

MPS/LIN/70-10  
5 novembre 1970

CALCUL DE LA FOCALISATION QUADRIPOLAIRE D'UN LINAC  
ET DE L'ADAPTATION DU FAISCEAU EN PRESENCE DE CHARGE D'ESPACE\*)

B. Bru

Genève  
1970

\*) Ce rapport a fait l'objet d'une thèse soutenue à l'Université de Lyon le 18 novembre 1970.

E R R A T A

Page 5 . Ligne no. 9

Lire : "La force de rappel ( $-\Omega^2 \cdot z$ ) agit .....

Formules (9)

Lire :  $F_x = -eG v x = -K_Q \cdot x,$

$$F_y = eG v y = K_Q \cdot y.$$

Page 8 . Formule (22)

Lire :  $K_{x(y,z)} = -\frac{3eT_{RF}^3}{8\pi\epsilon_0} I \cdot I_{X(Y,Z)}$

TABLE DES MATIERES

	Page
1. INTRODUCTION	1
2. ETUDE THEORIQUE	2
2.1 Hypothèses simplificatrices	2
2.2 Définition de l'espace des phases	2
2.3 Equations du mouvement	4
2.3.1 Sans charge d'espace	4
2.3.2 Termes dus à la charge d'espace	6
2.4 Application du "formalisme des structures périodiques" à la structure quasi périodique d'un linac	8
2.4.2 Application du formalisme de CLS à un linac	9
2.4.3 Détermination des paramètres d'adaptation du faisceau	10
3. CALCUL DE LA STRUCTURE FOCALISANTE ET ADAPTATION DU FAISCEAU	10
3.1 Préparation des données	10
3.2 Principes du calcul	11
3.3 Critères déterminant la loi de focalisation quadripolaire	12
3.4 Calcul de la structure focalisante	14
3.4.1 Matrices de transfert des éléments de la structure	14
3.4.2 Etude des symétries requises à l'intérieur d'une période de focalisation	15
3.4.3 Méthode permettant de construire la structure périodique	17
3.4.4 Calcul des gradients magnétiques des quadripôles	18
3.4.5 Etude de la structure longitudinale	19
3.5 Paramètres d'adaptation du faisceau	19
3.5.1 Acceptance dans les trois plans de phase	19
3.5.2 Détermination des enveloppes aux points d'adaptation	20
3.6 Transfert du faisceau le long du linac	20
3.7 Calcul des forces de charge d'espace	21
4. PROGRAMME "ADAPT" : DESCRIPTION ET UTILISATION	22
4.1 Analyse du programme	22
4.1.1 Généralités	22
4.1.2 Calculs préliminaires	22
4.1.3 Adaptation du faisceau	23
4.1.4 Transfert du faisceau et calcul des forces de charge d'espace	24
4.2 Utilisation du programme	25
4.2.1 Présentation des résultats	25
4.2.2 Possibilités du programme	26

5. RESULTATS ET INTERPRETATION	26
5.1 Gradients magnétiques des quadripôles	27
5.2 Etude de l'adaptation optimale du faisceau	27
5.3 Evolution des paramètres du faisceau et leurs variations avec le courant	28
5.4 Résultats relatifs à une énergie d'injection de 1,375 MeV	29
6. CONCLUSION	30
APPENDICES	
1. Transfert des ellipses d'émittance le long de la structure	32
2. Calcul numérique des intégrales elliptiques intervenant dans le calcul des forces de charge d'espace	34
REFERENCES	36

## 1. INTRODUCTION

Dans l'optique d'un développement de la collaboration entre centres de recherches d'importance et de structure différentes, l'Institut de physique nucléaire de la Faculté des sciences de Lyon (IPN) et le Centre européen de recherche nucléaire (CERN) ont mis sur pied un programme d'étude commun portant sur divers aspects du projet d'augmentation de l'intensité de l'accélérateur linéaire de 50 MeV <sup>1)</sup> injecteur du Synchrotron à protons de 28 GeV du CERN. Une telle collaboration s'insère parfaitement dans le cadre de l'élaboration du projet d'accélérateur linéaire à ions lourds développé à Lyon<sup>2)</sup>. Les systèmes d'injection et de focalisation dans les deux machines présentent en effet des aspects similaires; deux d'entre eux, l'étude d'un tube accélérateur à fort gradient d'une part<sup>3,4)</sup> et les problèmes liés à la structure focalisante d'un accélérateur linéaire d'autre part, ont permis de concrétiser la collaboration entre les deux centres.

Cette étude, liée au second thème de recherche, traite de la détermination, en présence des forces de charge d'espace, de la structure focalisante d'un linac à protons, ainsi que des paramètres du faisceau adapté à cette structure.

La méthode utilisée est conçue de façon à pouvoir appliquer le formalisme de Courant, Livingston et Snyder<sup>5)</sup> (CLS); le faisceau est assimilé à un ellipsoïde uniformément chargé, et les forces de charge d'espace sont calculées en fonction de ses trois dimensions; comme celles-ci dépendent du courant, la méthode "pas à pas" suivante a été proposée par M. Weiss :

On détermine tout d'abord l'enveloppe d'un faisceau de courant nul adapté à la structure. L'introduction d'un petit courant  $\Delta I$  n'entraînant qu'une faible variation des dimensions du faisceau, les forces de charge d'espace sont alors calculées à partir de l'enveloppe "à courant nul" obtenue précédemment et incluses dans le calcul suivant comme des *forces externes défocalisantes*; la structure ayant alors changé, on détermine de nouvelles enveloppes à partir desquelles les forces de charge d'espace sont recalculées, mais cette fois pour un faisceau de courant  $2\Delta I$ . En répétant ce processus, on atteint la structure et les paramètres d'un faisceau adapté relatifs à un courant  $I$  quelconque.

Le formalisme de CLS n'étant valable que dans le cas d'une structure périodique, un traitement préalable est nécessaire afin de pouvoir l'appliquer à la structure quasi périodique d'un linac<sup>6)</sup>.

Le programme ADAPT est l'expression FORTRAN de tout ce calcul : il inclut la charge d'espace en la considérant non pas comme une propriété du faisceau lui-même, mais comme attachée à la structure; en fait, on ne transfère le faisceau dans cette structure que dans le but d'en déterminer l'enveloppe nécessaire au calcul des forces de charge d'espace.

## 2. ETUDE THEORIQUE

### 2.1 Hypothèses simplificatrices

Afin d'être en mesure d'appliquer le formalisme de Courant, Livingston et Snyder<sup>5)</sup>, qui nécessite une linéarisation de *toutes les forces* agissant sur les particules, certaines hypothèses simplificatrices doivent être faites :

- Les mouvements longitudinaux et transversaux sont découplés; ainsi les particules voient toutes un champ accélérateur qui est celui calculé sur l'axe; l'effet défocalisant du champ radio-fréquence est calculé comme si toutes les particules avaient une phase égale à la phase synchrone.
- La microstructure du faisceau consiste en paquets de particules dont la longueur correspond à la zone de stabilité en phase : un traitement linéaire des forces de charge d'espace amène à considérer chacun de ces paquets comme un ellipsoïde uniformément chargé<sup>7,8)</sup>; de plus, la forme ellipsoïdale de ces paquets et la distribution uniforme de charge à l'intérieur se conservent au cours de l'accélération.
- Les effets d'image sur les parois internes des tubes de glissement, l'influence des paquets de particules voisins et les aberrations dues aux quadripôles ne sont pas pris en compte dans cette étude.

### 2.2 Définition de l'espace des phases

Dans un linac, le choix d'une variable indépendante doit être effectué de façon à découper l'accélérateur en sections identiques : comme la particule synchrone traverse chaque cellule<sup>\*)</sup> en un temps égal à la période du champ accélérateur, la variable temps est alors choisie; afin d'être conduit

\*) Une cellule est définie ici comme l'élément de la structure compris soit entre les centres dynamiques de deux intervalles d'accélération consécutifs, soit entre les milieux de deux tubes de glissement.

à un formalisme plus simple, il est préférable de prendre comme variable indépendante le "temps réduit  $\tau$ " défini par :

$$\tau = \frac{t}{T_{RF}} = \frac{ct}{\lambda}, \quad (1)$$

où  $T_{RF}$  est la période du champ accélérateur,  $\lambda$  est sa longueur d'onde et  $c$  est la vitesse de la lumière.

La variable  $\tau$  prend alors des valeurs entières au milieu des tubes de glissement.

A l'abscisse  $\tau$  les coordonnées des particules sont définies dans un espace des phases à six dimensions. Dans notre cas le mouvement de la particule est étudiée dans trois plans de phases indépendants :

- Les deux plans transversaux  $(x, \dot{x})$  et  $(y, \dot{y})$  qui sont les deux plans de focalisation des quadripôles;
- Le plan longitudinal  $(z, \dot{z})$ .

Les dérivées sont prises par rapport à la variable  $\tau$ ;  $x$  et  $y$  sont les distances à l'axe dans les plans transversaux et  $z = s - s_0$  est l'abscisse  $s$  de la particule par rapport à celle de la particule synchrone ( $s_0$ ).

Si dans un accélérateur linéaire le mouvement transversal peut s'étudier assez bien à l'aide d'un formalisme linéaire, il n'en va pas de même longitudinalement : en effet, l'équation différentielle des oscillations longitudinales (le terme "d'oscillations synchrotroniques" sera utilisé par la suite) ne se linéarise en  $z$  que dans le cas où la différence de phase par rapport à la particule synchrone est faible. C'est-à-dire que dans le plan de phase plus couramment utilisé  $(\Delta\phi, \Delta W)$  le mouvement des particules est représenté par une ellipse proche du centre de la zone de stabilité ("bucket") (fig. 1a). Notre étude nécessitant des forces linéaires, on est amené à supposer la même fréquence synchrotronique pour toutes les particules dont la phase est comprise entre  $2\phi_s$  et  $0$  ( $\phi_s < \Delta\phi < -\phi_s$ ). En particulier la séparatrice, en forme de "poisson", est remplacée par une ellipse dont le demi-axe horizontal vaut  $|\phi_s|$  (fig. 1b).

Les relations simples suivantes permettent, dans le cas où l'on est en dehors d'un espace d'accélération, d'exprimer  $\Delta\phi$  et  $\Delta W$  en fonction de  $z$  et  $\dot{z}$  :

$$\Delta\phi = -2\pi \frac{z}{\beta_s \lambda} \quad (2)$$

$$\Delta W = 2W_s \frac{\dot{z}}{\beta_s \lambda} \quad (3)$$

où  $\beta_s c$  et  $W_s$  sont respectivement la vitesse et l'énergie de la particule synchrone à l'abscisse considérée.

### 2.3 Equations du mouvement

#### 2.3.1 Sans charge d'espace

Les seules forces agissant sur les particules du faisceau sont des forces externes : elles sont dues à l'action du champ accélérateur et à l'action du champ magnétique quadripolaire.

Dans chacun des trois plans de phase définis plus haut, les équations linéarisées du mouvement d'une particule sont de la forme<sup>8,9)</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} + Q_x(\tau) \cdot x &= 0 \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + Q_y(\tau) \cdot y &= 0 \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} + Q_z(\tau) \cdot z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

où  $Q_x(\tau)$ ,  $Q_y(\tau)$  et  $Q_z(\tau)$  sont, à l'abscisse  $\tau$ , les constantes des forces externes relatives aux plans de phase  $(x, \dot{x})$ ,  $(y, \dot{y})$  et  $(z, \dot{z})$ . Il est à noter que ces constantes sont sans dimension.

D'autre part, afin de pouvoir utiliser un formalisme matriciel, on est amené à remplacer ces forces (variant avec  $\tau$ ) par des forces équivalentes indépendantes de  $\tau$ , agissant le long d'un élément de structure, à savoir : un intervalle accélérateur, un quadripôle ou un espace sans champ.

Dans ce qui suit nous explicitons successivement les forces dues au champ accélérateur et celles dues au champ magnétique quadripolaire.

Forces d'origine électrique : La force radiale défocalisante dans un intervalle d'accélération a été utilisée dans le programme ACCEPT<sup>10)</sup>. Elle est donnée pour une particule synchrone par :

$$F_r = - \frac{\pi e \bar{E} T \sin \phi_s}{m L_g} \cdot r = \chi^2 r , \quad (5)$$

où  $\bar{E}$  est le champ moyen sur l'axe,  $T$  le facteur temps de transit,  $\phi_s$  la phase synchrone (toujours négative) et  $L_g$  la longueur de l'intervalle d'accélération.

Le mouvement longitudinal est décrit par les oscillations synchroniques. Avec l'approximation faite au paragraphe précédent, la fréquence de ces oscillations est celle relative au cas des petits mouvements, c'est-à-dire<sup>6)</sup> :

$$\Omega_s^2 = - \frac{2\pi e \bar{E} T \sin \phi_s}{m \cdot L_c} , \quad (6)$$

où  $L_c$  est la longueur de la cellule.

La force de rappel ( $\Omega_s^2 \cdot z$ ) agit ici de façon continue dans une cellule et son action équivalente dans l'intervalle accélérateur est :

$$F_z = K_G \cdot z = \frac{L_c}{L_g} \Omega_s^2 \cdot z . \quad (7)$$

En utilisant les relations (5) et (6), on a :

$$K_G = 2\chi^2 . \quad (8)$$

Forces d'origine magnétique : Elles sont dues au champ quadripolaire de focalisation; à l'intérieur du quadripôle, elles sont constantes avec  $\tau$ . Pour une lentille focalisante dans le plan horizontal on a<sup>11)</sup> :

$$F_x = - \frac{eG}{m} v x = -K_Q \cdot x , \quad (9)$$

$$F_y = \frac{eG}{m} v y = K_Q \cdot y ,$$

où  $G$  est le gradient magnétique du quadripôle,  $v$  est la vitesse longitudinale de la particule synchrone et  $K_Q$  la constante de la force quadripolaire.

Afin de tenir compte de l'action du champ magnétique à l'extérieur du quadripôle, on définit une longueur dite "effective" sur laquelle agissent les mêmes forces définies<sup>12)</sup> ci-dessus [par les équations (9)].

Par "longueur d'un quadripôle" on sous-entendra toujours : "longueur effective d'un quadripôle".

Il est alors possible de donner l'expression des  $Q_x$ ,  $Q_y$  et  $Q_z$  dans chaque élément de structure (la variable indépendante étant  $\tau$ ).

Dans un intervalle d'accélération :

$$\begin{aligned} Q_x = Q_y &= - \frac{\pi e \bar{E} T \sin |\phi_s|}{m L_g} T_{RF}^2, \\ Q_z = -2Q_x &= \frac{2\pi e \bar{E} T \sin |\phi_s|}{m L_g} T_{RF}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Dans un quadripôle :

$$\begin{aligned} Q_x = -Q_y &= \pm \frac{eG}{m} v T_{RF}^2, \\ Q_z &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Dans un espace sans champ :

$$Q_x = Q_y = Q_z = 0. \quad (12)$$

La figure 2 donne l'allure de ces constantes de forces ( $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ) dans les premières cellules de l'accélérateur et pour les deux types de structure focalisante (FD et FFDD). Les valeurs numériques correspondent à celles d'une structure calculée pour un faisceau de courant nul (cf. paragraphe 4.1).

### 2.3.2 Termes dus à la charge d'espace

D'après le paragraphe 1.1 les forces de répulsion coulombienne qui s'exercent à l'intérieur du paquet de charges sont calculées comme des forces s'exerçant sur les particules situées à l'intérieur d'un ellipsoïde uniformément chargé.

Le potentiel en un point (x,y,z) intérieur à un tel ellipsoïde est donné par Kellog<sup>13)</sup> :

$$V_{int} = \frac{\rho}{4\epsilon_0} abc \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{\phi(\lambda)}, \quad (13)$$

avec  $\phi(\lambda) = \{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)\}^{1/2}$ , et où  $a, b, c$  sont les trois demi-axes de l'ellipsoïde et  $\rho$  la densité de charge constante à l'intérieur.

Le potentiel s'écrit aussi :

$$V_{\text{int}} = \frac{\rho}{4\epsilon_0} abc (-I_X x - I_Y y - I_Z z + I_0) ,$$

avec :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\phi(\lambda)} , & I_X &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\phi(\lambda)} , \\ I_Y &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\phi(\lambda)} \quad \text{et} \quad I_Z &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)\phi(\lambda)} . \end{aligned} \tag{15}$$

D'où les composantes du champ électrique au point  $(x,y,z)$  :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} abc I_X x , \\ E_y &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} abc I_Y y , \\ E_z &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} abc I_Z z . \end{aligned} \tag{16}$$

Exprimons  $\rho$  en fonction du courant moyen  $I$  dans l'accélérateur :

$$\rho = Q/V, \quad \text{avec} \quad V = 4/3\pi abc, \tag{17}$$

où  $V$  et  $Q$  sont le volume et la charge de l'ellipsoïde.

La charge  $Q$  est aussi égale à l'intégrale du courant sur une période du champ accélérateur :

$$Q = \int_0^{T_{\text{RF}}} i \cdot dt = I \cdot T_{\text{RF}} . \tag{18}$$

Des équations (17) et (18) on tire la densité de charge :

$$\rho = \frac{3T_{\text{RF}}}{4\pi abc} \cdot I . \tag{19}$$

Les composantes de la force de Coulomb sont donc [(16) et (19)] :

$$\begin{aligned}
 F_x &= \frac{3eT_{RF}}{8\pi\epsilon_0} I I_X x , \\
 F_y &= \frac{3eT_{RF}}{8\pi\epsilon_0} I I_Y y , \\
 F_z &= \frac{3eT_{RF}}{8\pi\epsilon_0} I I_Z z .
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Ces forces linéaires en x, y et z apparaissent dans les équations du mouvement comme des termes défocalisants.

Les équations du mouvement en présence de charge d'espace s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{d\tau^2} + (Q_x + K_x)x &= 0 , \\
 \frac{d^2y}{d\tau^2} + (Q_y + K_y)y &= 0 , \\
 \frac{d^2z}{d\tau^2} + (Q_z + K_z)z &= 0 ,
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

avec :

$$K_{x(y,z)} = \frac{3eT_{RF}^3}{8\pi\epsilon_0} I \cdot I_{X(Y,Z)} .
 \tag{22}$$

## 2.4 Application du "formalisme des structures périodiques" à la structure quasi périodique d'un linac

### 2.4.1 Rappels sur les structures périodiques

Courant, Livingston et Snyder (1956)<sup>5,11)</sup> ont développé ce formalisme en vue d'étudier les oscillations bétatroniques dans un synchrotron à gradients alternés.

Une structure est dite périodique par rapport à la variable indépendante  $\tau$ , si le mouvement d'une particule est régi par une équation de Hill<sup>11)</sup> :

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + K(\tau)u = 0 ,
 \tag{23}$$

où  $K(\tau)$  est une fonction périodique de  $\tau$  (de période  $\tau_s$ ) :

$$K(\tau + \tau_s) = K(\tau) .$$

Ce formalisme permet de déterminer à l'abscisse  $\tau$  les paramètres d'un faisceau, conduisant à une enveloppe périodique le long de l'accélérateur. Ces paramètres d'adaptation sont les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de la matrice de transfert d'une période de focalisation; le rapport d'axes et l'inclinaison de l'ellipse d'émittance représentant, à l'abscisse  $\tau$ , le faisceau adapté sont alors connus.

De plus, l'acceptance de la machine relative à un plan de phase est calculée à l'endroit où la fonction d'amplitude  $\beta(\tau)$  atteint son premier maximum  $\beta_{\max}$ , par<sup>11)</sup> :

$$A = \frac{a^2}{\beta_{\max}} . \quad (24)$$

Dans un plan transversal,  $a$  est le rayon d'ouverture du tube de glissement à cet endroit. Longitudinalement,  $a$  est déterminé en se fixant une certaine acceptance en phase à l'entrée de la machine.

$A$  est l'acceptance de phase dans notre système  $(u, \dot{u})$ ; elle est reliée à l'acceptance  $A(s)$  dans le système  $(u, du/ds)$  par :

$$A = A(s) \cdot \beta \lambda = A_N \cdot \lambda ,$$

où  $\beta$  est le facteur relativiste et  $A_N$  est "l'acceptance normalisée".

#### 2.4.2 Application du formalisme de CLS à un linac

Dans notre cas, les éléments de la structure (intervalles d'accélération, espaces sans champ ou quadripôles) se répètent au bout d'un nombre entier de cellules. La période  $\tau_s$  (sur l'axe  $\tau$ ) vaut 2 ou 4 dans un plan transversal (selon que la structure focalisante est FD ou FFDD) et 1 dans le plan longitudinal. De plus, ces éléments gardent chacun une "longueur"  $\Delta\tau$  à peu près constante le long du Linac (cf. paragraphe 3.1).

Il n'en va pas de même pour l'amplitude des forces externes précédemment étudiées; en effet (fig. 2), les forces électriques décroissent le long de l'accélérateur avec une loi en  $\beta^{-\frac{1}{2}}$  ( $\beta c$  étant la vitesse de la particule au centre dynamique de l'intervalle d'accélération). La focalisation quadripolaire peut, elle aussi, varier (en valeur absolue) le long de l'accélérateur : cela dépend -- le chapitre suivant le montrera -- de la variation arbitraire imposée à la fréquence (ou à l'amplitude moyenne) des oscillations transversales (ou "bétatroniques").

Ainsi, dans ces conditions, la structure n'est pas périodique. Cependant, si les paramètres de l'oscillation bétatronique varient peu d'une cellule à l'autre -- et c'est le cas ici --, en les prenant constants à chaque cellule, on définit le long du linac autant de structures périodiques (au sens de CLS) qu'il y a de cellules dans l'accélérateur<sup>6</sup>).

Cette méthode permet ainsi d'utiliser le formalisme de CLS et donc de déterminer en divers points d'une cellule les paramètres d'un faisceau adapté.

#### 2.4.3 Détermination des paramètres d'adaptation du faisceau

En fait, pour le calcul de la structure, un seul point par cellule est suffisant : selon qu'il s'agit d'une structure FD ou FFDD, on choisit respectivement le milieu d'un quadripôle ou le milieu d'un intervalle d'accélération. On impose que ces points soient situés aux maxima et aux minima d'enveloppe et, de plus, dans le cas de la structure FFDD, aux points d'inflexion.

De plus, une focalisation quadripolaire impose évidemment que les gradients magnétiques d'un quadripôle soient égaux et de signe opposé dans chacun des deux plans de focalisation.

Afin de satisfaire ces conditions, chaque maille de la structure périodique définie au paragraphe précédent doit posséder certaines symétries. La nature de celles-ci et la façon de les obtenir seront exposés au paragraphe 3.4.

*Remarques concernant le mouvement longitudinal.* Le même formalisme est appliqué aussi au plan de phase  $(z, \dot{z})$ , c'est-à-dire que de cellule en cellule on peut déterminer la longueur du paquet de particules, l'acceptance longitudinale de la machine étant calculée à l'entrée de l'accélérateur en se fixant une certaine acceptance de phase égale ici à  $2|\phi_s|$ .

### 3. CALCUL DE LA STRUCTURE FOCALISANTE ET ADAPTATION DU FAISCEAU

#### 3.1 Préparation des données

Nous devons au préalable connaître la géométrie de l'accélérateur, ainsi que la dynamique de la particule synchrone en divers points de celui-là. Dans notre cas ces paramètres correspondent au Linac expérimental de 3 MeV du CERN, lui-même différant peu de la première partie de l'injecteur du Synchrotron du CERN. Certaines de ces données sont calculées par le programme GENLIN<sup>14</sup>).

Dix-huit cellules permettent d'accélérer la particule synchrone de 520 keV à 3,049 MeV; le rapport ( $r = g/L$ ) de la longueur de l'intervalle d'accélération et de la longueur de la cellule garde la valeur constante de 0,25; le rayon d'ouverture des tubes de glissement augmente le long du Linac (de 8,24 à 13,75 mm); le facteur temps de transit sur l'axe croît de 0,70 à 0,75. Si l'on se fixe une phase synchrone de  $-30^\circ$ , le Linac doit fonctionner avec un champ moyen sur l'axe de 2,6 MV/m.

Chaque tube de glissement contient un quadripôle dont le "facteur de remplissage" dans la cellule ( $\phi_r$ ) prend une valeur comprise entre 0,52 et 0,55; il reste ainsi deux espaces sans champ aux extrémités du tube de glissement (fig. 3).

Notons que le premier demi-tube de glissement du Linac est dépourvu de quadripôle.

Les précédentes valeurs de  $\phi_r$  et  $g/L$  vont nous permettre de diviser judicieusement une cellule en éléments de longueur à peu près égale. En effet, un calcul matriciel ne rend possible la connaissance des paramètres du faisceau qu'aux extrémités de ces éléments et, afin de tracer avec précision l'enveloppe du faisceau, on doit disposer d'un certain nombre de points à peu près équidistants les uns des autres.

On prend, dans notre cas, les huit éléments par cellule suivants : deux demi-intervalles d'accélération (droit et gauche), deux espaces sans champ et quatre quarts de quadripôle (deux droits et deux gauches) (fig. 3). Les longueurs de ces éléments s'expriment en fonction des valeurs de  $\phi_r$  et  $r = g/L$  dans la cellule et sont données (sur l'axe  $\tau$ ) par :

$$\begin{aligned}\Delta\tau_G &= r/2 && \text{pour un demi-intervalle d'accélération;} \\ \Delta\tau_Q &= (1 - \phi_r - r)/2 && \text{pour un espace sans champ;} \\ \Delta\tau_D &= \phi_r/4 && \text{pour un quart de quadripôle.}\end{aligned}$$

### 3.2 Principes du calcul

Il débute toujours par l'étude d'un faisceau dans lequel les forces de charge d'espace sont négligées, c'est-à-dire qu'au départ la structure ne comporte que les forces externes d'origine électrique ou magnétique (fig. 2). Le calcul s'effectue toujours en trois étapes :

- i) Cellule par cellule, on détermine d'une part le gradient magnétique à donner aux quadripôles et d'autre part les paramètres du faisceau aux "points d'adaptation" définis au paragraphe 2.4.3. Certains de ces paramètres permettent de déterminer à l'entrée du linac les acceptances relatives aux trois plans de phase (cf. paragraphe 2.4.1).
- ii) Un faisceau qui dans chacun de ces plans est adapté en un des points définis ci-dessus et dont les émittances remplissent les trois acceptances, est alors transféré dans cette structure; ainsi les enveloppes transversales et longitudinales du faisceau peuvent être tracées.
- iii) Connaissant donc en divers points de la structure (huit par cellule) les trois dimensions du "paquet de particules", on considère celui-ci comme un ellipsoïde dont la densité uniforme de charges correspond à un faible courant  $\Delta I$ . Ainsi, les forces de charge d'espace peuvent être calculées en ces divers points et *introduites dans la structure* comme des forces défocalisantes.

Par suite, la structure ayant changé, on doit recommencer le même calcul en repassant par les trois étapes précédentes et à la fin de la boucle une nouvelle structure sera obtenue en prenant cette fois un courant plus élevé ( $2\Delta I$ ).

En réitérant ce processus pas par pas on obtient, pour une intensité  $I$ , la structure focalisante à adopter, ainsi que les paramètres d'un faisceau adapté à cette structure. Le déroulement de ces calculs est résumé par un organigramme (fig. 4).

*Remarque* : Au lieu de procéder par augmentations infinitésimales du courant ( $\Delta I$ ) il est possible de prendre un pas plus grand. Il est alors nécessaire d'effectuer plusieurs fois la boucle pour chaque courant ainsi défini; en fait, deux ou trois itérations suffisent pour obtenir une bonne convergence.

Les paragraphes qui suivent sont destinés à entrer plus en détail dans les différentes parties du calcul.

### 3.3 Critères déterminant la loi de focalisation quadripolaire

D'après le paragraphe 2.4.2, les forces de focalisation sont déterminées pourvu que l'on se fixe à chaque cellule la fréquence  $\Omega_\beta$  de l'oscillation "bétatronique".

Dans le cas du Linac de 3 MeV, en négligeant la charge du faisceau, le rapport  $q$  entre la fréquence "bétatronique" ( $\Omega_{\beta_0}$ ) et la fréquence "synchrotronique" ( $\Omega_{s_0}$ ) est pris constant. Afin d'éviter les résonances entre ces deux types d'oscillation,  $q$  ne doit être ni entier ni demi-entier : la valeur 0,75 a été retenue pour  $q$  <sup>15)</sup>. On a donc :

$$\Omega_{\beta_0} = 0,75 \Omega_{s_0} . \quad (26)$$

En présence de charge d'espace, nous conservons la même fréquence bétatronique  $\Omega_{\beta_0}$  mais  $q$  ne sera plus le rapport entre les fréquences "bétatronique" et "synchrotronique", car cette dernière diminue avec les forces longitudinales de charge d'espace.

Le déphasage  $\mu$  par période de focalisation ( $2N$ ) est :

$$\mu = 2N\Omega_{\beta} T_{RF} = 2N\Omega_{\beta}(\tau) , \quad (27)$$

où  $\Omega_{\beta}(\tau)$  est la fréquence dans notre espace des phases, avec  $\tau$  comme variable indépendante.

On peut aussi définir  $\mu$  à partir de la fonction d'amplitude  $\beta(\tau)$  par <sup>11)</sup> :

$$\mu = \int_{\tau}^{\tau+2N} \frac{d\tau}{\beta(\tau)} = \frac{2N}{\bar{\beta}(\tau)} . \quad (28)$$

La valeur moyenne  $\bar{\beta}(\tau)$  est directement liée à l'amplitude moyenne de l'enveloppe par <sup>11)</sup> :

$$\bar{a} = \sqrt{E \cdot \bar{\beta}(\tau)} , \quad (29)$$

où  $E$  est l'émittance normalisée.

Des relations (27), (28) et (29) on tire :

$$\Omega_{\beta}(\tau) = \frac{1}{\bar{\beta}(\tau)} , \quad (30)$$

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{E}{\Omega_{\beta}(\tau)}} , \quad (31)$$

Comme  $\Omega_{\beta}(\tau)$  suit la même loi en  $\beta^{-\frac{1}{2}}$  que  $\Omega_{s_0}$ , l'amplitude moyenne  $\bar{a}$  augmente donc selon une loi en  $\beta^{\frac{1}{4}}$ .

*Remarque* : Les maxima et minima d'enveloppe suivent le long du linac une loi toute différente de la précédente, car leur valeur *dépend* de la structure de focalisation choisie (FD ou FFDD).

### 3.4 Calcul de la structure focalisante

#### 3.4.1 Matrices de transfert des éléments de la structure

La longueur (sur l'axe  $\tau$ ) de ces éléments a été calculée au paragraphe 3.1. Ils sont toujours considérés comme des lentilles épaisses.

Si  $\Delta\tau$  est la longueur d'un de ces éléments, et  $Q$  la constante de la force relative à cet élément (cf. paragraphe 2.3.2), la matrice de transfert dans l'un des trois plans de phase est :

a) Pour un élément focalisant (quart de quadripôle focalisant ou demi-intervalle d'accélération dans le plan longitudinal) :

$Q > 0$

$$(M_F) \equiv \begin{bmatrix} \cos \sqrt{Q} \cdot \Delta\tau & 1/\sqrt{Q} \sin \sqrt{Q} \cdot \Delta\tau \\ -\sqrt{Q} \sin \sqrt{Q} \cdot \Delta\tau & \cos \sqrt{Q} \cdot \Delta\tau \end{bmatrix}. \quad (32)$$

b) Pour un élément défocalisant (quart de quadripôle défocalisant, demi-intervalle d'accélération dans un plan transversal ou espace sans champ en présence de charge d'espace) :

$Q < 0$

$$(M_D) \equiv \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{-Q} \Delta\tau & 1/\sqrt{-Q} \sinh \sqrt{-Q} \Delta\tau \\ \sqrt{-Q} \sinh \sqrt{-Q} \Delta\tau & \cosh \sqrt{-Q} \Delta\tau \end{bmatrix}. \quad (33)$$

c) Pour un espace de glissement (sans charge d'espace) :

$Q = 0$

$$(M_0) \equiv \begin{bmatrix} 1 & \Delta\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.4.2 Etude des symétries requises à l'intérieur d'une période de focalisation

Comme mentionné au paragraphe 2.4.3, on est amené à distinguer dans un plan transversal deux types de périodes (fig. 5) : celles situées entre deux extrema de la fonction d'amplitude  $\beta(\tau)$  et celles situées entre deux points d'inflexion de cette même fonction (dans le cas de la structure FFDD seulement).

Au préalable, nous donnons quelques définitions à partir d'une matrice :

$$(M) \equiv \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix},$$

de déterminant égal à 1.

- La matrice inverse :

$$(M^{-1}) \equiv \begin{bmatrix} q & -n \\ -p & m \end{bmatrix}.$$

- La matrice dont le signe des éléments non diagonaux est changé :

$$(\tilde{M}) \equiv \begin{bmatrix} m & -n \\ -p & q \end{bmatrix}.$$

- La matrice dont les éléments diagonaux sont intervertis :

$$(\bar{M}) \equiv \begin{bmatrix} q & n \\ p & m \end{bmatrix}$$

Les trois matrices précédentes sont donc liées par la relation suivante :

$$(\bar{M}) \equiv (\tilde{M}^{-1}). \quad (34)$$

Période comprise entre deux extrema : la matrice de transfert de la période de A à C (fig. 5a et 5c) s'écrit, dans le plan horizontal<sup>11)</sup> :

$$(M_H) \equiv \begin{bmatrix} \cos \mu & \beta_H \sin \mu \\ -1/\beta_H \sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Les éléments diagonaux de cette matrice étant identiques, on a d'après la relation (34) :

$$(\bar{M}_H) = (M_H).$$

Ainsi, la structure possède une symétrie par rapport à son plan milieu et on peut appliquer le formalisme suivant<sup>16)</sup>.

Si (P) est la matrice de passage de A au milieu B de la période, la matrice de B à C est donc ( $\tilde{P}^{-1}$ ) et, d'après la relation (34) :

$$(\tilde{P}^{-1}) = (\bar{P}). \quad (36)$$

d'où :

$$(M_H) = (\bar{P})(P).$$

En se déplaçant dans cette même structure, la prochaine période symétrique rencontrée débute au milieu B de la précédente : la matrice de transfert qui lui est associée s'écrit alors :

$$(M'_H) = (P)(\bar{P}). \quad (37)$$

( $M_H$ ) et ( $M'_H$ ) ont évidemment la même trace : la focalisation doit donc être identique en valeur absolue pour ces deux périodes.

Or, dans le plan vertical, la matrice de transfert de A à C ( $M_V$ ) a la même forme que ( $M'_H$ ) ; en prenant ( $M_V$ )  $\equiv$  ( $M'_H$ ) on obtient des gradients magnétiques égaux en valeur absolue dans les deux plans.

Les coefficients de Twiss sont donnés, à partir des éléments de la demi-matrice :

$$(P) \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

par<sup>16)</sup> :

$$\begin{aligned} \cos \mu &= ad + bc; \\ \beta_H^2 &= -\frac{bd}{ac}; \quad \beta_V^2 = -\frac{ab}{cd}; \\ \alpha_H &= \alpha_V = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Période comprise entre deux points d'inflexion. La matrice de transfert de cette période de D à F (fig. 5b) s'écrit<sup>11)</sup> :

$$(M_H) \equiv \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta_H \sin \mu \\ -\gamma_H \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{bmatrix}. \quad (39)$$

La période débutant au prochain point d'inflexion (E) est identique à celle de D à F, mais vue dans l'autre sens, on a donc :

$$(M_H) = (\bar{M}'_H). \quad (40)$$

Des relations (39) et (40), on tire :

$$\alpha'_H = -\alpha_H \quad \text{et} \quad \beta'_H = \beta_H. \quad (41)$$

Si, comme au paragraphe précédent, on prend dans le plan vertical la matrice  $(M_V)$  de D à F, identique à  $(M'_H)$  de F à E, on obtient une focalisation identique en valeur absolue dans les deux plans.

Les coefficients de Twiss sont alors donnés à partir des éléments de la matrice (39) par :

$$\begin{aligned} \cos \mu &= \frac{m_{11} + m_{22}}{2}, \\ \beta_H = \beta_V &= \frac{m_{12}}{\sin \mu}, \\ \alpha_H = -\alpha_V &= \frac{m_{11} - m_{22}}{2 \sin \mu}. \end{aligned} \quad (42)$$

### 3.4.3 Méthode permettant de construire la structure périodique

Les périodes de structure ayant les symétries annoncées au paragraphe 3.4.2 sont obtenues en procédant de la façon suivante.

Considérons une cellule comprise entre les milieux de deux intervalles d'accélération successifs; la structure périodique est construite à partir de cette cellule reportée et réfléchie un certain nombre de fois, en prenant soin de respecter l'alternance du signe de la focalisation.

Afin de rendre aussi les forces de charge d'espace symétriques dans cette structure, les enveloppes du faisceau (à partir desquelles ces forces sont calculées) doivent avoir les mêmes symétries que la structure des forces externes ainsi définies (fig. 5).

Du fait qu'une période FFDD est constituée de quatre cellules et une période FD de deux, une méthode différente est utilisée pour chacun de ces deux types de focalisation.

Structure FFDD : Les deux portions (H) et (V) d'enveloppe contenues dans la cellule sont reportées en étant chaque fois réfléchies. Ainsi une période (horizontale ou verticale) est toujours composée de deux éléments (H) et de deux éléments (V) (fig. 5a et 5b).

Structure FD : Au préalable, les portions (H) et (V) sont rendues symétriques par rapport au plan milieu de la cellule. Ces nouveaux éléments sont alors simplement reportés un certain nombre de fois. Chaque période (horizontale ou verticale) comporte ainsi deux demi-éléments (H) et deux demi-éléments (V) (fig. 5c).

#### 3.4.4 Calcul des gradients magnétiques des quadripôles

Pour chaque période étudiée au paragraphe 3.4.2, la valeur absolue commune du gradient des quadripôles doit être déterminée de façon que le déphasage  $\mu$  par période de focalisation de l'oscillation bétatronique soit celui ( $\mu_c$ ) calculé au paragraphe 3.3, par l'équation (28); d'où la nécessité d'effectuer des itérations, permettant de trouver la valeur du gradient qui rend la demi-trace de la matrice de transfert de la période égale à  $\cos \mu_c$ . La méthode d'itération est celle utilisée dans le programme ACCEPT<sup>10</sup>). Ce calcul est effectué pour chaque cellule (donc pour chaque quadripôle) dans le plan horizontal; dans l'autre plan, le signe des gradients est simplement changé (cf. paragraphe 3.4.2). Pour chaque type de structure (FD ou FFDD) on est alors en mesure de tracer la loi de variation quadripolaire le long de l'accélérateur.

### 3.4.5 Etude de la structure longitudinale

L'application du formalisme de CLS à ce plan est plus simple que dans le cas du mouvement transversal.

En effet, la période de la structure n'est que d'une cellule (cf. paragraphe 2.4.2); si l'on rend cette cellule symétrique, comme dans le cas de la structure FD (cf. paragraphe 3.4.2), les maxima et minima d'enveloppe sont situés respectivement au milieu des intervalles d'accélération et des tubes de glissement. Les coefficients de Twiss sont alors calculés, à partir de la matrice de transfert de la demi-cellule ainsi définie, par les formules (38). Notons que du fait que, dans un tube de glissement, on a un espace sans champ, l'amplitude des oscillations d'enveloppe est très faible ( $\beta_{\max}/\beta_{\min} < 1,05$ ).

## 3.5 Paramètres d'adaptation du faisceau

### 3.5.1 Acceptance dans les trois plans de phase

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  de Twiss ont été calculés au paragraphe 3.4.2. Ils sont donnés en un extremum d'enveloppe par la relation (38) et en un point d'inflexion par la relation (42).

Le calcul des acceptances (d'après le paragraphe 2.4.1) est effectué au point où la fonction d'amplitude  $\beta(\tau)$  atteint son premier maximum.

Dans le cas d'une structure FD : Les acceptances horizontales et verticale  $A_H$  et  $A_V$  sont déterminées au milieu des 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> quadripôles. Les extensions maxima des deux enveloppes sont alors égales aux rayons d'ouverture des 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> tubes de glissement. Les expressions de  $A_H$  et  $A_V$  sont données à partir de l'équation (24) par :

$$A_H = \frac{R_2^2}{\beta_{H \max}} \quad \text{et} \quad A_V = \frac{R_3^2}{\beta_{V \max}}, \quad (43)$$

où  $R_n$  est le rayon d'ouverture du n<sup>e</sup> tube de glissement;  $\beta_{H \max}$  et  $\beta_{V \max}$  sont les premiers maxima de la fonction d'amplitude dans chaque plan transversal.

Dans le cas d'une structure FFDD : Les acceptances sont calculées aux centres dynamiques des 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> intervalles d'accélération. Les extensions maximales d'enveloppe sont prises ici égales aux rayons d'ouverture

des tubes de glissement situés en amont des 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> intervalles d'accélération. On a alors d'après l'équation (24) :

$$A_H = \frac{R_1^2}{\beta_{H \max}} \quad \text{et} \quad A_V = \frac{R_3^2}{\beta_{V \max}} . \quad (44)$$

Longitudinalement, le premier maximum  $\beta_{L \max}$  se trouve au centre dynamique du 1<sup>er</sup> intervalle d'accélération et l'acceptance longitudinale est d'après les équations (24) et (2) :

$$A_L = \frac{z_{\max}^2}{\beta_{L \max}} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \beta_s^2 \Delta\phi_{\max}^2 , \quad (45)$$

où  $z_{\max}$  est la demi-longueur du paquet de particules correspondant à une acceptance en phase de  $2|\Delta\phi_{\max}|$ .

### 3.5.2 Détermination des enveloppes aux points d'adaptation

Connaissant ainsi les acceptances à l'entrée de la machine, on peut maintenant se donner dans les trois plans de phase les émittances du faisceau que l'on désire adapter : dans notre étude, ces émittances remplissent les acceptances précédemment calculées.

Les enveloppes adaptées sont déterminées dans les deux plans transversaux, aux points considérés dans les paragraphes précédents, par (cf. appendice 1) :

$$X = \sqrt{E_H \beta_H} \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{E_V \beta_V} . \quad (46)$$

$E_H$  et  $E_V$  sont les émittances transversales et  $\beta_H$  et  $\beta_V$  sont les valeurs de la fonction d'amplitude en des extrema ou en des points d'inflexion.

### 3.6 Transfert du faisceau le long du linac

Les structures transversales et longitudinale étant maintenant déterminées le long de l'accélérateur, on peut y transférer un faisceau représenté dans chaque plan de phase par une certaine ellipse d'émittance; celle-ci est prise en  $m$  des points d'adaptation précédents (l'abscisse de ce point pouvant être choisie différente dans chaque plan de phase). Les paramètres de cette ellipse ont été calculés au paragraphe 3.4.2.

En transférant ces ellipses d'émittance le long de la structure, les paramètres de ce faisceau sont connus en divers points de la machine (huit par cellule). Parmi les nombreuses méthodes disponibles pour effectuer ce transfert, celle dans laquelle on suit l'évolution de deux points conjugués de l'ellipse d'émittance a été retenue (cf. appendice 1).

Tout d'abord, ce transfert est effectué dans chaque plan de phase du point d'adaptation à l'entrée de l'accélérateur : c'est là en effet que les paramètres du faisceau ont un intérêt pratique; ces derniers sont ensuite transférés jusqu'à la fin de l'accélérateur, et l'on obtient, entre autres, les enveloppes transversales et longitudinale du paquet de particules en huit points par cellule.

Il est donc possible maintenant de comparer, aux points d'adaptation, les paramètres du faisceau ainsi transférés avec ceux déterminés aux paragraphes précédents.

### 3.7 Calcul des forces de charge d'espace

Les trois axes d'un ellipsoïde contenant le paquet de charges sont donc connus aux extrémités des éléments de structure (définis au paragraphe 3.1).

Les forces de charge d'espace sont maintenant calculées pour un faisceau de courant  $I + \Delta I$  en supposant que les dimensions du paquet de particules sont celles issues du calcul précédent (c'est-à-dire pour un faisceau de courant  $I$ ).

Les formules (20) et (22) permettent de calculer ces forces en un point intérieur au paquet de charges. Les intégrales elliptiques  $I_X$ ,  $I_Y$  et  $I_Z$  [cf. éqs. (15)] apparaissant dans ces formules ne peuvent être calculées que numériquement. La méthode d'intégration utilisée est exposée à l'appendice 2.

Comme dans le cas des forces externes (cf. paragraphe 2.3.1), on doit supposer qu'à l'intérieur de chaque élément de la structure agit une force de charge d'espace constante avec  $\tau$ ; cette dernière est prise ici égale à la moyenne arithmétique des deux forces calculées aux extrémités d'un tel élément.

Les forces de charge d'espace ainsi définies seront ajoutées à la structure externe pour calculer la focalisation et les paramètres d'adaptation d'un faisceau de courant  $I + \Delta I$  (cf. paragraphe 3.2).

#### 4. PROGRAMME "ADAPT" : DESCRIPTION ET UTILISATION

##### 4.1 Analyse du programme

###### 4.1.1 Généralités

Le programme ADAPT est écrit en langage FORTRAN IV, adapté aux calculatrices CDC de la série 6000 du CERN. Le diagramme donné à la figure 3 traduit les étapes successives du calcul.

Un premier bloc est destiné à calculer une fois pour toutes les paramètres qui sont indépendants de la charge d'espace et de la focalisation quadripolaire. Les deux autres parties du programme sont placées à l'intérieur de la boucle principale, qui a pour but de faire varier le courant du faisceau : la première effectue le calcul des paramètres d'adaptation et détermine la focalisation magnétique à adopter ; la seconde effectue simultanément le transfert du faisceau et le calcul des forces de charge d'espace qui feront partie de la structure lors de la boucle suivante. Ce qui suit est destiné à analyser plus en détail chacune de ces parties.

###### 4.1.2 Calculs préliminaires

Les paramètres géométriques utilisés sont, d'après le paragraphe 3.1, ceux du Linac de 3 MeV : longueur des dix-huit cellules, des tubes de glissement, des intervalles d'accélération et des quadripôles ; rayon d'ouverture des tubes de glissement. Dans chaque cellule, le champ électrique moyen lu sur cartes de données correspond à une phase synchrone de  $-30^\circ$ .

En ignorant  $n$  premières cellules de l'accélérateur [c'est-à-dire en le coupant au milieu du  $(n + 1)^e$  tube de glissement] on peut alors injecter à de plus hautes énergies sans modifier la dynamique de la machine (par exemple, dans le cas du Linac de 3 MeV, ces énergies sont successivement : 520,6, 604,3, 692,7, 788,5 keV, etc.). Dans le programme, les paramètres géométriques et électriques (définis pour une injection à 520,6 keV) sont simplement renumérotés.

Le type de focalisation est caractérisé par l'entier  $N$  <sup>17)</sup> [JST] \*) :  $N = 1$  pour la structure FD et  $N = 2$  pour la structure FFDD. De plus, afin de simplifier la logique du programme, on lit le signe des dix-huit quadripôles, repérés par l'indice [I], dans le plan de focalisation horizontal en

\*) Les variables utilisées dans le programme FORTRAN sont mises entre crochets.

attribuant à chacun d'eux, soit la valeur "vraie" s'il est focalisant dans ce plan, soit la valeur "faux" s'il est défocalisant. Ces différentes valeurs sont lues et rangées dans un tableau logique<sup>18)</sup> [LL(I)].

Chaque élément de structure défini au paragraphe 3.1 est repéré le long de l'accélérateur par l'entier [K]. On calcule la "longueur"  $\Delta\tau$  [TAU(K)] et l'abscisse s [ZZ(K)] de cet élément, ainsi que les trois composantes des forces d'origine électrique; les autres forces externes sont mises à zéro. Le tableau [QF(K,IP)] contient toutes ces composantes [la valeur 1, 2 ou 3 de l'indice IP caractérise le plan de phase].

Pour chaque type de structure (FD ou FFDD), on calcule aussi à chaque cellule le déphasage défini au paragraphe 3.3.

Ensuite tous les courants de charge d'espace sont lus et rangés dans un tableau [CUR] afin de permettre, si besoin est, d'effectuer plusieurs fois la boucle pour le même courant I ou de changer le pas  $\Delta I$  au cours du calcul (paragraphe 3.2).

Dans chacun des trois plans de phase, le point où l'on choisit d'adapter le faisceau est défini par le numéro de l'élément dans lequel il se trouve [IAD(IP)], à savoir dans un plan transversal : le numéro d'un quadripôle (structure FD) ou celui d'un intervalle d'accélération (structure FFDD) et longitudinalement : le premier intervalle d'accélération.

Avant d'effectuer le calcul proprement dit, toutes les forces de charge d'espace [QC(K,IP)] sont mises à zéro.

#### 4.1.3 Adaptation du faisceau

La matrice de transfert d'un élément de structure (défini au paragraphe 3.1) est calculée par le sous-programme MAT à partir de la force totale agissant dans cet élément [QFC=QF(K,IP)+QC(K,IP)] et de la longueur  $\Delta\tau$  de celui-là [TAU(K)]; une matrice du type (32), (33) ou (34) est "reçue" selon que Q est positif, négatif ou nul.

Le sous-programme MATPR effectue le produit en chaîne d'un certain nombre (NM) de telles matrices élémentaires.

L'adaptation transversale se fait cellule par cellule à l'aide du sous-programme TRAAD. Les matrices relatives aux demi-intervalles d'accélération et aux espaces sans champ sont calculées une fois par cellule,

tandis que celles relatives à un quart de quadripôle sont calculées en changeant chaque fois la force quadripolaire jusqu'à rendre le déphasage  $\mu$  de la période identique à celui calculé au paragraphe 4.1.2. Le sous-programme ITERA effectue ces itérations<sup>10</sup>).

Connaissant alors la constante de la force quadripolaire  $K_Q$ , on calcule le gradient magnétique du quadripôle à l'aide de l'équation (9) par :

$$|G| \equiv \frac{m}{eT_{RF}^2} \cdot \frac{K_Q}{v} . \quad (47)$$

Le calcul des coefficients de Twiss peut prendre trois formes selon qu'il s'agit de l'une des trois périodes suivantes situées entre :

deux extrema d'enveloppe (structure FFDD),  
deux extrema d'enveloppe (structure FD),  
ou deux points d'inflexion (structure FFDD).

D'après le paragraphe 3.4.2, les deux premières périodes sont symétriques et ne nécessitent que la connaissance de la demi-matrice (P), alors que la dernière demande le calcul de la matrice toute entière ( $M_H$ ); dans le deuxième cas (structure FD), les forces qui agissent de part et d'autre du milieu du quadripôle sont au préalable rendues symétriques en en prenant la valeur moyenne.

Dans le plan longitudinal, la première cellule est rendue symétrique à l'aide du sous-programme LONGAD, comme dans le cas transversal de la structure FD; la matrice de transfert de la période est alors symétrique.

Les coefficients de Twiss sont calculés dans chacun des trois plans pour une période symétrique par les formules (38), et dans l'autre cas par les formules (42).

Les acceptances à l'entrée de la machine (et donc les trois émittances qui les remplissent) sont déterminées par les expressions (43) ou (44) et (45), permettant de calculer les "enveloppes théoriques" aux points d'adaptation dans les plans transversaux par les relations (46).

#### 4.1.4 Transfert du faisceau et calcul des forces de charge d'espace

Un point d'adaptation étant choisi dans chaque plan grâce à la donnée des trois entiers  $[IAD(IP)]$  (paragraphe 4.1.1), les paramètres d'adaptation en ces points sont transmis au sous-programme TRANSF, ainsi que les forces totales relatives à la structure calculée ci-dessus  $[QF(K,IP)+QC(K,IP)]$ .

Le transfert vers l'entrée du Linac se fait plan par plan dans le seul but de calculer les paramètres du faisceau à cet endroit.

Par contre, le transfert du début à la fin de la machine est effectué simultanément dans les trois plans de phase, afin de pouvoir connaître en chaque point de la structure les trois valeurs des enveloppes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  utilisées dans le calcul des forces de charge d'espace (appendice 2); les autres paramètres ( $\alpha$ ,  $\beta$ , etc.) sont seulement calculés au milieu des intervalles d'accélération et des quadripôles (afin de limiter le nombre de résultats).

Les intégrales elliptiques des équations (15) sont calculées en chaque point de la structure (sans oublier l'entrée de la machine) par le sous-programme GAUSSI. On met une fois pour toutes en mémoire les poids ( $W_i$ ) et les noeuds ( $T_i$ ) de la formule de Gauss à dix points dès le premier appel de ce sous-programme à l'aide d'un ordre DATA <sup>19)</sup> (cf. appendice 2). Après normalisation des paramètres  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ , on calcule les trois sommes [EC(IP)] qui approchent la valeur des trois intégrales (A11). Les forces de charge d'espace dans chaque élément de structure peuvent être calculées (paragraphe 3.7).

## 4.2 Utilisation du programme

### 4.2.1 Présentation des résultats

Ceux-ci sont imprimés sur papier pour chaque courant [CUR(J)] de la boucle définie au paragraphe 3.2. Les résultats sont divisés en deux parties (placées chacune sur une page du programme) de la manière suivante :

- i) Ceux relatifs à l'adaptation, avec successivement : les coefficients de Twiss ( $\mu$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ ) dans chaque cellule, les acceptances dans les trois plans de phase, les gradients magnétiques, des quadripôles ainsi que les enveloppes théoriques aux points d'adaptation.
- ii) Ceux qui ont trait au transfert du faisceau : d'abord les paramètres qui définissent, dans chaque plan de phase, au point d'adaptation choisi, l'ellipse d'émittance du faisceau à transférer; ensuite, les coefficients de Twiss et les enveloppes réelles à l'entrée de la machine, puis au milieu des intervalles d'accélération et des quadripôles.

Mais ce sont surtout les sorties graphiques obtenues par le "calcomp plotter" -- couplé à la CDC 6600 du CERN -- qui visualisent le mieux tous ces résultats; en effet, les enveloppes théoriques sont représentées dans les deux plans transversaux par des "points", tandis que les trois enveloppes réelles sont tracées en traits continus (les huit points par cellule choisis suffisent pour obtenir des courbes assez lisses). Pour améliorer la présentation de ces graphiques, on a aussi représenté les tubes de glissement de l'accélérateur. Contrairement aux impressions sur papier, ces enveloppes ne sont sorties que pour des valeurs désirées du courant; pour ce faire, un indice [NPL] est lu en même temps que *chaque courant* étudié : si [NPL] = 0, on n'a pas de sorties graphiques. Dans les autres cas, on appelle le sous-programme PLENV, et la valeur de l'indice [NPL] permet de tracer les enveloppes dans un, deux ou trois plans de phase, avec ou sans les tubes de glissement.

#### 4.2.2 Possibilités du programme

Pour une phase synchrone et une énergie d'injection (définie par le numéro du tube de glissement choisi) on peut, dans un même programme, étudier plusieurs types de focalisation ( $N = 1$  ou  $2$ ) et par le fait même, changer aussi la valeur des courants de charge d'espace, ainsi que les trois points d'adaptation du faisceau.

Une quinzaine de secondes (du "central processor" de la CDC 6600) suffit pour traiter toute une structure jusqu'à un courant de 200 mA. Le tracé des graphiques complets d'enveloppes, relatif à trois valeurs du courant, demande environ dix minutes.

Notons encore la possibilité d'enregistrer sur bande magnétique les résultats obtenus à la fin d'un calcul pour un courant  $I$ , et ensuite de continuer les calculs jusqu'à un courant plus élevé.

### 5. RESULTATS ET INTERPRETATION

Nous nous intéressons en premier lieu à la valeur des gradients magnétiques à donner aux quadripôles pour différents courants du faisceau. Il nous faut ensuite déterminer comment définir un faisceau qui soit adapté le mieux possible à la structure. Enfin, nous désirons connaître, pour ce même faisceau, la variation de ces paramètres avec son intensité. Ces résultats sont donnés sous forme de tables ou de graphiques (fig. 6 à 19).

De plus, les figures 20 à 23 donnent ces mêmes résultats pour une énergie d'injection plus élevée (1,375 MeV).

### 5.1 Gradients magnétiques des quadripôles

Afin de tenir compte du fait que le facteur de remplissage ( $\phi_r$ ) du quadripôle dans la cellule ne reste pas constant le long de la machine (cf. paragraphe 3.1), on étudie non pas les variations du gradient  $G$  mais plutôt celles du produit  $g = 2 \phi_r G$ , pour obtenir une courbe lisse; ainsi  $g$  est identique à  $G$  si  $\phi_r = 1/2$ .

La décroissance de  $g$  est donnée en fonction du numéro de la cellule pour les deux types de structure (FD et FFDD) et pour trois courants de charge d'espace (0, 100 et 200 mA) (cf. fig. 6 et 7). En traçant, en coordonnées logarithmiques, la courbe  $g = f(\beta)$  ( $\beta$  est le facteur relativiste dans le quadripôle), on trouve que les gradients sont situés sur des droites (fig. 8) d'équation :

$$\log g = \log g_0 + n \cdot \log \beta , \quad (49)$$

où  $g_0$  est une constante et  $n$  est la pente d'une de ces droites;  $g$  suit donc une loi exponentielle en  $\beta^n$ .

Dans le cas d'un courant nul, on trouve  $n$  de l'ordre de -1,45, ce qui est donc assez proche de la valeur  $-3/2$  déduite de considérations simples<sup>1)</sup>.

Il est important de noter : comme on n'a considéré que des forces linéaires dans notre calcul, on obtient aussi une augmentation linéaire du gradient magnétique des quadripôles avec le courant (fig. 9). La figure 9 montre d'autre part que cette augmentation est plus rapide pour le gradient des premiers quadripôles que pour celui des derniers.

### 5.2 Etude de l'adaptation optimale du faisceau

Selon le "point d'adaptation" choisi dans chaque plan de phase (cf. paragraphe 2.4.3) on obtient pour le faisceau une adaptation plus ou moins bonne dans ce plan. Transversalement on trouve que cette adaptation est toujours meilleure en un minimum d'enveloppe; de plus, il est préférable de se fixer ce point plus loin dans la structure (choisir par exemple le 2<sup>e</sup> ou le 3<sup>e</sup> minimum d'enveloppe).

Cette règle est valable pour l'une ou l'autre des structures de focalisation étudiées (FD ou FFDD); en présence de charge d'espace, le même critère s'applique, et si le faisceau est bien adapté pour un courant nul il l'est aussi pour n'importe quelle valeur du courant (jusqu'à 200 mA).

Finalement, nous avons opté pour les "points d'adaptation" suivants :

- Pour la structure FD : le 2<sup>e</sup> minimum d'enveloppe dans les deux plans transversaux (fig. 10 et 11).
- Pour la structure FFDD : le 1<sup>er</sup> minimum d'enveloppe dans le plan horizontal et le 2<sup>e</sup> minimum dans le plan vertical (fig. 12 et 13).

Par contre, en s'adaptant à des maxima d'enveloppe le faisceau reçu est moins bien adapté que précédemment; les figures 14 et 15 montrent que cette désadaptation existe même pour un faisceau de courant nul.

Dans le plan longitudinal, on adapte le faisceau là où l'on calcule l'acceptance : c'est à-dire au milieu du premier intervalle d'accélération. Une désadaptation du faisceau dans ce plan a peu d'influence sur le mouvement transversal : en effet, les trois "facteurs de forme"  $I_X$ ,  $I_Y$  et  $I_Z$  intervenant dans l'expression des forces internes du faisceau (appendice 2) varient surtout avec la dimension de l'ellipsoïde qui se trouve dans la direction étudiée.

### 5.3 Evolution des paramètres du faisceau et leurs variations avec le courant

D'après la remarque faite au paragraphe 3.3, on voit sur les figures 10 à 15 que les maxima et minima d'enveloppe ne varient pas de la même façon le long du linac selon le type de structure de focalisation considéré : pour FD, ils augmentent le long de la structure, tandis que pour FFDD seuls les minima augmentent, les maxima gardant une valeur à peu près constante.

Pour un courant de faisceau plus intense, l'allure générale des enveloppes ne change pas et seuls les minima diminuent; ainsi, l'amplitude des oscillations dues à la structure augmente.

Les acceptances transversales (normalisées) sont trouvées différentes dans les deux plans de focalisation : l'acceptance horizontale est plus petite que l'acceptance verticale du fait que cette dernière est calculée plus loin dans la structure, là où l'ouverture des tubes de glissement a

augmenté (cf. paragraphe 3.5.1). Ces acceptances décroissent linéairement avec le courant de charge d'espace (fig. 16) et une pente identique est trouvée pour ces deux droites.

Cette décroissance est plus rapide dans le cas d'une structure FFDD que dans celui de FD, car en moyenne les forces de charge d'espace sont plus faibles pour cette dernière structure : en effet, dans les deux cas le 1<sup>er</sup> maximum d'enveloppe est constant avec le courant I, alors que le 1<sup>er</sup> minimum est toujours plus élevé dans le cas d'une structure FD.

L'acceptance longitudinale décroît plus vite que les acceptances transversales, car aucune force externe n'est ajoutée pour compenser l'effet défocalisant longitudinal de charge d'espace (en montant le niveau HF on pourrait envisager d'augmenter la phase synchrone en valeur absolue de façon à garder la fréquence synchrotronique constante avec le courant). Remarquons que pour un courant nul l'acceptance longitudinale est : identique pour une structure FD ou FFDD, car sans charge d'espace les mouvements relatifs aux trois plans de phase sont entièrement découplés. Par contre, quand on passe de 0 à 200 mA, l'acceptance longitudinale diminue de moitié dans le cas FFDD et seulement d'un tiers dans le cas FD (fig. 16).

Les paramètres du faisceau ( $\alpha$ ,  $\beta$  et enveloppes) à l'entrée du Linac de 3 MeV sont donnés dans chaque plan de phase en fonction du courant par les figures 17, 18 et 19. L'entrée du Linac n'est ici ni un point de symétrie ni un point d'inflexion d'enveloppe, car le premier demi-tube de glissement ne contient pas de quadripôle. En présence de charge d'espace, on a seulement un effet défocalisant et l'inclinaison de l'ellipse (donnée par le paramètre  $\alpha$ ) à l'entrée de la machine augmente toujours avec le courant.

#### 5.4 Résultats relatifs à une énergie d'injection de 1,375 MeV

Cette valeur a été choisie en relation avec le projet d'un pré-injecteur à haute énergie (1,4 MV) mis au point en collaboration par le CERN, l'IPN de Lyon et le CEN de Saclay<sup>4)</sup>. L'énergie de 1,375 MeV correspond à l'énergie de la particule synchrone dans le 9<sup>e</sup> tube de glissement du Linac expérimental de 3 MeV. En supprimant les huit premières cellules, on obtient un nouveau linac, plus court, dont les ouvertures des tubes de glissement sont identiques à celles de la section de 1,375 à 3 MeV du Linac expérimental. Pour une acceptance de phase qui est toujours de  $2|\phi_g|$ , le paquet de particules est plus long dans le cas de ce nouveau linac.

Il résulte de ces considérations que les trois acceptances [calculées par les formules (43), (44) et (45)] seront plus grandes pour une injection à 1,375 MeV (fig. 23). D'autre part, comme on choisit les émittances remplissant toujours les acceptances, les forces de la charge d'espace dans ce nouveau linac sont toujours plus faibles que celles calculées dans la section de 1,375 à 3 MeV du Linac expérimental; en conséquence, la focalisation quadripolaire requise sera plus faible (fig. 20). Pour un faisceau de courant nul, les gradients magnétiques des quadripôles sont ceux trouvés dans la section de 1,375 à 3 MeV du Linac expérimental (fig. 20 et 9).

La figure 23 donne les paramètres de CLS à l'entrée du linac correspondant à une énergie d'injection de 1,375 MeV pour des courants de 0, 100 et 200 mA et pour les deux types de structure étudiés. A l'aide des figures 21 et 22, on peut voir que pour un courant de 200 mA le faisceau est très bien adapté.

## 6. CONCLUSION

Nous avons élaboré une méthode adaptée au traitement par ordinateur, qui permet de déterminer, en présence de charge d'espace, les paramètres de la structure focalisante d'un accélérateur linéaire et ceux du faisceau adapté pour une intensité donnée.

Cette recherche a été concrétisée par l'écriture du programme ADAPT qui fournit ces paramètres en un temps de calcul très court (15 sec sur CDC 6600 pour un courant de 200 mA dans une structure comportant dix-huit cellules).

Notre étude a en particulier montré que, pour conserver un faisceau adapté en présence des forces de charge d'espace, les gradients de champ magnétique des quadripôles doivent augmenter linéairement avec le courant accéléré (du moins pour des énergies non relativistes et des courants de quelques centaines de milliampères caractéristiques de l'injecteur du Synchrotron à protons du CERN). Nous avons d'autre part mis en évidence la diminution linéaire, en fonction du courant, des acceptances transversales, malgré l'augmentation de la focalisation; par contre, l'acceptance longitudinale se détériore davantage lorsque l'intensité augmente, sans qu'il soit possible, évidemment, d'y remédier à l'aide du dispositif de focalisation radiale : une variation de la phase synchrone vers des valeurs plus grandes en valeur absolue, jointe à une augmentation du niveau HF, permettrait éventuellement de pallier cet effet par l'accroissement de la force de rappel longitudinale.

On a aussi montré, pour une même énergie finale et une même configuration des cellules restantes, l'intérêt qu'il y a à injecter à plus haute énergie, c'est-à-dire à supprimer les premières cellules de la cavité.

Le programme ADAPT a été utilisé lors de l'étude du projet de pré-injecteur à haute énergie<sup>4)</sup> et a permis de déterminer les paramètres du système de focalisation et les acceptances du linac correspondant à une énergie d'injection de 1,375 MeV (suppression des huit premières cellules du Linac expérimental). Le programme ADAPT sera aussi utilisé pour déterminer un système de focalisation plus efficace dans la première cavité de l'injecteur actuel de 50 MeV. Enfin, ce programme peut fournir des données utiles à des programmes du type multiparticules tels que MAPRO1 et MAPRO2<sup>20)</sup>, et leur est de ce fait complémentaire.

Remerciements

Je tiens à remercier MM. A. Chabert et A. Sarazin de l'Institut de Physique nucléaire de Lyon qui m'ont accordé la possibilité et les moyens d'effectuer ce travail au CERN.

Je remercie particulièrement M. C.S. Taylor qui a bien voulu m'accueillir dans le groupe Linac, M. P. Lapostolle pour l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail et M. M. Weiss qui a suggéré et dirigé toute cette étude.

Enfin, je remercie Mmes B. Latorre, F. Morel et J. Melin pour leurs travaux de dessins et de dactylographie ainsi que Mlle S. Cohen pour son aide apportée à la présentation de ce rapport.

TRANSFERT DES ELLIPSES D'EMITTANCE LE LONG DE LA STRUCTURE

Principe

Soit  $M_0$  et  $M'_0$  deux points conjugués situés sur l'ellipse définie en  $\tau = \tau_0$  par les paramètres  $\alpha_0, \beta_0$  et  $\gamma_0$  (fig. 24a); lors d'un transfert de  $\tau_0$  à  $\tau_1$  (dont la matrice unitaire est connue) ces points se transforment en deux points  $M_1, M'_1$  conjugués sur l'ellipse d'émittance relative à l'abscisse  $\tau_1$  (fig. 24b). Les  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  de cette ellipse sont alors donnés, à partir des coordonnées  $(u_1, \dot{u}_1)$  et  $(u'_1, \dot{u}'_1)$  des points  $M_1$  et  $M'_1$ , par les relations suivantes :

$$\beta_1 = (u_1^2 + u_1'^2)/E , \quad (A.1)$$

$$\gamma_1 = (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1'^2)/E , \quad (A.2)$$

$$\alpha_1 = -(u_1\dot{u}_1' + u_1'\dot{u}_1)/E , \quad (A.3)$$

où  $E = S/\pi$  ( $S$  surface de l'ellipse).

On a aussi :

$$u_{1 \max} = \sqrt{u_1^2 + u_1'^2} , \quad (A.4)$$

$$\dot{u}_{1 \max} = \sqrt{\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1'^2} . \quad (A.5)$$

$u_{1 \max}$  est donc la valeur de l'enveloppe dans le plan de phase  $(u, \dot{u})$  à l'abscisse  $\tau = \tau_1$ .

Méthode

Dans chaque plan de phase on se donne au point d'adaptation choisi (cf. paragraphe 3.6) deux points  $M_0$  et  $M'_0$  conjugués particuliers sur l'ellipse (fig. 24a); leurs coordonnées sont exprimées, à partir des  $\alpha_0, \beta_0$  et  $\gamma_0$ , par des relations simples (fig. 24a).

Les points  $M_0$  et  $M'_0$  sont transférés à l'entrée du linac, permettant ainsi de déterminer les paramètres d'entrée du faisceau : les matrices de transfert des éléments de structure mis en jeu sont identiques à celles définies au paragraphe 3.4.1, à condition de prendre tous les  $\Delta\tau$  négatifs.

Les points  $M_e$  et  $M'_e$  ainsi obtenus sont ensuite transférés dans chaque plan de phase jusqu'à la fin du linac, et l'on peut alors déterminer les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  aux extrémités des éléments de structure, ainsi que les enveloppes horizontale, verticale et longitudinale du faisceau à l'aide des formules précédentes (A.1 à A.5).

CALCUL NUMERIQUE DES INTEGRALES ELLIPTIQUES  
INTERVENANT DANS LE CALCUL DES FORCES DE CHARGE D'ESPACE

D'après la relation (15), on a :

$$I_X = \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{3/2} (b^2 + \lambda)^{1/2} (c^2 + \lambda)^{1/2}} . \quad (\text{A.6})$$

Cette intégrale est du type "elliptique" et sa valeur ne peut être calculée que numériquement. Nous utilisons ici la méthode d'approximation de Gauss<sup>21)</sup>.

Effectuons le changement de variable suivant afin de ramener l'intégration entre -1 et 1 :

$$\lambda = \frac{1+t}{1-t} , \quad d\lambda = \frac{2dt}{(1-t)^2} . \quad (\text{A.7})$$

$I_X$  s'écrit alors :

$$I_X = \int_{-1}^1 g(t) dt , \quad (\text{A.8})$$

avec :

$$g(t) = \frac{2}{(1-t)^2 \left(a^2 + \frac{1+t}{1-t}\right)^{3/2} \left(b^2 + \frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2} \left(c^2 + \frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2}} .$$

La méthode de Gauss approche cette dernière intégrale par une somme de N termes<sup>21)</sup> :

$$S_X = \sum_1^N w_i g(t_i) . \quad (\text{A.9})$$

Les  $w_i$  et  $t_i$  sont respectivement les "poids" et les "noeuds" de la "formule d'intégration de Gauss à N points" dans l'intervalle  $[-1,1]$ ; pour une valeur de N fixée, ces 2 N coefficients sont donnés dans des tables<sup>22)</sup>.

A l'aide du précédent changement de variable (A.7), on obtient les coefficients  $W_i$  et  $T_i$  dans l'intervalle d'intégration  $[0, +\infty [$  de la fonction  $f(\lambda)$  définie en (A.6).

$$W_i = \frac{2w_i}{(1 - t_i)^2}, \quad T_i = \frac{1 + t_i}{1 - t_i}. \quad (\text{A.10})$$

Et donc :

$$S_X = \sum_1^N W_i \cdot f(T_i). \quad (\text{A.11})$$

Comme les valeurs des  $t_i$  sont symétriques par rapport à zéro, d'après les relations (A.10) les  $T_i$  seront inverses par rapport à l'unité (fig. 25).

#### Influence de la valeur des paramètres a, b, c

Etudions l'intégrale  $J_X = abcI_X$ . En y effectuant le changement de variable  $\mu = \lambda/\alpha$ , on montre que la valeur de  $J_X$  reste inchangée si l'on multiplie les paramètres  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  par une même constante  $\alpha$ . Par contre, l'approximation de  $J_X$  par une somme finie de  $N$  termes ne sera valable que si les paramètres  $a^2$ ,  $b^2$  et  $c^2$  sont encadrés dans la mesure du possible par le même nombre de  $T_i$  (fig. 25). Ces valeurs devront être prises proches de l'unité. Aussi a-t-on choisi pour  $\alpha$  la valeur moyenne de ces trois paramètres :

$$\alpha = (a^2 + b^2 + c^2)/3. \quad (\text{A.12})$$

Dans notre cas, les trois dimensions de l'ellipsoïde sont du même ordre (le rapport maximum entre deux de ces dimensions n'excède pas 3) et dix "points gaussiens" sont suffisants pour la précision de notre calcul.

Dans le cas où l'une des dimensions de l'ellipsoïde est très différente des deux autres, on est conduit à effectuer une normalisation différente pour chaque intégrale  $I_X$ ,  $I_Y$  ou  $I_Z$ .

REFERENCES

- 1) J. Huguenin, U. Tallgren et M. Weiss, Preliminary study of a higher-energy pre-injector for the CERN PS, *in* Proc. Conf. on Proton Linear Accelerator, Brookhaven, 1968 (BNL, Upton, NY, 1968), p. 269.
- 2) A. Chabert, Tran Duc Tien et G. Voisin, Heavy ion linear accelerator project of Lyon, *in* Proc. Int. Conf. on Nuclear Reactions Induced by Heavy Ions, Heidelberg, 1969 (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- 3) J. Huguenin, G. Visconti, R. Salin, B. Desforges, R. Dubois, R. El-Bez et J. Knott, Tenue à 1,4 MV d'électrodes en alliage de titane en fonction de la distance, rapport CERN/MPS/LIN. 70-6 (1970).
- 4) P. Bernard, J. Huguenin, U. Tallgren et M. Weiss, Avant-projet d'un pré-injecteur à haute énergie, rapport CERN/MPS/LIN. 70-2 (1970).
- 5) E.D. Courant et H.S. Snyder, Theory of the alternating gradient synchrotron, *Ann. Phys.* 3, 1 (1958).
- 6) P. Lapostolle, Introduction à l'étude des accélérateurs linéaires, rapport CERN 66-20 (1966), p. 50.
- 7) P. Lapostolle, Effets de la charge d'espace dans un accélérateur linéaire à protons, rapport CERN AR-SG/65-15 (1965).
- 8) S. Ohnuma, Space-charge effects on the quadrupole focusing system in low-energy proton linear accelerators, *Yale Int. Rpt.* Y-17 (1967).
- 9) I. Kapchinskij et V. Vladimirkij, Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator associated with the beam space charge, *in* Proc. Conf. on High-Energy Accelerators and Instrumentation, Genève, 1959 (CERN, Genève, 1959), p. 274.
- 10) B. Bru, ACCEPT, Programme pour le calcul de l'acceptance du Linac, rapport CERN/MPS/Int. LIN 69-5 (1969).
- 11) H. Brück, Accélérateurs circulaires de particules (Presses Universitaires de France, Paris, 1966).
- 12) J.E. Stovall, Selection of quadrupole strengths for drift tube linac, *Los Alamos Rpt.* MP-3-38 (1968).
- 13) O.D. Kellogg, Foundations of potential theory (Dover Publ., New York, 1953), p. 192.
- 14) A. Chabert, M. Martini, M. Promé et B. Veyron, Comparaison de deux méthodes d'étude de la dynamique des ions dans un accélérateur linéaire, *in* C.R. Session d'études sur la physique et la production des ions lourds, La Plagne, 1969 (IPN, Lyon, 1969 : rapport LYCEN 6913), p. V-3.

- 15) H.G. Hereward et K. Johnsen, Alternating gradient focusing in linacs : computational results, *in* Proc. CERN Symposium on High-Energy Accelerators and Pion Physics, Genève, 1956 (CERN, Genève, 1956), Vol. 1, p. 167.
- 16) H.G. Hereward, Effects of quadrupoles in the CPS, rapport CERN MPS/Int. DL 63-9 (1963).
- 17) L. Smith et R.L. Gluckstern, Focusing in linear ion accelerators, Rev. Sci. Instrum. 26, No 2, 220 (1955).
- 18) CERN Computer 6000 Series FORTRAN (3<sup>e</sup> partie), 1970.
- 19) CERN Computer 6000 Series FORTRAN (4<sup>e</sup> partie), 1970.
- 20) M. Martini et M. Promé, Beam dynamics in a proton linac with space charge, rapport CERN/MPS/LIN 69-16 (1969).
- 21) H. Margenau et G.M. Murphy, The mathematics of physics and chemistry (D. Van Nostrand Co. New York, 1952), p. 462.
- 22) A.H. Stroud et D. Secrest, Gaussian quadrature formulas (Prentice Hall, Englewoods Cliff, N.J., 1966).

FIG.1: Linéarisation du mouvement longitudinal

(Plan de phase  $[\Delta\psi, \Delta W]$ )

$\psi, W$  : phase et énergie d'une particule

$\psi_s, W_s$  : phase et énergie de la particule synchrone

$$\Delta\psi = \psi - \psi_s$$

$$\Delta W = W - W_s$$

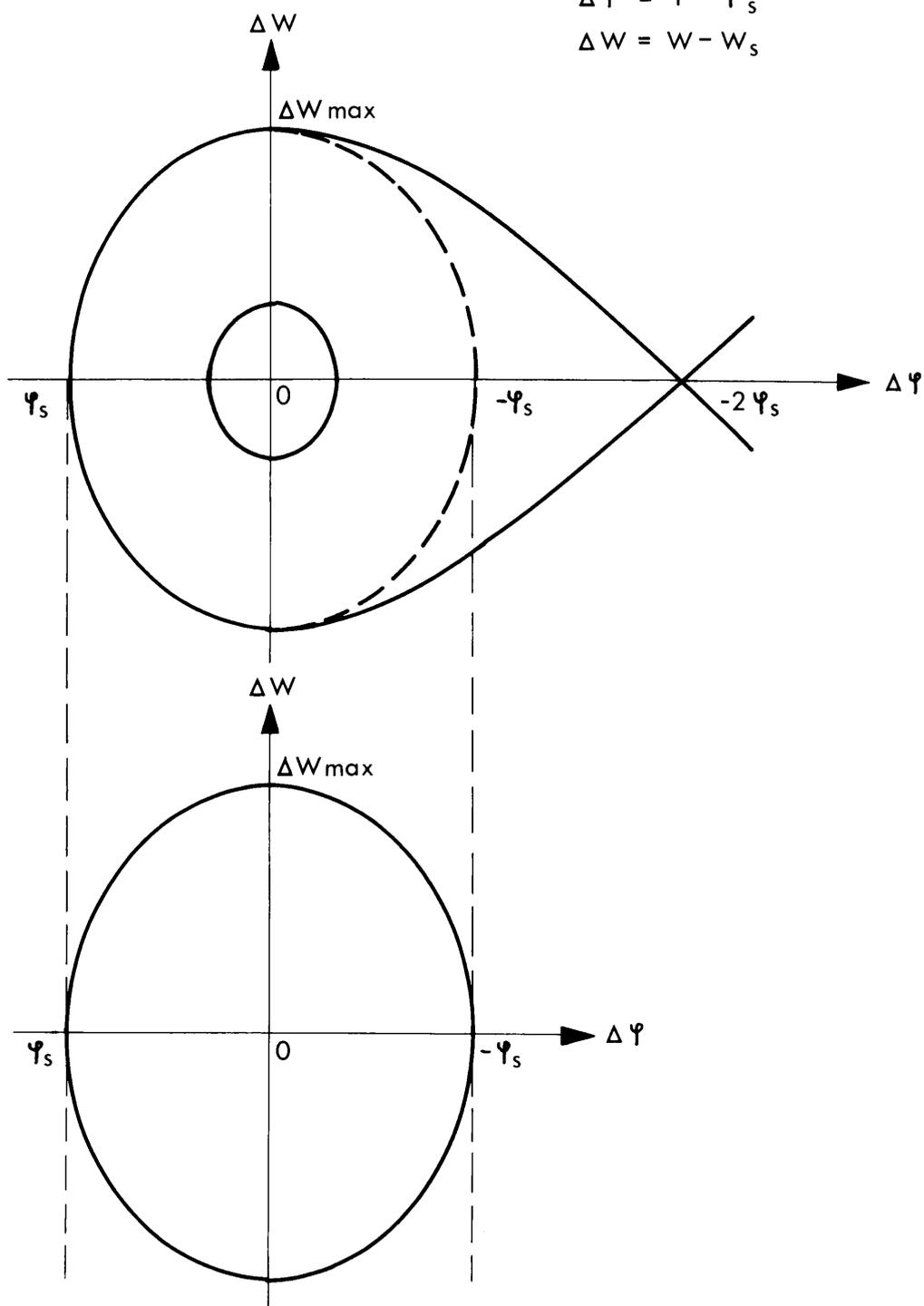


FIG. 2: Structure du Linac (sans charge d'espace)

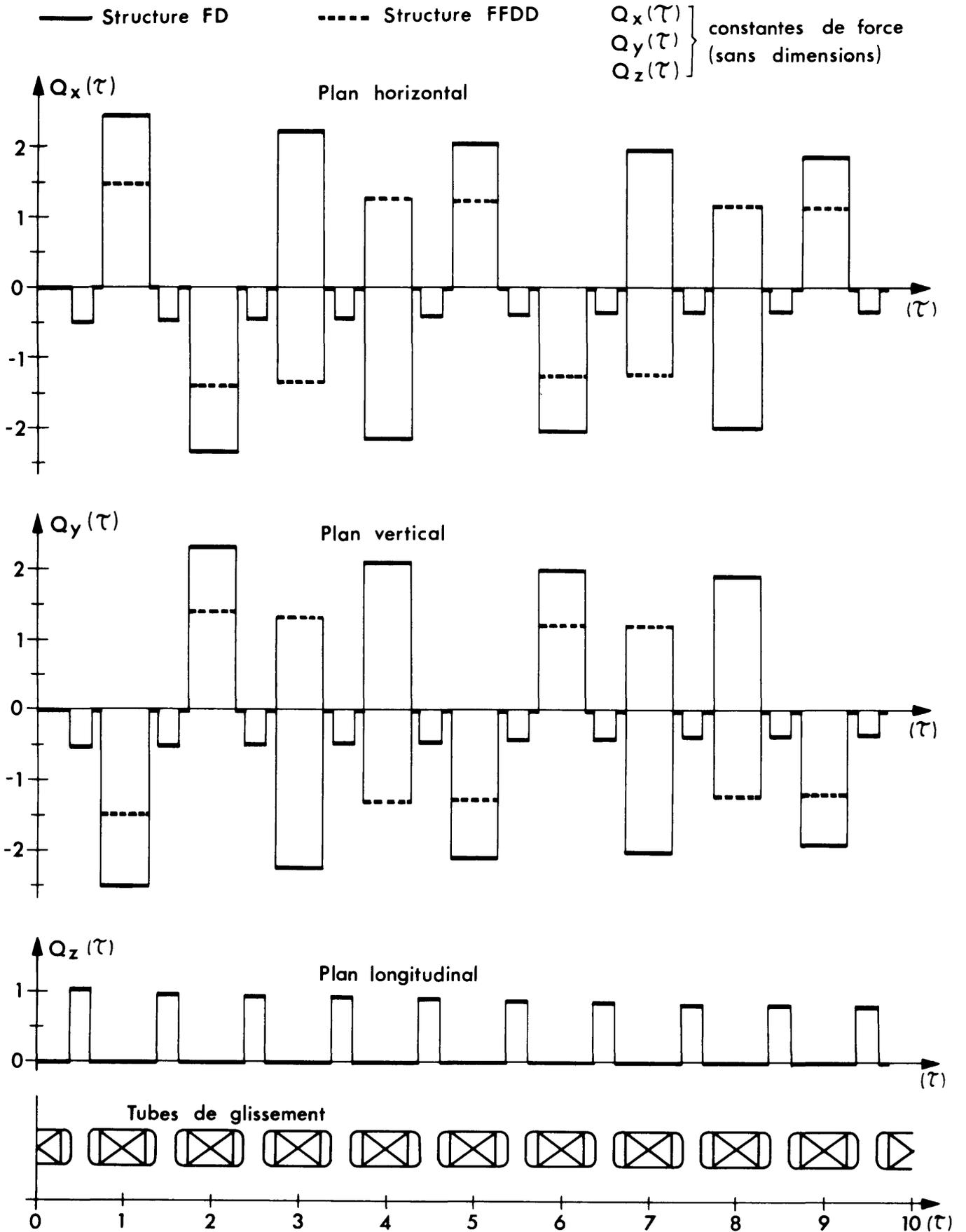


FIG. 3: Partage de la cellule en huit éléments

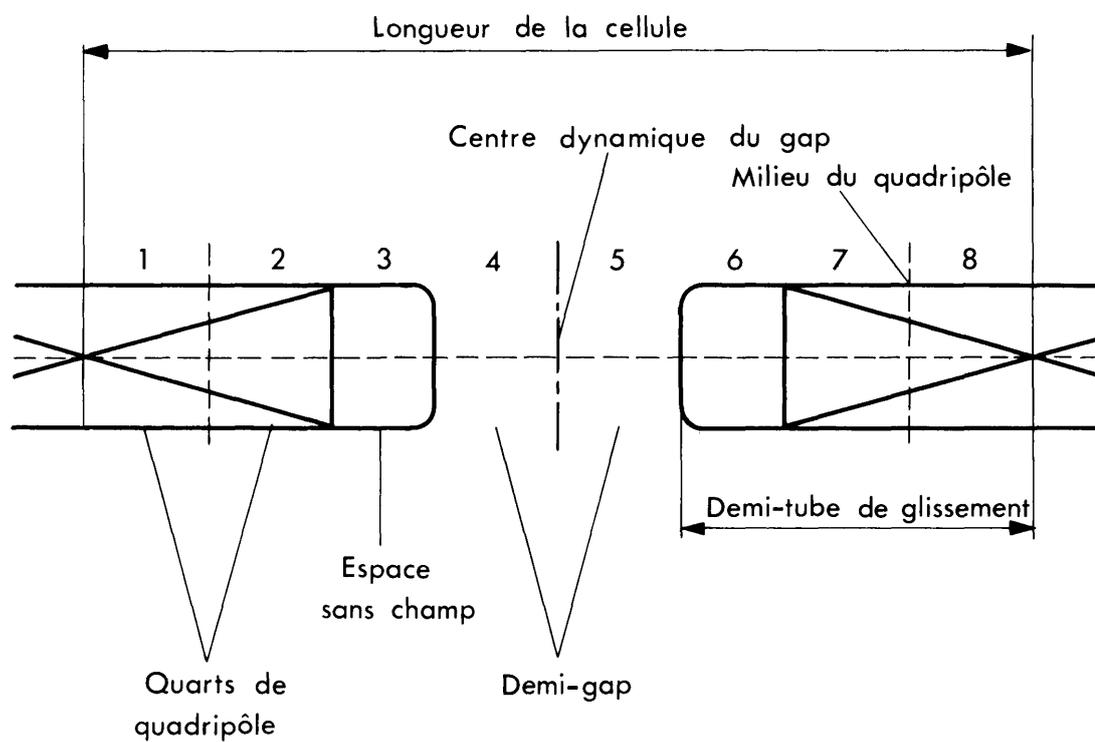


FIG. 4 : Principales étapes du calcul

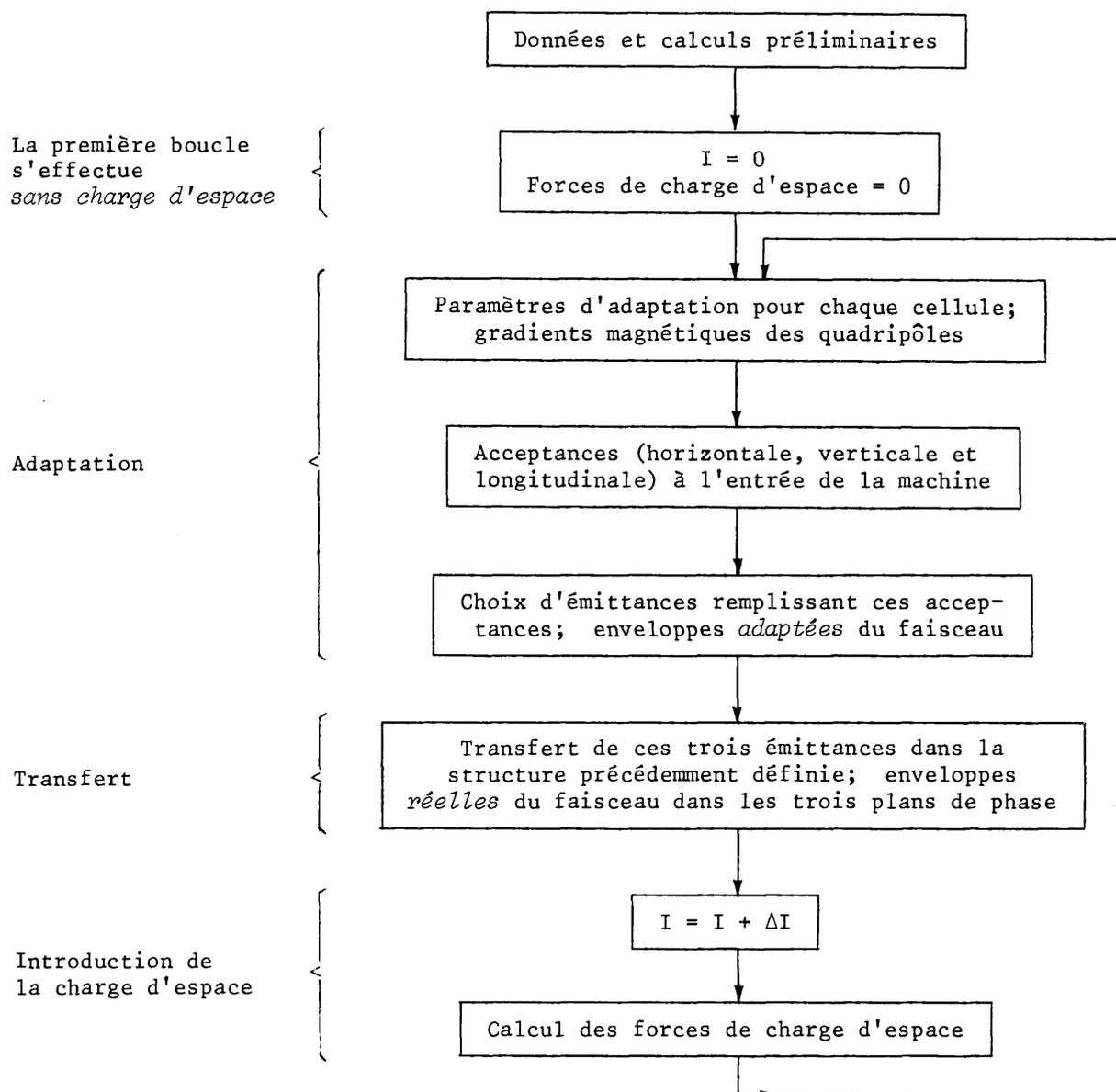


FIG.5: Enveloppes rendues symétriques pour le calcul de la structure

— Enveloppe symétrique horiz.      **==** Enveloppes réelles  
 - - - Enveloppe symétrique vert.       $(M_H), (M_V), (M'_H)$  Matrices de transfert

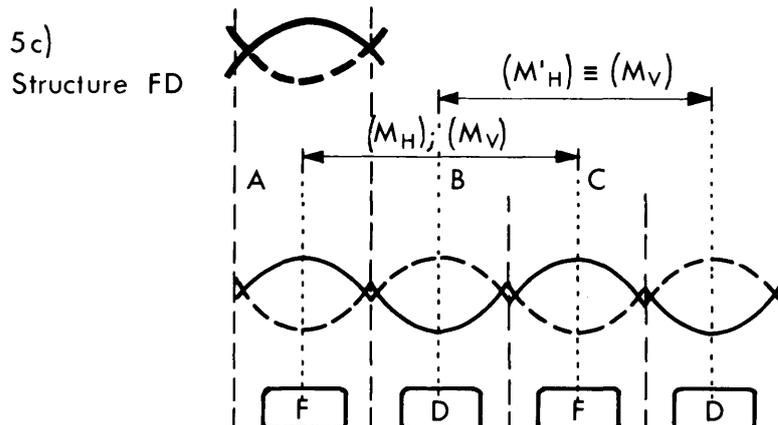
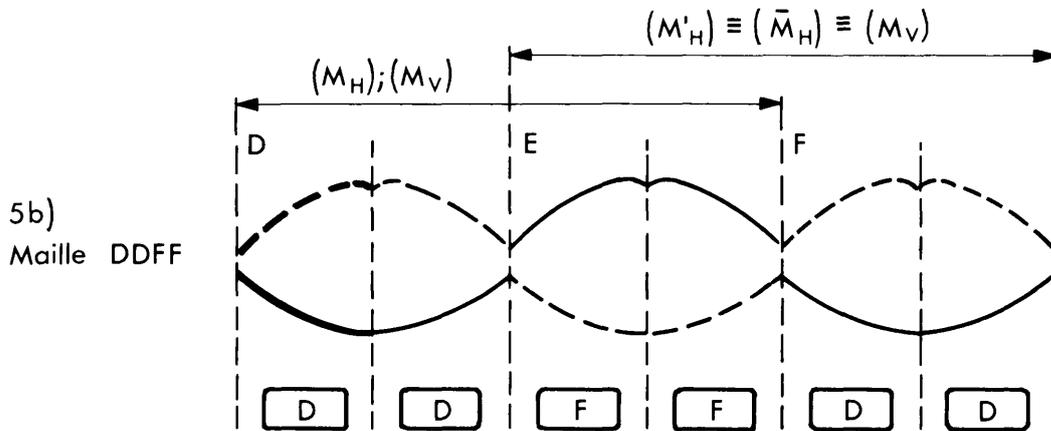
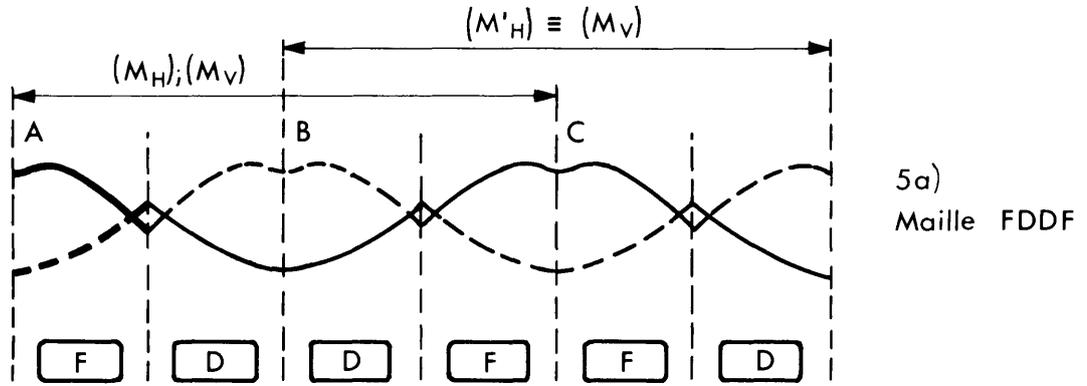


FIG. 6 : Gradients magnétiques des quadripôles pour différents courants I du faisceau  
(Energie d'injection : 520 keV)

Les gradients sont donnés ici, dans le plan horizontal, en Tesla/m; dans le plan vertical, ils changent simplement de signe.

No du quadripôle	Structure FD			Structure FFDD		
	I = 0	I = 100 mA	I = 200 mA	I = 0	I = 100 mA	I = 200 mA
1	-97,36	-105,19	-113,11	-58,97	-65,88	-73,40
2	86,22	93,35	100,54	52,05	58,20	64,92
3	-77,35	-83,91	-90,53	46,60	52,22	58,37
4	71,36	77,48	83,60	-43,09	-48,48	-54,37
5	-65,51	-71,27	-76,99	-39,63	-44,65	-50,06
6	60,57	65,93	71,17	36,67	41,30	46,21
7	-56,19	-61,32	-66,27	34,11	38,73	43,56
8	52,78	57,63	62,30	-32,13	-36,92	-41,95
9	-49,09	-53,72	-58,19	-29,95	-34,63	-39,48
10	44,99	49,24	53,40	27,33	31,55	35,77
11	-42,37	-46,38	-50,38	25,78	29,79	33,78
12	39,81	43,62	47,43	-24,26	-28,13	-32,04
13	-37,59	-41,25	-44,90	-22,95	-26,61	-30,38
14	35,66	39,16	42,63	21,80	25,21	28,81
15	-33,64	-37,03	-40,33	20,59	23,88	27,36
16	32,06	35,30	38,29	-19,64	-22,92	-26,36
17	-30,44	-33,61	-36,57	-18,66	-21,84	-25,10
18	29,22	32,23	35,03	17,92	20,95	24,00

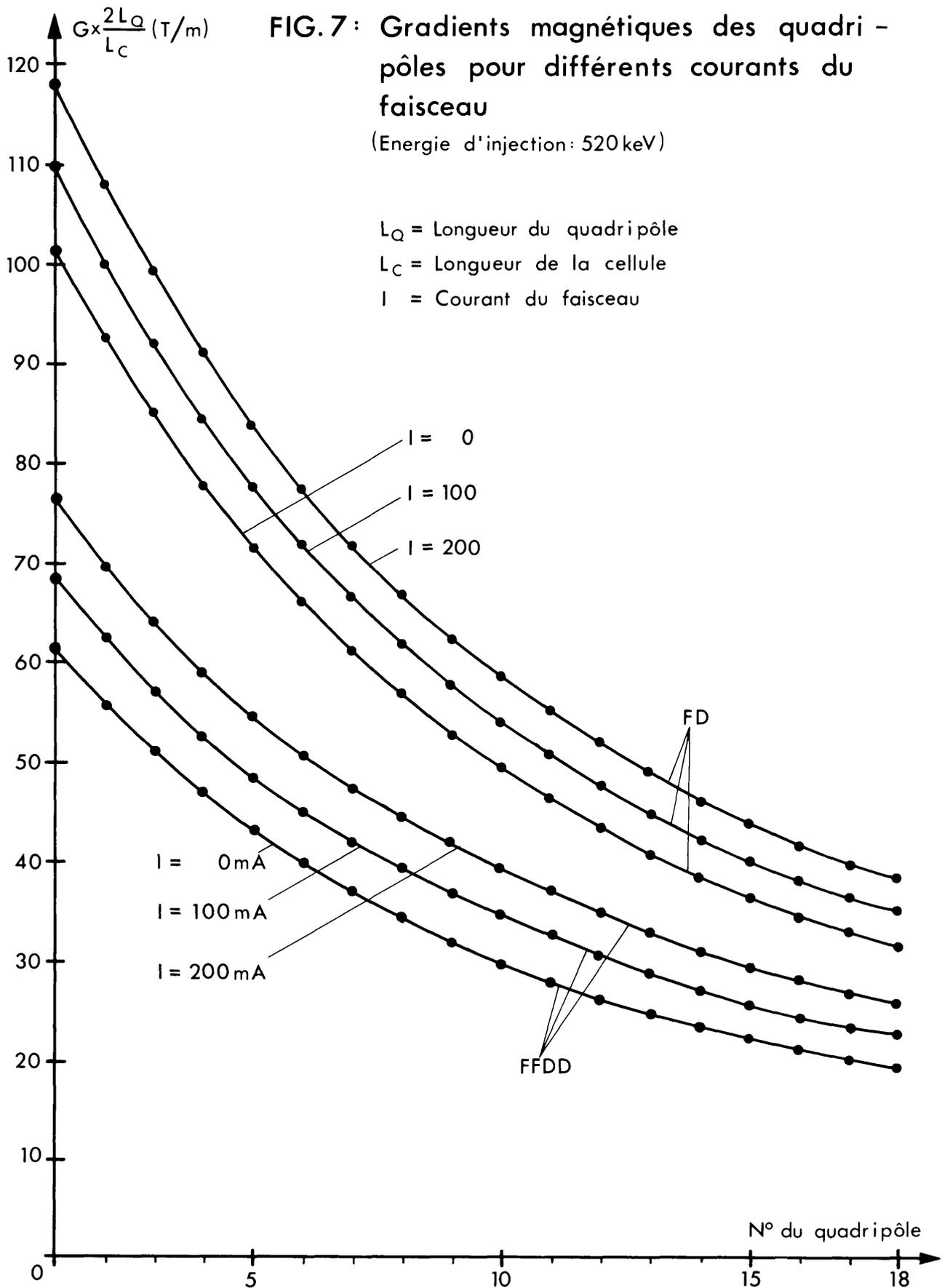


FIG. 8 : Loi de variation (en  $\beta^{-n}$ ) des gradients magnétiques des quadripôles (Energie d'injection: 520 keV).

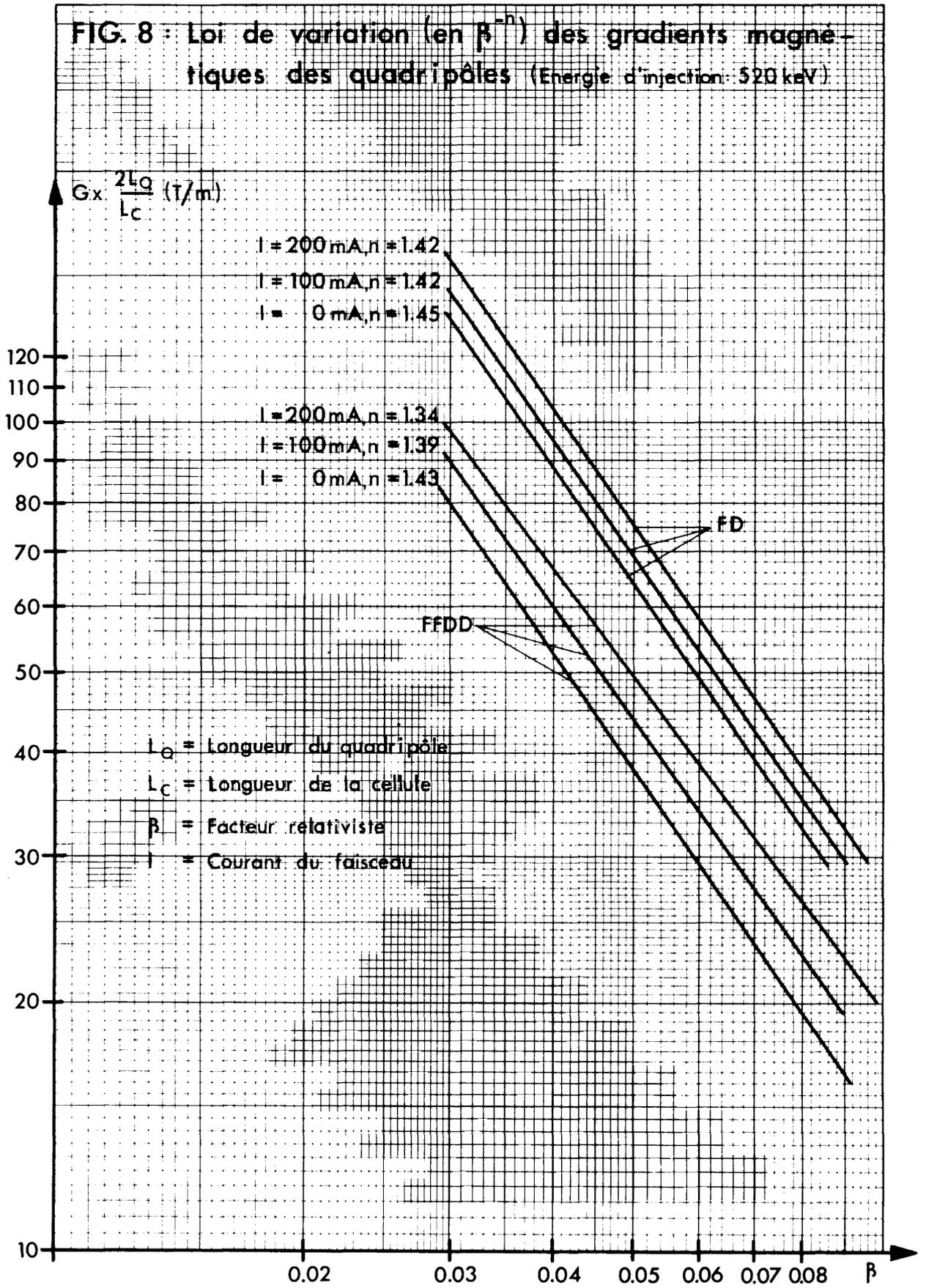


FIG. 9 : Gradients magnétiques des 1<sup>er</sup>, 9<sup>ème</sup> et 18<sup>ème</sup> quadripôles en fonction du courant I du faisceau  
(Energie d'injection: 520 keV)

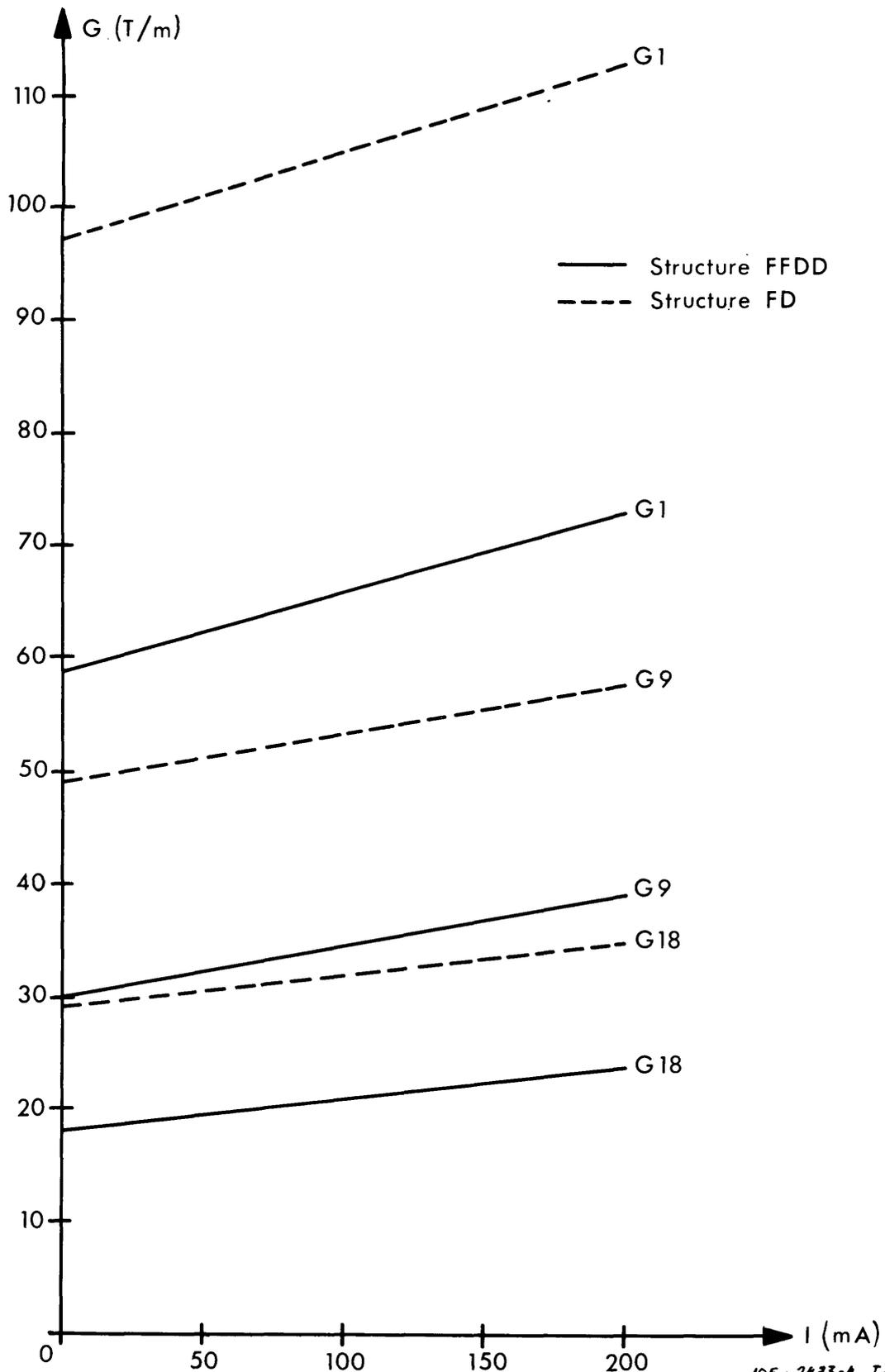


FIG. 10

Enveloppes issues du transfert d'un faisceau adapté  
aux points A, B, C (B et C sont des minima)

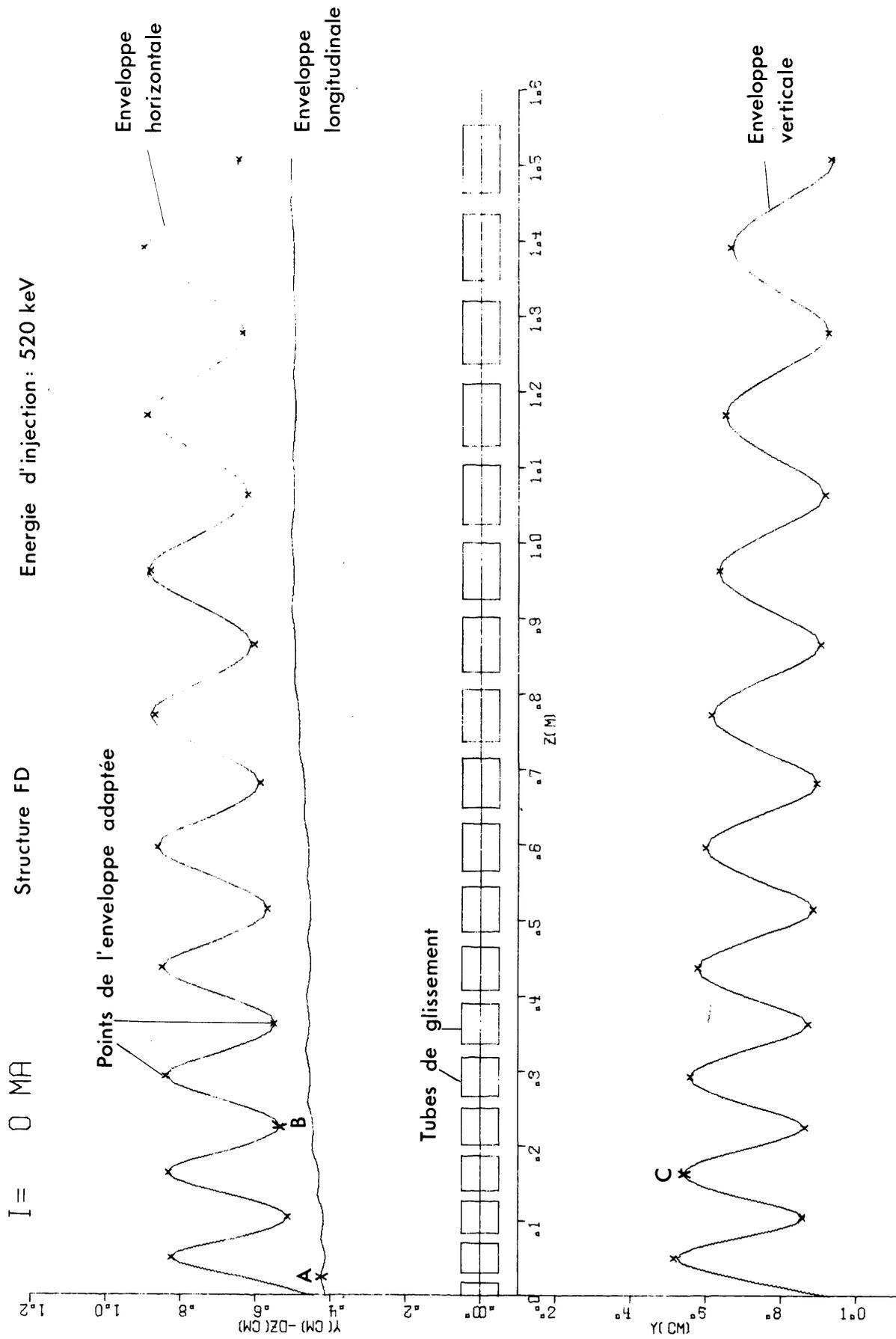


FIG. 11

Enveloppes issues du transfert d'un faisceau adapté  
aux points A, B, C (B et C sont des minima)

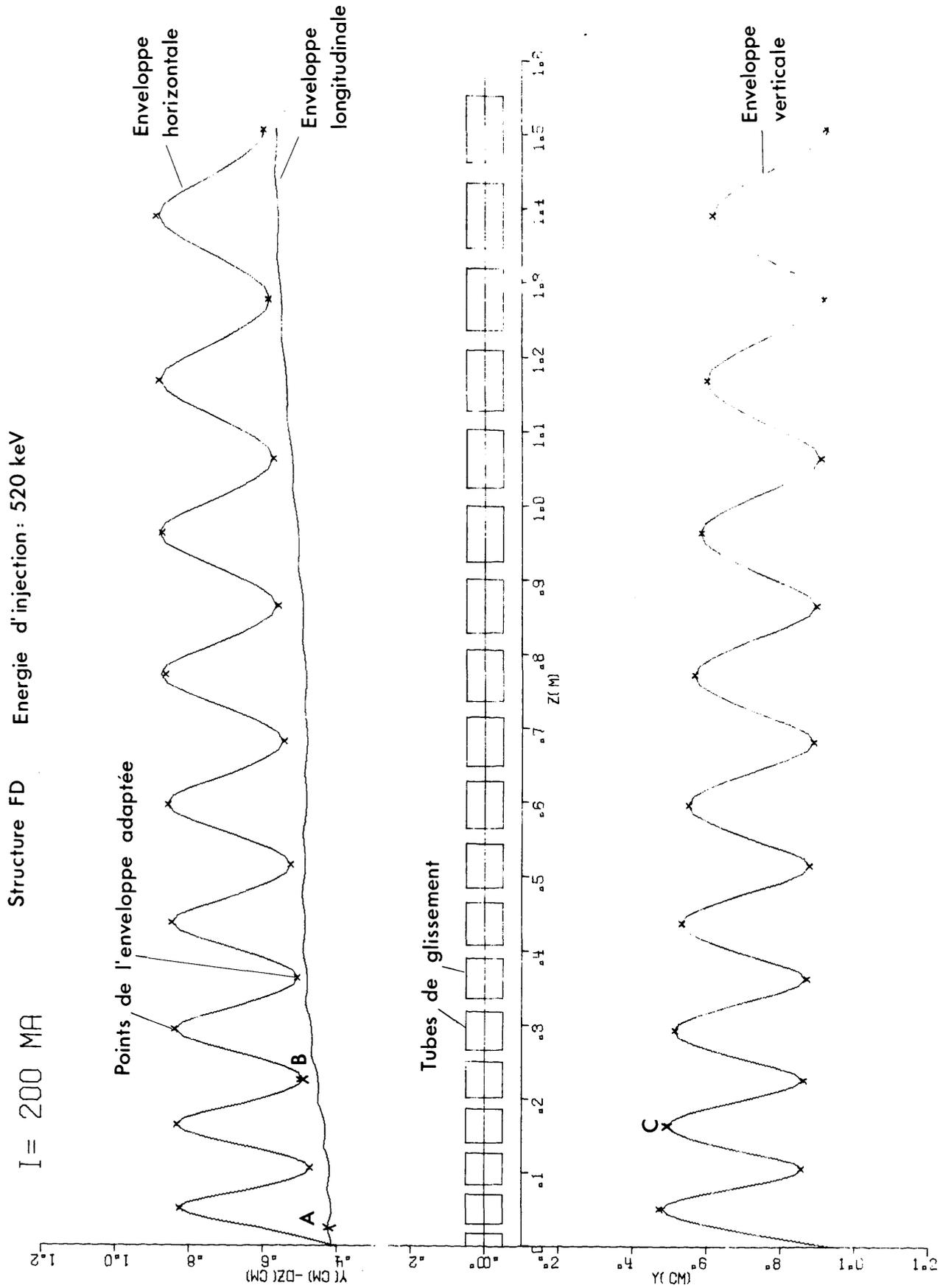


FIG. 12

Enveloppes issues du transfert d'un faisceau adapté  
aux points A, B, C (B et C sont des minima)

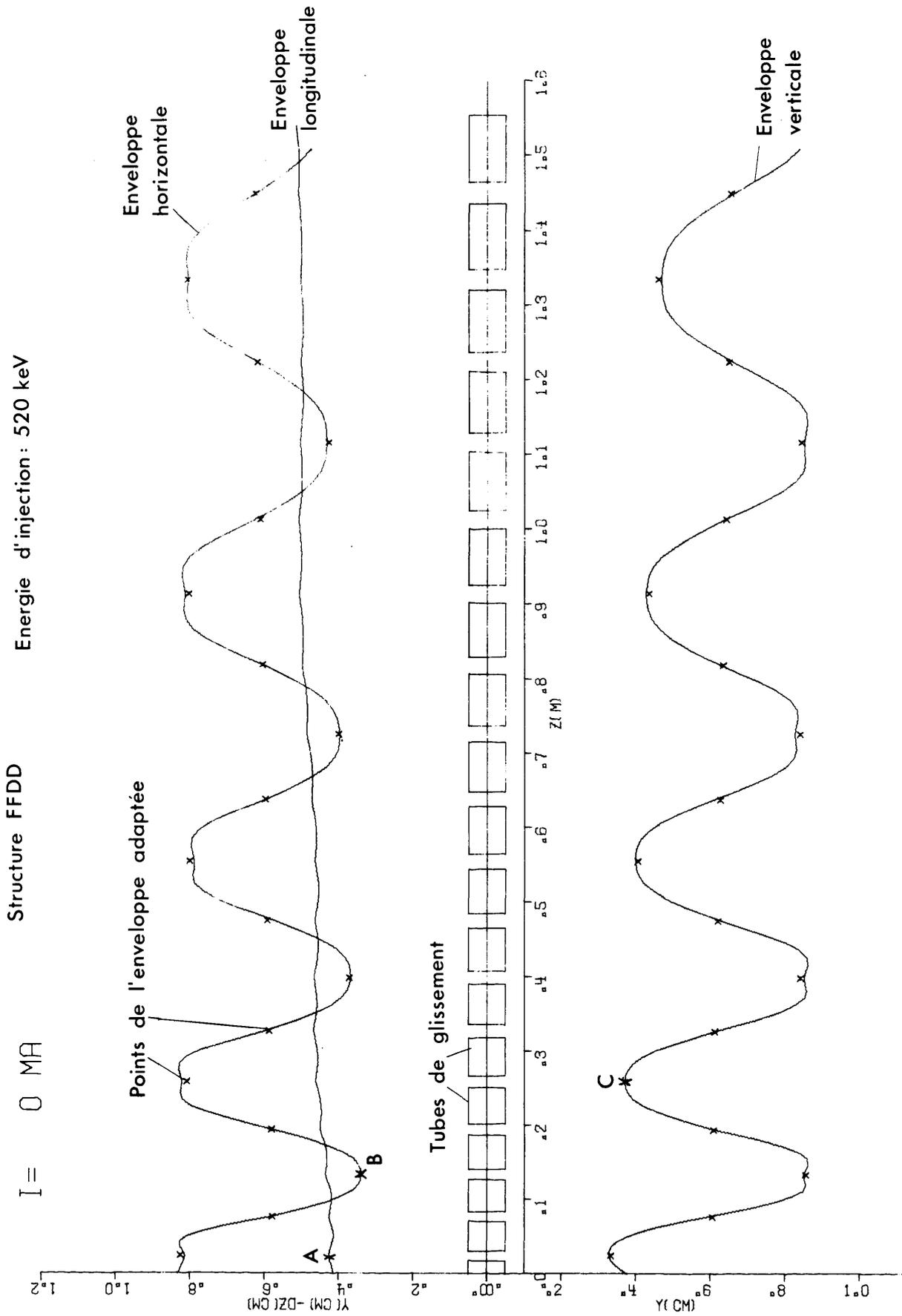


FIG. 13

Enveloppes issues du transfert d'un faisceau adapté  
aux points A, B, C (B et C sont des minima)

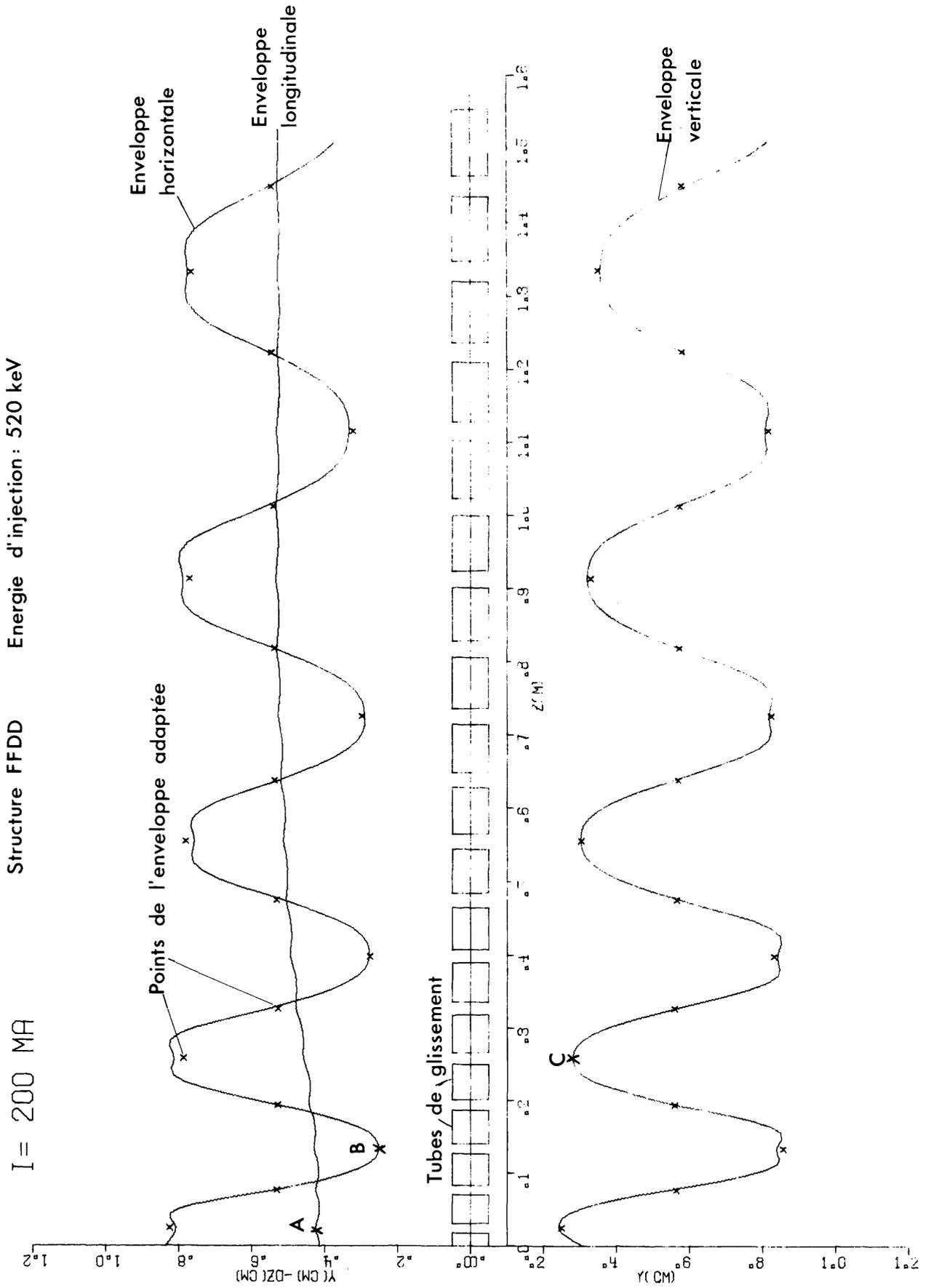


FIG. 14

Enveloppes issues du transfert d'un faisceau adapté  
aux points A, D, E (D et E sont des maxima)

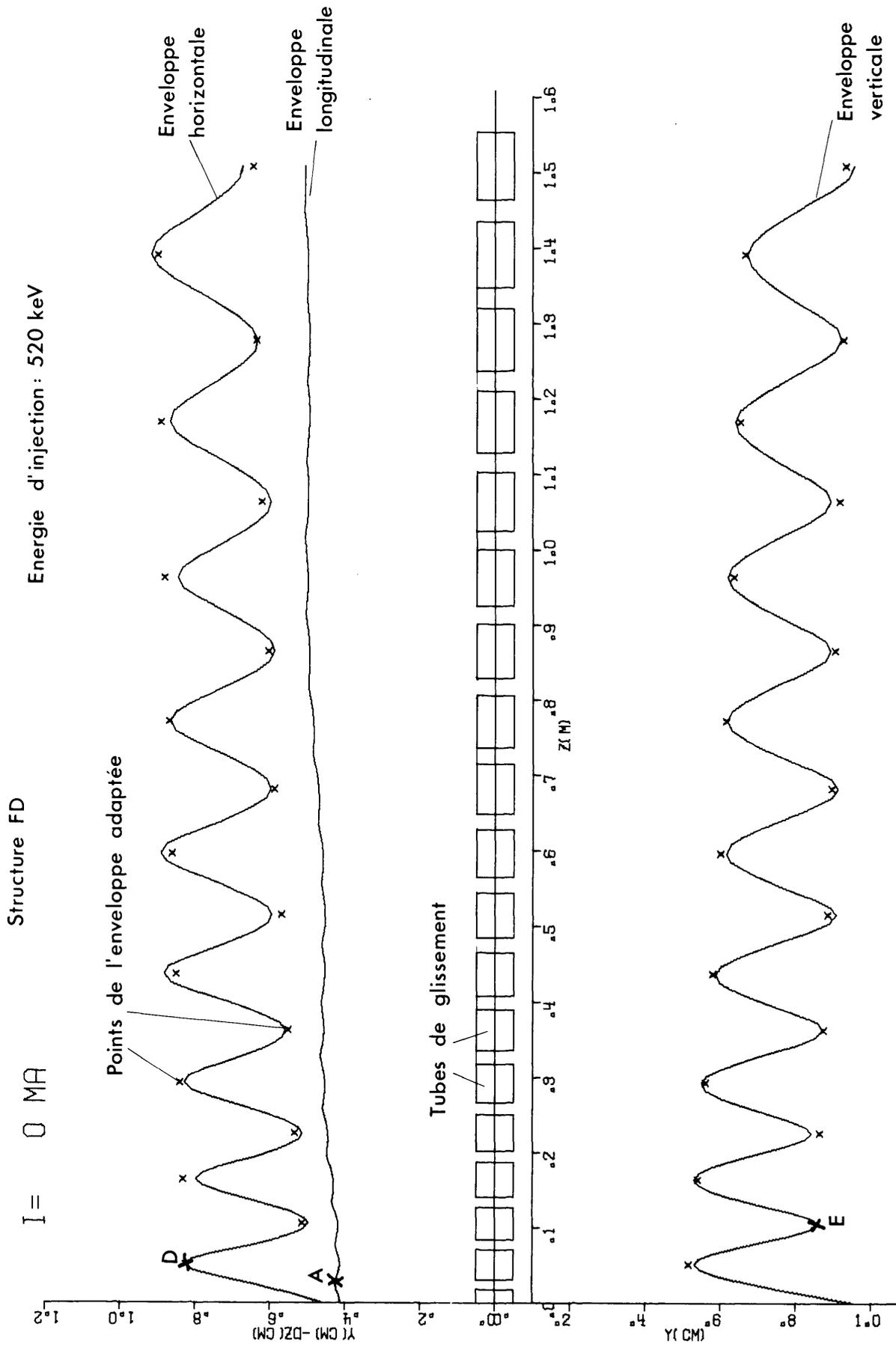
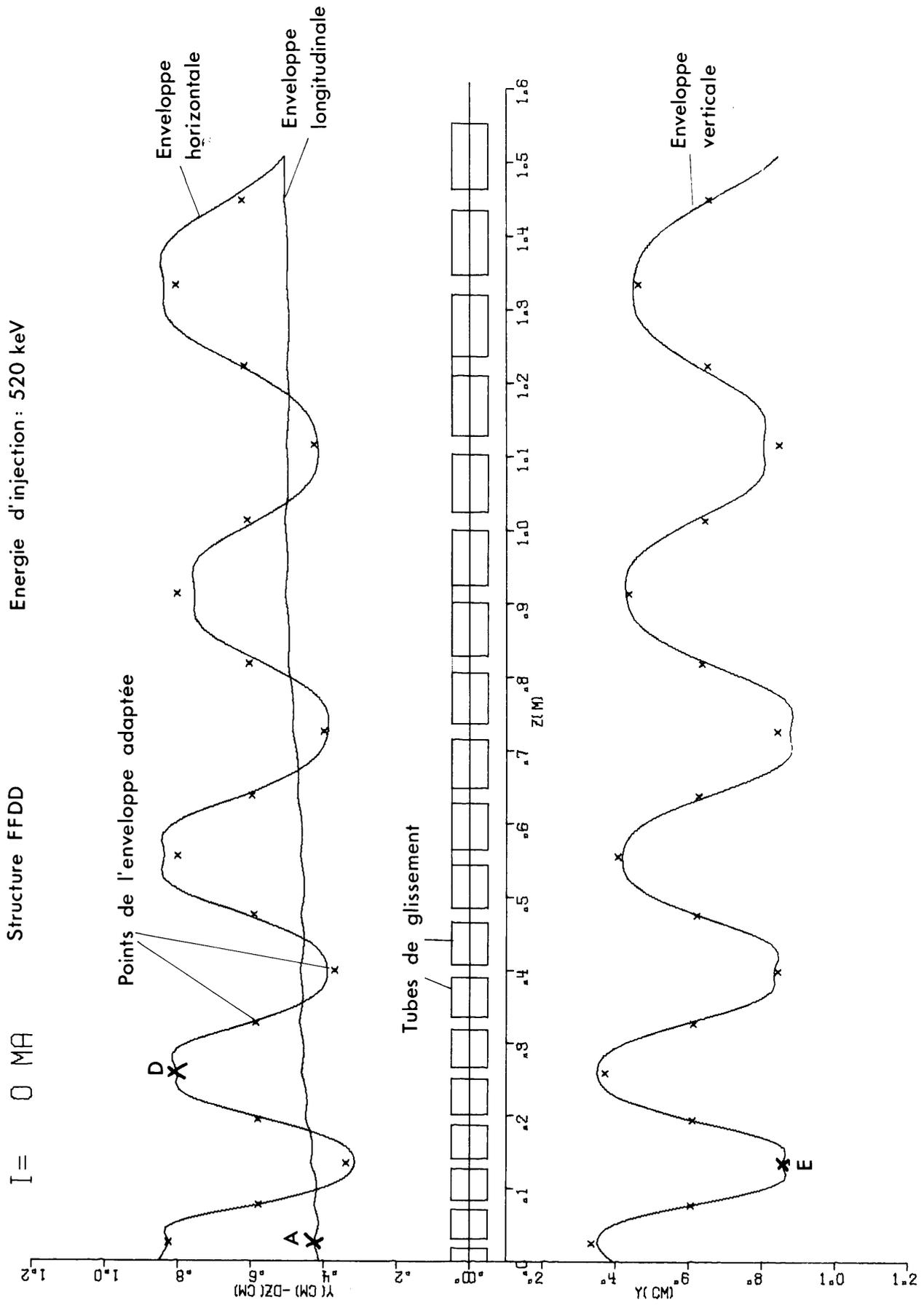


FIG. 15

Enveloppes issues du transfert d'un faisceau adapté  
aux points A, D, E (D et E sont des maxima)



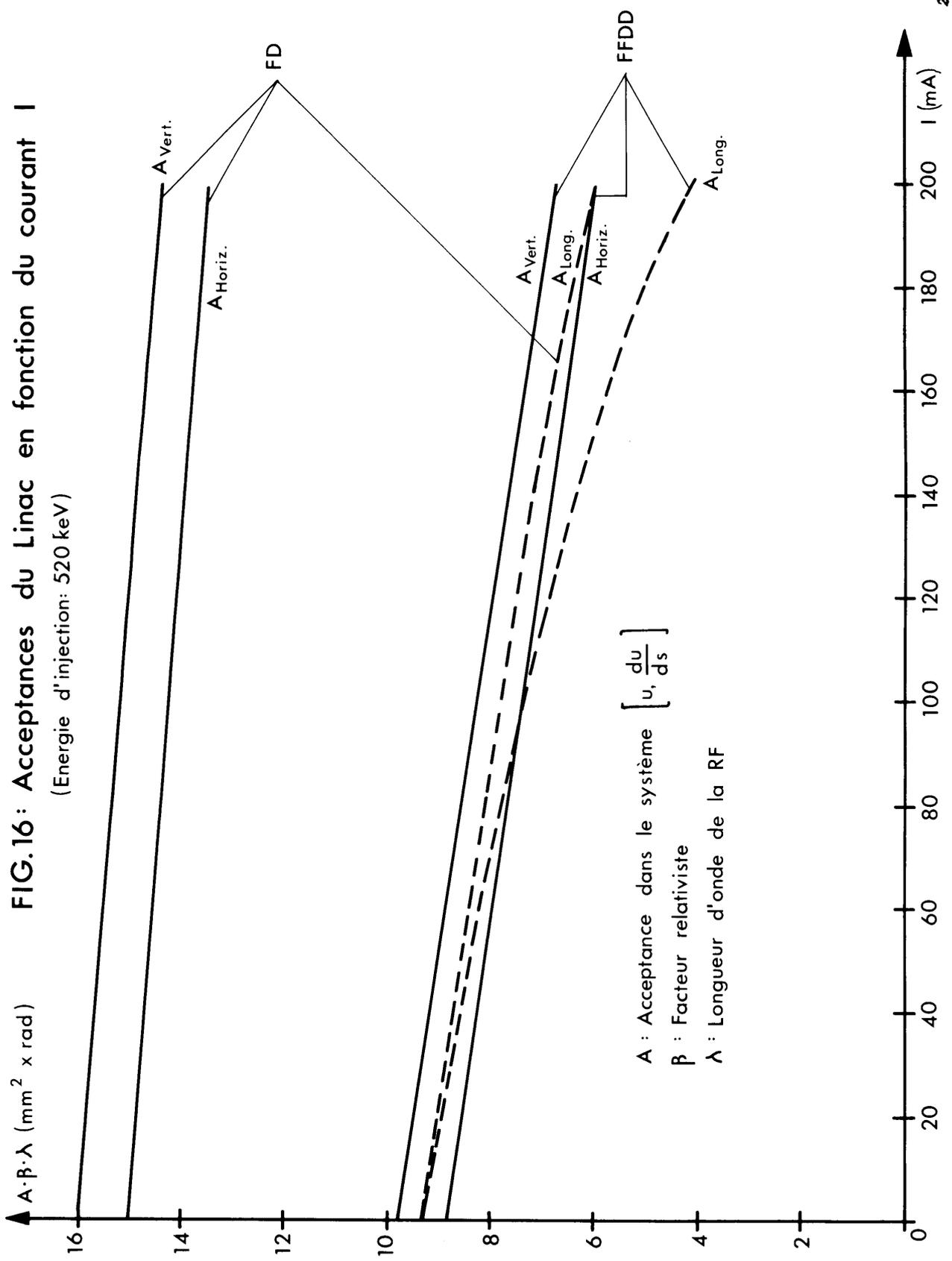


FIG. 17 : Paramètres du faisceau à l'entrée du linac pour différents courants I  
(Energie d'injection : 520 keV)

- $\beta$  facteur relativiste à l'entrée.  
 $\lambda$  longueur d'onde de la RF.  
 $A$  acceptance à l'entrée dans le système  $[u, (du/ds)]$  ( $u \equiv x, y$  ou  $z$ ).  
 $\bar{\beta}, \alpha$  paramètres de CLS à l'entrée dans ce même système.

	Structure FD		
	I = 0	I = 100 mA	I = 200 mA
A • $\beta\lambda$ [mm <sup>2</sup> ]	Hor.	14,98	13,55
	Vert.	15,98	14,46
	Long.	9,26	5,94
$\alpha$	Hor.	-0,98	-1,04
	Vert.	3,10	3,97
	Long.	0	0
$\bar{\beta}/\beta\lambda$	Hor.	1,90	1,82
	Vert.	5,68	5,97
	Long.	2,34	2,74
Env. [mm]	Hor.	4,43	4,02
	Vert.	9,31	9,38
	Long.	4,13	4,13

	Structure FFDD		
	I = 0	I = 100 mA	I = 200 mA
	8,83	7,38	5,95
	9,74	8,22	6,69
	9,26	7,34	4,19
	0,450	0,733	1,183
	0,596	0,759	0,985
	0	0	0
	7,83	8,03	8,62
	1,47	1,81	1,76
	1,84	2,55	2,86
	8,31	8,33	8,35
	3,78	3,44	3,10
	4,13	4,13	4,13

FIG.18 : Paramètres d'adaptation du faisceau à l'entrée du Linac en fonction du courant I. Structure FD (Energie d'injection : 520 keV)

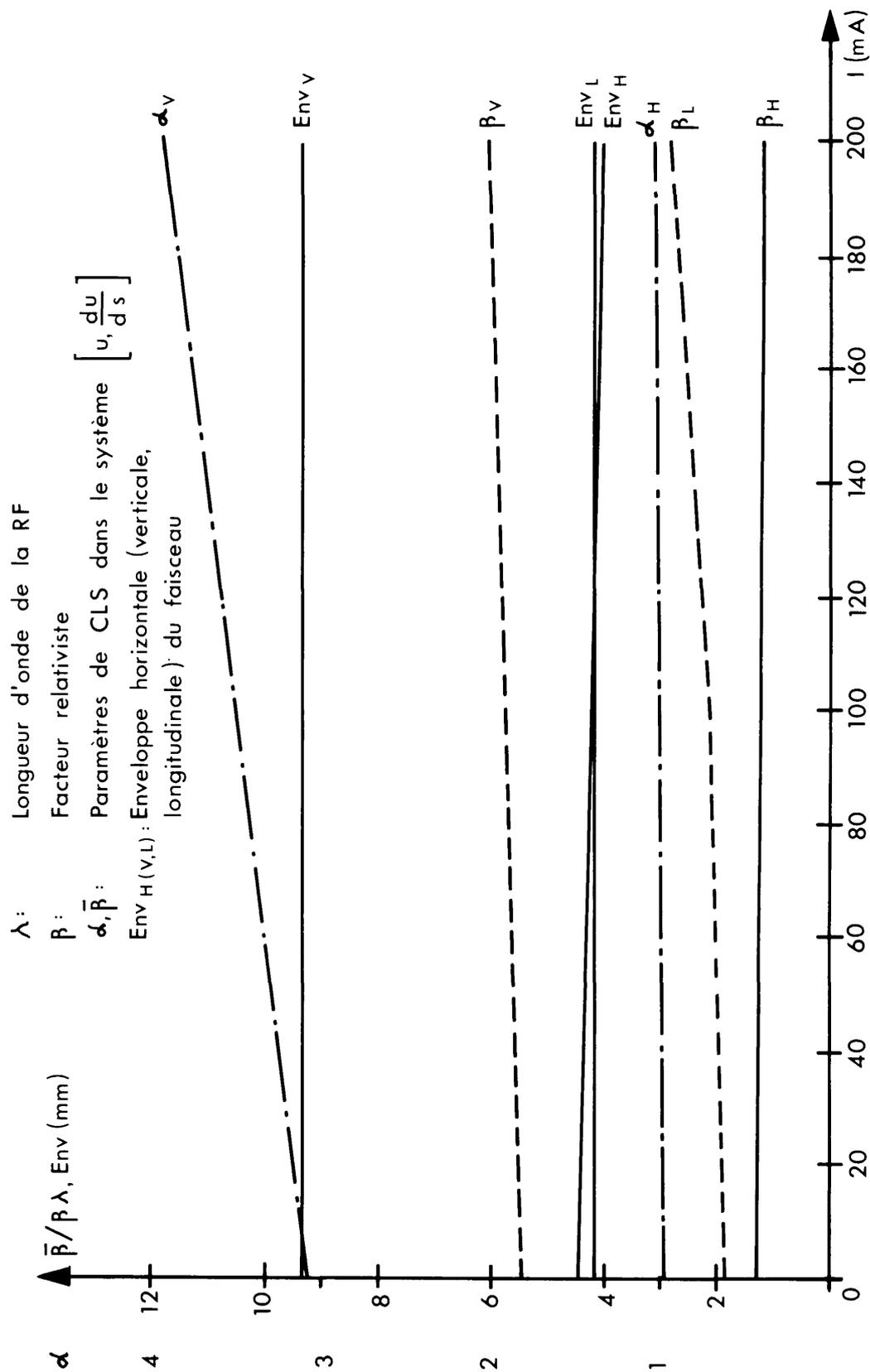


FIG.19 : Paramètres d'adaptation du faisceau à l'entrée du Linac en fonction du courant I. Structure FFDD (Energie d'injection: 520keV)

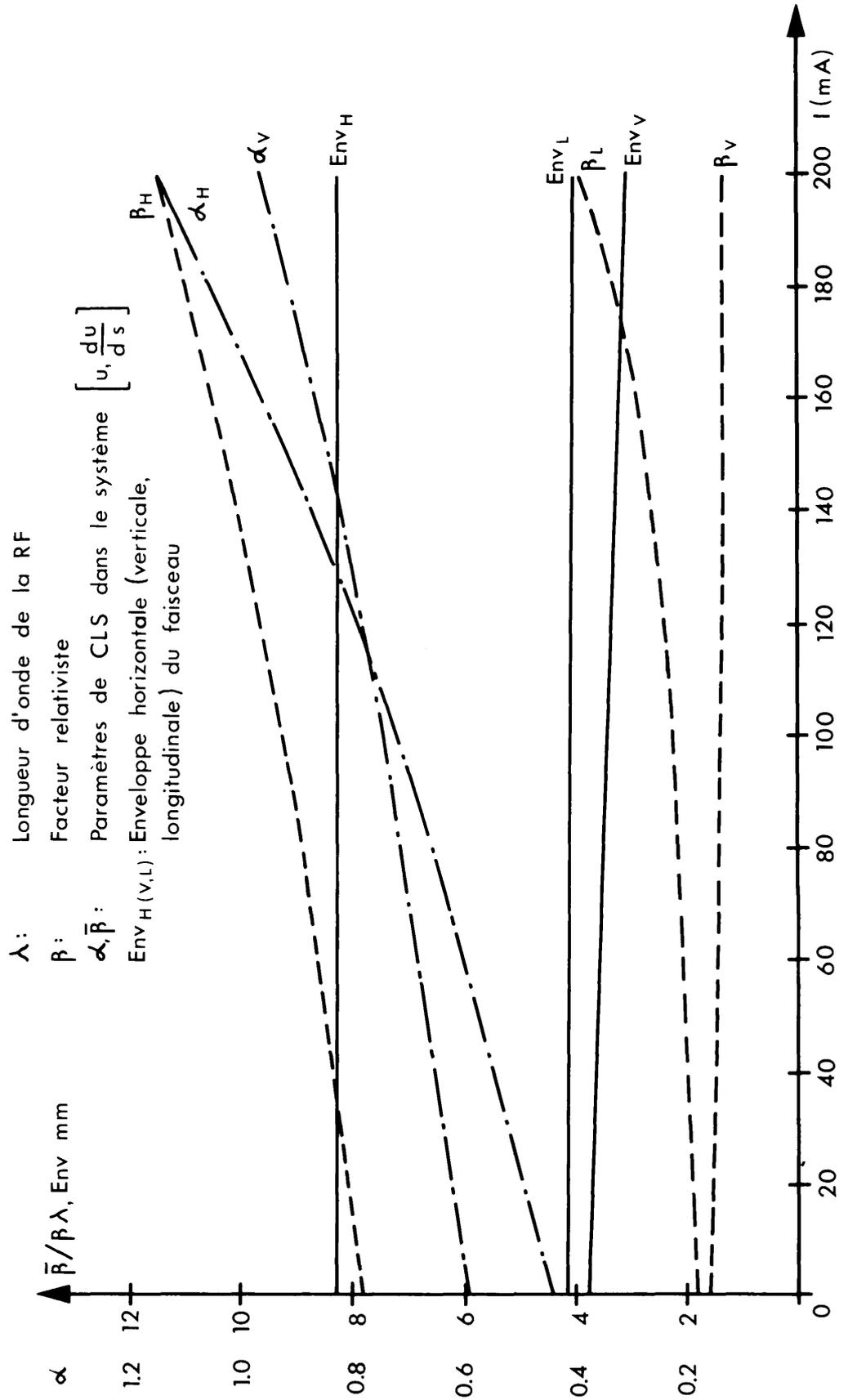


FIG. 20 : Gradients magnétiques des quadripôles pour différents courants I du faisceau  
(Energie d'injection : 1,375 MeV)

Les gradients sont donnés ici, dans le plan horizontal, en Tesla/m; dans le plan vertical ils changent simplement de signe.

No du quadripôle	Structure FD			Structure FFDD		
	I = 0	I = 100 mA	I = 200 mA	I = 0	I = 100 mA	I = 200 mA
1	-49,09	-51,33	-53,58	-29,95	-31,77	-33,67
2	44,99	47,06	49,15	27,33	28,96	30,66
3	-42,37	-44,38	-46,40	25,78	27,35	28,99
4	39,81	41,72	43,64	-24,26	-25,81	-27,43
5	-37,59	-39,45	-41,31	-22,95	-24,44	-25,99
6	35,66	37,41	39,17	21,80	23,19	24,63
7	-33,64	-35,34	-37,02	20,59	21,94	23,34
8	32,06	33,65	35,24	-19,64	-21,01	-22,41
9	-30,44	-31,99	-33,51	-18,66	-19,99	-21,36
10	29,22	30,67	32,12	17,92	19,18	20,47

FIG. 21

Enveloppes issues du transfert d'un faisceau adapté  
aux points A, B, C (B et C sont des minima)

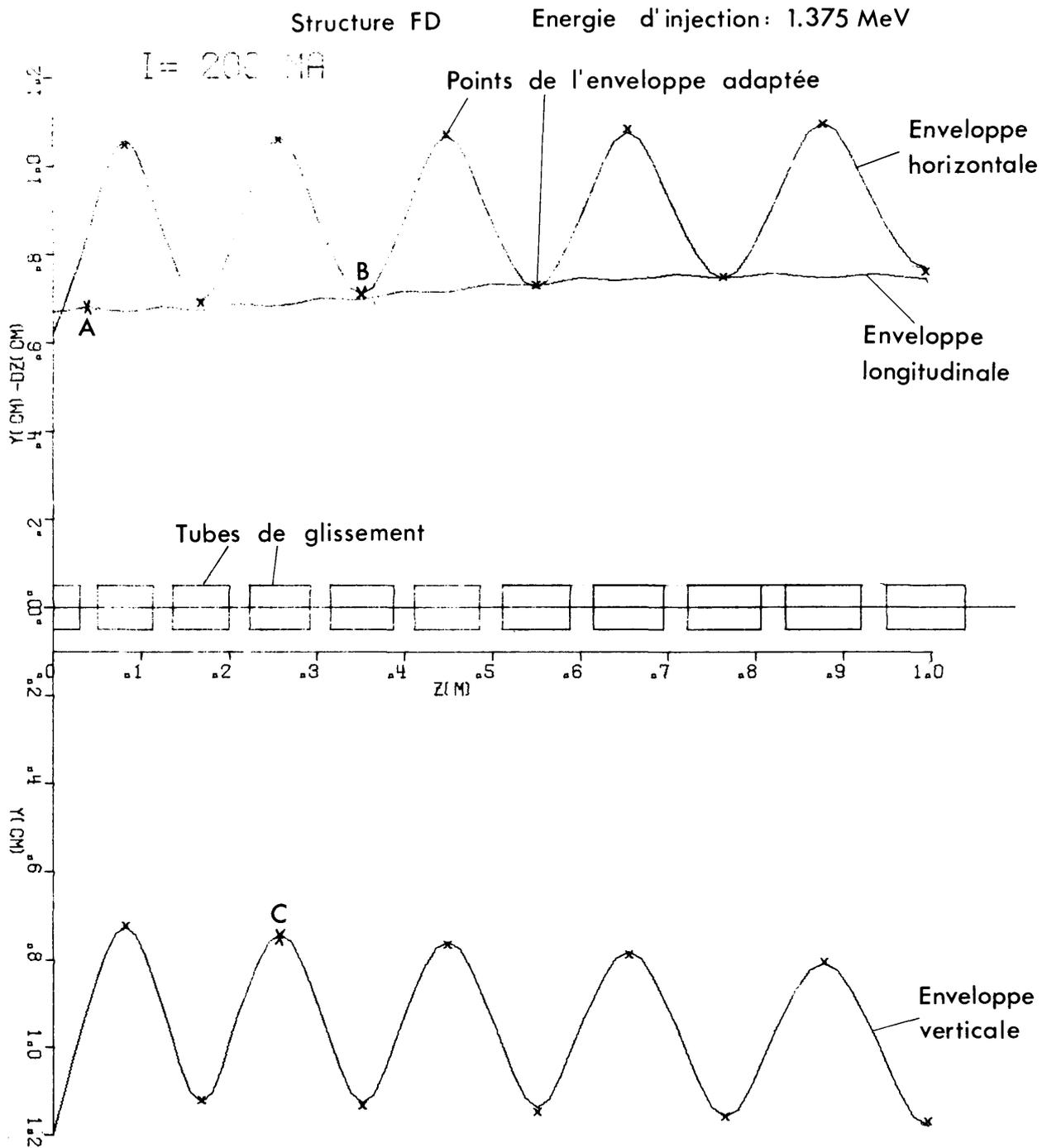


FIG. 22

Enveloppes issues du transfert d'un faisceau adapté  
aux points A, B, C (B et C sont des minima)

Structure FFDD

Energie d'injection: 1.375 MeV

$I = 200 \text{ MA}$

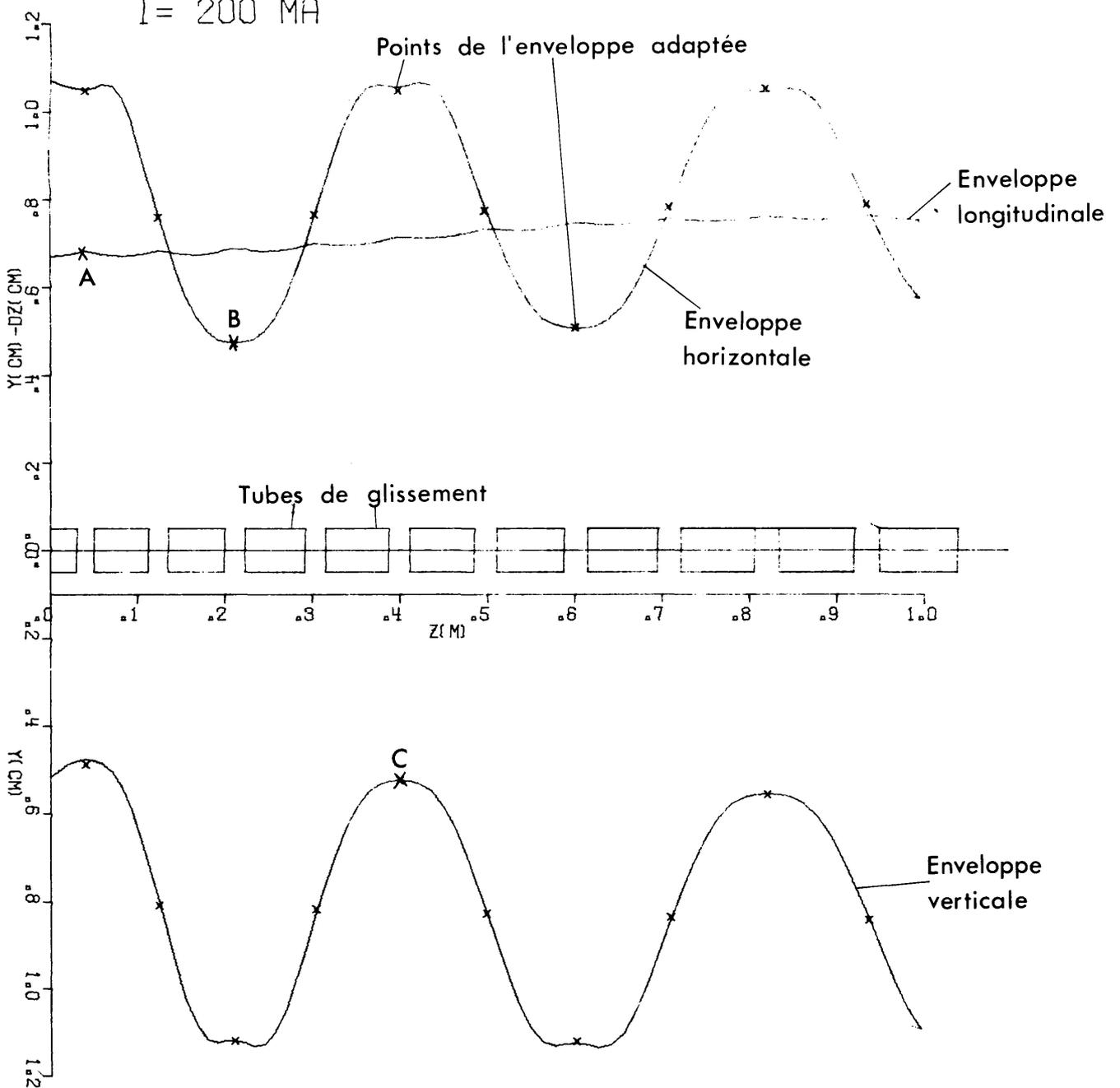


FIG. 23 : Paramètres du faisceau à l'entrée de la machine pour différents courants I  
(Energie d'injection : 1,375 MeV)

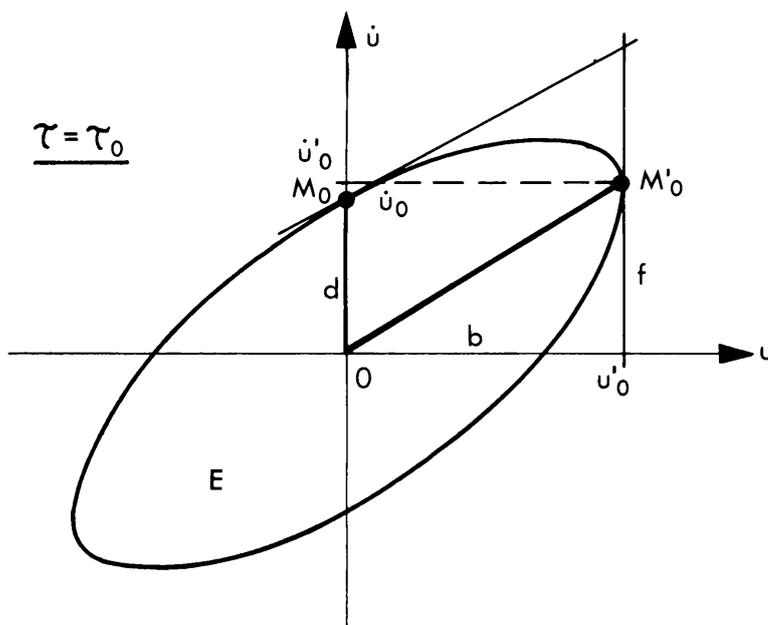
- $\beta$  facteur relativiste à l'entrée.  
 $\lambda$  longueur d'onde de la RF.  
 $A$  acceptance à l'entrée dans le système  $[u \text{ (du/ds)}]$  ( $u \equiv x, y \text{ ou } z$ ).  
 $\bar{\beta}$ ,  $\alpha$  paramètres de CLS à l'entrée dans ce même système.

	Structure FD			
	I = 0	I = 100 mA	I = 200 mA	
A • $\beta\lambda$ [mm <sup>2</sup> ]	Hor.	22,14	21,67	21,21
	Vert.	24,94	24,42	23,90
	Long.	19,23	17,89	16,40
$\alpha$	Hor.	-1,13	-1,16	-1,19
	Vert.	2,69	2,88	3,06
	Long.	0	0	0
$\bar{\beta}/\beta\lambda$	Hor.	1,90	1,86	1,82
	Vert.	5,68	5,83	5,97
	Long.	2,34	2,51	2,74
Env. [mm]	Hor.	6,48	6,35	6,22
	Vert.	11,90	11,93	11,94
	Long.	6,70	6,70	6,70

	Structure FFDD		
	I = 0	I = 100 mA	I = 200 mA
	15,11	14,20	13,28
	17,18	16,19	15,15
	19,23	17,60	15,70
	0,307	0,383	0,481
	0,375	0,423	0,475
	0	0	0
	7,53	8,03	8,62
	1,84	1,81	1,76
	2,34	2,55	2,86
	10,67	10,68	10,70
	5,62	5,41	5,16
	6,70	6,70	6,70

FIG.24: Transfert des ellipses d'émittance à l'aide de deux points conjugués



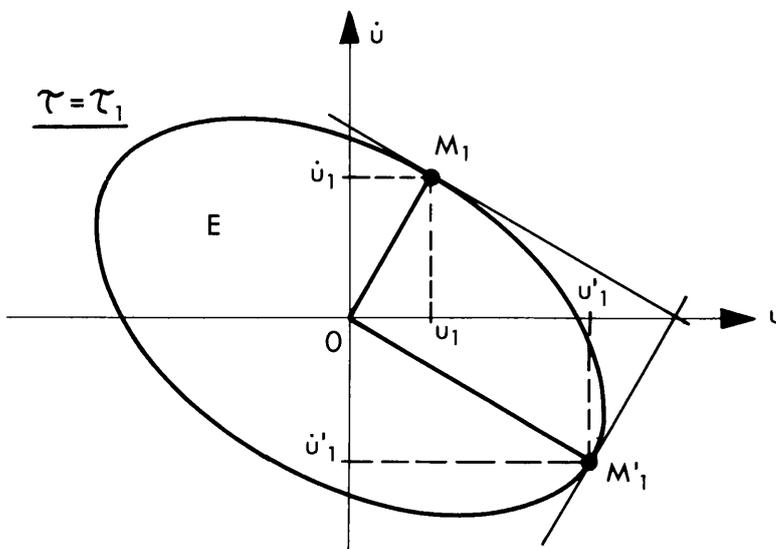
$\alpha_0, \beta_0$  : paramètres de CLS en  $\tau = \tau_0$

$\pi \cdot E$  : surface de l'ellipse

$M_0, M'_0$  : points conjugués sur l'ellipse

$$M_0 \begin{cases} u_0 = 0 \\ \dot{u}_0 = d = \sqrt{\frac{E}{\beta_0}} \end{cases}$$

$$M'_0 \begin{cases} u'_0 = b = \sqrt{E \cdot \beta_0} \\ \dot{u}'_0 = f = \alpha_0 \cdot \sqrt{\frac{E}{\beta_0}} \end{cases}$$



$M_1, M'_1$  : points conjugués sur l'ellipse

$$M_1 \begin{cases} u_1 \\ \dot{u}_1 \end{cases}$$

$$M'_1 \begin{cases} u'_1 \\ \dot{u}'_1 \end{cases}$$

FIG.25: "Noeuds" de la formule d'intégration de Gauss à N points dans l'intervalle  $[0, \infty[$  en fonction des "noeuds" dans l'intervalle  $[-1, 1]$

