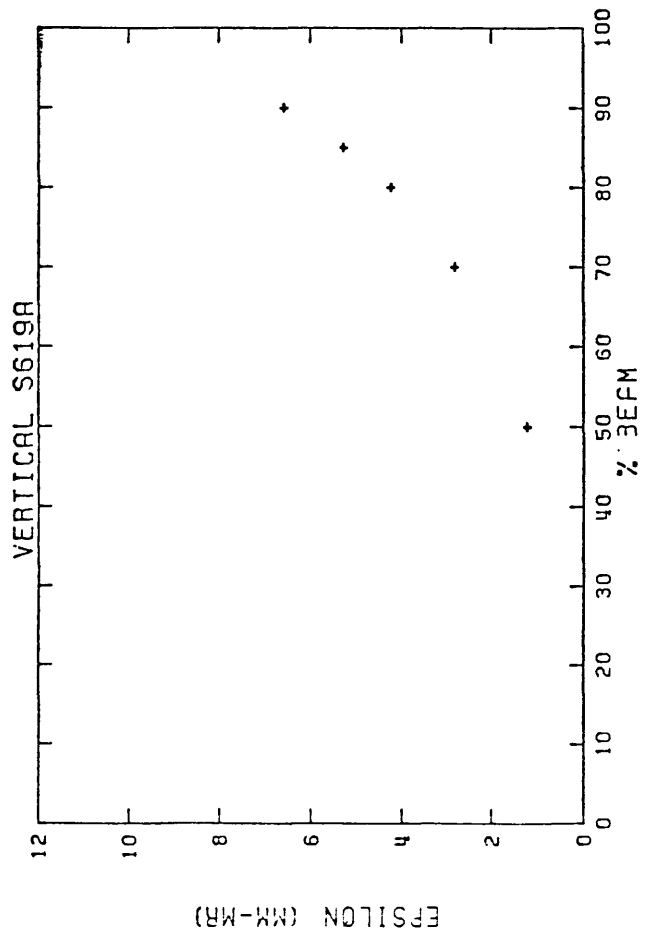


Figure 1 - Emittance parameters from HBT SEM measurement.

```

F(X)=A * B(X/B) * COS(2PI)(C+DX)X + EI + F + GX
A= 11.3485 +/- .278129
B= 295762E-02 +/- .681834E-03;
C= 294571 +/- .121332E-02;
D= -289595E-03 +/- .415911E-04; 29-MAY-85 13:41
E= 392838 +/- .722551E-02;
F= -3.30035 +/- .247441
G= -329175E-02 +/- .152256E-01;
*****

```

EXTRAPOLATION FROM PUE C2 U

```

POSITION AT FOIL = 3.848 +/- 0.412 MM
ANGLE AT FOIL = 0.6933 +/- 0.0360 MR
TUNE = 8.7954 +/- .0012
VERT CHROMATICITY = -0.793 +/- 0.115
DELTA-P/P = 0.000590 +/- 0.000245
*****

```

CHIS2R IS 3.30493

```

F(X)=A * B(X/B) * COS(2PI)(C+DX)X + EI + F + GX
A= 5.05740 +/- .238525;
B= .346439E-02 +/- .570211E-03;
C= .276541 +/- .183911E-02;
D= -356604E-03 +/- .525210E-04; 29-MAY-85 13:59
E= .348550 +/- .130020E-01;
F= 22.9748 +/- .209100;
G= -193892 +/- .102739E-01;
*****

```

EXTRAPOLATION FROM PUE C2 H

```

POSITION AT FOIL = 4.718 +/- 0.418 MM
ANGLE AT FOIL = 0.3505 +/- 0.0176 MR
TUNE = 8.7234 +/- .0013
HORZ CHROMATICITY = -1.015 +/- 0.145
DELTA-P/P = 0.000792 +/- 0.000193
*****

```

CHIS2R IS 4.86493

Figure 2 - PIP results for "bare machine"

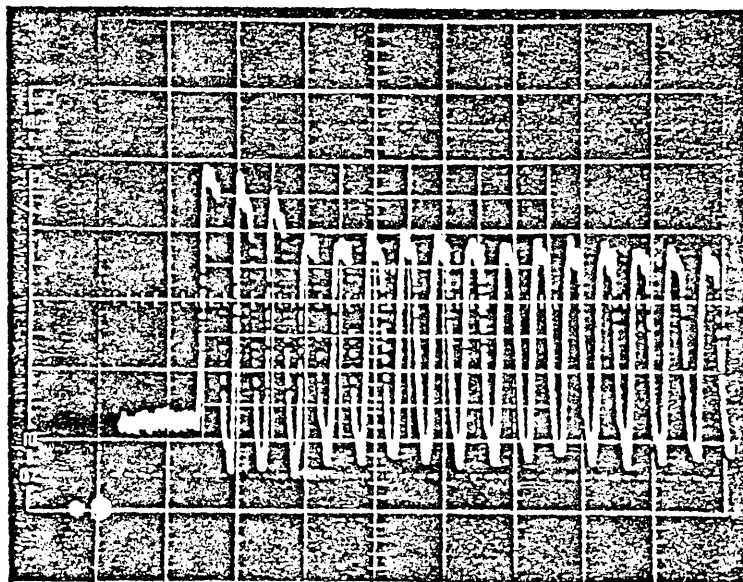


Figure 3 - B5 transformer signal - 1/2 turn vertical aperture studies. 13 mm amplitude oscillation.

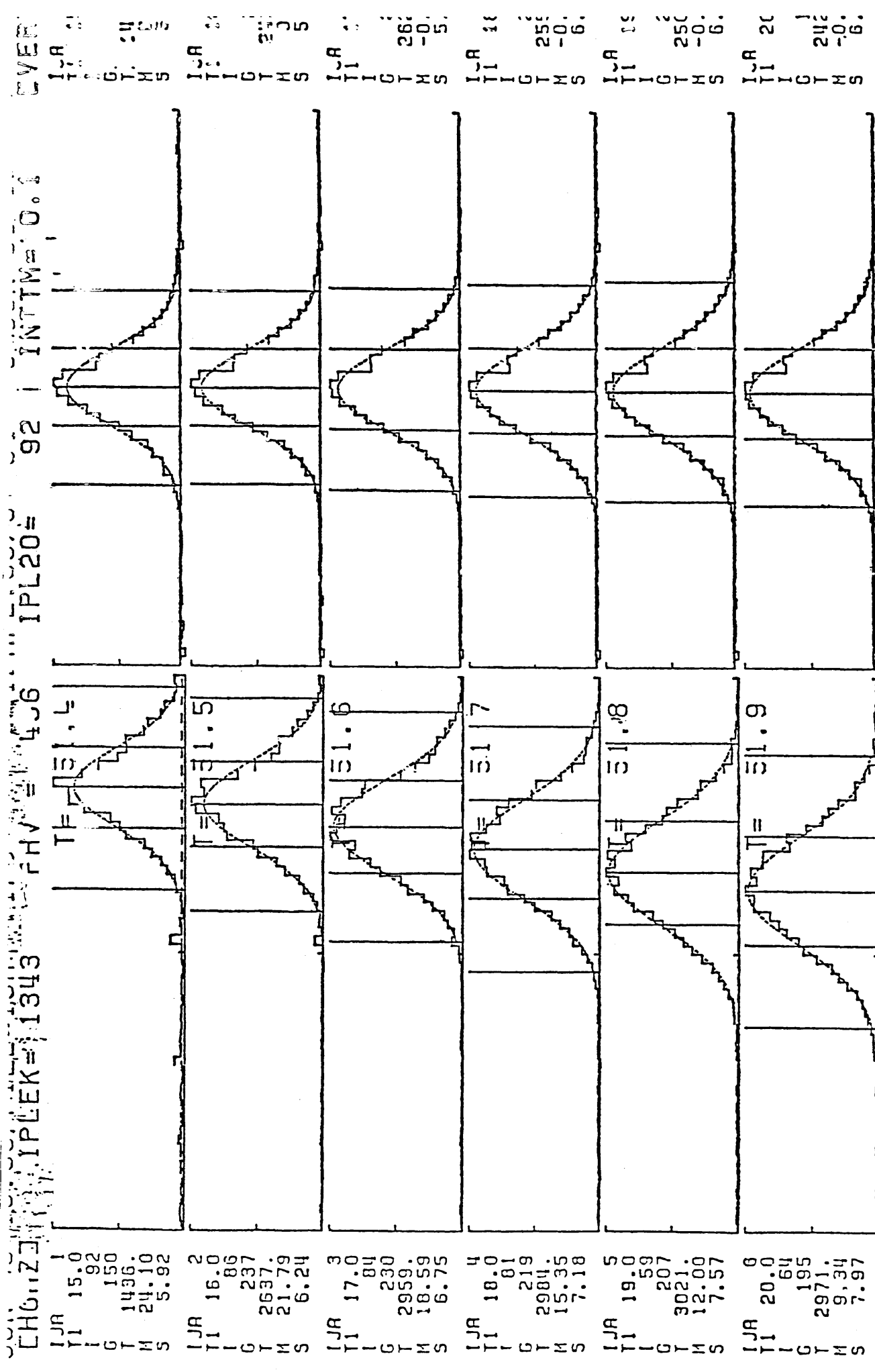


Figure 4 - IPM scan. 5-turn integrated for 25 μ sec. Injection bump on.

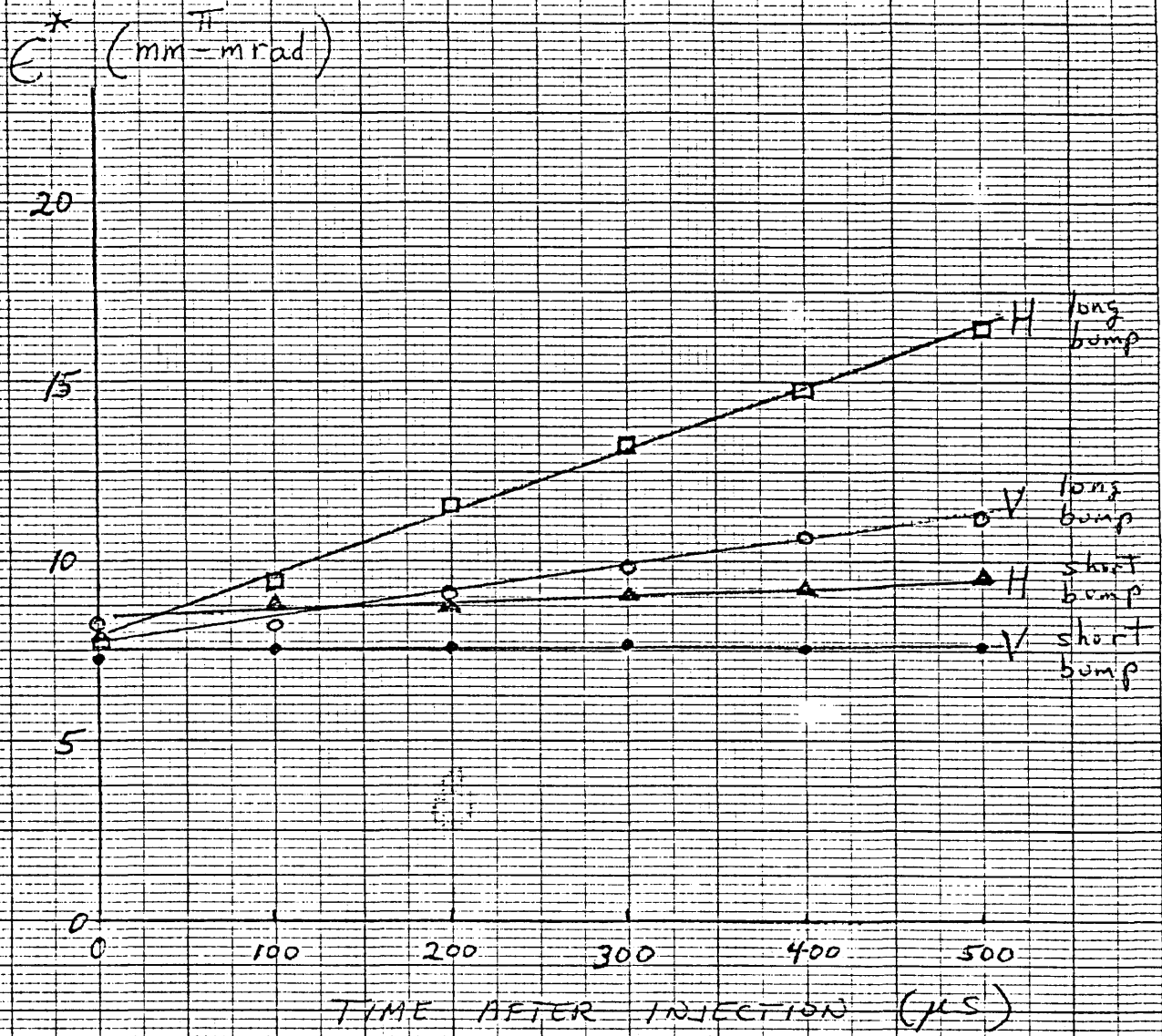


Fig. 5

5 TURN INJECTION —

BEAM GROWTH DUE TO FOIL

Distribution

PS GROUP LEADERS

B. Allardyce
R. Billinge
Y. Baconnier
O. Barbalat
M. Bouthéon
L. Coull
D.C. Fiander
M. Georgijevic
H. Haseroth
E. Jones
B. Kuiper
P. Lefèvre
J.H.B. Madsen
G. Nassibian
P.L. Riboni
K. Schindl
D.J. Simon

c.c. D. Dekkers

PSS

J. Boillot
R. Cappi
L. Henny
J.P. Potier
T. Risselada
J.P. Riunaud
Ch. Steinbach
+ E. Brouzet

BS

B. Frammery
L. Magnani
N. Rasmussen
K. Schindl
H. Schönauer

+ J.P. Delahaye

BEAM EMITTANCE GROWTH IN A PROTON STORAGE RING
EMPLOYING CHARGE EXCHANGE INJECTION*

R. K. Cooper† and G. P. Lawrence

Los Alamos Scientific Laboratory
University of California
Los Alamos, New Mexico 87544

Introduction

Recently it has been shown that very large currents can be accumulated in medium energy proton storage rings by multiturn injection of an H⁻ beam through a charge stripping medium.¹ Since the particles are injected continuously into the same phase space, it is possible to increase the circulating beam brightness with respect to that of the incoming beam by a large factor. The stored protons pass repeatedly through the stripper, however, so that this phase space is gradually enlarged by scattering. In this paper we consider how the circulating beam phase space (emittance) growth rate depends on the nature of the scattering process and on where it occurs in the storage ring matrix. Since the motivation for this work arose in connection with the design of the proposed high-current storage ring at LAMPF, the results are focused on the specific parameters of that device. The formalism is developed with some generality, however, subject only to the following restrictions. The stripper thickness (thin foil) is assumed negligible in comparison with the mean betatron wavelength of the machine. Residual gas scattering is neglected (i.e. high vacuum in the ring). All inelastic and nuclear elastic scattering is assumed negligible in comparison with Coulomb elastic scattering for the small angles considered here. Finally, we restrict ourselves to the case in which the circulating protons undergo no more than one Coulomb scattering per stripper traversal.

Derivation of Scattering Distributions in Phase and Betatron Space

We consider a hypothetical storage ring with a stripper foil at some location $s=0$ ($= C = 2C = 3C$, etc. where C is the ring circumference). We follow the betatron motion of a large number of particles injected into the ring with displacement y_0 from the equilibrium orbit and with inclination y'_0 . By y we mean either radial or vertical displacement. We employ a graphical phase plane analysis analogous to that of Bruck² to deduce the distribution of betatron amplitudes after the particles have passed through the foil a large number of times, N .

The general form of motion of a non-equilibrium particle is

$$y = \hat{y}(\beta/\beta_0)^{1/2} \cos(\phi - \delta), \quad (1)$$

where y , β , ϕ , are all functions of location s . β is the betatron function of the ring, and $\phi = \int ds/\beta$; β_0 is the value of β at the foil location, $s=0$. The constants \hat{y} (betatron amplitude) and δ are determined from the initial values y_0 and y'_0 . The slope of the trajectory is obtained by differentiating Eq. (1), using the relation $\phi' = 1/\beta$;

$$(\beta\beta_0)^{1/2} y' = -\hat{y}[\sin(\phi - \delta) - (\beta'/2) \cos(\phi - \delta)]. \quad (2)$$

Solving Eqs. (1) and (2) for the sine and cosine:

$$\cos(\phi - \delta) = y/(\hat{y}(\beta/\beta_0)^{1/2}) \quad (3)$$

$$\sin(\phi - \delta) = (\beta y' - (\beta'/2)y)/(\hat{y}(\beta/\beta_0)^{1/2}) \quad (4)$$

Squaring and adding Eqs. (3) and (4), we obtain the Courant-Snyder invariant:

$$\frac{y^2 + [\beta y' - (\beta'/2)y]^2}{\beta} = \frac{\hat{y}^2}{\beta_0} = A \quad (5)$$

It can be readily shown that the (y, y') phase space area occupied by all particles whose betatron amplitudes are less than or equal to y is πA , a fact which we shall use later.

Equations (3) and (4) can be depicted graphically on a phasor diagram (such as used in electrical circuit theory) as follows: envision a vector, attached at the origin of a two-dimensional space, with amplitude $\hat{y}(\beta/\beta_0)^{1/2}$, and making a negative angle $(\phi - \delta)$ with the horizontal axis. Then the horizontal projection of the vector is y , while the vertical projection is $\beta y' - (\beta'/2)y \equiv y^*$.

Since we are considering only scattering at a fixed s location (the foil), the phasor representing unperturbed motion has constant amplitude $\hat{y} = [y_0^2 + (\beta_0 y'_0 - (\beta'_0/2)y_0]^2]^{1/2}$, and advances clockwise, as the proton makes each circuit of the ring, in angular steps of $\Delta\phi = \int_0^C ds/\beta = 2\pi\nu$ radians, where ν (the tune of the motion) is the number of betatron oscillations in one revolution. A collision with a foil atom produces a small change $\delta\hat{y}$ in the vector representing betatron motion. This incremental vector has only a vertical component, $\delta y^* = \beta_0 \delta y'$, since the trajectory slope is changed but not the trajectory location. If the tune, ν , is not numerically the ratio of small integers (i.e. not at a resonance) then the mean value of $1/2$ for the square of the cosine or the sine of the betatron phase at collision can be employed exactly as in Bruck's Eq. (14.36), and the incremental vectors can be added to the unperturbed vectors exactly as in his analysis, to give the probability distribution function for observing a particle with initial parameters y_0, y'_0 to have parameters y, y^* after N turns. This function is where $\sigma_N^2 = \frac{1}{2} N_s \beta_0^2 (\delta y')^2$,

$$P_N(y, y^*) = \exp(-(\vec{y} - \vec{y}_{or})^2 / 2\sigma_N^2) / 2\pi\sigma_N \quad (6)$$

(cf. Bruck's Eqs. (14.35) and (14.36) with $\lambda = \beta_0$).

N_s is the number of scatterings in N circuits of the ring, which in terms of foil thickness t , atom density n , and Coulomb scattering cross section σ_c is $N_s = Nnt\sigma_c$. The vector \vec{y} is the vector (in the y, y^* plane) representing a particular betatron motion, while \vec{y}_{or} is the vector with components $(y_0, \beta_0 y'_0 - (\beta'_0/2)y_0)$, rotated clockwise through an angle $N2\pi\nu$.

Transformed into the conventional y, y' phase plane, the probability distribution becomes

*Work performed under the auspices of the United States Energy Research & Development Administration

†Present address: Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, CA 94550

Permanent address: Physics Department, California State University, Hayward, California

$$P_N(y, y') = \left(\beta_0 / 2\pi\sigma_N^2 \right) \exp \left\{ - \left[(\delta y)^2 + \left(\beta_0 \delta y' - (\beta_0'/2) \delta y \right)^2 / 2\sigma_N^2 \right] \right\}, \quad (7)$$

where $y = y - y_{or}$ and $\delta y' = y' - y'_{or}$ with y_{or} and y'_{or} being the mapping of the point (y_{or}, y'_{or}) onto the y, y' plane.

This last result can be interpreted as follows: If many particles are injected into the ring with essentially the same initial conditions, then after N turns the particles will be distributed in phase space about the y, y' coordinates of an unperturbed orbit such that the contours of equal probability are ellipses similar to the betatron motion ellipse at $s = 0$. In particular, if the initial conditions are $y_0 = 0 = y'_0$, then the contours of equal probability in phase space are given by

$$y^2 + (\beta_0 y' - (\beta_0'/2) y)^2 = \text{constant}.$$

Further, integrating Eq. (7) over all y' yields the result that the beam is distributed in space in a Gaussian (normal) profile centered on the unperturbed orbit location.

If the injected beam has a normalized distribution function in y, y^* space given by

$$f_0(y, y^*) = \exp \left(- (y^2 + y^{*2}) / 2\sigma_0^2 \right) / 2\pi\sigma_0^2 \quad (8)$$

which we take as defining a "matched" beam, then after N turns the distribution will be given by

$$f_N(y, y^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(y, y^*) P_N(y - \bar{y}, y^* - \bar{y}^*) d\bar{y} d\bar{y}^*, \quad (9)$$

which is readily evaluated to be

$$f_N(y, y^*) = \exp \left(- (y^2 + y^{*2}) / 2(\sigma_0^2 + \sigma_N^2) \right) / 2\pi(\sigma_0^2 + \sigma_N^2). \quad (10)$$

Thus the foil scattering width σ_N adds quadratically to the injected beam width σ_0 .

The betatron amplitude distribution function can be obtained from this last result as (cf. Ref. 2, Eq. (14.42)):

$$\hat{y}(\hat{y}) d\hat{y} = \hat{y} \exp \left(- \hat{y}^2 / 2(\sigma_0^2 + \sigma_N^2) \right) / (\sigma_0^2 + \sigma_N^2) d\hat{y}, \quad (11)$$

which is a Rayleigh distribution. This distribution yields a mean square betatron amplitude $\hat{y}^2 = 2(\sigma_0^2 + \sigma_N^2)$.

Emittance Growth for Summed Distributions

If we inject continuously for N turns, particles injected in the first turn will have undergone N foil traversals, those injected in the 2nd turn $N-1$ traversals, and so on. The betatron amplitude distribution (normalized) representing the scattering history of all particles accumulated in the ring is then the sum:

$$P_{\Sigma N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y} \exp \left(- \hat{y}^2 / 2(\sigma_0^2 + i\delta\sigma^2) \right) / (\sigma_0^2 + i\delta\sigma^2) \quad (12)$$

where $\delta\sigma^2 = 1/2\epsilon_0^2 n t \sigma_c (\delta y')^2$ is the incremental increase in the squared scattering width added per foil

traversal. While this distribution cannot be evaluated explicitly in general, its mean square value is defined and is just:

$$\overline{\hat{y}^2} = 2 \left[\sigma_0^2 + 1/2(N+1)\delta\sigma^2 \right] = 2 \left[\sigma_0^2 + 1/2\sigma_N^2 \right], \quad (13)$$

the approximation being valid for large N .

If $i\delta\sigma^2$ is small in comparison with σ_0^2 , and N is not too large, it can be shown numerically that the sum $P_{\Sigma N}(y)$ is reasonably well approximated by the Rayleigh distribution:

$$p(\hat{y}) = \hat{y} \exp \left(- \hat{y}^2 / 2(\sigma_0^2 + 1/2\sigma_N^2) \right) / (\sigma_0^2 + 1/2\sigma_N^2) \quad (14)$$

Using the relation between the Courant-Snyder invariant and the stored beam emittance, it is seen that the (y, y') phase space occupied by particles with betatron amplitudes less than or equal to the RMS value $(\overline{\hat{y}^2})^{1/2}$ is:

$$\epsilon_N = \pi \overline{\hat{y}^2} / \beta_0 = (2\pi / \beta_0) (\sigma_0^2 + 1/2\sigma_N^2) \quad (15)$$

$$= \epsilon_0 + \pi N \delta\sigma^2 / \beta_0 = \epsilon_0 + 1/2\pi \beta_0 N n t \sigma_c (\delta y')^2$$

where ϵ_0 is the initial emittance of the injected H^- beam. Thus we observe that the emittance of the stored beam is proportional to the value of the betatron function at the stripper location, the areal density of the target, the Coulomb scattering cross section of the target atoms, and the mean square scattering angle produced in the collisional process, and that it grows linearly with the number of injected turns. In Fig. 1 we have plotted the scattering width σ_N versus the product Nnt , with β_0 as a parameter.

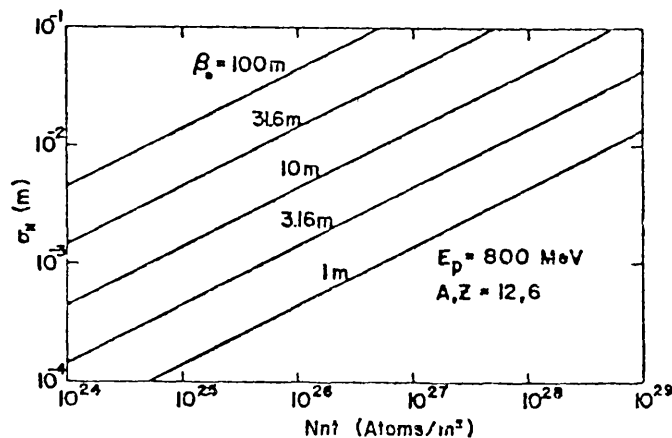


Figure 1

Scattering Width σ_N Versus Nnt , with β_0 as a Parameter.

$E_p = 800$ MeV. Stripper Material - Carbon.

The energy of the incident protons was taken as 800 MeV, the stripper material as carbon ($A, Z = 12, 6$), and the product $\sigma_c (\delta y')^2 = 3.84 \times 10^{-33}$ (m-rad)²/atom was obtained from Bruck (Eq. (14.10)), corrected for relativistic effects and center-of-mass motion.

The stored beam emittance growth (Eq. (15)), under conditions pertinent to the LAMPF storage ring proposal, is plotted in Fig. 2 as a function of number of

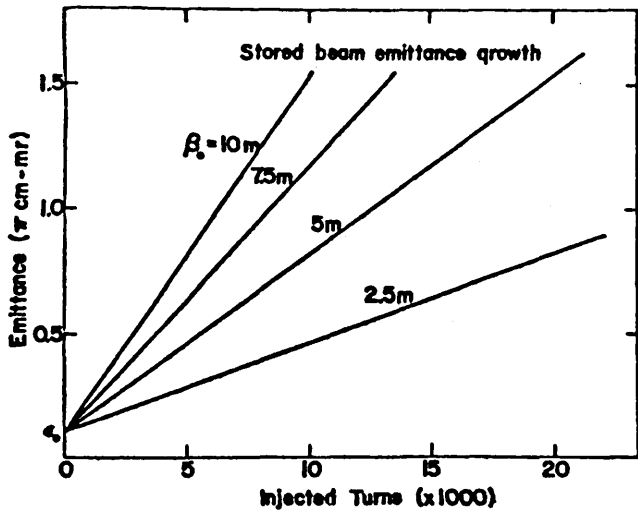


Figure 2

Stored Beam Emittance Growth Versus Number of Injected Turns, with β_0 as a parameter. $E_p = 800$ MeV. Stripper = $150 \mu\text{g}/\text{cm}^2$ carbon foil.

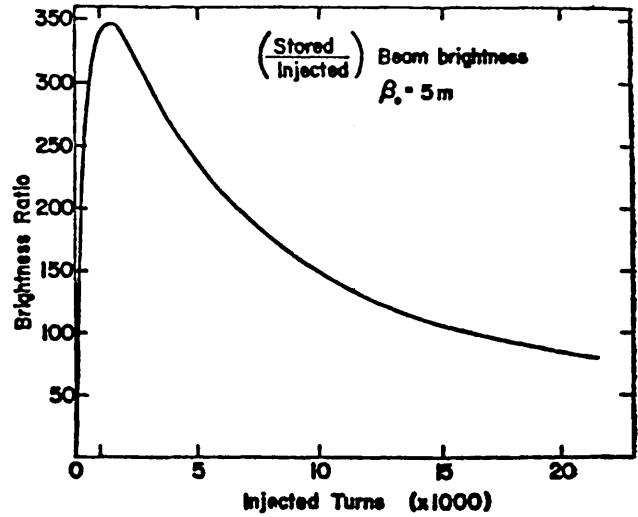


Figure 3

Ratio of Stored to Injected Beam Brightness Versus Number of Injected Turns, for $\beta_0 = 5$ m, and $\epsilon_0 = (\pi/10)$ cm-mrad

injected turns, with β_0 as a parameter. The emittance ϵ_0 , for the injected H^- beam is taken as $(\pi/10) \times 10^{-5}$ m-rad. Using the recently measured 800 MeV carbon stripping cross sections $(\sigma_{-10}$ and $\sigma_{01})^3$, and choosing 95% $\text{H}^- \rightarrow \text{H}^+$ conversion to be an acceptable efficiency, we arrive at $nt = 7.5 \times 10^{22}$ atoms/ m^2 . $\sigma_c(\delta y')^2$ has the same value as for Fig. 1. It is apparent from the figure that (depending on the choice of β_0) we should be able to inject from 10,000 to 20,000 turns without increasing the stored beam emittance to an unacceptably large value.

Brightness Ratio

It is interesting to examine the dependence of the stored beam brightness on the number of turns injected into the ring. If brightness is defined to be proportional to beam current and inversely proportional to the product of the emittances in y, y' and x, x' phase space, $(B \propto i/E_x E_y)$, then the ratio between the brightness of the stored beam and that of the injected beam, after N turns of continuous injection is:

$$R_B = B_N/B_0 = (N i / \epsilon_{Nx} \epsilon_{Ny}) / (i / \epsilon_{0x} \epsilon_{0y}) \\ = N \left[(1 + 1/2N \delta \sigma_x^2 / \sigma_{0x}^2) (1 + 1/2N \delta \sigma_y^2 / \sigma_{0y}^2) \right]$$

If we assume equal β_0 and ϵ_0 in the x, x' and y, y' planes, then this simplifies to

$$R_B = N / (1 + 1/2N \delta \sigma^2 / \sigma_0^2)^2$$

This function is plotted in Fig. 3 for $\beta_0 = 5$ m, and all other conditions as specified in Fig. 2. It can be seen that the beam brightness ratio rises rapidly to a maximum of nearly 350 at $N = 1500$ turns, and then drops off rather slowly. Even at $N = 20,000$, the circulating beam is more than 80 times brighter than the injected beam.

References

1. J. D. Simpson, IEEE Trans. on Nucl. Science NS-20, 198, (1973)
2. H. Bruck, Accélérateurs Circulaires de Particules, Chapter XIV, (Presses Universitaires de France, Paris '966)
3. G. P. Lawrence, T. D. Hayward, and R. F. Bentley, to be published.

June, 11 1985

$$\sigma_c \langle \overline{\delta\theta^2} \rangle = \frac{\pi}{2} \left[\frac{2Zr_p}{\beta^2} \right] \left[2 \ln \frac{\theta_{max}}{\chi} - 1 \right]$$

$$\chi = 1.20 \theta_{min} (1 + 3.33 \Gamma^2)^{1/2} \quad \Gamma = \frac{Z}{137\beta}$$

$$\chi = 1.20 \times 10^{-5} (1 + 3.33 \frac{6^2}{137^2 0.566^2})^{1/2}$$

$$\theta_{max}^v \approx 2.44 \times 10^{-3} \text{ rad} \approx \sqrt{\frac{60''}{10.M}} = \sqrt{\frac{e}{\beta_{min}}}$$

$$\theta_{min} = \frac{\lambda_c}{a} = \frac{h/p}{(5.3 \times 10^{-11}) Z^{-1/3}} = 1.05 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\theta_{max}^H \approx 2.82 \times 10^{-3}$$

$$Z = 6$$

$$\beta = 0.566$$

$$r_p = 1.5 \times 10^{-18} \text{ m}$$

$$\left(2 \ln \frac{\theta_{max}^v}{\chi} - 1 \right) = 9.52$$

$$H \Rightarrow 9.80$$

$$\frac{2Zr_p}{\beta^2} = 5.62 \times 10^{-17} \quad \left(2 \ln \frac{1.3 \times 10^{-3}}{1.9 \times 10^{-5}} - 1 \right) =$$

$$\sigma_c \langle \overline{\delta\theta^2} \rangle = 4.76 \times 10^{-32} \text{ m}^2 \text{ rad}^2 / \text{atom}$$

$$\frac{\Delta E_v}{N'} = \frac{\pi}{2} \cdot (10.7) (10^{23}) (4.76 \times 10^{-32}) = 0.078 \pi \frac{\text{mm-wal}}{\text{TURN}}$$

$$\frac{\Delta E_H}{N'} = \frac{\pi}{2} (24.9) (10^{23}) (4.90 \times 10^{-32}) = 0.170 \pi \frac{\text{mm-wal}}{\text{TURN}}$$

CHAPITRE XIV

DIFFUSION ÉLASTIQUE DU FAISCEAU PROTONIQUE PAR LE GAZ RÉSIDUEL

I. — CHAMBRE LARGE

A) Généralités

Comme on le mettra en évidence, les interactions élastiques entre un faisceau protonique accéléré et un gaz résiduel produisent leurs effets les plus marquants de diffusion du faisceau et de pertes de particules, essentiellement au début du cycle pendant que l'énergie cinétique des particules croît de sa valeur à l'injection au quadruple de celle-ci. De ce fait, la présente théorie non relativiste paraît valable pour des énergies cinétiques d'injection jusqu'à environ 50 MeV. Au-dessus de cette énergie, la diffusion est un phénomène négligeable tout au moins dans un vide usuel de pression $\lesssim 10^{-5}$ torr.

On suppose le gaz résiduel non ionisé au lieu même du faisceau protonique. Cette hypothèse paraît justifiée, car les chocs ionisants sont rares et les ions positifs et électrons qui en résultent disparaissent rapidement, les ions positifs par répulsion électrostatique, les électrons du fait de leur énergie cinétique acquise lors d'un choc ionisant. On suppose qu'il n'y a pas non plus d'ions négatifs en quantité appréciable au lieu du faisceau.

Formellement le problème de la diffusion s'apparente à toute une classe de phénomènes : celle des oscillations perturbées par un bruit. Ils peuvent être traités par différentes méthodes.

Le présent traitement est essentiellement basé sur un travail de Blackman et Courant, réf. [15].

B) Caractéristiques du choc unique

Avant de donner des expressions quantiques, on rappelle les lois de choc classiques de Rutherford, étant donné qu'elles sont approximativement valables.

Un proton mobile, non relativiste ($\gamma \approx 1$; $\beta \ll 1$), subit, lors de la traversée du champ Coulombien d'un ion immobile de charge Ze , une déviation angulaire $\delta\theta$ qui, si elle est petite, est de :

$$\delta\theta \approx \frac{2 Zr_p}{b\gamma\beta^2} \approx \frac{Zr_p}{b} \frac{E_0}{T} \quad (14.1)$$

Ze = Charge du proton

b = Paramètre d'impact

$E_0 = 0,938 \cdot 10^9$ eV (pour protons incidents)

T = Energie cinétique des protons

(La seconde égalité n'est valable qu'à l'approximation non relativiste)

$$r_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_p c^2} = 1,5 \cdot 10^{-18} [m]$$

(r_p est le « rayon classique » du proton, on sait que son rayon réel est environ 10^3 fois plus grand).

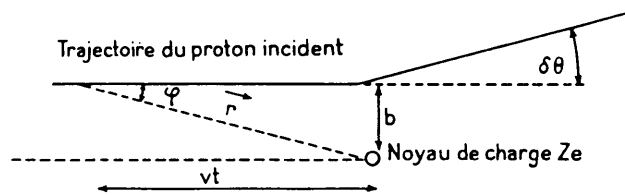


Fig. 28

On démontre (14.1) ainsi : la quantité de mouvement transversale Δp_{\perp} communiquée au proton mobile lors de l'interaction avec un noyau résiduel, est :

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\perp} dt$$

$$f_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \sin \varphi$$

On exprime r et t par la variable φ (fig. 28) :

$$r = \frac{b}{\sin \varphi}$$

$$\frac{b}{vt} = \operatorname{tg} \varphi$$

On obtient

$$\Delta p_{\perp} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{bv} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi$$

$$= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{bv}$$

Avec

$$p = m_p \gamma v,$$

On a finalement

$$\delta\theta = \frac{\Delta p_{\perp}}{p} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{b\gamma m_p v^2}$$

La section efficace pour qu'un proton incident ait un paramètre d'impact, compris entre b et $b + db$, est par définition :

$$d\sigma = 2\pi b db$$

La section efficace de déviation, comprise entre $\delta\theta$ et $\delta\theta + d\delta\theta$ est :

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{db} \frac{db}{d\delta\theta} d\delta\theta$$

avec (14.1), on obtient :

$$\frac{d\sigma}{d\delta\theta} = 2\pi \left(\frac{2Zr_p}{\beta^2} \right)^2 \frac{1}{(\delta\theta)^3} = 2\pi \left(\frac{Zr_p E_0}{T} \right)^2 \frac{1}{(\delta\theta)^3} \quad (14.2)$$

C'est la formule de Rutherford pour déviations $\delta\theta$ faibles. La section efficace totale d'un choc est :

$$\sigma = \int_{\delta\theta_m}^{\delta\theta_M} \frac{d\sigma}{d\delta\theta} d\delta\theta = \pi \left(\frac{2Zr_p}{\beta^2} \right)^2 \left[\frac{1}{(\delta\theta_m)^2} - \frac{1}{(\delta\theta_M)^2} \right]$$

Les valeurs maximale et minimale de $\delta\theta$ dépendent des dimensions de l'atome. On verra par la suite que [(cf. 14.7)] :

$$(\delta\theta_m)^2 \ll (\delta\theta_M)^2$$

ainsi

$$\sigma = \pi \left(\frac{2Zr_p}{\beta^2} \right)^2 \frac{1}{(\delta\theta_m)^2} = \pi \left(\frac{Zr_p E_0}{T} \right)^2 \frac{1}{(\delta\theta_m)^2} \quad (14.3)$$

La probabilité d'une déviation comprise entre $\delta\theta$ et $\delta\theta + d\delta\theta$ est

$$p(\delta\theta) = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\delta\theta} = 2 \frac{1}{(\delta\theta_m)^2} \frac{1}{(\delta\theta)^3}$$

Ainsi :

$$(\overline{\delta\theta})^2 = \int_{\delta\theta_m}^{\delta\theta_M} (\delta\theta)^2 p(\delta\theta) d\delta\theta = 2 (\delta\theta_m)^2 \ln \frac{\delta\theta_M}{\delta\theta_m} \quad (14.4)$$

L'angle $\delta\theta$ entre les directions de la particule incidente et la particule déviée a les deux composantes $\delta x'$ et $\delta z'$. On a $(\delta\theta)^2 = (\delta x')^2 + (\delta z')^2$, et pour des raisons de symétrie $(\delta x')^2 = (\delta z')^2 = 1/2 (\delta\theta)^2$. On écrira par la suite toujours $\delta y'$ pour $\delta x'$ ou $\delta z'$:

$$(\overline{\delta y'})^2 = 1/2 (\overline{\delta\theta})^2 \quad (14.5)$$

La grandeur qui importe par la suite pour la description de la diffusion d'un faisceau est le produit $\sigma \cdot (\overline{\delta y'})^2$ de la section efficace d'un choc dans la moyenne

du carré d'une composante de déviation provoquée par un tel choc : avec (14.3) à (14.5), on a

$$\sigma \cdot (\delta y')^2 = \pi \left(\frac{Z r_p E_0}{T} \right)^2 \ln \frac{\delta \theta_m}{\delta \theta_m} \quad (14.6)$$

Ces formules dérivent de la mécanique classique. Les limites classiques $\delta \theta_m$ et $\delta \theta_m$ sont celles correspondant aux paramètres d'impact limite : le rayon a de l'atome heurté et le rayon r_N du noyau de cet atome.

En théorie quantique, il s'avère que la formule de Rutherford reste approximativement valable pour protons incidents, non relativistes, les angles limites étant toutefois

$$\begin{aligned} \delta \theta_m &= \frac{\lambda_0}{a} \\ \delta \theta_m &= \frac{\lambda_0}{r_N} \end{aligned} \quad (14.7)$$

avec

$$\lambda_0 = \frac{h}{p} = \text{longueur d'onde de de Broglie (divisée par } 2\pi) \text{ du proton incident} \quad (14.8)$$

$$a = 5,3 \cdot 10^{-11} Z^{-\frac{1}{3}} [m] = \text{rayon de l'atome heurté} \quad (14.8 a)$$

$$r_N = 1,6 \cdot 10^{-15} A^{+\frac{1}{3}} [m] = \text{rayon du noyau de l'atome heurté} \quad (14.8 b)$$

D'autre part, dans une chambre à vide de demi-extension transversale Y , l'angle de déviation maximal pour lequel on peut encore parler de diffusion multiple est l'angle au-delà duquel la particule déviée heurte la paroi, c'est-à-dire l'angle

$$(\delta \theta_m)_{ch} \approx \frac{vY}{R} \quad (14.9)$$

G. Molière [*Z. Naturforsch.*, 2 a, 133 (1947)] a obtenu une formule de la diffusion pour un atome diffuseur, possédant la répartition des potentiels Fermi-Thomas. On déduit de ce travail [E. D. Courant, *R.S.I.*, 24 (1953), 836] qu'il faut remplacer (14.6) par :

$$\left[\sigma (\delta y')^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{Z r_p E_0}{T} \right)^2 \left[\ln \frac{(\theta_m)_{ch}}{Z^2} - 1 \right] \right] \quad (14.10)$$

avec

$$\left[Z_Y = 1,20 \delta \theta_m (1 + 3,33 \gamma^2)^{1/2}; \quad \gamma(T) = \frac{Z}{137 \beta} \right] \quad (14.11)$$

Par la suite, il faut intégrer (14.10) par rapport à la variable T à partir d'une énergie initiale d'injection T_{inj} . On écrit

$$\sigma (\delta y')^2 = \left(\frac{T_{inj}}{T} \right)^2 [\sigma (\delta y')^2]_0 \quad (14.12)$$

On tient compte de la dépendance du logarithme dans (14.10) de l'énergie en exprimant $Z_\gamma(T)$, c'est-à-dire θ_m et γ dans []₀ pour le double de l'énergie initiale T_{inj} .

Avec $(\delta\theta_m)_{ch} = 2,5 \cdot 10^{-3}$; $Z = 8$ on obtient :

$$\begin{array}{cccc} T_{inj} & = & 1 & 3,5 & 10 & 35 \text{ [MeV]} \\ [\sigma (\delta y')^2]_0 & = & 6,7 \cdot 10^{-28} & 8,8 \cdot 10^{-29} & 1,4 \cdot 10^{-29} & 1,3 \cdot 10^{-30} \text{ [m}^2\text{]} \end{array}$$

C) La moyenne quadratique \hat{y}^2 des amplitudes

On suppose, pour des raisons de simplicité, l'oscillation toujours sinusoïdale, satisfaisant les équations

$$\left. \begin{array}{l} y = \hat{y} \cos \alpha_y; \quad \alpha_y = \frac{s}{\lambda} + \delta = \omega_\beta t + \delta \\ y' = -\frac{\hat{y}}{\lambda} \sin \alpha_y \\ \hat{y} = \sqrt{y^2 + \lambda^2 y'^2} = \hat{y}(y, y') \end{array} \right\} \quad (14.13)$$

On dérive cette dernière égalité

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y'} = \lambda^2 \frac{y'}{\hat{y}} = \lambda \sin \alpha_y; \quad \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial y'^2} = \frac{\lambda^2}{\hat{y}} \cos^2 \alpha_y; \quad \frac{\partial^3 \hat{y}}{\partial y'^3} = 0; \quad \dots$$

Une oscillation est caractérisée par son amplitude \hat{y} et sa phase α . Un choc est caractérisé par un changement d'angle $\delta y'$ qui se répercute sur l'amplitude par le changement :

$$\left. \begin{array}{l} \delta \hat{y} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial y'} \delta y' + 1/2 \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial y'^2} (\delta y')^2 + \dots \\ \quad = \lambda \delta y' \sin \alpha_y + 1/2 \frac{\lambda^2}{\hat{y}} (\delta y')^2 \cos^2 \alpha_y \\ (\delta \hat{y})^2 = \lambda^2 (\delta y')^2 \sin^2 \alpha_y + \dots \\ \delta(\hat{y}^2) = 2 \hat{y} \delta \hat{y} + (\delta \hat{y})^2 = 2 \hat{y} \lambda \delta y' \sin \alpha_y + \lambda^2 (\delta y')^2 \end{array} \right\} \quad (14.14)$$

On ne connaît pas la valeur individuelle de $\delta y'$ figurant du côté droit de ces égalités, mais on connaît certaines moyennes.

On a pour les moyennes les équations :

$$\overline{(\delta\hat{y})^2} = 1/2 \lambda^2 \overline{(\delta y')^2} \quad (14.15)$$

$$\delta\hat{y} = \frac{1}{4} \lambda^2 \frac{(\delta y')^2}{\hat{y}} = \frac{\overline{(\delta\hat{y})^2}}{2 \hat{y}} \quad (14.16)$$

$$\delta(\hat{y}^2) = \lambda^2 (\delta y')^2 \quad (14.17)$$

Seulement la dernière de ces trois relations se prête à intégration. On obtient

$$\hat{y}^2 = \lambda^2 \Sigma \overline{(\delta y')^2} = \lambda^2 \int \overline{(\delta y')^2} dN$$

Le nombre dN de chocs subis sur un parcours ds est de

$$dN = n \sigma ds \quad (14.18)$$

n étant la densité d'atomes du gaz résiduel et σ la section efficace d'un choc.

De ce fait :

$$\hat{y}^2 = \lambda^2 n \int_{s_{inj}}^{s_f} \sigma \overline{(\delta y')^2} ds \quad (14.19)$$

On introduit encore l'énergie cinétique T comme variable d'intégration :

$$ds = \frac{ds}{dT} dT \quad (14.20)$$

avec

$$\frac{dT}{ds} = \frac{(\Delta T)_{tour}}{2 \pi R} = e \rho \dot{B} \quad [\text{cf. (16.8)}]$$

et on supposera par la suite

$$\dot{B} = \text{const}; \quad \frac{dT}{ds} = \text{const} \quad (14.21)$$

Portant (14.12) et (14.20) dans (14.19) on obtient

$$\hat{y}^2 = C \frac{ds}{dT} \int_{T_{inj}}^{T_f} \left(\frac{T_{inj}}{T} \right)^2 dT \quad (14.22)$$

avec

$$C = \lambda^2 n [\sigma (\delta y')^2]_0 \quad (14.23)$$

par intégration de (14.22)

$$\hat{y}^2 = C \frac{T_{inj}}{dT/ds} \left(1 - \frac{T_{inj}}{T_f} \right) \quad (14.23 a)$$

\hat{y}^2 croît asymptotiquement avec T_l :

$$\lim_{T_l \rightarrow \infty} \hat{y}^2 = C \frac{T_{inj}}{dT/ds} \quad (14.23 b)$$

A énergie $T = \text{const}$ on a :

$$\begin{aligned} \hat{y}^2(s) &= C \left(\frac{T_{inj}}{T} \right)^2 (s - s_0) \\ &= n\lambda^2 \sigma (\overline{\delta y'})^2 (s - s_0) \end{aligned} \quad (14.23 c)$$

Quand la quantité de mouvement p et l'énergie cinétique T d'une particule augmentent, on sait que l'amplitude de l'oscillation bêatron non perturbée diminue comme $p^{-1/2}$ [cf. (18.14)], c'est-à-dire, à l'approximation non relativiste comme :

$$\hat{y} \propto T^{-1/4} \quad (14.24)$$

Les résultats (14.23) ne tiennent pas compte de cet amortissement.

On peut l'introduire en observant que la grandeur $\hat{y}^2 = \lambda \Sigma \overline{\delta(y')^2}$ se compose additivement de petites contributions $\overline{\delta(y')^2}$ sur chacune desquelles on peut rapporter l'effet d'amortissement entre l'énergie T , à laquelle un tel élément a été créé lors d'un choc, et une énergie ultérieure T_l , à laquelle la somme \hat{y}^2 de tous les éléments est formée. On écrit donc pour chaque élément à la place de (14.17) :

$$\delta(\hat{y}^2)_\lambda = \lambda^2 (\overline{\delta y'})^2 \left(\frac{T}{T_l} \right)^{1/2} \quad (14.17 a)$$

et on obtient à la place de (14.22) :

$$\overline{\hat{y}^2}_\lambda = C \frac{ds}{dT} \frac{T_{inj}^2}{T_l^{1/2}} \int_{T_{inj}}^{T_l} \frac{dT}{T^{3/2}} \quad (14.22 a)$$

$$= 2 C \frac{ds}{dT} T_{inj} \left[\left(\frac{T_{inj}}{T_l} \right)^{1/2} - \frac{T_{inj}}{T_l} \right] \quad (14.25)$$

La parenthèse passe, en fonction de T_l , par un maximum.

$[]_M = \frac{1}{4}$ pour $T_l = 4 T_{inj}$. A ce maximum :

$$(\hat{y}^2)_M = (\hat{y}^2)_{T_l = 4 T_{inj}} = 1/2 C \frac{ds}{dT} T_{inj} \quad (14.26)$$

ce qui est la moitié de la valeur asymptotique (14.23 b) de \hat{y}^2 , obtenue non compte tenu de l'amortissement.

D) La représentation de la trajectoire dans un plan des phases

Partant de la relation (14.17), il a été possible, dans le paragraphe précédent, de déterminer la moyenne quadratique \hat{y}^2 de l'amplitude ; mais on n'atteint pas par cette voie la répartition $p(\hat{y})$ des amplitudes, ni la répartition $p(y)$ des élongations, c'est-à-dire celle de la densité des particules dans le faisceau.

Une grandeur possède une répartition de probabilité de Gauss si elle est la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes satisfaisant un certain nombre de conditions, d'ailleurs peu restrictives (voir ce chap. 14, § I G). L'amplitude \hat{y} de l'oscillation bêtatron ne s'exprime pas sous forme d'une somme de variables aléatoires [cf. (14.14)] ni d'ailleurs l'élongation y , mais ces grandeurs peuvent être exprimées en fonction de paramètres qui eux sont des sommes de variables aléatoires convenables, et de ce fait possèdent une répartition gaussienne. C'est par ce détour que l'on accède ensuite aux répartitions recherchées. Les variables qui conviennent sont, comme on le verra, certaines coordonnées a_z et a_q définies dans un plan des phases y et y' .

On représente à la figure 29 l'oscillation bêtatron sous forme d'un vecteur \vec{y} dans un plan des phases aux axes fixes y et y' , les composantes du vecteur étant :

$$\vec{y} = \begin{cases} y = \hat{y} \cos \alpha_y \\ y' = \frac{dy}{d\alpha_y} = -\hat{y} \sin \alpha_y \end{cases} \quad (14.27)$$

avec

$$\alpha_y = \frac{s}{\lambda} + \delta = \omega_\beta t + \delta$$

Dans le plan y, y' la trajectoire bêtatron est un cercle parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre

$$y' = \frac{ds}{d\alpha_y} \frac{dy}{ds} = \lambda y' \quad (14.28)$$

Un choc ajoute au vecteur \vec{y} un petit élément $\vec{\delta y}$ aux composantes

$$\vec{\delta y} = \begin{cases} \delta y = 0 \\ \delta y' = \lambda \delta y' \end{cases} \quad (14.29)$$

Le vecteur \vec{y} est la somme de tous les éléments $\vec{\delta y}$, provenant de tous les chocs du passé

$$\vec{y} = \Sigma \vec{\delta y} \quad (14.30)$$

Les petits éléments $\vec{\delta y}$ tournent dans le plan des phases tous à la même vitesse angulaire. Pour les additionner il est donc commode d'introduire dans le plan y, y' , un système d'axes a_z, a_q , tournant (fig. 29) par rapport auquel tous les éléments δy soient immobiles.

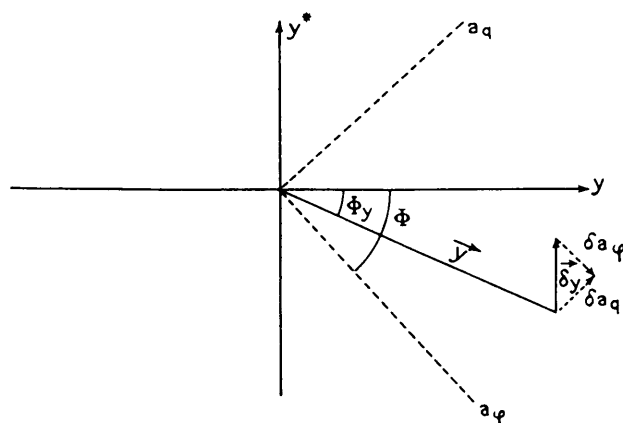


Fig. 29

Les axes d'un tel système tournant sont :

$$\left. \begin{aligned} a_z &= y \cos \theta - y^* \sin \theta \\ a_q &= y \sin \theta + y^* \cos \theta \\ \theta &= \frac{s}{\lambda} + \delta_0 = \omega_0 t + \delta_0 \end{aligned} \right\} \quad (14.31)$$

avec

On décompose $\vec{\delta y}$ dans ce système tournant, chaque élément $\vec{\delta y}$ naissant au moment du choc : supposons qu'à l'instant t_k la particule subisse un choc et de ce fait un changement de direction $\delta y'_k$, et que la phase du système tournant soit θ_k à cet instant. Les composantes de l'élément vectoriel $\vec{\delta y}_k$, correspondant à ce choc sont alors dans le système tournant :

$$\vec{\delta y}_k = \begin{cases} (\delta a_z)_k = \delta y_k \cos \theta_k - \delta y'_k \sin \theta_k \\ (\delta a_q)_k = \delta y_k \sin \theta_k + \delta y'_k \cos \theta_k \end{cases}$$

et compte tenu de (14.29)

$$\vec{\delta y}_k = \begin{cases} (\delta a_z)_k = -\lambda \delta y'_k \sin \theta_k \\ (\delta a_q)_k = +\lambda \delta y'_k \cos \theta_k \end{cases} \quad (14.32)$$

Dans le système tournant ces composantes sont immobiles. En additionnant algébriquement tous les $(\delta a_z)_k$ ou tous les $(\delta a_q)_k$, on obtient respectivement les composantes a_z ou a_q du vecteur \vec{y} dans le système tournant :

$$\vec{y} = \begin{cases} a_z = \sum_k (\delta a_z)_k \\ a_q = \sum_k (\delta a_q)_k \end{cases} \quad (14.33)$$

L'amplitude de l'oscillation bêatron est :

$$\hat{y} = |\hat{y}| = \sqrt{a_z^2 + a_q^2} \quad (14.34)$$

E) L'amortissement des oscillations

Quand la quantité de mouvement p et l'énergie cinétique T augmentent, l'amplitude bêatron d'une particule s'amortit comme $p^{-\frac{1}{2}}$ et dans le domaine non relativiste approximativement comme $T^{-\frac{1}{4}}$. Tenant compte de cet amortissement le vecteur \vec{y} représentatif d'une oscillation bêatron non perturbée évolue, non pas comme (14.27), mais comme :

$$\vec{y}(T_f) = \begin{cases} y = \hat{y} \left(\frac{T}{T_f}\right)^{\frac{1}{4}} \cos \theta_y \\ y' = -\hat{y} \left(\frac{T}{T_f}\right)^{\frac{1}{4}} \sin \theta \end{cases} \quad (14.27 a)$$

On peut rapporter cet amortissement à chacun des éléments $(\delta a_\varphi)_k$ et $(\delta a_q)_k$ dont les composantes de a_φ et a_q du vecteur \vec{y} se composent linéairement. C'est-à-dire, un élément provenant d'une déviation $\delta y'_r$ subie par la particule à l'énergie T , se trouve à l'énergie T_f réduit à [cf. (14.32) et (14.27 a)] :

$$\delta \vec{y}_f = \begin{cases} (\delta a_\varphi)_f = -\lambda \delta y'_r \left(\frac{T}{T_f}\right)^{\frac{1}{4}} (\sin \theta)_r \\ (\delta a_q)_f = +\lambda \delta y'_r \left(\frac{T}{T_f}\right)^{\frac{1}{4}} (\cos \theta)_r \end{cases} \quad (14.32 a)$$

On construira le vecteur \vec{y}_f , représentatif de l'oscillation bêatron à l'énergie T_f par addition de ces éléments (14.32 a)

$$\vec{y}_f = \begin{cases} (a_\varphi)_f = \Sigma (\delta a_\varphi)_f \\ (a_q)_f = \Sigma (\delta a_q)_f \end{cases} \quad (14.33 a)$$

On omettra par la suite l'indice f .

F) La répartition statistique des élongations et amplitudes bêatron dans le faisceau

Le « Théorème Central Limite » (cf. p. 149) stipule : Soit une somme $a = \sum_{k=1}^N \delta a_k$ de variables aléatoires indépendantes centrées ($\overline{\delta a_k} \equiv 0$) en nombre N ; supposons toutes ces variables « d'importance comparable » ce qui exclut la possibilité pour a de ne dépendre effectivement que d'un petit nombre d'entre elles, sauf dans des cas très peu probables ; alors on établit que, lorsque N tend vers l'infini, la loi de a tend vers une loi de Gauss, c'est-à-dire de densité :

$$p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_a} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}} \quad (14.35)$$

d'écart-type

$$\sigma_a^2 = N \overline{(\delta a_k)^2}$$

Les composantes de vecteur a_p ou a_q satisfont aux prémisses du Théorème Central Limite. Leur répartition statistique est donc gaussienne. On déterminera dans ce qui suit leur écart-type. On omettra dorénavant les indices p et q .

On considère tous les éléments à l'énergie T_f à laquelle leur addition sera faite, mais d'abord seulement la fraction d'éléments créés à l'énergie $T < T_f$.

Compte tenu de (15.32 a), la moyenne quadratique $(\overline{\delta a})^2$ de ces éléments est :

$$(\overline{\delta a})^2 = \lambda^2 \left(\frac{T}{T_f} \right)^{1/2} \overline{(\delta y')^2 \frac{\sin^2}{\cos^2} \theta_T}$$

$\delta y'_T$ et θ_T sont aléatoires et mutuellement indépendants. Toutes les valeurs de θ_T sont également probables. Ainsi :

$$(\overline{\delta a})^2 = 1/2 \lambda^2 \overline{(\delta y')^2} \left(\frac{T}{T_f} \right)^{1/2} \quad (14.36)$$

identiquement pour δa_p et δa_q .

Enfin, la moyenne quadratique commune de l'ensemble des éléments δa créés dans tout l'intervalle entre T_{inj} et T_f est :

$$(\overline{\delta a})^2 = \frac{1}{N} \int_{T_{inj}}^{T_f} (\overline{\delta a})^2 \frac{dN}{dT} dT \quad (14.37)$$

dN ou N étant les nombres de chocs subis par la particule pendant l'accroissement de l'énergie dT respectivement subis au total entre T_{inj} et T_f .

La répartition de la somme $a = \sum \delta a$ est gaussienne avec écart-type (au carré, même valeur pour a_p et a_q) :

$$\sigma_a^2 = N (\overline{\delta a})^2 = \int_{T_{inj}}^{T_f} (\overline{\delta a})^2 \frac{dN}{dT} dT \quad [\text{cf. (14.35)}]$$

Afin d'évaluer cette intégrale, on introduit comme précédemment :

$$\frac{dN}{dT} = \frac{dN}{ds} \frac{ds}{dT} = n \sigma_T \frac{ds}{dT} \quad [\text{cf. (14.18)}]$$

et on supposera [cf. (14.21)] $\frac{dT}{ds} = e_p \dot{B} = \text{const.}$

De plus, compte tenu de (14.12) et (14.36) :

$$\sigma_T (\overline{\delta a})^2 = 1/2 \lambda^2 [\sigma (\delta y')^2]_0 \frac{T_{inj}}{T_f^{1/2} T^{3/2}}$$

Ainsi finalement

$$\sigma_a^2 = 1/2 C \left. \begin{array}{l} \frac{ds}{dT} \frac{T_{inj}^2}{T_f^{1/2}} \int_{T_{inj}}^{T_f} \frac{dT}{T^{3/2}} \\ C = n \lambda^2 [\sigma (\delta y')^2]_0 \end{array} \right\} \quad (14.38)$$

avec [voir aussi (14.22)]

En analogie avec des développements antérieurs [cf. (14.22), (14.26)] on intègre (14.38) :

$$\sigma_j^2 = C \frac{ds}{dT} T_{inj} \left[\left(\frac{T_{inj}}{T_j} \right)^{1/2} - \frac{T_{inj}}{T_j} \right] \quad (14.39)$$

La parenthèse passe par un maximum

$$[]_M = \frac{1}{4} \quad \text{pour} \quad T_j = 4 T_i$$

$$(\sigma_a^2)_M = (\sigma_a^2)_{T=4T_{inj}} = \frac{1}{4} C \frac{ds}{dT} T_{inj} \quad (14.40)$$

De la répartition des paramètres a_p et a_q on passe à celles des élongations y et des amplitudes \hat{y} :

σ_a est l'écart-type de la répartition statistique de chacune des composantes a_p et a_q du vecteur \vec{y} . a_p et a_q sont des axes tournants dans le plan des phases y, y' dans lequel les particules décrivent des cercles, centrés sur l'origine des axes. La répartition des particules dans le plan y, y' est donc de symétrie de révolution.

Ainsi, la répartition $p(y)$ de la densité des particules dans l'espace réel est identique à la répartition d'une composante a :

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad (14.41)$$

avec $\sigma_y = \sigma_a$

On en vient maintenant à la loi de répartition des amplitudes \hat{y} dans le faisceau :

D'après (14.34), on a $\hat{y}^2 = a_p^2 + a_q^2$. Sur la figure 30 on représente \hat{y} dans le plan a_p, a_q et on y considère une bande étroite, comprise entre les cercles concentriques aux rayons \hat{y} et $\hat{y} + d\hat{y}$. La probabilité qu'une particule soit située dans cette bande est :

$$p(\hat{y}) d\hat{y} = \iint_{\text{bande } d\hat{y}} p(a_p) da_p p(a_q) da_q$$

On a

$$p(a_p) p(a_q) = \frac{1}{2 \pi \sigma_a^2} e^{-\frac{a_p^2 + a_q^2}{2\sigma_a^2}} = \frac{1}{2 \pi \sigma_a^2} e^{-\frac{\hat{y}^2}{2\sigma_a^2}}$$

De ce fait

$$p(\hat{y}) d\hat{y} = \frac{1}{2 \pi \sigma_a^2} e^{-\frac{\hat{y}^2}{2\sigma_a^2}} \iint_{\text{bande } d\hat{y}} da_p da_q$$

$$\iint_{\text{bande } d\hat{y}} da_p da_q = 2 \pi \hat{y} d\hat{y}$$

$$p(\hat{y}) = \frac{1}{\sigma_a^2} \hat{y} l^{-\frac{\hat{y}^2}{2\sigma_a^2}} = \frac{2}{\hat{\sigma}^2} \hat{y} l^{-\frac{\hat{y}^2}{\hat{\sigma}^2}}$$

(14.42)

en introduisant l'écart-type de l'amplitude

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{y}^2 = 2 \sigma_a^2$$

C'est une répartition de Rayleigh. L'écart-type est trouvé en accord avec (14.25) et (14.26) [pour σ_a^2 voir (14.39)].

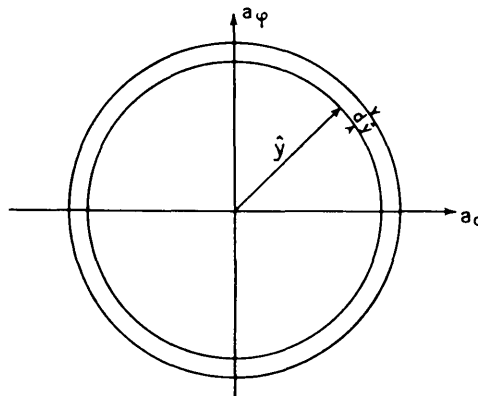


Fig. 30

G) Le théorème Central Limite (1)

Le théorème Central Limite stipule : si y est la somme d'un nombre N de variables aléatoires x_i centrées ($\bar{x}_i \equiv 0$) indépendantes et de même loi, on désignera par \bar{x}^2 la valeur commune de leurs moyennes quadratiques, alors la densité de probabilité $f(y)$ tend, pour $N \rightarrow \infty$, vers celle d'une loi de Gauss :

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \\ \sigma_y^2 &= \bar{y}^2 = N\bar{x}^2 \end{aligned} \right\} \quad (14.43)$$

σ_y est « l'écart-type » de la répartition.

On démontre ce théorème ainsi : Soit x une variable aléatoire. On définit la *fonction de répartition*

$$F(x) = Pr(X < x) \quad (14.44)$$

(1) LAPLACE en 1812 ; LIAPOUNOFF en 1901.

comme la probabilité que la variable prenne une valeur $X < x$. On définit la *densité de probabilité*

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \quad (14.45)$$

et la *fonction caractéristique*

$$\varphi(u) = E(e^{iux}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x) dx \quad (14.46)$$

$E(e^{iux})$ est « l'espérance mathématique » de e^{iux} .

$\varphi(u)$ est 2π fois la transformée de Fourier de la fonction $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{-iux} du$$

et la relation entre $\varphi(u)$ et $f(x)$ est biunivoque.

La fonction caractéristique est utile pour calculer les *moments, espérances mathématiques* ou *moyennes* comme :

$$E(x) = \bar{x}; \quad E(x^2) = \bar{x^2}; \quad E(x^3) = \bar{x^3}; \quad \dots \text{ en effet :}$$

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= E(e^{iux}) \\ &= E\left(1 + \frac{iux}{1!} + \frac{i^2 u^2 x^2}{2!} + \dots\right) \\ &= E(1) + E\left(\frac{iux}{1!}\right) + E\left(\frac{i^2 u^2 x^2}{2!}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{i u}{1} \bar{x} + \frac{i^2 u^2}{2} \bar{x^2} + \dots \end{aligned} \quad (14.47)$$

Addition des variables

Soit x_1, x_2, x_3, \dots des variables aléatoires indépendantes, et $y = \sum x_i$.

Théorème : La fonction caractéristique de la somme y est le produit des fonctions caractéristiques des termes :

$$\varphi_y(u) = \prod \varphi_x(u) \quad (14.48)$$

Démonstration : (pour la somme de deux variables aléatoires et indépendantes) : soit $y = x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} \varphi_y &= E(e^{iuy}) = E(e^{iu(x_1+x_2)}) \\ &= E(e^{iux_1} e^{iux_2}) = \iint e^{iux_1} f(x_1) e^{iux_2} f(x_2) dx_1 dx_2 = E(e^{iux_1}) E(e^{iux_2}) \end{aligned}$$

On définit la « *seconde fonction caractéristique* »

$$\psi(u) = \ln \varphi(u) \quad (14.49)$$

La relation entre les fonctions $f(x)$ et $\psi(u)$ est biunivoque.

Répartition de Gauss (pour une variable) : La répartition de Gauss (centrée) est donnée par (14.43). La fonction caractéristique de la loi de Gauss centrée est :

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x) dx = e^{-1/2 u^2 \sigma^2} \quad (14.50)$$

La « *seconde caractéristique* » de la loi de Gauss centrée est :

$$\psi(u) = -1/2 u^2 \sigma^2 \quad (14.51)$$

Théorème Central Limite

Soit $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ des variables aléatoires indépendantes mais dont les répartitions de probabilité sont identiques :

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = \varphi_3(u) \dots = \varphi_N(u)$$

On considère la grandeur

$$\frac{y}{\sqrt{N}} = \frac{x_1}{\sqrt{N}} + \frac{x_2}{\sqrt{N}} + \frac{x_3}{\sqrt{N}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{N}} \quad (14.52)$$

La fonction caractéristique relative aux variables $\frac{x_i}{\sqrt{N}}$ est :

$$\begin{aligned} \varphi_x(u) &= E \left(e^{iu \frac{x}{\sqrt{N}}} \right) \\ &= 1 + \frac{i u}{1!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)} + \frac{i^2 u^2}{2!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)^2} + \frac{i^3 u^3}{3!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)^3} + \dots \end{aligned}$$

On suppose la densité de probabilité des x centrée. De ce fait $\frac{i u}{1!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)} = 0$.

Donc

$$\varphi_x = 1 + \varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{i^2 u^2}{2!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)^2} + \frac{i^3 u^3}{3!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)^3} + \dots$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \psi_x &= \ln \varphi_x = \ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - 1/2 \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 - \dots \\ &= \frac{i^2 u^2}{2!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)^2} + \frac{i^3 u^3}{3!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)^3} + \dots \end{aligned} \quad (14.53)$$

Pour la somme de (14.52) on a en vertu de (14.48)

$$\begin{aligned} \varphi_y &= \varphi_x^N \\ \psi_y &= \ln \varphi_y = N \ln \varphi_x \\ &= N \cdot \psi_x \\ &= \frac{i^2 u^2}{2!} \overline{x^2} + \frac{i^3 u^3}{3!} \overline{\frac{x^3}{\sqrt{N}}} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_y &= \frac{-u^2}{2!} \overline{x^2} \end{aligned} \quad (14.54)$$

En comparant (14.54) avec (14.51) et compte tenu de la relation biunivoque entre la seconde caractéristique et les répartitions, on conclut que la densité de probabilité de la grandeur $y/\sqrt{N} = \left(\sum_i x_i\right)/\sqrt{N}$ tend pour $N \rightarrow \infty$ vers une répartition Gaussienne d'écart-type $\sigma_{(y/\sqrt{N})} = \sqrt{\overline{x^2}}$. De même la grandeur $y = \sum_i x_i$ tend avec $N \rightarrow \infty$ vers une répartition :

$$f(y) = \text{Gaussienne,}$$

$$\begin{aligned} \text{d'écart-type} \quad \sigma_y &= \sqrt{N} \sigma_x \\ \sigma_y^2 &= N \cdot \overline{x^2} \end{aligned} \quad (14.55)$$

II. — PRÉSENCE DE PAROIS LATÉRALES

A) L'équation différentielle d'évolution du faisceau

On négligera d'abord l'amortissement. Dans ce cas et en absence de parois latérales les amplitudes possèdent une répartition de Rayleigh qui va en s'élargissant selon la loi simple (14.23 a).

Les parois modifient cette situation en éliminant toute particule atteignant une amplitude limite.

Pour déterminer la répartition en présence de parois, il est nécessaire de formuler l'équation différentielle qui caractérise l'évolution de la répartition des amplitudes. La méthode de calcul est celle de Fokker-Planck.

Soit : $p(s, \hat{y}) d\hat{y}$ la probabilité de l'amplitude \hat{y} à la cote s .

Quand on progresse de s à $s + \Delta s$, cette répartition évolue ainsi :

$$p(s + \Delta s, \hat{y}) = \int p(s, \hat{y} - \Delta \hat{y}) q(\hat{y} - \Delta \hat{y}, \Delta \hat{y}) d\Delta \hat{y} \quad (14.56)$$

$q(\hat{y} - \Delta \hat{y}, \Delta \hat{y})$ est la probabilité qu'une particule d'amplitude $(\hat{y} - \Delta \hat{y})$ change son amplitude de $\Delta \hat{y}$ sur un parcours Δs .

En développant les expressions sous le signe somme de (14.56), on parviendra à une *équation différentielle pure* :

$$\begin{aligned} p(s, \hat{y} - \Delta \hat{y}) &= p(s, \hat{y}) - \left[\frac{\partial}{\partial \hat{y}} p(s, \hat{y}) \right] \Delta \hat{y} + 1/2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} p(s, \hat{y}) \right] (\Delta \hat{y})^2 \\ q(\hat{y} - \Delta \hat{y}, \Delta \hat{y}) &= q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) - \left[\frac{\partial}{\partial \hat{y}} q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) \right] \Delta \hat{y} + 1/2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) \right] (\Delta \hat{y})^2 \end{aligned}$$

Un tel développement est légitime parce que $q \neq 0$ seulement pour des écarts $\Delta \hat{y}$ très petits.

Ainsi développé, l'argument sous le signe somme de (14.56) s'écrit

$$\begin{aligned} p(s, \hat{y}) q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) - \left[p(s, \hat{y}) \frac{\partial}{\partial \hat{y}} q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) + q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) \frac{\partial}{\partial \hat{y}} p(s, \hat{y}) \right] \Delta \hat{y} + \\ 1/2 \left[q \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} p + 2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}} p \frac{\partial}{\partial \hat{y}} q + p \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} q \right] (\Delta \hat{y})^2 \end{aligned} \quad (14.57)$$

On considère séparément l'intégrale $\int \dots d\Delta\hat{y}$ de chacun des trois termes ci-dessus :

a)

$$\int p(s, \hat{y}) q(\hat{y}, \Delta\hat{y}) d\Delta\hat{y} = p(s, \hat{y}) \int \underbrace{q(\hat{y}, \Delta\hat{y})}_{=1} d\Delta\hat{y} = p(s, \hat{y}) \quad (14.57 a)$$

$$\begin{aligned} b) \quad & \left[p \frac{\partial}{\partial \hat{y}} q + q \frac{\partial}{\partial \hat{y}} p \right] \Delta\hat{y} = \left[\frac{\partial}{\partial \hat{y}} (pq) \right] \Delta\hat{y} \\ & \int = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \int \Delta\hat{y} p(s, \hat{y}) q(\hat{y}, \Delta\hat{y}) d\Delta\hat{y} \\ & = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(p \int \Delta\hat{y} q(\hat{y}, \Delta\hat{y}) d\Delta\hat{y} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} (p \overline{\Delta\hat{y}}) \end{aligned} \quad (14.57 b)$$

c) En partant du résultat

(14.57 c)

$$\begin{aligned} 1/2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} [p \overline{(\Delta\hat{y})^2}] &= 1/2 \left\{ (\Delta\hat{y})^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \hat{y}^2} + 2 \left(\frac{\partial p}{\partial \hat{y}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \overline{(\Delta\hat{y})^2} + p \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} \overline{(\Delta\hat{y})^2} \right\} \\ &= 1/2 \int [\text{coef. [] de } (\Delta\hat{y})^2 \text{ de (14.57)}] (\Delta\hat{y})^2 d\Delta\hat{y}, \end{aligned}$$

étant donné que :

$$\overline{(\Delta\hat{y})^2} = \int (\Delta\hat{y})^2 q(\hat{y}, \Delta\hat{y}) d\Delta\hat{y}$$

Donc (14.56) développé s'écrit

(14.58)

$$p(s + \Delta s, \hat{y}) - p(s, \hat{y}) = \frac{\partial p(s, \hat{y})}{\partial s} \Delta s = - \frac{\partial}{\partial \hat{y}} [\overline{\Delta\hat{y}} p] + 1/2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} [(\overline{\Delta\hat{y}})^2 p]$$

D'autre part

$$\overline{\Delta\hat{y}} = \frac{(\overline{\Delta\hat{y}})^2}{2 \hat{y}} \quad [\text{cf. (14.16)}]$$

et

$$(\Delta\hat{y})^2 = \text{non fonction de } \hat{y} \quad [\text{cf. (14.15)}]$$

Ce qui précède n'est valable que lorsque l'on ne tient pas compte de l'amortissement des oscillations. On essaiera d'y porter remède plus tard. En portant les dernières relations dans (14.58) :

$$\begin{aligned} \Delta s \cdot \frac{\partial}{\partial s} p(s, \hat{y}) &= 1/2 \overline{(\Delta\hat{y})^2} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[\frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{p}{\hat{y}} \right] \\ &= 1/2 (\Delta\hat{y})^2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[\hat{y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\frac{p}{\hat{y}} \right) \right] \end{aligned} \quad (14.59)$$

On introduit la variable

$$\xi = 1/2 \int_0^s \frac{(\Delta \hat{y})^2}{\Delta s} ds \quad (14.60)$$

avec

$$\frac{d\xi}{ds} = 1/2 \frac{(\Delta \hat{y})^2}{\Delta s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = 1/2 \frac{(\Delta \hat{y})^2}{\Delta s} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Ainsi l'équation différentielle de l'évolution de la répartition des amplitudes prend finalement la forme :

$$\frac{\partial p(\xi, \hat{y})}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[\hat{y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\frac{p}{\hat{y}} \right) \right] \quad (14.61)$$

On rencontre ce type d'équation pour des problèmes de conductibilité de la chaleur.

Si Y est la demi-largeur effective de la chambre, on a la condition aux limites :

$$p(\xi, \hat{y}) = 0 \quad \text{pour } \hat{y} = Y$$

Si de plus on se limite à considérer la condition d'amplitude initiale nulle

$$p(0, \hat{y}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \hat{y} = 0 \\ 0 & \text{pour } \hat{y} \neq 0 \end{cases} \quad (14.62)$$

l'intégrale satisfaisant à ces conditions est

$$p(\xi, \hat{y}) = \frac{2 \hat{y}}{Y^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial_0 \left(\frac{\lambda_k \hat{y}}{Y} \right)}{[\partial_1(\lambda_k)]^2} e^{-\frac{\lambda_k^2 \xi}{Y^2}} \quad (14.63)$$

∂_0 et ∂_1 sont les fonctions de Bessel de première espèce et d'indice 0 et 1 respectivement.

λ_k est la racine positive n° k de l'équation $\partial_0(\lambda) = 0$.

B) La probabilité de survie

La probabilité de survie P au point ξ est :

$$P(\xi) = \int_0^Y p(\xi, \hat{y}) d\hat{y} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \partial_1(\lambda_k)} e^{-\frac{\lambda_k^2 \xi}{Y^2}} \quad (14.64)$$

On obtient ce résultat en tenant compte de ce que

$$\int_0^x x \partial_0(x) dx = x \partial_1(x)$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} \xi &= 1/2 \int_0^s \frac{(\Delta \hat{y})^2}{\Delta s} ds && \text{[cf. (14.60)]} \\ &= 1/2 \hat{y}^2 && (14.65) \end{aligned}$$

De plus, on introduit la nouvelle variable :

$$\eta = \frac{\xi}{Y^2} = 1/2 \frac{\hat{y}^2}{Y^2} \quad (14.66)$$

Ainsi l'expression (14.64) de la probabilité de survie prend finalement la forme

$$P(\eta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \partial_1(\lambda_k)} e^{-\lambda_k^2 \eta} \quad (14.67)$$

La figure 31 représente la courbe $P(\eta)$.

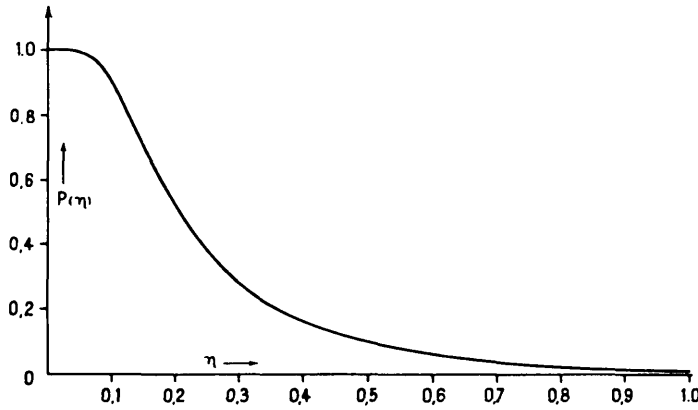


Fig. 31

On a une perte de $\sim 10\%$ des particules pour $\eta \approx 0,09$.

C) Influence de l'amortissement et du facteur de forme

Les calculs précédents négligent l'amortissement. On en tient grossièrement compte en introduisant dans l'expression (14.66) pour la valeur maximale η_M à la place de l'amplitude $(\hat{y}^2)_M$ non amortie (14.23 b), l'amplitude amortie maximale $(\hat{y}_A^2)_M = 1/2 (\hat{y}^2)_M$ donnée par (14.26). C'est-à-dire, on écrit [cf. (14.65), (14.66)]

$$\xi_M = \frac{1}{4} (\hat{y}_A^2)_M$$

$$\eta_M = \frac{\xi_M}{Y^2} = \frac{1}{4} \frac{(\hat{y}_A^2)_M}{Y^2} \quad (14.68)$$

On a supposé que les trajectoires étaient des sinusoides pures. On tient compte de leur forme réelle en introduisant le facteur de forme $F = \beta_M/\beta$ [cf. (8.20)] dans la formule (14.26). On a ainsi

$$\overline{(\hat{y}'_\lambda)_M^2} = 1/2 FC \frac{ds}{dT} T_{inj} \quad (14.26 a)$$

avec

$$\frac{dT}{ds} = e\rho\dot{B}$$

et

$$C = \lambda^2 n [\sigma(\delta y')^2]_0 \quad [\text{cf. (14.23)}]$$

avec

$$\lambda = R/v; \quad n = 7,1 \cdot 10^{22} P_{\text{torr}} [m^{-3}]$$

(c'est la densité des atomes du gaz résiduel et non des molécules). Pour $[\sigma(\delta y')^2]_0$ voir les formules (14.10), (14.11) et (14.12) suivies d'un tableau.

D'après le graphique figure 4, la probabilité de survie est de 90 % et les pertes sont de 10 % pour $\eta_M = 0,09$. Pour des valeurs plus élevées de η_M les pertes augmentent de manière abrupte. Il faut donc veiller à ce que :

$$\left. \begin{array}{l} \eta_M \lesssim 0,09 \\ \sqrt{\overline{(\hat{y}'_A)_M^2}} = 2 Y \sqrt{\eta_M} \lesssim 0,6 Y \end{array} \right\} \quad (14.63)$$

D) Exemple numérique

Pour le synchrotron à protons de Saclay on a (verticalement) une demi-hauteur effective de la chambre de $Y = 4$ cm. De plus, $R = 11$ m ; $v_z = 0,88$. $T_{inj} = 3,5$ MeV, $dT/ds = 12,7$ [eV/m]. Si on suppose comme gaz résiduel de l'oxygène avec $Z = 8$, la théorie indique 10 % de perte de particules ($\eta_M = 0,09$) pour une pression résiduelle de $4,3 \cdot 10^{-6}$ torr. En fait, on a observé une telle perte pour $\sim 2,7 \cdot 10^{-6}$ torr.