ORGANISATION EUROPEENNE POUR LA RECHERCHE NUCLEAIRE

CERN/MPS/BR/Int. 75-14
Décembre 1975

EMITTANCE r.m.s. ET ADAPTATION DE FAISCEAUX

C. Metzger

Le concept d'émittance r.m.s. est défini à partir des méthodes statistiques de la mathématique et le but essentiel de cette note est de montrer l'utilité de ce concept dans les problèmes d'adaptation lors du transfert de faisceaux.

INTRODUCTION

Le concept, assez flou, d'émittance permet diverses interprétations semant ainsi une certaine confusion dans le dialogue entre théoriciens et expérimentateurs. Or, depuis quelques lustres, on travaille constamment à l'amélioration des performances des complexes d'accélérateurs et dans cette optique il est nécessaire d'éliminer les malentendus et les quiproquos.

Les problèmes où le concept d'émittance apparaît sont nombreux et, à première vue, une seule définition de l'émittance ne semble pas suffisante. Cependant, on voit apparaître dans les travaux publiés ces dernières années[1-3] une émittance dite r.m.s. qui répond aux besoins de plusieurs théories et applications. L'émittance r.m.s. a l'avantage d'être clairement définie par les moments du second ordre de la distribution des particules du faisceau dans l'espace des phases, d'être indépendante de la forme de la distribution, et d'être mesurable.

Le but de ce rapport est de montrer l'utilité de cette notion d'émittance dans les problèmes d'adaptation lors du transfert de faisceaux.

1. INVARIANT DE COURANT ET SNYDER ET EMITTANCE

Dans un système à focalisation périodique les particules décrivent des trajectoires invariantes dans le plan de phase :

$$\gamma y^2 + 2\alpha y y' + \beta y'^2 = W \,. \tag{1}$$

Du fait de la dispersion des fréquences bétatroniques, la densité s'uniformise rapidement sur chaque trajectoire et la distribution des particules dans l'espace de phase est alors caractérisée par des ellipses homothétiques d'équidensité. Le paramètre W, c'est-à-dire l'invariant de Courant et Snyder de l'une de ces ellipses, est appelé émittance ε. Cette dernière est définie en fonction du nombre de particules que son ellipse representative contient. Du point de vue expérimental elle se détermine à partir de la mesure du spectre des fréquences bétatroniques.

2. EMITTANCE r.m.s. ET DISTRIBUTION

Donc l'équation de l'émittance est

$$\gamma y^2 + 2\alpha y y' + \beta y'^2 = \varepsilon \,. \tag{2}$$

Mathématiquement parlant, il s'agit d'une forme quadratique non négative[4]

$$Q(\vec{y}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, y_i\, y_k = C^2 \tag{3}$$

dont les éléments de la matrice représentative des moments du second ordre d'une masse unité uniformément distribuée dans l'hyperellipsoïde compris dans la surface $Q = C^2$ (représentation géométrique de la forme quadratique) s'écrivent :

$$b_{ik} = \frac{1}{V} \int_{Q < C^2} \cdots \int y_i \, y_k \, dy_1 \ldots dy_n = \frac{C^2}{n+2} \frac{a_{ki}}{|A|} \tag{4}$$

où

n = nombre de dimensions de $\vec{y}$

V = volume de l'hyperellipsoïde

$|A|$ = déterminant de la matrice $|a_{ik}|$.

Les éléments de cette matrice coïncident avec les moments centrés du second ordre Λ_{ki} d'une masse unité distribuée dans l'hyperespace lorsque :

$$C^2 = n + 2$$

et

$$a_{ki} = \frac{\Lambda_{ki}}{|\Lambda|}$$

et l'hyperellipsoïde

$$q(\vec{y}, \vec{y}) = \sum_{i,k} \frac{\Lambda_{ki}}{|\Lambda|} y_i \, y_k = n + 2 \tag{5}$$

est appelé "ellipsoïde de concentration" de cette distribution[4)] et toutes distributions centrées dans cet espace à n dimensions et ayant les mêmes moments du second ordre ont le même ellipsoïde de concentration.

En appliquant cette algèbre à l'émittance (2), on a évidemment $n = 2$ et on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \gamma & -\alpha \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{y^2}\;\overline{y'^2} - \overline{yy'}^2} \begin{pmatrix} \overline{y'^2} & \overline{yy'} \\ \overline{yy'} & \overline{y^2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

ce qui nous permet de définir :

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{\overline{y^2}\;\overline{y'^2} - \overline{yy'}^2}$$

et l'Eq.(5) devient :

$$\frac{\overline{y'^2}}{\varepsilon_{rms}} y^2 - 2 \frac{\overline{yy'}}{\varepsilon_{rms}} yy' + \frac{\overline{y^2}}{\varepsilon_{rms}} y'^2 = 4 \, \varepsilon_{rms} \tag{7}$$

l'Eq. (7) représente l'ellipse de concentration pour toutes distributions centrées ayant les mêmes moments du second ordre et dans le cas d'un système à focalisation périodique, elle appartient à la famille d'ellipses homothétiques (1). Dès lors, on voit l'utilité de cette définition de l'émittance dans les problèmes d'adaptation de faisceaux.

3. EMITTANCE r.m.s. ET ADAPTATION DE FAISCEAUX

Lorsque les paramètres α_1, β_1, γ_1 sont définis par la maille et les forces de focalisation, l'émittance r.m.s. d'un faisceau après uniformisation de la densité sur les trajectoires de l'espace des phases sera selon les Eqs. (6) et (7) :

$$\varepsilon_{1rms} = \frac{1}{2}\left[\gamma_1\ \overline{y^2} + 2\alpha_1\ \overline{yy'} + \beta_1\ \overline{y'^2}\right] . \qquad (8)$$

En exprimant l'Eq. (8) au moyen des paramètres d'un faisceau incident qui peut être décentré par rapport à l'orbite fermée $\xi = \xi' = 0$ de la machine, on obtient :

$$\varepsilon_{1rms} = \frac{1}{2}\left[\gamma_1\overline{(\xi + \xi_0)^2} + 2\alpha_1\overline{(\xi + \xi_0)(\xi' + \xi_0')} + \beta_1\overline{(\xi' + \xi_0')^2}\right]$$

En écrivant les moments du second ordre en fonction de ε_{0rms} et en annulant les moments du premier ordre puisque la distribution est centrée en ξ, on obtient :

$$\varepsilon_{1rms} = \frac{1}{2}\left[\gamma_1(\varepsilon_{0rms}\ \beta_0 + \xi_0^2) + 2\alpha_1(-\ \varepsilon_{0rms}\ \alpha_0 + \xi_0\xi_0') \right.$$
$$\left. + \beta_1(\varepsilon_{0rms}\ \gamma_0 + \xi_0'^2)\right] .$$

En définissant le coefficient de dilution dû à la désadaptation par le rapport des émittances rms :

$$\frac{\varepsilon_{1rms}}{\varepsilon_{0rms}} = D + G - 1$$

avec

$$D = \frac{1}{2}\left[\gamma_1\ \beta_0 - 2\alpha_1\ \alpha_0 + \beta_1\ \gamma_0\right]$$

$$G = \frac{1}{2\varepsilon_{0rms}}\left[\gamma_1\ \xi_0^2 + 2\alpha_1\ \xi_0\xi_0' + \beta_1\xi_0'^2\right] + 1$$

on obtient une mesure r.m.s. de la dilution où D représente la désadaptation bétatronique tandis que G donne la désadaptation due aux erreurs de guidage.

4. DISCUSSIONS ET CONCLUSIONS

Dans la forme quadratique liée à un oscillateur harmonique, l'invariant est proportionnel à l'énergie cinétique et l'ellipse de concentration des trajectoires dans l'espace des phases se rapporte à l'énergie cinétique moyenne d'un ensemble d'oscillateurs. Il y a une certaine similitude entre les oscillations harmoniques et les oscillations bétatroniques des particules d'un faisceau; l'énergie moyenne d'oscillations bétatroniques n'est pas invariante mais elle peut s'exprimer en fonction de ε_{rms}. Du point de vue physique, adapter un faisceau incident revient à minimiser l'énergie d'oscillations bétatroniques, ce qui nous conduit à définir les paramètres α, β, γ tels que l'algèbre des formes quadratiques nous les définit dans les Eqs. (6) et (7) [8].

Le concept r.m.s. de l'émittance établi sur la base des méthodes statistiques de la mathématique est très général et il est très utile dans l'étude théorique du comportement global des faiceaux[1-3]. L'émittance r.m.s. est mesurable soit par des mesures de profils[5,6] soit en déterminant les caractéristiques de la distribution du faisceau à partir du spectre des fréquences bétatroniques[7]. Elle favorise donc le dialogue entre théorie et expérience, ce qui justifie son emploi de plus en plus fréquent.

Ne tenant pas compte de la forme de la distribution des particules dans l'espace des phases, l'utilité de l'émittance r.m.s. est moins évidente dans les problèmes d'acceptance où les particules marginales d'un faisceau jouent un rôle important. Cependant, comme l'ont montré B. Bru et M. Weiss[3], on peut définir une émittance marginale

$$\varepsilon = k^2 \, \varepsilon_{rms}$$

où le facteur k tient compte de la forme de la distribution.

Distribution : ouverte.

BC
BOC
Equipe 800 MeV

Bibliographie

1) P.M. Lapostolle, Quelques propriétés essentielles des effets de la charge d'espace dans les faisceaux continus, CERN-ISR/DI-70-36.

2) F. Sacherer, r.m.s. envelope equations with space charge, CERN/SI/Int. 70-12.

3) B. Bru et M. Weiss, Design of the low energy beam transport system for the new 50 MeV Linac, CERN/MPS/LIN-74-1.

4) H. Cramér, Mathematical methods of statistic (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1958).

5) C. Metzger, Mesures des émittances et du centrage des faisceaux dans la ligne de mesure "800 MeV" du PSB, CERN/SI/Int. DL/69-10.

6) J. Guyard et L. Marce, Paramètres significatifs d'un faisceau de protons à 500 keV issus de la mesure des moyennes quadratiques, CERN-MPS/LIN/75-1.

7) P.W. Krempl, TMIBS, Un programme pour le calcul de la densité projetée à partir des mesures effectuées avec les cibles, CERN-MPS/BR, Note 74-16.

8) C. Bovet, Communication personnelle (1970).