

A C C E P T

PROGRAMME POUR LE CALCUL DE L'ACCEPTANCE DU LINAC

par

B. Bru^{*}

* Etudiant de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon, en stage de juin à septembre 1968.

TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION
2. RAPPELS THEORIQUES
 1. Calcul de la matrice des transfert d'une période de structure de focalisation.
 2. Calcul de l'acceptance.
 3. Calcul des matrices de transfert des différents éléments constituant le Linac.
3. DESCRIPTION D'ACCEPT
 1. Introduction.
 2. Données relatives à ACCEPT.
 3. Rappels concernant le linac.
 4. Calcul des différents types de matrices rencontrés dans une demi-cellule.
 5. Calcul du déphasage μ par unité de structure de focalisation.
 6. Variation du gradient avec l'énergie le long du linac.
 7. Calcul de la matrice de transfert d'une période de focalisation .
 8. Calcul du gradient correct des lentilles.
 9. Calcul de l'acceptance horizontale dans le 1er gap.
 10. Calcul de l'acceptance verticale dans le 1er gap.
4. ELARGISSEMENT D'ACCEPT
 1. Recherche de l'abscisse de l'extremum de la fonction $\beta(s)$.
 2. Calcul de l'exposant n correct de la loi du gradient en " β^n ".
5. RESULTATS
 1. Acceptance horizontale dans le 1er gap.
 2. Acceptance verticale dans le 1er gap.
6. INTERPRETATION DES RESULTATS
 1. Calculs des matrices de transfert des 3 périodes.
 2. Calcul des gradients magnétiques dans les 2 plans vertical et horizontal.
 3. Calcul des acceptance horizontale et verticale.
7. CONCLUSION
8. REMERCIEMENTS
9. REFERENCES

1. INTRODUCTION

Le programme ACCEPT qui fait l'objet du présent rapport a été initialement écrit par Messieurs M. Martini et M. Weiss.

La tâche qui nous a été confiée consiste d'abord en l'étude et en la mise en route pratique de ce programme. Ensuite plusieurs élargissements seront ajoutés au programme initial.

ACCEPT est destiné au calcul de l'acceptance d'un linac à protons. Les données dont on se sert correspondent à une machine expérimentale de 3 MeV actuellement en construction au CERN. Ces données ne diffèrent pas beaucoup de celles du linac de 50 MeV du CERN.

La méthode de calcul de l'acceptance transversale est basée sur l'obtention de la matrice de transfert d'une période de structure de focalisation.

ACCEPT, dans sa forme actuelle, calcule l'acceptance uniquement pour les particules synchrones.

2. RAPPELS THEORIQUES

1) CALCUL DE LA MATRICE DE TRANSFERT D'UNE PERIODE DE STRUCTURE DE FOCALISATION

Dans ce travail on se référera à la théorie classique des structures focalisantes périodiques. L'exposé de cette théorie utilisé par l'auteur se trouve dans [1].

Dans un linac nous devons choisir une variable indépendante telle que l'on puisse diviser la structure de focalisation en sections qui se répètent périodiquement.

Dans un linac la particule synchrone met le même temps pour parcourir chaque cellule : ce temps est égal à la période du champ RF.

En choisissant le temps comme variable indépendante, les matrices de transfert considérées seront définies dans un espace des phases $(r, \frac{dr}{dt})$ où r est une coordonnée spatiale.

On écrira :

$$\begin{pmatrix} r \\ \frac{dr}{dt} \end{pmatrix}_2 = M_T \begin{pmatrix} r \\ \frac{dr}{dt} \end{pmatrix}_1$$

où M_T représente la matrice de transfert considérée.

Ainsi pour une période de structure de focalisation nous définirons une matrice analogue à la matrice de Twiss [1] de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(t) \cdot \sin \mu & \beta(t) \cdot \sin \mu \\ -\gamma(t) \cdot \sin \mu & \cos \mu - \alpha(t) \cdot \sin \mu \end{pmatrix} \quad (\text{I } 1)$$

$\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ sont 3 fonctions périodiques du temps t , de période T_S (temps mis par la particule pour traverser une période de structure). La fonction $\mu(T_S)$ représente l'accroissement de la phase des oscillations bétatroniques sur une période T_S .

Pour trouver l'enveloppe du faisceau nous devons calculer la "fonction d'amplitude" $\beta(s)$.

Le faisceau de protons étant défini dans l'espace des phases $(r, \frac{dr}{dt})$ les calculs une fois terminés devront être ramenés à la variable indépendante s (longueur), ceci au moyen de :

$$\beta(s) = v(s) \cdot \beta(t) \quad (\text{I } 2)$$

où $v(s)$ est la vitesse de la particule au point où l'on calcule la fonction $\beta(s)$.

2) CALCUL DE L'ACCEPTANCE

a) Recherche des maximums de la fonction $\beta(s)$

Nous chercherons l'acceptance relative aux deux plans de focalisation des quadrupôles. Pour chacun de ces deux plans nous calculerons la matrice de transfert de la période située entre les deux premiers maximums de la fonction $\beta(s)$ - donc de la fonction $\beta(t)$ - définie au Paragraphe précédent.

Un maximum est toujours situé entre deux quadrupôles focalisants [1], et comme de plus une cellule est symétrique dans le temps par rapport au centre dynamique du gap, $\beta_{\max}(s)$ se trouvera en ce point.

Remarque 1

Dans la théorie générale [1] l'effet d'un gap sur la forme de la fonction $\beta(s)$ est négligé. En particulier là où la fonction $\beta(s)$ de la théorie est maximum on a en fait un minimum qui est entouré de deux maximums situés dans les tubes de glissement de part et d'autre du gap (Fig. 8,9,10). Nous analyserons l'importance de ce fait au Paragraphe 3.9.b.

Les matrices de transfert définies ci-dessus seront de la forme suivante dans l'espace des phase (r, \dot{r}) [1] :

$$\begin{pmatrix} \cos \mu & \beta_{\max}(t) \cdot \sin \mu \\ -\frac{1}{\beta_{\max}(t)} \cdot \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \quad (\text{I } 3)$$

b) Acceptance d'une machine dont l'ouverture des tubes de glissement reste constante

Elle est donnée par [1] :

$$A = \pi \frac{r_{\max}^2}{\beta_{\max}(s)} \quad (\text{I } 4)$$

où r_{\max} est l'ouverture des tubes de glissement.

En introduisant la fonction $\beta_{\max}(t)$ définie dans (I 3) on a :

$$A = \pi \frac{r_{\max}^2}{\beta_{\max}(t)} \cdot \frac{1}{v(s)} \quad (\text{I } 5)$$

où $v(s)$ est la vitesse de la particule à l'endroit où l'on calcule l'acceptance : soit en général à l'entrée de la période étudiée.

$\beta_{\max}(t)$ est lié aux oscillations bétatroniques et varie le long du linac proportionnellement à $\beta^{1/2}$ (approximation non relativiste ; $\beta = \frac{v(s)}{c}$).

D'après (I 5) l'acceptance A est inversement proportionnelle à $\beta_{\max}(t) \cdot v(s)$, donc à $\beta^{3/2}$.

L'émittance E d'un faisceau de particule varie de façon à laisser le produit $E \cdot \beta = \text{const.}$ (approximation non relativiste).

Par définition, le transfert de l'acceptance entre deux sections de la machine est fait d'après la loi de variation de l'émittance : $A\beta = \text{const.}$

c) Acceptance d'une machine dont l'ouverture des tubes de glissement augmente le long de l'axe

Afin d'éviter une diminution du rapport A/E le long du linac nous sommes amenés à choisir des tubes de glissement dont l'ouverture augmente progressivement.

Ainsi les particules entrant dans la machine le long de l'axe avec une certaine divergence trouveront un diaphragme à la sortie de la période (là où se trouve le deuxième maximum de $\beta(s)$), où l'ouverture des tubes de glissement est déjà augmentée.

Les particules extérieures du faisceau trouveront la limite d'ouverture à l'entrée de la période.

Dans chaque plan de focalisation l'acceptance sera exprimée ainsi :

$$A = \pi \cdot a \cdot \frac{b}{\beta_{\max}(s)} = \pi \cdot a \cdot \frac{b}{\beta_{\max}(t) \cdot v(s)} \quad , \quad (I 6)$$

ce qui équivaut à la moyenne géométrique des acceptances à l'entrée et à la sortie de la période, calculées, ces dernières, d'après (I 5),

où a est le rayon du diaphragme d'entrée de la période définie plus haut,

b est le rayon du diaphragme de sortie de cette même période,

$\beta_{\max}(t)$ et $v(s)$ correspondent à la sortie de la période.

Ces diaphragmes seront donc situés au centre dynamique des gaps relatifs à l'entrée et à la sortie de la période. Leur rayon sera donc compris entre ceux des tubes de glissement placés en amont et en aval du gap.

Nous prendrons le rayon de chacun de ces diaphragmes égal à la moyenne géométrique des rayons de ces tubes de glissement :

$$a = \sqrt{R_{i-1} \cdot R_i} \quad (I 7)$$

3) CALCUL DES MATRICES DE TRANSFERT DES DIFFERENTS ELEMENTS CONSTITUANT UNE PERIODE DE FOCALISATION

Pour une cellule nous aurons à considérer 3 types de matrices de transfert :

- Matrice d'un gap,
- Matrice d'un espace sans champ,
- Matrice d'une lentille quadrupolaire.

a) Matrice de transfert d'un gap

Considérons l'équation radiale de la dynamique :

$$m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = F_r (r, t) \quad (I 8)$$

où $F_r (r, t)$ est la force radiale qui s'exerce sur une particule traversant le gap.

On fera l'approximation de supposer qu'une force moyenne constante en temps ($\bar{F}(r)$) agit tout le long du gap.

La formule (I 8) pourra alors s'écrire :

$$m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = \bar{F} (r) \quad (I 9)$$

On intègre l'équation différentielle ci-dessus sur toute la longueur du gap.

$$m \cdot \Delta \dot{r} = \bar{F} (r) \cdot \Delta t \quad (I 10)$$

Δt apparaît donc comme le temps mis par la particule synchrone pour traverser le gap.

Le calcul de $\Delta \dot{r}$ donne [2] :

$$\Delta \dot{r} = - \frac{e \cdot \pi \cdot E_{av}}{m \cdot \bar{v}} \cdot T \cdot \sin \varphi_s \cdot r \quad (I 11)$$

où :

- e est la charge du proton,
- m sa masse,
- \bar{v} la vitesse moyenne de la particule dans le gap,
- T le coefficient temps de transit,
- E_{av} le champ sur l'axe moyenné sur la longueur d'une cellule,
- φ_s la phase synchrone. (Toujours négative)

$$\bar{F} (r) = m \cdot \frac{\Delta \dot{r}}{\Delta t} = - \frac{e \cdot \pi \cdot E_{av} \cdot T}{\bar{v} \cdot \Delta t} \cdot \sin \varphi_s \cdot r \quad (I 12)$$

où $\bar{v} \cdot \Delta t \approx L_g$ longueur du gap

de (I 9) et (I 12), on obtient :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = - \frac{e \cdot E_{av} \cdot \pi \cdot T \cdot \sin \varphi_s}{m \cdot L_g} \cdot r = + \chi^2 \cdot r \quad (I 13)$$

Le champ RF dans le gap défocalisera toujours la particule synchrone ($\varphi_s < 0$).

La matrice de transfert valable dans le gap est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \text{ch}(\chi \cdot \Delta t) & \chi \cdot \text{sh}(\chi \cdot \Delta t) \\ \frac{1}{\chi} \text{sh}(\chi \cdot \Delta t) & \text{ch}(\chi \cdot \Delta t) \end{pmatrix} \quad (I 14)$$

où Δt représente ici le temps mis par la particule pour traverser la portion de gap considérée.

b) Matrice de transfert d'un espace sans champ de longueur ℓ

Dans le système longueur (r, r') on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I 15)$$

dans le système (r, \dot{r}), on a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & \Delta t_\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I 16)$$

Δt_ℓ étant le temps mis par la particule pour traverser l'espace sans champ considéré.

$$\Delta t_\ell = \frac{\ell}{v_d} = \frac{\ell}{\beta_d \cdot c} \quad (I 17)$$

$v_d = \beta_d \cdot c$ est la vitesse (constante) de la particule dans l'espace considéré.

c) Matrice de transfert d'un quadrupôle

Le calcul de la matrice de transfert d'une lentille quadrupolaire est effectué dans [1].

On obtient pour un quadrupôle focalisant dans le plan horizontal (H) (défocalisant dans le plan vertical (V)) :

- Dans le système longueur (r,r'):

$$\begin{array}{cc}
 \text{Dans le plan H} & \text{Dans le plan V} \\
 \left(\begin{array}{cc} \cos \vartheta & \frac{1}{\sqrt{k_\ell}} \cdot \sin \vartheta \\ -\sqrt{k_\ell} \cdot \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} \text{ch } \vartheta & \frac{1}{\sqrt{k_\ell}} \cdot \text{sh } \vartheta \\ \sqrt{k_\ell} \cdot \text{sh } \vartheta & \text{ch } \vartheta \end{array} \right) \quad (\text{I } 18)
 \end{array}$$

$$\text{avec } \vartheta = \sqrt{k_\ell} \cdot L_q \quad \text{et} \quad k_\ell = \frac{e \cdot G}{m \cdot v_q} = \frac{e \cdot G}{m \cdot \beta_q \cdot c} \quad (\text{I } 19)$$

où : G est la valeur absolue du gradient magnétique (qui peut être différent pour les plans H et V des quadrupôles,
 L_q est la longueur du quadrupôle,
 $v_q = \beta_q \cdot c$ est la vitesse (constante) de la particule dans le quadrupôle considéré.

- Dans le système temps (r,r') :

$$\begin{array}{cc}
 \text{Dans le plan H} & \text{Dans le plan V} \\
 \left(\begin{array}{cc} \cos \vartheta & \frac{1}{v_q \cdot \sqrt{k_\ell}} \cdot \sin \vartheta \\ -v_q \cdot \sqrt{k_\ell} \cdot \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} \text{ch } \vartheta & \frac{1}{v_q \cdot \sqrt{k_\ell}} \cdot \text{sh } \vartheta \\ v_q \cdot \sqrt{k_\ell} \cdot \text{sh } \vartheta & \text{ch } \vartheta \end{array} \right) \quad (\text{I } 20)
 \end{array}$$

3. DESCRIPTION D'ACCEPT

1) INTRODUCTION

ACCEPT est un programme écrit en langage "FORTRAN IV" adapté aux calculatrices CDC de la série 6000 du CERN. En réalité ACCEPT est inclus comme sous-programme dans un programme appelé GENLIN [écrit par MM. Martini et Promé (Saclay)] qui lui fournit la plupart des paramètres nécessaires au calcul de l'acceptance.

2) DONNEES RELATIVES A ACCEPT

a) Définition des indices utilisés dans le programme

Chaque demi-cellule d'une période de structure de focalisation est affectée de l'indice I; pour une structure FDDF, I variera donc de 1 à 8.

De plus on a trouvé utile d'introduire deux autres indices (pour la période de structure comprise entre les centres dynamiques du premier et du cinquième gap) définis en FORTRAN par : (voir Fig. 1)

$$\begin{aligned} [I1 &= I/2 + 1] \\ [I2 &= (I + 1)/2 + 1] \end{aligned} \tag{II 1}$$

soit pour I variant de 1 à 8 :

[I1] prendra les valeurs : 1,2,2,3,3,4,4,5

[I2] prendra les valeurs : 2,2,3,3,4,4,5,5

Ces indices correspondent aux paramètres du linac calculés par GENLIN, ainsi :

- un gap et une cellule seront affectés de l'indice [I1]
- un tube de glissement, une lentille, un espace sans champ seront affectés de l'indice [I2].

b) Données issues de GENLIN

Pour le calcul du coefficient temps de transit (T)

<u>Données</u>	<u>dans le rapport</u>	<u>dans le programme</u>
T_0	T_0	[CELL (I1,3)]
$T_1 = k \cdot \frac{dT_0}{dk} ; (k = \frac{2\pi}{\beta\lambda})$	T_1	[CELL (I1,4)]
Energie cinétique au centre du tube de glissement	W_d	[CELL (I2,10)]
Energie cinétique au centre du gap	W_g	[CELL (I1,1)]
$m_0 \cdot c^2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^3$ au centre du gap	$(m_0 \cdot c^2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^3)_g$	[CELL (I1,12)]

Pour le calcul des éléments des différentes matrices de transfert

<u>Données</u>	<u>dans le rapport</u>	<u>dans le programme</u>
Longueur référée au milieu dynamique* d'une demi-cellule gauche	L_1	[CELL (I1,26)]
Longueur référée au milieu dynamique* d'une demi-cellule droite	L_2	[CELL (I2,27)]
Longueur d'un quadrupôle	L_q	[CELL (I2,30)]
Rayon d'ouverture d'un tube de glissement	R	[CELL (I2,29)]
Carré de ce rayon	R^2	[CELL (I2,38)]
Longueur d'un gap	L_g	[CELL (I1,31)]
β au centre d'un gap	β_g	[CELL (I1,37)]
β dans un tube de glissement	β_d	[CELL (I2,44)]

c) Données extérieures (sur cartes de données)

<u>Données</u>	<u>dans le rapport</u>	<u>dans le programme</u>
Longueur des 8 premiers tubes de glissement	L_d	[DTL (I2)]
Valeur approximative de \sqrt{k} au centre de la période [1,5,V]**	$(\sqrt{k})_0$	[RKO1]
Rapport entre les fréquences bétatroniques et synchrotroniques	q	[Q]
Coefficient relatif à la focalisation (FDDF ou FD)	st	[IST]
Exposant de la loi en " β^{-n} " pour \sqrt{k}	n	[RKLAW]

* Pour la définition du milieu dynamique voir page 12

** Cf. Remarque 2, page 19

3) RAPPELS CONCERNANT LE LINAC

Le linac que l'on traite ici possède une structure d'Alvarez et fonctionne avec le mode 2π .

Le linac est focalisé à l'aide de lentilles quadrupolaires placées dans chaque tube de glissement (le premier demi-tube ne comportant pas de lentille).

Les quadrupôles n'occupent pas toute la longueur du tube de glissement: il en résulte à chaque extrémité de ces tubes l'existence d'espaces égaux "sans champ" (cf. Fig. 2)

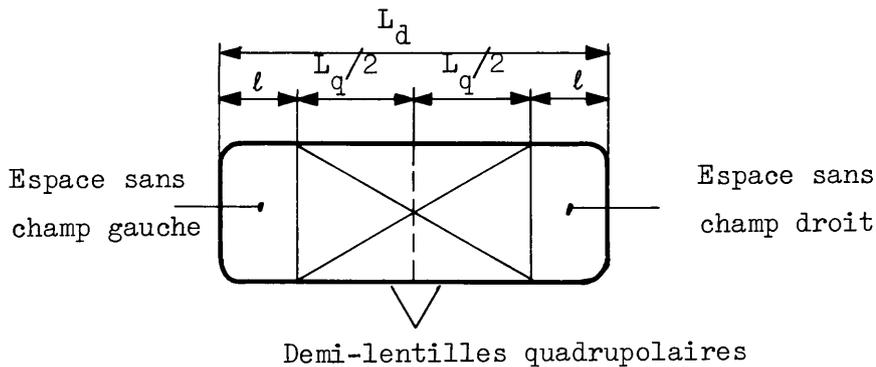


Fig. 2

Nous définirons une cellule comme étant l'intervalle situé entre les milieux de 2 tubes de glissement consécutifs (cf. Fig. 3).

Une cellule sera donc constituée de deux demi-lentilles quadrupolaires, de deux espaces sans champ (droite et gauche) et d'un gap complet.

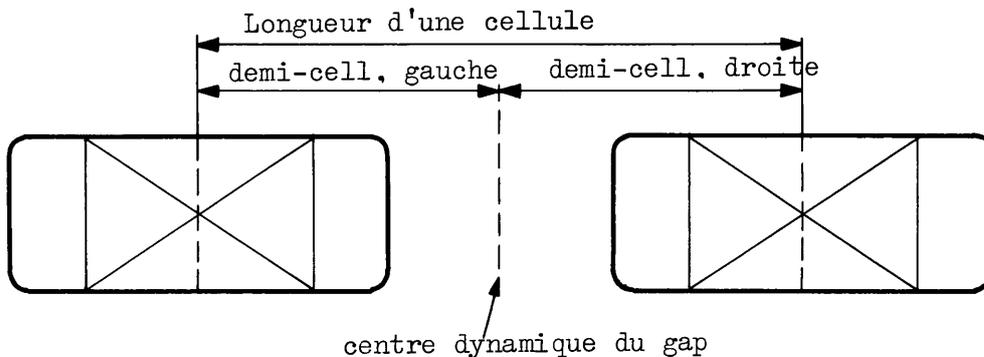


Fig. 3

Définissons aussi le milieu dynamique du gap :

c'est le point que la particule synchrone, issue du centre du tube de glissement, atteint au bout d'une demi période RF (cf. Fig. 3). On remarque que ce point est toujours situé à gauche du milieu géométrique du gap.

Nous pourrions ainsi partager une cellule en deux demi-cellules : une demi-cellule gauche, une demi-cellule droite.

- Une demi-cellule gauche sera constituée d'une demi-lentille, d'un espace sans champ et d'un demi-gap gauche.
- Une demi-cellule droite sera constituée d'un demi-gap droit d'un espace sans champ et d'une demi-lentille quadrupolaire.

La structure de focalisation utilisée dans le linac est une structure FDDF. La période de la structure sera égale à 4 périodes RF.

Une unité de structure comprendra donc au total 4 lentilles (dont 2 focalisantes et 2 défocalisantes), 4 gaps et 8 espaces sans champ.

4) CALCUL DES DIFFERENTS TYPES DE MATRICES RENCONTRES DANS UNE DEMI-CELLULE

La matrice de transfert d'une période est formée de 3 types de matrices différentes :

- matrice d'un demi-gap (référé au temps) : (G)
- matrice d'un espace sans champ : (D)
- matrice d'un demi-quadrupôle : (QL)

Nous effectuerons le calcul de ces matrices dans le système (r, \dot{r}) .

a) Matrice d'un demi-gap (cf. page 5, par. 3.a)

Nous effectuerons le calcul de la matrice d'un demi-gap gauche (par un calcul analogue on obtiendra celle d'un demi-gap droit).

Calculons le temps Δt_g (cf. I 14) mis par la particule pour effectuer la traversée du demi-gap considéré. On aura :

$$\Delta t_g = \frac{T_0}{2} - \Delta t_d \quad (\text{II } 2)$$

Si T_0 est la période du champ RF, $\frac{T_0}{2}$ est le temps mis par une particule pour parcourir une demi-cellule (cf. définition d'une demi-cellule page 12).

Δt_d est le temps de parcours du demi-tube de glissement relatif à la demi-cellule. La vitesse $\beta_d \cdot c$ dans le tube de glissement étant constante on a :

$$\Delta t_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{L_d}{\beta_d \cdot c} \quad (\text{II } 3)$$

d'où d'après (I 14) la matrice de transfert d'un demi-gap gauche :

$$(G) = \begin{pmatrix} \text{ch } \frac{\chi}{2} \cdot (T_0 - \frac{L_d}{\beta_d \cdot c}) & \chi \cdot \text{sh } \frac{\chi}{2} \cdot (T_0 - \frac{L_d}{\beta_d \cdot c}) \\ -\frac{1}{\chi} \cdot \text{sh } \frac{\chi}{2} \cdot (T_0 - \frac{L_d}{\beta_d \cdot c}) & \text{ch } \frac{\chi}{2} \cdot (T_0 - \frac{L_d}{\beta_d \cdot c}) \end{pmatrix} \quad (\text{II } 4)$$

b) Matrice d'un espace sans champ (cf. page 7 parag. 3b)

Les 2 espaces sans champ étant de même longueur ils auront la même matrice de transfert (cf. Fig. 2), soit d'après (I 16) et (I 17)

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{\beta_d \cdot c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $l = \frac{L_d - L_g}{2}$

d'où la matrice de transfert :

$$(D) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_d - L_g}{2\beta_d \cdot c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II } 5)$$

c) Matrice d'un demi-quadripôle (cf. page 7 parag. c)

Chaque lentille étant supposée constituée de 2 demi-lentilles de même longueur, les matrices de transfert relatives à ces 2 demi-lentilles seront identiques.

Pour le plan horizontal on a d'après (I 20) et (I 21) :

- Lentille focalisante dans ce plan :

$$(QL)_{\text{Foc}} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k_\ell} \cdot \frac{L_q}{2} & \frac{1}{\beta_d \cdot c \cdot \sqrt{k_\ell}} \cdot \sin \sqrt{k_\ell} \cdot \frac{L_q}{2} \\ -\beta_d \cdot c \cdot \sqrt{k_\ell} \sin \sqrt{k_\ell} \cdot \frac{L_q}{2} & \cos \sqrt{k_\ell} \cdot \frac{L_q}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{II } 6)$$

- Lentille défocalisante dans ce plan :

$$(QL)_{\text{Déf}} = \begin{pmatrix} \text{ch} \sqrt{k_\ell} \cdot \frac{L_q}{2} & \frac{1}{\beta_d \cdot c \cdot \sqrt{k_\ell}} \cdot \text{sh} \sqrt{k_\ell} \cdot \frac{L_q}{2} \\ \beta_d \cdot c \cdot \sqrt{k_\ell} \cdot \text{sh} \sqrt{k_\ell} \cdot \frac{L_q}{2} & \text{ch} \sqrt{k_\ell} \cdot \frac{L_q}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{II } 7)$$

Pour le calcul de $\sqrt{k_\ell}$ voir page 15 et 16, parag. 6).

5) CALCUL DU DEPHASAGE μ PAR UNITE DE STRUCTURE DE FOCALISATION

On se fixe au départ la fréquence (f_0) de l'onde accélératrice.

On se fixe le champ accélérateur moyenné sur la longueur d'une cellule (E_{av}) et on se donne la phase synchrone φ_s .

On en déduit la fréquence des oscillations synchrotroniques [3] :

$$\Omega_s^2 = \frac{2\pi \cdot e \cdot E_{av} \cdot T \cdot |\sin \varphi_s|}{m \cdot L} \quad (\text{II } 8)$$

e, m, T étant définis dans la formule (I 11) et L étant la longueur de la cellule considérée.

Le coefficient χ^2 intervenant dans le calcul de la force de défocalisation due au gap vaut (cf. I 12) :

$$\chi^2 = \frac{\pi \cdot e \cdot E_{av} \cdot T \cdot |\sin \varphi_s|}{m \cdot L_g}$$

donc
$$\Omega_s = \sqrt{\frac{2L_g}{L}} \cdot \chi \quad (\text{II } 9)$$

χ étant défini pour chaque gap considéré nous aurons pour une période de la structure (FDDF), 5 valeurs différentes de Ω_s , ceci dû au fait que l'on commence et termine la période au milieu du gap.

Soit q le rapport de la fréquence bétatronique avec la fréquence synchrotronique :

$$q = \frac{\Omega_b}{\Omega_s} \quad (\text{II } 10)$$

Le rapport q ainsi défini ne doit être ni entier ni demi-entier, ceci afin d'éviter les résonances liées à ces valeurs [4].

Dans notre étude nous maintenons q constant : $q = 0.75$

Pour une période de structure focalisante, nous prendrons comme fréquence synchrotronique la moyenne entre les 8 fréquences relatives à chaque demi-cellule de cette période * :

$$\bar{\Omega}_s = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 \Omega_s \quad (\text{II } 11)$$

Nous sommes donc en mesure de calculer le déphasage μ par période de focalisation :

$$\mu = q \cdot st \cdot \bar{\Omega}_s \cdot T_0 \quad (\text{II } 12)$$

où le coefficient $st = 2(4)$ pour une structure FD(FDDF) et où T_0 est la période RF du champ accélérateur.

6) VARIATION DU GRADIENT AVEC L'ENERGIE LE LONG DU LINAC

Le fait d'avoir pris le rapport q constant impose une certaine loi de variation du gradient magnétique (G) des lentilles avec l'énergie le long du linac.

Cette loi a été déterminée dans [5].

On a trouvé qu'elle était de la forme " β^n " où β est le rapport v/c et n l'exposant trouvé approximativement égal à $-3/2$.

D'après (I 19) et (I 20) on a dans le système (r, \dot{r}) :

$$k = v^2 k_\ell = \frac{e}{m} \cdot \beta_d \cdot c \cdot G \quad (\text{II } 13)$$

* Comme mentionné, seulement 5 Ω_s sont différents.

Calcul de la valeur de \sqrt{k} relative à chaque lentille

Nous nous donnerons une première valeur de \sqrt{k} en un point du linac $(\sqrt{k})_0$. Nous choisirons cette valeur au centre de la période définie à la page 19, soit au centre du 3^e gap.

A l'aide de la loi précédente on calculera la quantité \sqrt{k} relative à chaque lentille par :

$$\sqrt{k} = (\sqrt{k})_0 \left(\frac{\beta_d}{\beta_0} \right)^{-1/4} \quad (\text{II } 14)$$

où β_0 est le facteur relativiste au centre du 3^e gap et β_d le même facteur au milieu de la lentille.

La première valeur de $(\sqrt{k})_0$ sera calculée approximativement à l'aide des valeurs des gradients déjà existantes pour le Linac.

7) CALCUL DE LA MATRICE DE TRANSFERT D'UNE PERIODE DE FOCALISATION

Tous les calculs précédents sont destinés à nous fournir les matrices de transfert de tous les éléments constituant la période de focalisation.

Nous calculerons en premier lieu le produit des 3 matrices de transfert relatif à une demi-cellule (cf. Fig. 4)

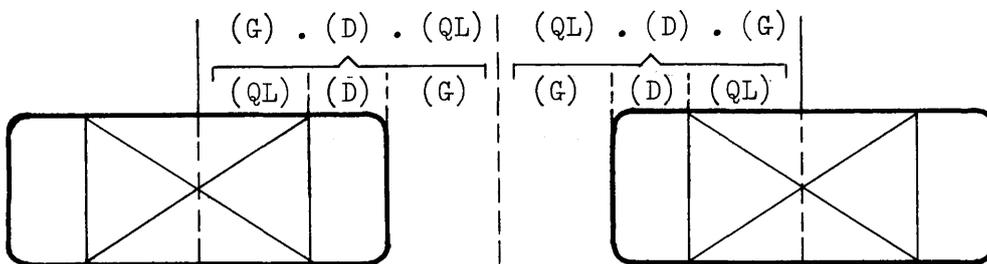


Fig. 4

Pour une demi-cellule gauche nous effectuerons un produit :

$$(M_G) = (G) \cdot (D) \cdot (QL)$$

Pour une demi-cellule droite nous effectuerons un produit :

$$(M_D) = (QL) \cdot (D) \cdot (G)$$

Nous devons ensuite effectuer le produit de gauche à droite des 8 matrices ainsi obtenues :

$$(M_T) = (M_{G8}) \cdot (M_{D7}) \cdot (M_{G6}) \cdot (M_{D5}) \cdot (M_{G4}) \cdot (M_{D3}) \cdot (M_{G2}) \cdot (M_{D1})$$

Tous ces produits sont effectués à l'aide du sous programme MATPRO.

Le sous programme MATPRO (cf. Fig. 5)

Ce sous programme effectue convenablement le produit des 24 matrices calculées dans la 1ère partie du programme.

Le sous programme MATPRO est appelé 8 fois par ACCEPT (pour I = 1 à 8).

A chacun de ces appels il effectue pour une demi-cellule le produit des 4 matrices suivantes :

- les 3 matrices des éléments de la demi-cellule (G), (D), (GL).
- la 4ème est la matrice de transfert égale au produit des matrices des demi-cellules précédentes (P_{I-1}).

MATPRO effectuera donc les produits suivants :

Pour la 1ère demi-cellule : [I = 1] : $(P_1) = (QL) \cdot (D) \cdot (G) \cdot (II)$

(II) est la matrice unité.

Pour la 2ème demi-cellule : [I = 2] : $(P_2) = (G) \cdot (D) \cdot (QL) \cdot (P_1)$

Pour la 3ème demi-cellule : [I = 3] : $(P_3) = (QL) \cdot (D) \cdot (G) \cdot (P_2)$

et ainsi de suite en effectuant un produit $(QL) \cdot (D) \cdot (G) \cdot (P_{I-1})$ pour une demi-cellule droite (I impair) et un produit $(G) \cdot (D) \cdot (QL) \cdot (P_{I-1})$ pour une demi-cellule gauche (I pair).

Nous devons spécifier à MATPRO l'ordre du produit des 3 matrices relatives à une demi-cellule caractérisée par un indice I pair. Ainsi pour une période débutant par une demi-cellule droite on écrira dans le programme :

[CALL MATPRO (G,D,QL,I,P)]

La matrice (P_8) relative à la 8ème demi-cellule est donc la matrice de transfert de la période de focalisation.

8) CALCUL DU GRADIENT MAGNETIQUE CORRECT DES LENTILLES (G)

On a donc obtenu la matrice de transfert d'une période dans le système de référence (r, \dot{r}) (cf. I 1).

Cette matrice est une matrice de Twiss dans laquelle la fonction $\beta(t)$ obtenue a les dimensions d'un temps.

D'autre part nous connaissons le déphasage μ pour une période de focalisation (cf. II 12). Or d'après la définition de la matrice de Twiss (I 1) $\cos \mu = \frac{1}{2} \cdot \text{tr} (P)$ où (P) est la matrice de transfert de la période étudiée.

Si donc la demi-trace de (P) n'est pas égale au $\cos \mu$ calculé c'est que la valeur $(\sqrt{k})_0$ choisie initialement n'était pas la bonne (cf. page 16).

Nous chercherons donc la valeur $(\sqrt{k})_0$ correcte par un calcul itératif rendant la fonction $f = \cos \mu - \frac{1}{2} \text{tr} (P)$ nulle. (Voir Appendice et Fig. 6 et 7).

Connaissant la bonne valeur $(\sqrt{k})_0$ on calcule le " \sqrt{k} " relatif à chaque lentille de la période à l'aide de (II 14); en utilisant (II 13) on en déduit le gradient magnétique de chaque lentille :

$$|G| = \frac{m}{e \cdot c \cdot \beta_d} \cdot (\sqrt{k})^2 = \frac{m}{e \cdot c} \cdot (k)_0 \cdot \sqrt{\beta_0} \cdot (\beta_d)^{-3/2} \quad (\text{II } 15)$$

où $(k)_0$ est la valeur correcte de k au centre de la période.

Ces gradients permettent donc le calcul correct de la matrice de transfert de la période considérée.

9) CALCUL DE L' ACCEPTANCE HORIZONTALE [plan de phase (y, y')]

a) Choix de la période de focalisation (cf. Fig. 8)

Dans le plan horizontal des quadrupôles ceux-ci sont :

- Focalisant dans le 2e tube de glissement (F)
 - Défocalisants dans les 3e et 4e tubes de glissement (DD)
 - Focalisants dans les 5e et 6e tubes de glissement (FF)
- et ainsi de suite conformément à la structure FDDF.

La fonction $\beta(s)$ sera maximum au centre dynamique du premier gap ainsi qu'à celui du cinquième gap.

Pour le calcul de l'acceptance horizontale nous chercherons donc le maximum de $\beta(s)$ en calculant la matrice de transfert de la période comprise entre les centre dynamiques du premier et du cinquième gap (cf. I 4).

Remarque 2

Nous noterons une période de structure FDDF ainsi : Période [E,S,P] où E et S sont les numéros des gaps situés respectivement à l'entrée et à la sortie de la période,

P est le plan de focalisation considéré : Horizontal (H) ou vertical (V).

Ainsi on notera la période étudiée ci-dessus : Période [1,5,H].

On calculera l'acceptance horizontale à l'entrée du linac par (I 6) en tenant compte que $\beta_{\max}(t)$ varie proportionnellement à $\beta^{1/2}$:

$$A = \pi \cdot a \cdot \frac{b}{\beta_{5\max}(t) \cdot v_5(s)} \cdot \frac{\beta_{g_5}}{\beta_{g_1}} = \pi \cdot a \cdot \frac{b}{\beta_{1\max}(t) \cdot v_1(s)} \left(\frac{\beta_{g_1}}{\beta_{g_5}} \right)^{1/2} \quad (\text{II } 16)$$

β_{g_1} , $\beta_{1\max}(t)$ et $v_1(s)$ étant relatifs au centre dynamique du 1er gap.

b) Calcul de y_{\max}

En tenant compte de la remarque 1 (page 4) le diaphragme arrêtant les particules extérieures du faisceau devrait être calculé là où la fonction $\beta(s)$ est maximum; c'est-à-dire indifféremment dans le premier ou le deuxième tube de glissement. On considère que ces "maximums relatifs" sont situés aux extrémités des quadrupôles (cf. Fig. 9).

Comme on ne connaît pas la valeur de $\beta(s)$ en ces points, nous chercherons la matrice de transfert qui fait passer du "minimum relatif" au deuxième "maximum relatif" : (M_{21}) (de 1 à 2 sur la Fig. 9).

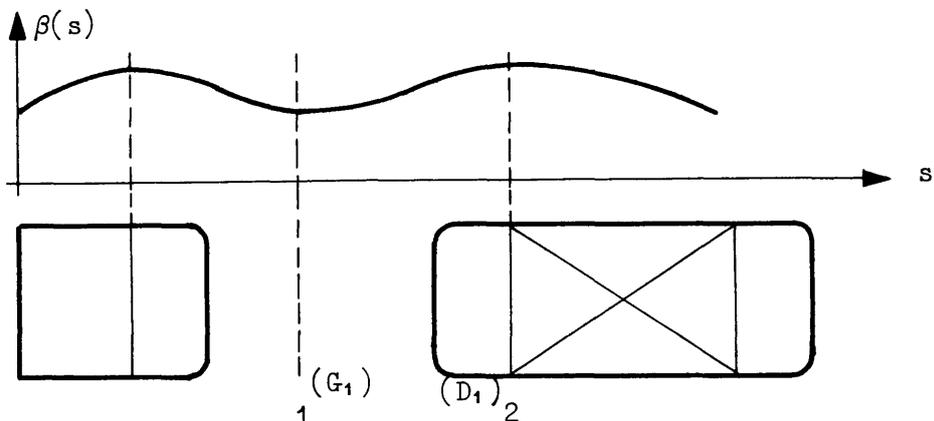


Fig. 9

On aura :

$$(M_{21}) = (D_1) \cdot (G_1) \quad (\text{II } 17)$$

où (D_1) et (G_1) sont respectivement les matrices de transfert du 1er espace sans champ et du 1er demi-gap de la période $[1,5,H]$

$$(M_D) = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad (M_G) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II } 18)$$

$$\text{d'où } (M_{21}) = \begin{pmatrix} g_{11} + d_{12} \cdot g_{21} & g_{12} + d_{12} \cdot g_{22} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II } 19)$$

Entre les plans 1 et 2 dans le système (y, \dot{y}) on a :

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}_2 = (M_{21}) \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}_1 \quad (\text{II } 20)$$

car la fonction $\beta(t)$ est extrémum en 1 et 2.

Soit une particule définie dans l'espace des phases en 2 par : $(R_2, 0)$.
Cherchons la valeur correspondante y_{\max} au centre du gap

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{y}_2 = 0 \\ y_2 &= R_2 \\ y_1 &= y_{\max} \end{aligned}$$

A l'aide de (II 19) et (II 20) on a :

$$\begin{pmatrix} R_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} + d_{12} \cdot g_{21} & g_{12} + d_{12} \cdot g_{22} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{\max} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } y_{\max} = \frac{R_2}{g_{11} + d_{12} \cdot g_{21}} = \eta \cdot R_2 \quad (\text{II } 21)$$

pour une valeur de 8,24 mm de R_2 , on trouve $y_{\max} = 8,13$ mm; soit une variation de 1,5% par rapport à R_2 .

c) Calcul de b

Les rayons des tubes de glissement situés de part et d'autre du cinquième gap étant différents (de 3% environ) nous tiendrons compte de (I 7) pour le.

calcul de b : $b = \sqrt{R_5 \cdot R_6}$

D'où l'acceptance horizontale au centre du premier gap (cf. II 16 ~~et~~ II 24)

$$A_{H_1} = \frac{\pi}{g_{11} + d_{12} \cdot g_{21}} \cdot \frac{R_2 \cdot \sqrt{R_5 \cdot R_6}}{\beta_{1 \max}(s)} \left(\frac{\beta_{g_1}}{\beta_{g_5}} \right)^{1/2} \quad (\text{II } 22)$$

$\beta_{1 \max}(s)$ relatif au centre du premier gap.

10) CALCUL DE L'ACCEPTANCE VERTICALE AU CENTRE DU PREMIER GAP [Plan de phase (z, z')]

a) Choix de la période de la structure de focalisation (cf. Fig. 10)

Dans le plan vertical les quadrupôles sont :

- défocalisants dans le 2ème tube de glissement (D)
- focalisants dans les 3ème et 4ème tubes de glissement (FF)
- défocalisants dans les 5ème et 6ème tubes de glissement (DD)

La fonction $\beta(s)$ étant maximum au centre du 3ème gap, nous calculerons d'abord l'acceptance en ce point.

Nous devons calculer la matrice de transfert de la période [3,7,V] cf. Remarque 2 page 19 (comprise entre les centres dynamiques des 3ème et 7ème gaps),

b) Calcul de la matrice de transfert de la période [3,7,V]

Afin de rester en concordance avec les indices des paramètres du linac donnés par le programme GENLIN, nous serons amenés à changer la définition des indices (I₁) et (I₂) à partir de I. (cf. Fig. 1).

En FORTRAN

$$[I_1 = I/2 + 1 + IDEP]$$

$$[I_2 = (I+1)/2 + 1 + IDEP]$$

IDEP étant égal à 0 pour la période [1,5,H]

" " " " 2 " " " [3,7,V]

La fréquence des oscillations synchrotroniques diminuant avec l'accélération, la valeur du déphasage par période de structure (μ) sera plus faible pour la période [3,7,V] que pour la période [1,5,H], ($q = \frac{\Omega_b}{\Omega_g} = \text{const}$) La valeur de $\cos \mu$ sera donc plus grande que précédemment.

Pour le calcul des gradients des lentilles nous calculerons la première valeur de $(\sqrt{k})_0$ au centre de la période [3,7,V] à l'aide de celle trouvée au centre de la période [1,5,H] et en utilisant la loi en " $\beta^{-1/4}$ ", cf. (II 14) :

$$(\sqrt{k})_{05} = (\sqrt{k})_{03} \cdot \left(\frac{\beta_{g5}}{\beta_{g3}} \right)^{-1/4} \quad (\text{II } 23)$$

β_{g5} et β_{g3} sont les facteurs relativistes au centre des 5ème et 3ème gaps.

Comme dans l'étude précédente nous calculerons le gradient correct des lentilles en effectuant un calcul itératif.

c) Calcul de l'acceptance verticale dans le troisième gap (A_{V3})

De (I 6) on a :

$$A_{V3} = \pi \cdot a_{\text{max}} \cdot \frac{b}{\beta_{7 \text{ max}}(s)} \cdot \frac{\beta_{g7}}{\beta_{g3}} \quad (\text{II } 24)$$

Nous calculerons a_{max} et b sans tenir compte de la remarque 1 page 4.

De (I 7) on a :

$$\begin{cases} a_{\text{max}} = \sqrt{R_3 \cdot R_4} \\ b = \sqrt{R_7 \cdot R_8} \end{cases} \quad (\text{II } 25)$$

Donc de (II 24) et (II 25), on a :

$$A_{V3} = \pi \cdot \frac{\sqrt{R_3 \cdot R_4 \cdot R_7 \cdot R_8}}{\beta_{7 \text{ max}}(s)} \cdot \frac{\beta_{g7}}{\beta_{g3}}$$

$\beta_{7 \text{ max}}(s)$ calculé au centre du septième gap.

d) Calcul de l'acceptance verticale dans le 1er gap (A_{V1})

Comme on l'a déjà mentionné dans le paragraphe I 2), la quantité $A \cdot \beta$ reste constante le long du linac.

On a donc :

$$A_{v_1} = A_{v_3} \cdot \frac{\beta_{g_3}}{\beta_{g_1}} \quad (\text{II } 26)$$

où β_{g_3} et β_{g_1} sont les facteurs relativistes aux centres respectifs des 3ème et 1er gaps (en considérant toujours $\gamma \approx 1$).

De (II 25) et (II 26) on a :

$$\begin{aligned} A_{v_1} &= \pi \cdot a_{\max} \cdot \frac{b}{\beta_{7\max}(s)} \cdot \frac{\beta_{g_7}}{\beta_{g_3}} \cdot \frac{\beta_{g_3}}{\beta_{g_1}} \\ &= \pi \frac{\sqrt{R_3 \cdot R_4 \cdot R_7 \cdot R_8}}{\beta_{1\max}(t) \cdot v_1(s)} \left(\frac{\beta_{g_1}}{\beta_{g_7}} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{II } 27)$$

e) Calcul de la matrice de transfert de la période [1,5,V]

Dans le plan vertical la fonction $\beta(s)$ sera minimum au centre dynamique du 1er gap (les minima sont situés entre 2 quadrupôles défocalisants).

Nous chercherons donc $\beta_{\min}(s)$ relatif à la période [1,5,V].

Le calcul relatif à cette période est identique à celui effectué pour la période [1,5,H]; nous devons changer uniquement le signe des quadrupôles donc au lieu d'une matrice (II 6) on aura une matrice (II 7) et vice-versa (cf. Fig. 10 et 11).

f) Calcul des demi-axes de l'ellipse décrivant l'acceptance verticale dans le 1er gap

Dans un plan principal (ou presque) le rapport des axes z et z' est égal à la valeur de $\beta(s)$ dans ce plan [1].

Dans le 1er gap :

$$\frac{z}{z'_{\max}} = \beta_{1 \min}(s) \quad (\text{II } 28)$$

L'acceptance est donnée par (I 5)

$$A_{v_1} = \pi \cdot z \cdot z'_{\max} \quad (\text{II } 29)$$

d'où les demi-axes de l'ellipse de (II 28) et (II 29) :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{A_{v_1} \cdot \beta_{1 \min}(s)}{\pi}} \\ z'_{\max} &= \sqrt{\frac{A_{v_1}}{\pi \cdot \beta_{1 \min}(s)}} \end{aligned} \quad (\text{II } 30)$$

4. ELARGISSEMENT D'ACCEPT

1) RECHERCHE DE L'ABSCISSE DE L'EXTREMUM DE LA FONCTION $\beta(s)$ cf. Fig. 13

La fonction $\beta(s)$ relative aux 3 périodes étudiées précédemment n'est pas extremum.

Les matrices de transfert de ces périodes ne sont donc pas situées exactement dans un plan de symétrie.

Donc la valeur de $\alpha(s)$ n'est pas nulle.

Afin de déterminer l'abscisse du plan de symétrie nous effectuerons une translation δT dans le temps pour chaque période étudiée.

Pour ceci nous modifierons les temps de parcours des 1er et 8ème demi-gaps

$$\left. \begin{aligned} \Delta t'_{g_1} &= \Delta t_{g_1} + \delta t \\ \Delta t'_{g_8} &= \Delta t_{g_8} - \delta t \end{aligned} \right\} \sum_1^8 \Delta t_{g_i} = \sum_1^8 \Delta t'_{g_i} = 4T_0 = \text{cte} \quad (\text{III } 1)$$

Nous recalculerons les éléments de matrices relatifs aux 1er et 8ème demi-gaps ainsi définis.

Nous obtiendrons une nouvelle matrice de transfert pour cette nouvelle période :

- La demi-trace de cette matrice doit être égale au $\cos \mu$ calculé précédemment.
- La valeur de la fonction $\alpha(s)$ aura donc varié.

Ainsi si la valeur absolue de $\alpha(s)$ augmente on s'éloignera de l'extremum cherché. Si $|\alpha(s)|$ diminue on s'en rapproche.

Nous effectuerons donc un calcul itératif destiné à trouver les valeurs de $\Delta t'_{g_1}$ et $\Delta t'_{g_8}$ qui rendent la fonction $\alpha(s)$ nulle.

Nous utiliserons la même méthode que celle utilisée pour la calcul du gradient magnétique des lentilles (cf. Appendice et Fig. 6 et 13).

Connaissant les valeurs exactes de $\Delta t'_{g_1}$ et $\Delta t'_{g_8}$ nous devons chercher quelle est la distance parcourue par la particule synchrone dans chacun des 1ers et 8èmes demi-gaps (l_{g_1} et l_{g_8}).

La vitesse dans un demi-gap n'étant pas constante nous utiliserons la vitesse moyenne entre les extrémités du demi-gap considéré.

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{g_1} = \frac{2}{(\beta_{g_1} + \beta_{d_2}) \cdot c} \cdot \Delta t'_{g_1} \\ l_{g_8} = \frac{2}{(\beta_{d_5} + \beta_{g_5}) \cdot c} \cdot \Delta t'_{g_8} \end{array} \right. \quad (\text{III } 2)$$

où β_{g_1} et β_{g_5} sont pris au centre des 1er et 5ème gaps,
et où β_{d_2} et β_{d_5} sont pris dans les 2ème et 5ème tubes de glissement.

Le programme ACCEPT effectue ces calculs pour chacune des 3 périodes calculées précédemment : [1,5,V] [3,7,V] et [1,5,H].

2) CALCUL DE L'EXPOSANT n CORRECT DE LA LOI DU GRADIENT EN " β^n "

Dans le plan vertical nous avons calculé les matrices de transfert des deux périodes [1,5,V] et [3,7,V]. Ces périodes ont en commun les 2 quadropôles relatifs aux 4ème et 5ème tubes de glissement.

Nous avons donc obtenu 2 valeurs pour les gradients magnétiques de chacun de ces 2 quadropôles (cf. Fig. 14). Or nous avons trouvé un certain écart dans ces valeurs. Ceci est dû au fait que la loi en " β^n " n'était qu'approchée.

Nous extrapolerons les 2 courbes trouvées ($\beta^n = \beta^{-3/2}$) par une courbe unique passant par les valeurs des 1er et 6ème gradients magnétiques. Nous supposerons que l'équation de cette courbe est de la forme " β^{n_1} ". Nous calculerons n_1 ainsi :

$$\text{on a } \frac{G_1}{G_6} = \left(\frac{\beta_2}{\beta_7} \right)^{n_1} \quad (\text{III } 3)$$

où G_1 et G_6 sont les gradients des 1er et 6ème quadropôles calculés avec la loi " $\beta^{-3/2}$ ".

β_2 et β_7 sont pris dans les 2ème et 7ème tubes de glissement.

De (III 3) on a :

$$n_1 = \frac{\text{Log } G_1 - \text{Log } G_6}{\text{Log } \beta_2 - \text{Log } \beta_7} \quad (\text{III } 4)$$

Nous réeffectuerons le calcul des 6 gradients en utilisant la loi en " β^{n_1} ". Nous obtiendrons par un nouveau calcul une loi en " β^{n_2} " à l'aide de (III 4).

Nous effectuerons un calcul itératif (cf. Fig. 15) jusqu'à ce que les gradients des 3ème et 4ème quadropôles soient identiques selon que l'on fait ce calcul à l'aide de la période [1,5,V] ou à l'aide de la période [3,7,V].

5. RESULTATS

Fréquence moyenne de l'oscillation bétatronique :

- pour les périodes [1,5,V] et [1,5,H] : $f_\beta = 11,75$ MHz
- pour la période [3,7,V] : $f_\beta = 11,10$ MHz

Loi de variation de \sqrt{k} relatif aux quadrupôles du linac : $\beta^{-0,208}$.

Loi de variation du gradient magnétique des quadrupôles le long du linac :
 $\beta^{-1,42}$.

1) ACCEPTANCE HORIZONTALE DANS LE 1er GAP

Gradients magnétiques des quadrupôles dans le plan horizontal :

No. du tube de glissement	β_d	Gradient (T/m)
2	0,0359	+ 58,010
3	0,0384	- 52,675
4	0,0410	- 48,065
5	0,0436	+ 44,055

Matrice de transfert de la période [1,5,H] modifiée dans le système (y,y') calculée dans le 1er gap :

$$\begin{pmatrix} 0,1119 & 0,3826 & \text{m/rad} \\ - 2,580 & \text{rad/m} & 0,1121 \end{pmatrix}$$

Coefficients de cette matrice de Twiss

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \mu = 0,1120 \quad \text{soit } \mu = 83,5^\circ \\ \alpha \approx 0 \\ \beta_{1 \max}(s) = 0,3850 \end{array} \right.$$

Position du minimum relatif dans le 1er gap :

distance de ce minimum au 2ème tube de glissement : 6,95 mm

Position du minimum relatif dans le 5ème gap :

distance du 5ème tube de glissement à ce minimum : 7,76 mm

Demi-axes de l'ellipse dans le système (y,y') dans le 1er gap :

$$\begin{array}{l} y_{\max} = 8,13 \text{ mm} \\ y' = 24,737 \text{ mrad.} \end{array}$$

Acceptance horizontale dans le 1er gap :

$$\begin{array}{l} A = 202,2 \cdot \pi \quad \text{m.mrad} \\ A \cdot \beta \cdot \gamma = 6,845 \cdot \pi \quad \text{m.mrad} \end{array}$$

2) ACCEPTANCE VERTICALE DANS LE 1er GAP

Gradient magnétique des quadrupôles dans le plan vertical (voir courbe Fig. 16) :

No. du tube de glissement	β_d	Gradient T/m pour [1,5,V]	Gradient T/m pour [3,7,V]
2	0,0359	- 56,34	
3	0,0384	+ 51,15	
4	0,0410	+ 46,67	+ 46,675
5	0,0436	- 42,765	- 43,77
6	0,0462		- 39,395
7	0,0488		+ 36,415

Matrice de transfert de la période [3,7,V] modifiée dans le système (z,z') calculée dans le plan de symétrie du 3ème gap :

$$\begin{pmatrix} 0,1868 & & 0,4206 & \text{m/rad} \\ - 2,294 & \text{rad/m} & 0,1885 & \end{pmatrix}$$

Coefficients de cette matrice de Twiss :

$$\begin{cases} \cos \mu = 0,1877 & \text{soit } \mu = 79,20^\circ \\ \alpha \approx 0 \\ \beta_{1\text{min}}(s) = 0,4282 \text{ mm/mrad} \end{cases}$$

Position du minimum dans le 1er gap :

distance de ce minimum au 2ème tube de glissement : 5,40 mm

Position du minimum dans le 5ème gap :

distance du 5ème tube de glissement à ce minimum : 9,71 mm

Acceptance verticale dans le 1er gap :

$$\begin{aligned} A &= 234,64 \text{ mm.mrad} \\ A \cdot \beta \cdot \gamma &= 7,982 \text{ mm.mrad} \end{aligned} \quad \gamma \approx 1$$

Demi-axes de l'ellipse dans le système (z,z') dans le 1er gap

$$\begin{aligned} z &= 3,877 \text{ mm} \\ z'_{\text{max}} &= 60,514 \text{ mrad} \end{aligned}$$

6. INTERPRETATION DES RESULTATS

1) CALCUL DES MATRICES DE TRANSFERT DES 3 PERIODES

a) Rappel théorique

La fonction $\alpha(s)$ de la matrice de Twiss [1] nous renseigne sur l'inclinaison de l'ellipse calculée dans le plan de phases (r, r') . Si $\alpha(s) \neq 0$ on ne se trouve donc pas dans un plan principal.

α est relié à la fonction $\beta(s)$ par : [1]

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d\beta(s)}{ds} = -\frac{1}{2} \cdot \beta'(s) \quad (\text{VI } 1)$$

$\alpha(s)$ varie donc comme la dérivée de $-\beta(s)$

$\alpha(s)$ sera donc < 0 si la pente de $\beta(s)$ est > 0

$\alpha(s)$ " " > 0 " " " " " " " " < 0

La signe de $\alpha(s)$ nous renseigne ainsi sur la position des extremums de $\beta(s)$

$\alpha(s) < 0 \rightarrow \beta'(s) > 0$: on se trouve soit à gauche d'un maximum
soit à droite d'un minimum de $\beta(s)$
cf. Fig. 12.

$\alpha(s) > 0 \rightarrow \beta'(s) < 0$: on se trouve soit à droite d'un maximum
soit à gauche d'un minimum de $\beta(s)$
cf. Fig. 12

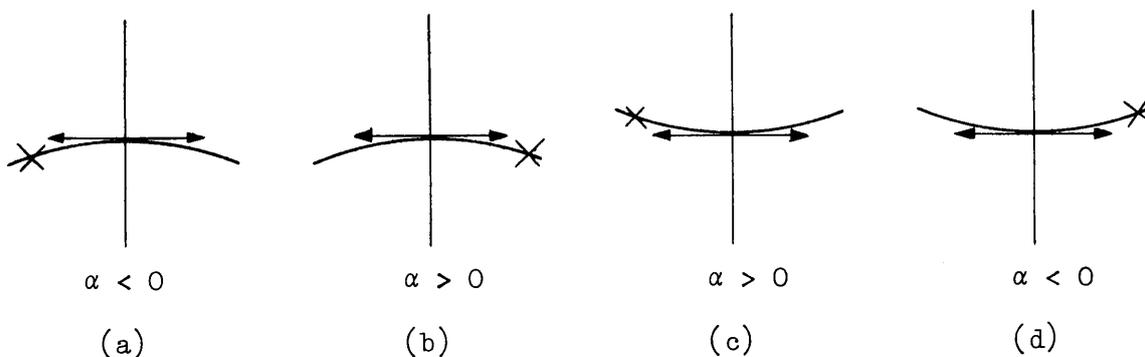


Fig. 12

b) Application aux 3 matrices de transfert précédemment calculées

- Pour la période [1,5,H]

Sans correction de la matrice de transfert on avait : $\alpha = - 0,066$

Avec correction de la matrice de transfert on trouve que l'extremum est situé à gauche du centre dynamique du gap. On se trouve donc dans le cas de la Fig. 12. d). On a donc un "minimum relatif" (cf. Fig. 17)

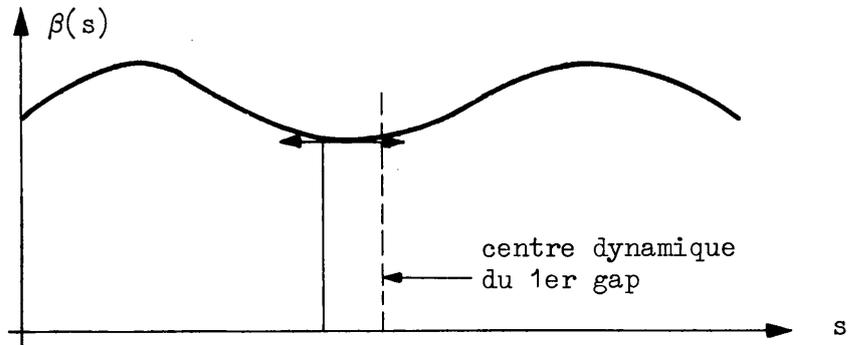


Fig. 17

- Pour la période [3,7,V]

Sans correction de la matrice de transfert on avait : $\alpha = - 0,14$

Avec correction de la matrice de transfert on trouve l'extremum à gauche du centre dynamique du gap. L'allure de la courbe sera identique à celle de la période [1,5,H] étudiée précédemment (cf. Fig. 17).

- Pour la période [1,5,V]

Sans correction de la matrice de transfert on avait : $\alpha = + 0,037$

Avec correction de la matrice de transfert on trouve l'extremum à droite du centre dynamique du gap. On se trouve dans le cas de la figure 12 c). On a donc un minimum cf. Fig. 18.

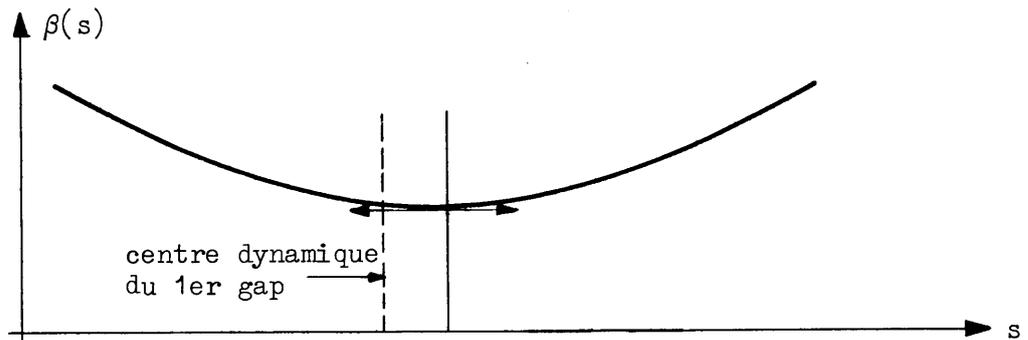


Fig. 18

2) CALCUL DES GRADIENTS MAGNETIQUES DANS LES PLANS VERTICAL ET HORIZONTAL

Cf. Fig. 16-

Dans le plan vertical les 6 gradients magnétiques calculés sont situés sur une courbe en " β^n " où $n = -1,42$ au lieu de $-1,5$ comme au début du programme.

Les gradients relatifs aux 4 premiers quadrupôles sont en valeur absolue différents selon qu'on les calcule dans le plan horizontal ou dans le plan vertical. On peut expliquer cette différence (d'environ 4%) par le fait que les besoins de focalisation ne sont pas identiques pour les deux plans considérés.

En pratique les gradients des lentilles sont pris égaux (au signe près) dans ces deux plans.

3) CALCUL DES ACCEPTANCES VERTICALE ET HORIZONTALE

Au voisinage des centres dynamiques des gaps où la fonction $\beta(s)$ est extremum et si l'on considère la variation des coefficients de la matrice de Twiss générale (cf. I 1), seul le coefficient $\alpha(s)$ varie appréciablement. Par contre la fonction $\beta(s)$ est très plate (on a observé une variation inférieure à 1%).

Comme l'acceptance (dans les deux plans transversaux) ne dépend que de la fonction $\beta(s)$ et de la géométrie du linac, celle-ci pourra être calculée d'une façon très précise (1%) en se plaçant quand même au centre dynamique du gap.

7. CONCLUSION

Le but de cette étude était d'établir un programme pour le calcul de l'acceptance d'un linac dans les deux plans de phase transversaux.

La structure focalisante envisagée était du type FDDF et nous ne considérons que des particules synchrones.

De plus la structure focalisante n'étant qu'approximativement symétrique le programme calculait la position des plans principaux ne correspondant pas au centre dynamique des gaps considérés.

Toujours par la même méthode on pourrait élargir le programme ACCEPT au calcul de l'acceptance relative à une particule effectuant des oscillations de phase au cours de l'accélération. Le même calcul pour une structure focalisante FD peut être effectué.

8. REMERCIEMENTS

A la fin de ce travail je veux d'abord remercier M. C.S. Taylor qui m'a accueilli au sein du groupe Linac, me permettant ainsi d'y effectuer un stage très instructif.

J'adresse toute ma gratitude envers MM. M. Martini et M. Weiss pour m'avoir prodigué des éclaircissements au sujet des diverses questions à traiter, ainsi que pour m'avoir guidé dans l'étude de ce programme.

Je remercie également Mlle C. Poinard qui m'a apporté son aide dans l'étude de la programmation sur les calculatrices du CERN.

9. REFERENCES

- [1] H. Brück : Accélérateurs circulaires de particules, 1966.
- [2] R.L. Gluckstern, L. Smith : Focusing in Linear Accelerators, Review of Scienti. Instr., vol 26, no. 2, Feb. 1955.
- [3] P. Lapostolle : Introduction à l'étude des accélérateurs linéaires, 1966.
- [4] H.G. Hereward, K. Johnsen : Alternating gradient focusing in Linacs, CERN Symposium 1956.
- [5] J. Huguenin, U. Tallgren, M. Weiss : Preliminary Study of a higher energy Pre-injector for the CERN PS. BNL Conference 1968.

Distribution (open)

METHODE D'ITERATION UTILISEE DANS LE PROGRAMME

Cf. Fig. 6, 7 et 13.

Cette méthode est dérivée de celle des tangentes de Newton.

Soit $f(x)$ une fonction que nous supposerons s'annuler pour la valeur X de x : $f(X) = 0$.

Soit x_0 une "première valeur" proche de X et f_0 la valeur de la fonction pour $x = x_0$ (d'où M_0 sur la courbe de la Fig. 6).

L'itération s'effectuera en 2 étapes :

- a) On donne à x_0 un accroissement δx ; soit f'_0 la nouvelle valeur de la fonction : $f'_0 = f(x_0 + \delta x)$ (d'où M'_0 sur la courbe)
- b) On trace la sécante passant par $M_0 M'_0$; elle coupe l'axe des x en un point dont on calcule l'abscisse x_1 géométriquement (cf. Fig. 6) :

$$x_1 = x_0 + \delta x + \Delta x \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{f'_0}{f'_0 - f_0} \delta x$$

Soit f_1 la valeur de la fonction pour $x = x_1$.

Nous réeffectuons le calcul itératif précédent en prenant comme "première valeur" x_1 au lieu de x_0 et ainsi de suite jusqu'à ce que $|f(x_1)|$ soit inférieur à ϵ (ϵ étant un infiniment petit > 0). La précision sur X étant d'autant plus grande que ϵ est plus petit.

L'avantage de cette méthode réside donc dans le fait qu'elle n'impose pas la connaissance explicite de la fonction $f(x)$. En effet dans notre cas nous aurons à étudier des fonctions $f(x)$ définies à partir de plusieurs produits de matrices.